# Integrální počet

Petr Hasil

Přednáška z MB152

## Obsah

## Definice 1 (Primitivní funkce)

Nechť $f(x)$ a $F(x)$ jsou funkce definované na intervalu $I$. Funkce $F(x)$ je *primitivní* k funkci $f(x)$ na intervalu $I$, pokud

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{pro všechna } x \in I. \tag{1}$$

## Příklad 1

(a) $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ je primitivní k funkci $x^n$ na $\mathbb{R}$ pro $n \neq -1$.

(b) $\ln x$ je primitivní k funkci $\frac{1}{x}$ na $(0, \infty)$. Funkce $\ln(-x)$ je primitivní k funkci $\frac{1}{x}$ na $(-\infty, 0)$. Dohromady zapsáno: Funkce $\ln|x|$ je primitivní k funkci $\frac{1}{x}$ na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$.

(c) Funkce $\operatorname{arctg} x$ je primitivní k funkci $\frac{1}{1+x^2}$ na $\mathbb{R}$.

(d) Funkce $\arcsin x$ je primitivní k funkci $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ na $(-1, 1)$.

(e) Funkce $C$ (konstantní funkce) je primitivní k funkci 0 na $\mathbb{R}$.

**Věta 1 (O existenci primitivní funkce)**

*Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $I$, potom k ní existuje na tomto intervalu funkce primitivní.*

**Věta 2**

*Jsou-li funkce $F$ a $G$ primitivní funkce k funkci $f$ na intervalu $I$, pak existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že $G = F + c$.*

**Definice 2**

Množina primitivních funkcí k funkci $f$ se nazývá *neurčitý integrál funkce $f$* a značí se $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

## Příklad 2

Uvažujme funkci

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Pro $x \neq 0$ je $F'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \frac{-1}{x^2} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$,
pro $x = 0$ je
$F'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$,
tedy $F'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$
Pro funkci $f(x) := F'(x)$ je tedy $F(x)$ primitivní funkcí na celém $\mathbb{R}$.
Funkce $f(x)$ přitom není spojitá v $x = 0$, protože
$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} = \underbrace{\lim_{x \to 0} 2x \sin \frac{1}{x}}_{=0} - \underbrace{\lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}}_{\text{neexistuje}}$

neexistuje.
Tedy spojitost *není nutnou podmínkou* pro existenci primitivní funkce.

## Věta 3 (Základní integrální vzorce)

*Nechť* $A, B, a, c, k, n \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $n \neq -1$.

1. $\int k \, dx = kx + c,$
2. $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,$
3. $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c,$
4. $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c,$
5. $\int \mathrm{e}^x \, dx = \mathrm{e}^x + c,$
6. $\int \sin x \, dx = -\cos x + c,$
7. $\int \cos x \, dx = \sin x + c,$
8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + c,$
9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{cotg} x + c,$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{A} + c,$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm B}} \, dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm B}| + c,$
12. $\int \frac{1}{A^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{A} \operatorname{arctg} \frac{x}{A} + c,$
13. $\int \frac{1}{A^2 - x^2} \, dx = \frac{1}{2A} \ln \left| \frac{A+x}{A-x} \right| + c,$

*kde* $x$ *náleží vždy do definičního oboru příslušné funkce.*

## Příklad 3

Protože mají funkce $F(x) = \operatorname{arctg} x$ a $G(x) = -\operatorname{arccotg} x$ stejnou derivaci $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, musí se tyto funkce lišit o konstantu, tj.

$$\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arccotg} x + C \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Konstantu $C$ můžeme určit např. z hodnot těchto funkcí v bodě $x = 0$,

$$\operatorname{arctg} 0 = 0, \qquad \operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}, \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{\pi}{2},$$

neboli platí

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Také vidíme, že funkce $\operatorname{arctg} x$ a $-\operatorname{arccotg} x$ jsou obě primitivními funkcemi k funkci $\frac{1}{1+x^2}$. Z toho je patrné, že výsledky výpočtů mohou být zcela správné, přestože se na první pohled mohou lišit.

### Věta 4

- $\int [f(x) + g(x)] \, \mathrm{d}x = \int f(x) \, \mathrm{d}x + \int g(x) \, \mathrm{d}x$,
- $\int [c \cdot f(x)] \, \mathrm{d}x = c \cdot \int f(x) \, \mathrm{d}x$, $c \in \mathbb{R}$.

### Poznámka 1

*Neexistují obecné vzorce pro integrál ze součinu dvou funkcí a jejich podílu.*

## Věta 5 (Metoda per partes)

*Nechť funkce $u, v$ mají derivaci na intervalu $I$. Jestliže existuje primitivní funkce k funkci $(uv')$, pak existuje i primitivní funkce k funkci $(u'v)$ a platí*

$$\int uv' \, \mathrm{d}x = uv - \int u'v \, \mathrm{d}x.$$

## Důkaz.

$(uv)' = u'v + uv'$ na intervalu $I$. Je-li $F$ primitivní funkce k $uv'$, tj. $F' = uv'$, pak pro funkci $G = uv - F$ platí

$$G' = (uv - F)' = u'v + uv' - F' = u'v + uv' - uv' = u'v,$$

tedy funkce $G$ je primitivní funkcí k funkci $u'v$, přičemž $F = uv - G$ je vztah z věty. □

## Poznámka 2

*Jako funkci u, tedy tu, kterou při použití věty derivujeme, volíme zpravidla funkci, která se při derivování „více zlepší".*

$$\int P(x)f(x)\mathrm{d}x,$$

*kde $P(x)$ je polynom, řešíme pomocí metody per partes takto:*

*Je-li $f(x)$ jedna z funkcí $a^{kx}, \sin(kx), \cos(kx)$, pak volíme $u = P(x)$.*

*Je-li $f(x)$ jedna z funkcí $\log_a^n(kx), \arcsin(kx), \arccos(kx), \mathrm{arctg}(kx)$, $\mathrm{arccotg}(kx)$, pak volíme $u = f(x)$.*

*Metodu per partes lze použít opakovaně.*

## Příklad 4

$$\int x \sin x \mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{matrix} \right|$$
$$= x \cdot (-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) \mathrm{d}x = -x \cos x + \int \cos x \mathrm{d}x$$
$$= -x \cos x + \sin x + c.$$

## Poznámka 3

*Zkoušku provedeme zderivováním výsledku.*

## Příklad 5

$$\int 3x^2 \ln^2 x \mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = \ln^2 x & u' = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} \\ v' = 3x^2 & v = x^3 \end{matrix} \right|$$

$$= x^3 \ln^2 x - \int 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x^3 \mathrm{d}x$$

$$= x^3 \cdot \ln^2 x - 2 \int x^2 \ln x \mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x^2 & v = \frac{x^3}{3} \end{matrix} \right|$$

$$= x^3 \cdot \ln^2 x - 2 \left[ \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \mathrm{d}x \right]$$

$$= x^3 \cdot \ln^2 x - 2 \frac{x^3}{3} \ln x + \frac{2}{3} \int x^2 \mathrm{d}x$$

$$= x^3 \cdot \ln^2 x - \frac{2}{3} x^3 \ln x + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + c$$

$$= x^3 \cdot \ln^2 x - \frac{2}{3} x^3 \ln x + \frac{2}{9} x^3 + c.$$

## Příklad 6

$$\begin{aligned}\int x^2 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x &= \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \mathrm{e}^x & v = \mathrm{e}^x \end{array} \right| = x^2 \mathrm{e}^x - 2 \int x \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \mathrm{e}^x & v = \mathrm{e}^x \end{array} \right| = x^2 \mathrm{e}^x - 2 \left( x \mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \right) \\ &= x^2 \mathrm{e}^x - 2x \mathrm{e}^x + 2 \mathrm{e}^x + c = \mathrm{e}^x (x^2 - 2x + 2) + c\end{aligned}$$

### Příklad 7

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{cc} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int 1 \, \mathrm{d}x$$
$$= x \ln x - x + c$$

### Poznámka 4

*Metodu per partes je možné použít i na součin trigonometrické funkce s funkcí exponenciální. V tomto případě se metoda provede dvakrát se stejnou volbou* $u, v$ *a hledaný integrál se vyjádří přímo z obdržené rovnosti.*

## Příklad 8

$$
\begin{aligned}
\int e^x \sin x \, dx &= \left| \begin{matrix} u = \sin x & u' = \cos x \\ v' = e^x & v = e^x \end{matrix} \right| = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \\
&= \left| \begin{matrix} u = \cos x & u' = -\sin x \\ v' = e^x & v = e^x \end{matrix} \right| = e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x(-\sin x) \, dx \\
&= e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x \, dx
\end{aligned}
$$

Tedy pro $I := \int e^x \sin x \, dx$ máme $I = e^x(\sin x - \cos x) - I$. Odtud $2I = e^x(\sin x - \cos x)$, tj.

$$
\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c.
$$

Volba $u, v$ je zde libovolná, pouze se musí zopakovat stejně.

## Věta 6 (Substituční metoda)

*Nechť $I, J \subseteq \mathbb{R}$ jsou intervaly, $\varphi : I \to J$, $f : J \to \mathbb{R}$ a $\varphi$ má na $I$ derivaci. Je-li funkce $F$ primitivní k funkci $f$ na $J$ (tj. $F'(x) = f(x)$ na $J$), pak funkce $F(\varphi(x))$ je primitivní na $I$ k funkci $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$.*

*Naopak má-li funkce $\varphi$ na $I$ derivaci různou od nuly a $G$ je primitivní funkce na $I$ k funkci $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ (tj. $G'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$), pak funkce $G(\varphi^{-1}(x))$ je primitivní k funkci $f$ na intervalu $J$.*

*Platí tedy vzorce:*

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \varphi(x) \\ \mathrm{d}t = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int f(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ \mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

## Důkaz.

Věta vyplývá ze vzorce pro derivaci složené funkce.

Např. v první části je $F$ primitivní funkce k $f$, tj.

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow [F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Tedy

$$\underbrace{\int [F(\varphi(x))]' \, \mathrm{d}x}_{=F\left(\varphi(x)\right)} = \int f\left(\varphi(x)\right) \cdot \varphi'(x) \, \mathrm{d}x.$$

□

## Důsledek

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, \mathrm{d}x = \ln \left| f(x) \right| + C$$

## Příklad 9

$$\int x\,\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} x^2 = t \\ 2x\ \mathrm{d}x = \ \mathrm{d}t \\ x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ \mathrm{d}t \end{array}\right| = \int \mathrm{e}^t\,\tfrac{1}{2}\ \mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\int \mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^t + c = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x^2} + c$$

## Příklad 10

$$\int \tfrac{x}{1+x^4}\ \mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} x^2 = t \\ 2x\ \mathrm{d}x = \ \mathrm{d}t \\ x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ \mathrm{d}t \end{array}\right| = \tfrac{1}{2}\int \tfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg} t + c = \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + c$$

## Příklad 11

Určete primitivní funkci k funkci $\sqrt{a^2-x^2}$ pro $x \in [-a,a]$.

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = a\sin t \\ \mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= a^2\int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = a^2\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2}\int 1\,\mathrm{d}t + \frac{a^2}{2}\int \cos 2t\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}\frac{\sin 2t}{2} + c$$

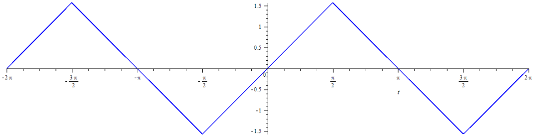
$$= \frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t) + c = \frac{a^2}{2}\left(t \pm \sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\right) + c$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right) + c$$

## Poznámka 5

*Víme, že platí*

$$\arcsin(\sin t) = \begin{cases} t, & t \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}, \\ -t, & t \in \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$




*Tedy pro* $\frac{x}{a} = \sin t$ *máme* $\arcsin \frac{x}{a} = \pm t$*, tj.* $t = \pm \arcsin \frac{x}{a}$*, přičemž znaménko se shoduje se znaménkem funkce kosinus. Celkově jsme proto mohli ve výpočtu postupovat jako pro* $t \in [-\pi/2, \pi/2]$*, protože minusy se vždy sejdou dva a všechny konstanty lze shrnout na závěr do* $c$*.*
*(Ve skutečnosti je samozřejmě* $t \in \mathbb{R}$*.)*

## Poznámka 6

*Někdy nelze daný integrál spočítat (tj. vyjádřit pomocí elementárních funkcí), např.*

$$\int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x,\quad \int \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x,\quad \int \frac{x}{\ln x}\,\mathrm{d}x,$$
$$\int \sin(x^2)\,\mathrm{d}x,\quad \int \cos(x^2)\,\mathrm{d}x,\quad \int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x,\quad \int \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

*Z věty o existenci primitivní funkce (Věta 1) ale víme, že k uvedeným funkcím existuje primitivní funkce, protože tyto funkce jsou spojité. Tyto primitivní funkce se pak nazývají vyšší funkce (jsou nevyjádřitelné pomocí elementárních funkcí).*

*Pozn.: Pozor ale na*

$$\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln^2 x + C \qquad \textit{(není to vyšší funkce).}$$

## Definice 3

Nechť $P, Q$ jsou polynomy takové, že $Q$ je nenulový (tj. $Q(x) \not\equiv 0$) a $P, Q$ nemají společné kořeny, pak funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ se nazývá *racionální lomená funkce*. Je-li navíc st $P <$ st $Q$ nazývá se *ryze racionálně lomená funkce*.

## Věta 7

*Každou neryze lomenou funkci je možné (pomocí dělení polynomů) vyjádřit jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce.*

## Věta 8

*Nechť* $P, Q$ *jsou polynomy s reálnými koeficienty* ($P, Q \in \mathbb{R}[x]$), $\operatorname{st} P = n, \operatorname{st} Q = m$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *je* $k$*-násobný kořen polynomu* $Q$, *tj.* $Q(x) = (x-\alpha)^k Q_1(x)$, *kde* $Q_1(\alpha) \neq 0$. *Pak existují čísla* $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{R}$ *taková, že*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)^k} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_k}{(x-\alpha)} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \tag{2}$$

*kde* $P_1$ *je jistý polynom stupně* $n-k$. *Zejména má-li* $Q$ *pouze reálné kořeny* $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ *násobnosti* $k_1, \dots, k_m$, *pak existují čísla* $A_1^1, \dots, A_{k_1}^1, \dots, A_1^m, \dots, A_{k_m}^m \in \mathbb{R}$ *taková, že*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^1}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \cdots + \frac{A_{k_1}^1}{(x-\alpha_1)} + \frac{A_1^2}{(x-\alpha_2)^{k_2}} + \cdots + \frac{A_{k_2}^2}{(x-\alpha_2)} + \cdots + \frac{A_1^m}{(x-\alpha_m)^{k_m}} + \cdots + \frac{A_{k_m}^m}{(x-\alpha_m)}. \tag{3}$$

## Věta 9

*Nechť* $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$ *a* $Q$ *má dvojici komplexních kořenů* $\beta \pm i\gamma$, *každý z nich násobnosti* $\ell \geq 1$. *Pak existují reálná čísla* $B_1, C_1, \dots, B_\ell, C_\ell$ *taková, že platí*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{\left[(x-\beta)^2+\gamma^2\right]^\ell Q_1(x)}$$
$$= \frac{B_1 x + C_1}{\left[(x-\beta)^2+\gamma^2\right]^\ell} + \dots + \frac{B_\ell x + C_\ell}{\left[(x-\beta)^2+\gamma^2\right]} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

*kde* $Q_1(x)$ *má stupeň* $(\operatorname{st} Q - 2\ell)$ *a* $P_1(x)$ *je jistý polynom.*

### Shrnutí – Rozklad racionální lomené funkce na součet parciálních zlomků

$\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q,\ \operatorname{st} Q = k_1 + \cdots + k_m + 2(\ell_1 + \cdots + \ell_p)$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x-\alpha_m)^{k_m}\cdot\left[(x-\beta_1)^2+\gamma_1^2\right]^{\ell_1}\cdots\left[(x-\beta_p)^2+\gamma_p^2\right]^{\ell_p}}$$

$$= \frac{A_1^{[1]}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \cdots + \frac{A_{k_1}^{[1]}}{(x-\alpha_1)} + \cdots + \frac{A_1^{[m]}}{(x-\alpha_m)^{k_m}} + \cdots + \frac{A_{k_m}^{[m]}}{(x-\alpha_m)}$$

$$+ \frac{B_1^{[1]}x + C_1^{[1]}}{\left[(x-\beta_1)^2+\gamma_1^2\right]^{\ell_1}} + \cdots + \frac{B_{\ell_1}^{[1]}x + C_{\ell_1}^{[1]}}{\left[(x-\beta_1)^2+\gamma_1^2\right]} + \cdots$$

$$+ \frac{B_1^{[p]}x + C_1^{[p]}}{\left[(x-\beta_p)^2+\gamma_p^2\right]^{\ell_p}} + \cdots + \frac{B_{\ell_p}^{[p]}x + C_{\ell_p}^{[p]}}{\left[(x-\beta_p)^2+\gamma_p^2\right]}$$

## Poznámka 7

*Neznáme koeficienty u parciálních zlomků hledáme buď převodem nazpět na společného jmenovatele a porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin (což vede na systém lineárních rovnic), nebo jednodušeji dosadíme za proměnnou $x$ hodnoty kořenů polynomu $Q(x)$.*

## Příklad 12

Rozložte funkci

$$\frac{x+1}{x^5+3x^3+2x}$$

na parciální zlomky.

$$\frac{x+1}{x^5+3x^3+2x} = \frac{x+1}{x(x^4+3x^2+2)} = \frac{x+1}{x(x^2+2)(x^2+1)} = \frac{1}{2x} - \frac{x-1}{x^2+1} + \frac{x-2}{2x^2+4}$$

## Poznámka 8

*Již víme, že každou racionální lomenou funkci, která není ryze lomená, lze pomocí dělení polynomů převést na součet polynomu a ryze lomené racionální funkce, kterou je možné rozložit na parciální zlomky.*

*Budeme se tedy zajímat pouze o integrály z parciálních zlomků*

Zaměříme se na 5 typů integrálů:

1. $\int \frac{A}{x-\alpha} \mathrm{d}x$,
2. $\int \frac{A}{(x-\alpha)^n} \mathrm{d}x$,
3. $\int \frac{A}{x^2+px+q} \mathrm{d}x$,
4. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} \mathrm{d}x$,
5. $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} \mathrm{d}x$,

kde $A, B, \alpha, p, q$ jsou reálná čísla, $p^2 - 4q < 0$ a $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Typ 1 a 2 řešíme substitucí $t = x - \alpha$.

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^n}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} x-\alpha = t \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right| = A\int \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t$$

$$= \begin{cases} A\ln|t| + c = A\ln|x-\alpha| + c & (n=1) \\ A\frac{t^{1-n}}{1-n} + c = \frac{A}{(1-n)t^{n-1}} + c = \frac{A}{(1-n)(x-\alpha)^{n-1}} + c & (n\neq 1) \end{cases}$$

### Příklad 13 (Typ 1)

$$\int \frac{3}{2x-8}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = 2x-8 \\ \mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{3}{t}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\int \frac{1}{t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3}{2}\ln|t| + c = \frac{3}{2}\ln|2x-8| + c.$$

## Příklad 14 (Typ 2)

$$\int \frac{3}{(2x-8)^3}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = 2x-8 \\ \mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{3}{t^3}\frac{1}{2}\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3}{2}\int t^{-3}\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\frac{t^{-2}}{-2} + c$$

$$= \frac{3}{-4}\frac{1}{t^2} + c = \frac{-3}{4(2x-8)^2} + c.$$

Typ 3 řešíme doplněním jmenovatele na čtverec a použitím vzorce pro $\int \frac{1}{A^2+x^2}\mathrm{d}x$.

## Příklad 15 (Typ 3)

$$\int \frac{3}{2x^2-4x+10}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2-2x+5}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x-1)^2+4}\mathrm{d}x$$

$$= \left| \begin{array}{c} t = x-1 \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2+2^2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot \operatorname{arctg}\frac{t}{2} + c = \frac{3}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + c.$$

Typ 4 řešíme převedením na součet integrálu typu $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}x$ a integrálu typu 3. ($A \neq 0$, jinak by šlo o typ 3.)

## Příklad 16 (Typ 4)

$$\int \frac{3x-6}{x^2+2x+3} \mathrm{d}x = 3 \int \frac{x-2}{x^2+2x+3} \mathrm{d}x = 3 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2x-4}{x^2+2x+3} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{2x+2-2-4}{x^2+2x+3} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} + \frac{-6}{x^2+2x+3} \mathrm{d}x$$

$$I_1 = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} \mathrm{d}x = \ln|x^2+2x+3| + c_1$$

$$I_2 = -6\int \frac{1}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x = -6\int \frac{1}{(x+1)^2+2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = x+1 \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{array} \right|$$

$$= -6\int \frac{1}{t^2+2}\mathrm{d}t = -6\int \frac{1}{t^2+(\sqrt{2})^2}\mathrm{d}t = \frac{-6}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + c_2$$

$$= -3\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}(x+1)}{2} + c_2$$

Celkem

$$\int \frac{3x-6}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\left(\ln|x^2+2x+3| - 3\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}(x+1)}{2}\right) + c$$

## Příklad 17

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1} &= \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3\cdot 2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{3}{3\cdot 2}\int \frac{1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right| + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x \\
&= \left|\begin{matrix} x-\frac{1}{2}=t \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{matrix}\right| = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{2}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}} + c \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c
\end{aligned}
$$

Typ 5 řešíme podobnou úpravou jako typ 4, tedy rozdělením na dvě části, kde první část lze vyřešit snadnou substitucí (čitatel je derivací trojčlene za jmenovatele) a na druhou část použijeme rekurentní vzorec (viz dále).

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} + \frac{\frac{2B}{A}-p}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left| \begin{array}{c} x^2+px+q=t \\ (2x+p)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{A}{2}\int \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t + \frac{A}{2}\int \frac{C}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right]^n}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left| \begin{array}{c} x+\frac{p}{2}=z \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}z \end{array} \right| = \frac{A}{2}\int \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t + \frac{A}{2}\int \frac{C}{(z^2+D^2)^n}\mathrm{d}z$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t + \frac{AC}{2D^{2n}}\int \frac{1}{\left[\left(\frac{z}{D}\right)^2+1\right]^n}\mathrm{d}z = \left| \begin{array}{c} \frac{z}{D}=s \\ \mathrm{d}z = D\mathrm{d}s \end{array} \right|$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t + \frac{AC}{2D^{2n-1}}\int \frac{1}{(s^2+1)^n}\mathrm{d}s = \frac{A}{2(1-n)t^{n-1}} + E\int \frac{1}{(s^2+1)^n}\mathrm{d}s$$

Nyní musíme vyřešit poslední integrál. Odvoďme rekurentní vzorec.

$$\underbrace{\int \frac{\mathrm{d}s}{(1+s^2)^n}}_{=:I_n} = \int \frac{1+s^2-s^2}{(1+s^2)^n}\mathrm{d}s = \underbrace{\int \frac{\mathrm{d}s}{(1+s^2)^{n-1}}}_{=:I_{n-1}} - \int \frac{s\cdot s}{(1+s^2)^n}\mathrm{d}s$$

$$= I_{n-1} + \frac{s}{2(n-1)(1+s^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1}$$

$$= \frac{s}{2(n-1)(1+s^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\, I_{n-1}$$

Tímto způsobem lze postupně snižovat exponent ve jmenovateli integrálu $I_n$ až na 1, což vede na funkci $\operatorname{arctg} s$.

Použili jsme následující mezivýpočet.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{s\cdot s}{(1+s^2)^n}\mathrm{d}s &= \left| \begin{array}{cc} u = s & u' = 1 \\ v' = \frac{s}{(1+s^2)^n} & v = (*) \end{array} \right| \\
&= \frac{s}{2(1-n)(1+s^2)^{n-1}} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1-n)(1+s^2)^{n-1}}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{s}{2(n-1)(1+s^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\underbrace{\int \frac{1}{(1+s^2)^{n-1}}\,\mathrm{d}t}_{I_{n-1}}
\end{aligned}
$$

$$
(*) = \int \frac{s}{(1+s^2)^n}\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int \frac{2s}{(1+s^2)^n}\mathrm{d}s = \left| \begin{array}{c} 1+s^2 = w \\ 2s\mathrm{d}s = \mathrm{d}w \end{array} \right|
$$

$$
= \frac{1}{2}\int \frac{1}{w^n}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2(1-n)w^{n-1}}
$$

## Příklad 18

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \operatorname{arctg} x - \int \frac{x\cdot x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{cc} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{2x}{2(1+x^2)^2} & v = \frac{-1}{2(1+x^2)} \end{array} \right|$$

$$= \operatorname{arctg} x - \left( -\frac{x}{2(1+x^2)} - \int \frac{-1}{2(1+x^2)}\,\mathrm{d}x \right)$$

$$= \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(1+x^2)} + c$$

Vzorcem:

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2(2-1)(1+x^2)^{2-1}} + \frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2}\int \frac{1}{(1+x^2)^1}\,\mathrm{d}x$$

**Poznámka 9**

*Mnoho dalších typů integrálů vede přes vhodné substituce na integrály z racionálních lomených funkcí.*

Budeme uvažované ohraničené funkce na ohraničeném intervalu. Porušení některé z těchto podmínek vede na tzv. nevlastní integrály.

Základní motivací je zjistit plochu mezi $f(x)$ a osou $x$ (na intervalu $[a, b]$).

### Příklad 19

(a) $f(x) = 2$ pro $x \in [-1, 1]$, $\boxed{P = 4}$.

(b) $f(x) = x$ pro $x \in [2, 4]$, $P = \frac{1}{2}\,4^2 - \frac{1}{2}\,2^2 = 8 - 2 = \boxed{6}$.

(c) $f(x) = x$ pro $x \in [a, b]$, $0 \leq a \leq b$, $\boxed{P = \frac{1}{2}\,b^2 - \frac{1}{2}\,a^2}$.

(d) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ pro $x \in [-1, 1]$, $P = \frac{1}{2}\,\pi\,1^2 = \boxed{\dfrac{\pi}{2}}$.

(e) $f(x) = -2x + 1$ pro $x \in [1, 2]$, $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 2$.
Ale protože je plocha *pod osou $x$*, klademe $\boxed{P = -2}$.

(f) $f(x) = x^3$ pro $x \in [-1, 1]$, plocha je stejná nad i pod osou $x$, a proto klademe $\boxed{P = 0}$.

Tato „orientovaná plocha" se nazývá *určitý integrál* (též *Riemannův integrál*) z funkce $f(x)$ přes interval $[a, b]$ a značíme ji

$$P = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \begin{array}{l}\text{orientovaná plocha mezi grafem}\\ \text{funkce } f(x) \text{ a osou } x\end{array}$$

## Příklad 20

Tedy výpočty uvedené v Příkladu 19 můžeme alternativně zapsat jako

$$\text{(a)} \int_{-1}^{1} 2\ \mathrm{d}x = 4, \ldots \text{(f)} \int_{-1}^{1} x^3\ \mathrm{d}x = 0.$$

*Skutečnou plochu* mezi $f(x)$ a osou $x$ odhadneme pomocí „vepsaných" a „opsaných" obdélníků, čímž dostaneme *dolní odhad* $s(D, f)$ pro skutečnou plochu a *horní odhad* $S(D, f)$ pro skutečnou plochu.

## Definice 4 (Dělení intervalu)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Dělením* intervalu $[a, b]$ je konečná množina bodů $D \subseteq [a, b]$ s vlastností $a, b \in D$. Tedy

$$D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \quad \text{kde} \quad x_0 = a, \quad x_n = b.$$

Body $x_0, x_1, \dots, x_n$ se nazývají *dělicí body* a interval $[x_{k-1}, x_k]$ se nazývá *dělicí (pod)interval*.

Délka největšího dělicího podintervalu je pak *norma dělení* $D$, tj. je to číslo

$$n(D) := \max_{k=1,\dots,n} \{x_k - x_{k-1}\}.$$

Množinu všech dělení intervalu $[a, b]$ označujeme jako $\mathbb{D}[a, b]$ či jenom jako $\mathbb{D}$.

Pro ohraničenou funkci $f(x)$ na $[a, b]$ a dělení $D$ intervalu $[a, b]$ označme

$$m_k := \inf\left\{f(x),\ x \in [x_{k-1}, x_k]\right\},$$
$$M_k := \sup\left\{f(x),\ x \in [x_{k-1}, x_k]\right\},$$

$$s(D, f) := \sum_{k=1}^{n} m_k\,(x_k - x_{k-1}),$$ *dolní součet* funkce $f(x)$ při dělení $D$,

$$S(D, f) := \sum_{k=1}^{n} M_k\,(x_k - x_{k-1}),$$ *horní součet* funkce $f(x)$ při dělení $D$.

## Tvrzení 1

*Nechť* $c \le f(x) \le d$ *pro každé* $x \in [a, b]$. *Potom pro každá dvě dělení* $D_1, D_2 \in \mathbb{D}[a, b]$ *platí*

$$c\,(b-a) \le s(D_1, f) \le S(D_2, f) \le d\,(b-a),$$

*tj. dolní součet libovolného dělení je nejvýše roven hornímu součtu libovolného dělení, přičemž všechny dolní součty jsou zdola ohraničeny číslem* $c\,(b-a)$ *a všechny horní součty jsou shora ohraničeny číslem* $d\,(b-a)$.

Při vzrůstajícím počtu dělicích bodů $x_k$ v dělení $D_1$, $D_2$ se bude dolní součet $s(D_1, f)$ *zvětšovat* a zároveň horní součet $S(D_2, f)$ *zmenšovat*.

## Definice 5 (Dolní a horní integrál)

Číslo

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, \mathrm{d}x := \sup \left\{ s(D, f),\ \ D \in \mathbb{D} \right\}$$

nazýváme *dolním integrálem* z funkce $f(x)$ na intervalu $[a, b]$.

Číslo

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, \mathrm{d}x := \inf \left\{ S(D, f),\ \ D \in \mathbb{D} \right\}$$

nazýváme *horním integrálem* z funkce $f(x)$ na intervalu $[a, b]$.

Dolní integrál je vždy menší nebo roven hornímu a navíc, pokud je $c \le f(x) \le d$ na intervalu $[a, b]$, potom podle Tvrzení 1 je

$$c\,(b-a) \le \underline{\int_a^b} f(x)\, \mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} f(x)\, \mathrm{d}x \le d\,(b-a).$$

## Definice 6 (Určitý (Riemannův) integrál)

Je-li

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

potom říkáme, že funkce $f(x)$ je *integrovatelná* (v Riemannově smyslu) *na* $[a, b]$ a toto společné číslo značíme

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} := \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Množinu všech (riemannovsky) integrovatelných funkcí na intervalu $[a, b]$ značíme jako $\mathcal{R}[a, b]$.
Je-li

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

potom říkáme, že funkce $f(x)$ *není integrovatelná na* $[a, b]$.

## Příklad 21

Dirichletova funkce

$$\chi(x) := \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \cap [a, b], \\ 1 & \text{pro } x \in \mathbb{I} \cap [a, b], \end{cases}$$

Potom $m_k = 0$ a $M_k = 1$ pro všechna $k$ a tedy je

$$s(D, \chi) = 0, \quad S(D, \chi) = b - a, \qquad \forall D \in \mathbb{D}$$

$$\underline{\int_a^b} \chi(x)\, \mathrm{d}x = \sup\{s(D, \chi)\} = 0, \quad \overline{\int_a^b} \chi(x)\, \mathrm{d}x = \inf\{S(D, \chi)\} = b - a$$

$$\underline{\int_a^b} \chi(x)\, \mathrm{d}x < \overline{\int_a^b} \chi(x)\, \mathrm{d}x \quad \text{a tedy} \quad \boxed{\chi \notin \mathcal{R}[a, b]}.$$

*Nulová posloupnost dělení* $D_k \in \mathbb{D}$ je taková posloupnost dělení, která splňuje $\boxed{n(D_k) \to 0}$ pro $k \to \infty$, neboli norma dělení jde k nule.

## Věta 10

*Nechť je funkce $f(x)$ ohraničená na intervalu $[a, b]$. Potom pro libovolnou nulovou posloupnost dělení $D_k \in \mathbb{D}$ platí, že*

$$s(D_k, f) \to \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad S(D_k, f) \to \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{pro } k \to \infty.$$

*Je-li navíc $f(x)$ integrovatelná na $[a, b]$, potom dolní i horní součty konvergují (ve smyslu existence vlastní limity) k číslu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Tedy *pokud víme*, že je $f(x)$ integrovatelná na $[a, b]$, potom lze $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ určit limitním přechodem pomocí *libovolné* nulové posloupnosti dělení intervalu $[a, b]$.

## Věta 11

(i) *Každá spojitá funkce na intervalu $[a, b]$ je zde také integrovatelná.*

(ii) *Každá monotónní ohraničená funkce na intervalu $[a, b]$ je zde také integrovatelná.*

Předveďme si Větu 10 na $f(x) = x$ pro $x \in [0, 1]$.
Nechť $D_n = \{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\}$. Pak $m_i = x_{i-1} = \frac{i-1}{n}$, $M_i = \frac{i}{n}$, $i = 1, \dots, n$, tedy

$$s(D_n, x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1) = \frac{n(n-1)}{2n^2},$$

$$S(D_n, x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2n^2}.$$

Odtud

$$\lim_{n\to\infty} s(D_n, x) = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{n\to\infty} S(D_n, x) = \frac{1}{2}.$$

Proto $\int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

## Poznámka 10

*Riemannův integrál (tj. orientovaná plocha) se zřejmě nezmění, pokud je integrovatelná funkce $f(x)$ nespojitá či není definována v konečně mnoha bodech (či obecněji na množině „míry nula“). Tímto dostáváme mj. určitý integrál přes otevřený nebo polouzavřený interval a jejich sjednocení.*

## Příklad 22

Pro nespojitou funkci $\operatorname{sgn} x$ platí

$$\int_{-2}^{3} \operatorname{sgn} x \, \mathrm{d}x = 3 + (-2) = 1.$$

Obdobně lze ukázat, že pro $a < 0 < b$ je

$$\int_{a}^{b} \operatorname{sgn} x \, \mathrm{d}x = a + b.$$

### Věta 12

*Je-li funkce $f(x)$ integrovatelná a ohraničená na intervalu $[a, b]$, tj. $c \le f(x) \le d$ pro všechna $x \in [a, b]$, potom*

$$c\,(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le d\,(b-a).$$

### Důsledek

Je-li $f \in \mathcal{R}[a, b]$, potom platí

- $f(x) \ge 0 \quad$ na $[a, b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge 0$,
- $\left|f(x)\right| \le c \quad$ na $[a, b] \quad \Rightarrow \quad \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le c\,(b-a)$.

## Věta 13 (Pravidla pro určitý integrál)

*Nechť* $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ *($f(x)$ a $g(x)$ jsou integrovatelné) a* $c \in \mathbb{R}$ *je konstanta.*

(i) *Pravidlo konstantního násobku:* $c \cdot f \in \mathcal{R}[a, b]$ *a platí*

$$\int_a^b c \cdot f(x) \, \mathrm{d}x = c \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

(ii) *Pravidlo součtu a rozdílu:* $f \pm g \in \mathcal{R}[a, b]$ *a platí*

$$\int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right] \, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x.$$

(iii) *Pravidlo monotonie: je-li* $f(x) \leq g(x)$ *na* $[a, b]$, *potom*

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x.$$

(iv) Pravidlo absolutní hodnoty: $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ a platí

$$\left| \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x.$$

(v) Pravidlo součinu: $f \cdot g \in \mathcal{R}[a, b]$.

(vi) Pravidlo podílu: je-li $g(x) \geq c$ na intervalu $[a, b]$ pro nějaké $c > 0$, potom je $\frac{f}{g} \in \mathcal{R}[a, b]$.

(vii) Pravidlo návaznosti: je-li $a < c < b$, potom je $f \in \mathcal{R}[a, c]$, $f \in \mathcal{R}[c, b]$ a platí

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

V pravidle podílu *nestačí*, aby $g(x) > 0$ na intervalu $[a, b]$, tj. je nutné, aby byla funkce ve jmenovateli „odražena od 0“. Např. pro funkce

$$f(x) := 1 \quad \text{na } [0,1], \qquad g(x) := \begin{cases} 1 & \text{pro } x = 0, \\ x & \text{pro } x \in (0,1], \end{cases}$$

platí, že $f \in \mathcal{R}[0,1]$, $g \in \mathcal{R}[0,1]$, protože $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ a $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. Dále je $g(x) > 0$ na celém intervalu $[0,1]$, ale funkce

$$\frac{f}{g}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = 0, \\ \frac{1}{x} & \text{pro } x \in (0,1], \end{cases}$$

*není* integrovatelná na intervalu $[0,1]$, protože

$$\int_0^1 \frac{f}{g}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \infty.$$

Funkci $g(x)$ nelze „odrazit od 0“, protože se k nule blíží (a tedy je funkce $\frac{1}{g(x)}$ neohraničená).

Pravidlo návaznosti lze jednoduše rozšířit na *libovolné* hodnoty $a, b, c \in \mathbb{R}$ (dokonce mohou být některá tato čísla stejná), pokud definujeme

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x := 0, \qquad \text{(tj. „plocha“ pod jediným bodem je nulová),}$$

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \quad \text{(tj. záměna integračních mezí mění znaménk}$$

Potom podle pravidla návaznosti zřejmě platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

## Definice 7 (Průměr funkce)

Nechť $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Potom číslo

$$av(f) = av_{[a,b]}(f) := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$$

nazýváme *průměrnou hodnotou* (též střední hodnotou) funkce $f(x)$ na intervalu $[a, b]$. Označení je z angličtiny „average value“.

V dalším textu označme

$$m := \inf \left\{ f(x),\ x \in [a, b] \right\}, \quad M := \sup \left\{ f(x),\ x \in [a, b] \right\},$$

tj. platí pak $m \leq f(x) \leq M$ na intervalu $[a, b]$.
Nyní uvedeme důležitou větu o střední hodnotě integrálního počtu. I když tato věta plyne až z následující věty, uvádíme ji jako první, protože bude pro nás velmi důležitá.

## Věta 14 (O střední hodnotě integrálního počtu)

(i) *Nechť $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Potom existuje číslo $c \in \mathbb{R}$, $m \leq c \leq M$, takové, že*

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = c\,(b-a), \qquad tj. \qquad c = av(f),$$

*tj. plocha mezi grafem funkce $f(x)$ a osou $x$ je rovna obsahu obdélníka se základnou $[a,b]$ a výškou $c$.*

(ii) *Je-li navíc funkce $f(x)$ spojitá na $[a,b]$, potom existuje bod $x_0 \in [a,b]$ s vlastností, že*

$$f(x_0) = c = av(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x,$$

*tj. spojitá funkce $f(x)$ nabývá svou průměrnou hodnotu v intervalu $[a,b]$.*

## Příklad 23

Pokud je funkce $f(x)$ *nespojitá* na intervalu $[a, b]$, potom svou průměrnou hodnotu nabývat nemusí. Např. pro funkci $f(x)$ na intervalu $[-1, 1]$ definovanou jako

$$f(x) := \begin{cases} -1 & \text{pro } x \in [-1, 0), \\ 1 & \text{pro } x \in [0, 1], \end{cases}$$

je

$$av(f) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0,$$

ale funkce $f(x)$ nenabývá hodnotu 0 nikde v intervalu $[-1, 1]$.

## Věta 15

*Nechť* $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ *a* $g(x) \geq 0$ *na* $[a, b]$.

(i) *Existuje číslo* $c \in \mathbb{R}$, $m \leq c \leq M$, *takové, že*

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\ \mathrm{d}x = c \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

(ii) *Je-li navíc funkce* $f(x)$ *spojitá na* $[a, b]$, *potom existuje bod* $x_0 \in [a, b]$ *s vlastností, že* $f(x_0) = c$, *tj.*

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\ \mathrm{d}x = f(x_0) \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Je-li funkce $f(x)$ integrovatelná na $[a,b]$, potom je také integrovatelná na intervalu $[a,x]$ pro každé $x \in [a,b]$. Tedy předpis

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

definuje *funkci* $F(x)$, která je řádně definovaná pro všechna $x \in [a,b]$.

Zřejmě je

$$F(a) = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{a} \quad F(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

V tomto odstavci budeme studovat vlastnosti této funkce $F(x)$.

Zřejmě je hodnota $F(x)$ *obsah (orientované) plochy* mezi grafem funkce $f(t)$ *na intervalu* $[a,x]$.

## Příklad 24

Pro nespojitou funkci

$$f(x) := \begin{cases} 5 & \text{pro } x \in [0,1), \\ 10 & \text{pro } x \in [1,2] \end{cases}$$

je funkce $F(x)$ spojitá

$$F(x) := \begin{cases} 5x & \text{pro } x \in [0,1], \\ 10x - 5 & \text{pro } x \in [1,2]. \end{cases}$$

## Věta 16

*Nechť $f \in \mathcal{R}[a,b]$ (tedy funkce $f(x)$ může být i nespojitá). Potom je funkce*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

*spojitá na intervalu $[a,b]$.*

*Jak rychle* se mění funkce $F(x)$? $\to$ Rychlostí hodnot funkce $f(x)$.

### Věta 17

*Je-li $f(x)$ spojitá na nějakém okolí bodu $x_0$, potom má funkce $F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ derivaci v bodě $x_0$ a platí*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

### Důsledek (Fundamentální vztah integrálního počtu)

Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $[a, b]$, potom má funkce $F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ spojitou derivaci $F'(x) = f(x)$ na $[a, b]$, tj. platí vztah

$$\boxed{\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(x)}. \tag{4}$$

Derivace a integrál jsou v tomto pořadí tedy k sobě plnohodnotně inverzní (pro „pěkné“ funkce to platí i opačně).

## Poznámka 11

*Lze tedy psát, že primitivní funkce k* $x^2$ *je* $F(x) = \int_0^x t^2 \, \mathrm{d}t$.

*Lze to i pro vyšší funkce, např. primitivní funkce k funkci*

$$\frac{\sin x}{x} \quad \text{je} \quad F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$$

*kde daný integrál oproti prvnímu případu vypočítat nelze. (Je možné ho vyjádřit pomocí nekonečné mocninné řady.)*

## Příklad 25

*Bez výpočtu*, tedy pouze na základě znalosti vztahu (4), můžeme proto psát např. (dolní mez je „nezajímavá“, protože derivace konstanty je nula)

$$\left(\int_0^x t^2 \sin t \, \mathrm{d}t\right)' = x^2 \sin x, \qquad \left(\int_1^x \frac{e^t}{t} \, \mathrm{d}t\right)' = \frac{e^x}{x}.$$

Protože je $\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t$, pro integrál jako funkci *dolní meze* $G(x) := \int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t$ platí

$$G'(x) = \left(\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = \left(-\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = -\left(\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = -f(x),$$

a tedy je

$$\left(\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = -f(x).$$

To znamená, že při derivování integrálu podle *horní meze* dostaneme původní funkci $f(x)$, zatímco při derivování integrálu podle *dolní meze* dostaneme $-f(x)$.

## Příklad 26

Podle pravidla pro derivování složené funkce je

$$\left(\int_1^{x^2} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right)' = \frac{1}{x^2}\cdot(x^2)' = \frac{1}{x^2}\cdot 2x = \frac{2}{x},$$

$$\begin{aligned}\left(\int_x^{x^2} \ln t\,\mathrm{d}t\right)' &= \left(\int_x^{1} \ln t\,\mathrm{d}t\right)' + \left(\int_1^{x^2} \ln t\,\mathrm{d}t\right)' \\ &= -\ln x + (\ln x^2)\cdot(x^2)' = -\ln x + 2\,(\ln x)\cdot 2x = (4x-1)\ln x.\end{aligned}$$

## Věta 18 (Newtonův-Leibnizův vzorec)

*Je-li $f \in \mathcal{R}[a,b]$ a je-li $F(x)$ libovolná primitivní funkce k $f(x)$ na $(a,b)$, přičemž $F(x)$ je spojitá na $[a,b]$, potom je*

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

*Důkaz.* Uvažujme pro jednoduchost $f(x)$ spojitou na $[a,b]$, tedy k ní jistě existuje primitivní funkce $F(x)$. Dále, funkce $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ je také primitivní k $f(x)$ na $[a,b]$, proto se tyto dvě funkce navzájem mohou lišit pouze o konstantu. Tedy platí, že $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + C$ pro každé $x \in [a,b]$, a proto je

$$F(b) - F(a) = \left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + C\right) - \left(\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t + C\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

a změna názvu proměnné na konci je pouhé přeznačení. □

Výpočet určitého integrálu podle Newtonova-Leibnizova vzorce značíme jako

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a).$$

### Příklad 27

Protože je funkce $\frac{x^3}{3}$ primitivní k funkci $x^2$ na $[0,1]$, platí

$$\int_0^1 x^2\ \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

## Věta 19 (Metoda per partes pro určitý integrál)

*Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají derivaci na intervalu $[a, b]$ a $u', v' \in \mathcal{R}[a, b]$. Potom platí*

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x)\, \mathrm{d}x = \big[\, u(x) \cdot v(x) \,\big]_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x)\, \mathrm{d}x.$$

## Příklad 28

$$\int_0^\pi x \cos x\, \mathrm{d}x \quad \left| \begin{array}{ll} u' = \cos x & u = \sin x \\ v = x & v' = 1 \end{array} \right| = \big[\, x \sin x \,\big]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\, \mathrm{d}x$$

$$= \underbrace{\pi \sin \pi}_{=0} - \underbrace{0 \sin 0}_{=0} - \big[ -\cos x \,\big]_0^\pi$$

$$= \big[ \cos x \,\big]_0^\pi = \cos \pi - \cos 0 = -1 - 1 = -2.$$

## Věta 20 (Substituce pro určitý integrál)

*Nechť je funkce $f(t)$ spojitá na intervalu $[c, d]$ a nechť má funkce $\varphi(x)$ integrovatelnou derivaci na intervalu $[a, b]$ a $\varphi([a, b]) \subseteq [c, d]$. Potom platí*

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

*Neboli v daném integrálu volíme substituci $t = \varphi(x)$ a transformujeme nejen integrál, ale i meze (v tomtéž pořadí mezí).*

## Poznámka 12

*U metody per partes i substituce je možné nejprve vypočítat primitivní funkci, u substituce se samozřejmě vrátit k původní proměnné, a následně pouze dosadit do Newtonovy–Bolzanovy formule. Dělat úpravy průběžně je ale často rychlejší.*

## Příklad 29

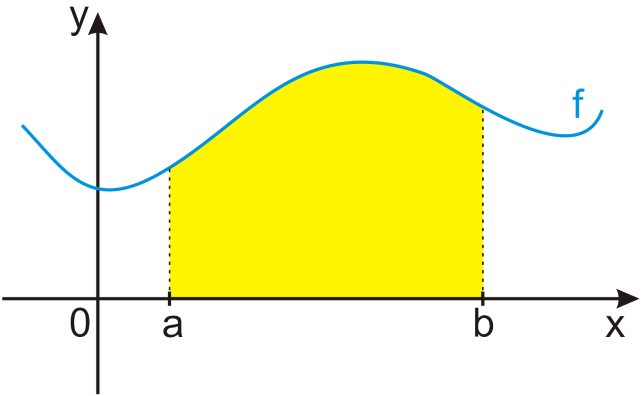
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x \quad \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ \mathrm{d}x = (\cos t)\ \mathrm{d}t \\ x = 0 \ \Rightarrow \ t = 0 \\ x = 1 \ \Rightarrow \ t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{=\cos t} \cdot \underbrace{\cos t\ \mathrm{d}t}_{\mathrm{d}x}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)\right)\ \mathrm{d}t$$

$$= \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{4} + \underbrace{\frac{\sin\pi}{4}}_{=0}\right) - \left(\frac{0}{2} + \frac{\sin 0}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

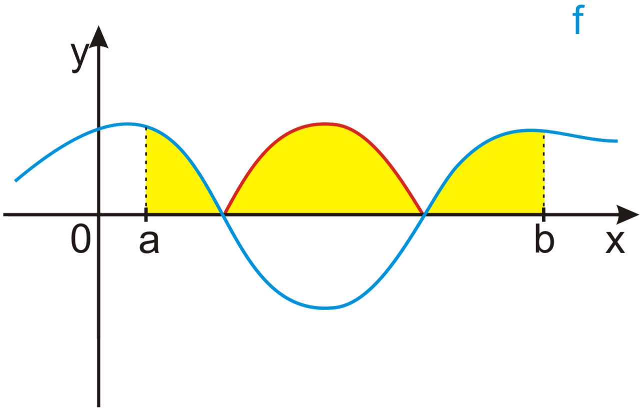
Plocha podgrafu kladné funkce na intervalu $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x.$$



Plocha mezi grafem funkce $f$ a osou $x$ na intervalu $[a, b]$:

$$\int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x.$$

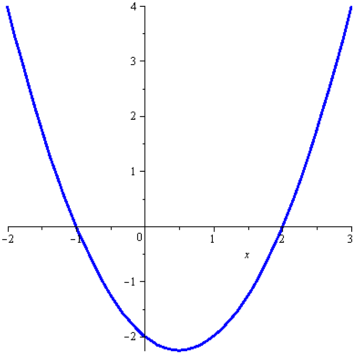


## Příklad 30

Určete plochu ohraničenou grafem funkce $f(x) = x^2 - x - 2$ a osou $x$ na intervalu $I = [-2, 3]$.

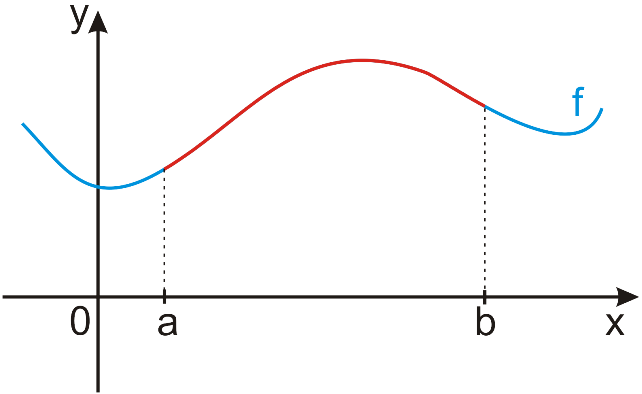
Protože $x^2 - x - 2 = 0$ má kořeny $x_1 = -1$ a $x_2 = 2$, snadno zjistíme, že funkce $f$ je na intervalu $I$ kladná pro $x \in (-2, -1) \cup (2, 3)$ a záporná pro $x \in (-1, 2)$.

$$\begin{aligned} P &= \int_{-2}^{3} |f(x)| \mathrm{d}x \\ &= \int_{-2}^{-1} f(x) \mathrm{d}x + \int_{-1}^{2} (-f(x)) \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{2}^{3} f(x) \mathrm{d}x \\ &= \ldots = \frac{49}{6} \end{aligned}$$

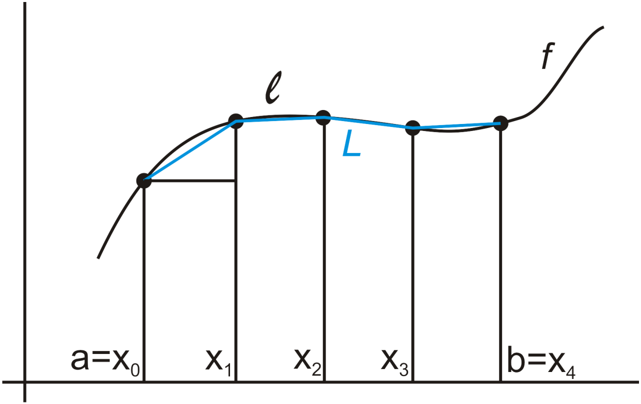


Délka křivky grafu funkce $f$ na intervalu $[a, b]$.

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\mathrm{d}x.$$



## Délka křivky – odvození




Křivku $\ell$ nahradíme lomenou čarou $L$, která vznikla dělením intervalu $[a, b]$. Předpokládejme, že $f$ je na $[a, b]$ diferencovatelná a že funkce $\sqrt{1 + f'^2}$ je na něm integrovatelná.

Pak délka lomené čáry je

$$d(L) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f(x_i) - f(x_{i-1})]^2 + (x_i - x_{i-1})^2}.$$

Dle Lagrangeovy věty o střední hodnotě existují $\xi_i \in (x_{i-1}, x_1)$, $i = 1, \dots, n$ taková, že $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, $i = 1, \dots, n$. Tedy

$$d(L) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\,(x_i - x_{i-1}) = \mathcal{S}(D, \sqrt{1 + f'^2}, K).$$

Výše uvedené platí pro libovolné dělení $D$, platí tedy i pro nulovou posloupnost dělení $D_n$

$$d(L) = \mathcal{S}(D_n, \sqrt{1 + f'^2}, K_n) \longrightarrow \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x,$$

tedy $d(\ell) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$.

## Příklad 31

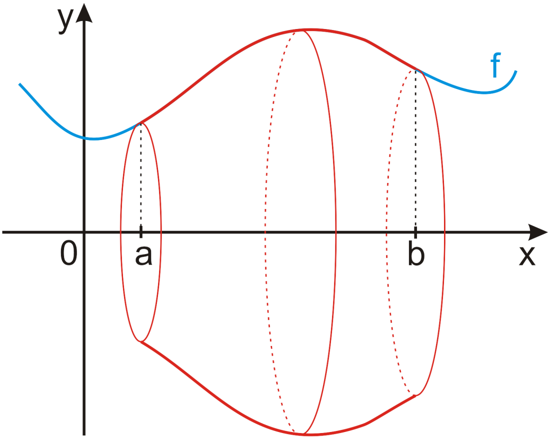
Odvoďte vzorec pro výpočet obvodu kruhu o poloměru $R$.

$$O = 4\int_0^R \sqrt{1+\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)'^2}\,\mathrm{d}x = 4\int_0^R \sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= 4\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = 4\left[R\arcsin\frac{x}{R}\right]_0^R = 4R\frac{\pi}{2} = 2\pi R$$

Objem a povrch pláště rotačního tělesa
(rotace nezáporné funkce $f$ kolem osy $x$ na intervalu $[a, b]$).

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\mathrm{d}x, \quad V = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$



Vzorec pro objem rotačního tělesa plyne přímo z konstrukce integrálu. Uvažujme dělení intervalu $[a, b]$, v každém dílku zvolíme reprezentanta $\xi_i$. Tím obdržíme obdélník daný délkou dílku a funkční hodnotou v příslušném reprezentantu. Rotujeme-li tento obdélník kolem osy $x$, vytvoří válec o poloměru $f(\xi_i)$ a výšce $x_i - x_{i-1}$. Součet všech objemů přejde pro nulovou posloupnost dělení v objem uvažovaného rotačního tělesa.

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \mathcal{S}(D, \pi f^2, K) \longrightarrow \boxed{\pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = V}$$

Podobně lze odvodit vzorec pro povrch pláště – nahradíme-li křivku za lomenou čáru, objekt snadno rozdělíme na sadu komolých kuželů. Součet povrchů pláště těchto kuželů se pro nulové dělení blíží k povrchu pláště daného tělesa.

## Příklad 32

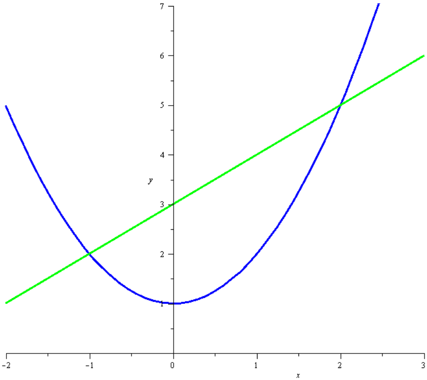
Vypočtěte povrch koule o poloměru $R$.

$$P = 2 \cdot 2\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} \,\mathrm{d}x = 4\pi R \int_0^R \mathrm{d}x = 4\pi R^2$$

## Příklad 33

Určete plochu ohraničenou grafy funkcí $f(x) = x^2 + 1$ a $g(x) = x + 3$.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x^2 + 1 &= x + 3 \\ x^2 - x - 2 &= 0 \\ x_1 = -1&, x_2 = 2 \end{aligned}$$

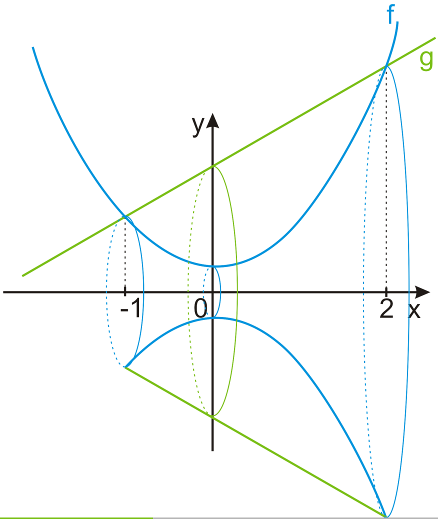



$$\int_{-1}^{2} g(x)-f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} (x+3)-(x^2+1)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} 2+x-x^2\mathrm{d}x = \ldots = \frac{9}{2}.$$

## Příklad 34

Určete objem tělesa vzniklého rotací plochy omezené grafy funkcí $f(x) = x^2 + 1$ a $g(x) = x + 3$ kolem osy $x$.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^{2} g^2(x)\mathrm{d}x - \pi \int_{-1}^{2} f^2(x)\mathrm{d}x \\ &= \pi \int_{-1}^{2} (x+3)^2 - (x^2+1)^2 \mathrm{d}x \\ &= \pi \int_{-1}^{2} 8 + 6x - x^2 - x^4 \mathrm{d}x \\ &= \ldots = \frac{117}{5}\pi. \end{aligned}$$



Dále budeme uvažovat křivku zadanou parametricky jako

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \tag{P}$$

kde $\varphi, \psi$ jsou spojitě diferencovatelné a $\varphi'(t) \neq 0$ pro $t \in (\alpha, \beta)$.

*Obsah obrazce ohraničeného křivkou* s parametrizací (P), osou $x$ a přímkami $x = \varphi(\alpha), x = \varphi(\beta)$ je

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)|\varphi'(t)| \, \mathrm{d}t.$$

*Délka křivky* zadané parametrizací (P) je

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} \, \mathrm{d}t.$$

*Objem rotačního tělesa*, které vznikne rotací podgrafu spojité nezáporné funkce $f(x)$, $x \in [a, b]$, kolem osy $y$ je

$$V_y = 2\pi \int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x.$$

*Objem rotačního tělesa*, které vznikne rotací plochy vymezené křivkou zadanou parametrizací (P) kolem osy $x$ (kde $\psi(t) \geq 0, t \in [\alpha, \beta]$), osou $x$ a přímkami $x = \varphi(\alpha), x = \varphi(\beta)$ je

$$V_x = \pi \int_\alpha^\beta \psi^2(t) \cdot \left|\varphi'(t)\right| \,\mathrm{d}t.$$

*Objem rotačního tělesa*, které vznikne rotací plochy vymezené křivkou zadanou parametrizací (P) (kde $\psi(t) \geq 0, t \in [\alpha, \beta]$), osou $x$ a přímkami $x = \varphi(\alpha) \geq 0, x = \varphi(\beta) \geq 0$ kolem osy $y$ je

$$V_y = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi(t) \left|\varphi'(t)\right| \,\mathrm{d}t.$$

*Obsah pláště rotačního tělesa*, které vznikne rotací plochy vymezené křivkou zadanou parametrizací (P) (kde $\psi(t) \geq 0, t \in [\alpha, \beta]$), osou $x$ a přímkami $x = \varphi(\alpha), x = \varphi(\beta)$ kolem osy $x$ je

$$Q = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, \mathrm{d}t.$$

Nechť spojitá funkce $s(t)$ udává *specifickou hmotnost* v bodě $[\varphi(t), \psi(t)]$ pro křivku zadanou parametricky $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Potom

$$M = \int_\alpha^\beta s(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$$

je *hmotnost křivky*,

$$S_x = \int_\alpha^\beta s(t)\psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t,$$
$$S_y = \int_\alpha^\beta s(t)\varphi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t,$$

jsou *statické momenty* křivky vzhledem k ose $x$, resp. $y$ a

$$T = \left[\frac{S_y}{M}, \frac{S_x}{M}\right]$$

jsou *souřadnice jejího těžiště*.

Nechť spojitá funkce $s(t)$ udává *specifickou hmotnost* v bodě $[x, f(x)]$ pro křivku, která je grafem spojitě diferencovatelné funkce $f(x)$, $x \in [a, b]$. Potom platí

$$M = \int_a^b s(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x,$$

$$S_x = \int_a^b s(x)f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x,$$

$$S_y = \int_a^b s(x)x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x,$$

$$T = \left[\frac{S_y}{M}, \frac{S_x}{M}\right].$$

Nechť spojitá funkce $s(t)$ udává *specifickou hmotnost* v bodě $[\varphi(t), \psi(t)]$. Pro rovinný obrazec vymezený křivkou zadanou parametricky $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, osou $x$ a přímkami $x = \varphi(\alpha), x = \varphi(\beta)$ platí

$$M = \int_\alpha^\beta s(t)\psi(t)|\varphi'(t)|\, \mathrm{d}t,$$

$$S_x = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta s(t)\psi^2(t)|\varphi'(t)|\, \mathrm{d}t,$$

$$S_y = \int_\alpha^\beta s(t)\psi(t)\varphi(t)|\varphi'(t)|\, \mathrm{d}t,$$

$$T = \left[\frac{S_y}{M}, \frac{S_x}{M}\right].$$

Nechť spojitá funkce $s(t)$ udává *specifickou hmotnost* v bodě $[x, y]$ podgrafu spojité nezáporné funkce $f$. Potom pro podgraf funkce $f$ platí

$$M = \int_a^b s(x)f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$S_x = \frac{1}{2}\int_a^b s(x)f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$S_y = \int_a^b xs(x)f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$T = \left[\frac{S_y}{M}, \frac{S_x}{M}\right].$$

Cílem této sekce je „zbavit se“ požadavku
na ohraničenost integrandu a intervalu.

Nejprve se budeme zabývat případem,
kdy je neohraničený interval...

## Definice 8

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť $f$ je funkce definovaná na intervalu $[a, \infty)$, která je integrovatelná na každém intervalu $[a, b]$, kde $b > a$. Definujme funkci $F$ na intervalu $[a, \infty)$ vztahem

$$F(b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jestliže existuje vlastní limita $\lim_{b\to\infty} F(b)$, říkáme, že *nevlastní integrál* $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *konverguje* a klademe

$$\int_a^\infty f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} F(b) = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Neexistuje-li vlastní limita $\lim_{b\to\infty} F(b)$ říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *diverguje*. Je-li tato limita nevlastní, říkáme, že nevlastní integrál *určitě diverguje* k $\pm\infty$. V případě, že tato limita neexistuje, říkáme, že integrál *osciluje*.

## Poznámka 13

*Nevlastní integrál* $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$, *kde* $a \in \mathbb{R}$, *definujeme analogicky*

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c \to -\infty} \int_{c}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

*Je-li funkce* $f$ *integrovatelná na každém omezeném intervalu, řekneme, že nevlastní integrál* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *konverguje, jestliže pro nějaké* $a \in \mathbb{R}$ *(tedy pro každé* $a \in \mathbb{R}$*) konvergují oba nevlastní integrály* $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. *V tomto případě*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

### Příklad 35

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}[\operatorname{arctg} x]_0^b = \lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}.$$

### Příklad 36

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}[\ln x]_1^b = \lim_{b\to\infty}\ln b = \infty.$$

### Příklad 37

$$\int_0^\infty \cos x\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \cos x\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}[\sin x]_0^b = \lim_{b\to\infty}\sin b = \text{ neexistuje.}$$

## Věta 21

*Nechť integrály* $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ *konvergují a* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Pak konverguje i integrál* $\int_a^\infty \alpha f(x) + \beta g(x)\,\mathrm{d}x$ *a platí*

$$\int_a^\infty \alpha f(x) + \beta g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x.$$

## Věta 22

*Nechť integrál* $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *konverguje a integrál* $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ *diverguje. Pak integrál* $\int_a^\infty f(x) \pm g(x)\,\mathrm{d}x$ *diverguje.*

## Příklad 38

Rozhodněte pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ integrál $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ konverguje a pro která diverguje.

Nechť $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$. Je-li $\alpha \neq 1$, je

$$F(x) = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^x = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right),$$

tedy

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{je-li } \alpha > 1, \\ \infty, & \text{je-li } \alpha < 1. \end{cases}$$

Pro $\alpha = 1$ je $F(x) = [\ln t]_1^x = \ln x$, tedy $\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$.
Celkem

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{je-li } \alpha > 1, \text{ integrál konverguje}, \\ \infty, & \text{je-li } \alpha \leq 1, \text{ integrál určitě diverguje}. \end{cases}$$

## Věta 23 (Prosté srovnávací kritérium)

*Nechť funkce* $f, g$ *splňují pro* $x \in [a, \infty)$ *nerovnosti* $0 \leq f(x) \leq g(x)$.

(i) *Konverguje-li integrál* $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$, *konverguje i integrál* $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$, *přičemž platí*

$$0 \leq \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(ii) *Diverguje-li integrál* $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$, *diverguje i integrál* $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$.

## Věta 24 (Limitní srovnávací kritérium)

*Nechť funkce* $f, g$ *jsou nezáporné na intervalu* $[a, \infty)$ *a nechť existuje* $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

(i) *Je-li* $L < \infty$ *a konverguje-li nevlastní integrál* $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$, *konverguje i nevlastní integrál* $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$.

(ii) *Je-li* $L > 0$ *a diverguje-li nevlastní integrál* $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$, *diverguje i nevlastní integrál* $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$.

## Důsledek

Nechť $a > 0$ a $f(x) \geq 0$ pro $x \in [a, \infty)$. Jestliže existuje $\alpha > 1$ takové, že

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) < \infty,$$

pak integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Jestliže existuje $\alpha \leq 1$ takové, že

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) > 0,$$

pak nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje.

## Poznámka 14

*Je-li funkce $f$ nezáporná, pak je funkce $F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ neklesající, a tedy existuje (vlastní nebo nevlastní) limita*

$$\lim_{x\to\infty} F(x).$$

### Věta 25 (Nutná podmínka konvergence)

*Nechť integrál* $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *konverguje a nechť existuje* $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$. *Pak je* $c = 0$.

### Věta 26

*Konverguje-li integrál* $\int_a^\infty |f(x)|\mathrm{d}x$, *konverguje i integrál* $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *a platí*

$$\left|\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

## Definice 9

Říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *konverguje absolutně*, jestliže konverguje integrál $\int_a^\infty |f(x)|\mathrm{d}x$. Pokud ale integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje a integrál $\int_a^\infty |f(x)|\mathrm{d}x$ (určitě) diverguje, říkáme, že integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *konverguje neabsolutně*.

## Věta 27

*Nechť funkce $g$ je nezáporná na intervalu $[a,\infty)$ a nechť integrál $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Platí-li $|f(x)| \le g(x)$ pro všechna $x \in [a,\infty)$ nebo*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} < \infty,$$

*pak integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje absolutně.*

Nyní se budeme zabývat případem neohraničené funkce...

## Definice 10

Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, a nechť $f$ je funkce definovaná na intervalu $[a, b)$. Řekneme, že $b$ je *singulární bod* funkce $f$, jestliže $f$ je ohraničená na každém intervalu $[a, b - \varepsilon]$, kde $0 < \varepsilon < b - a$, není ohraničená v žádném levém okolí bodu $b$, tj. na intervalu $(b - \varepsilon, b]$, a je integrovatelná (v Riemannově smyslu) na každém intervalu $[a, b - \varepsilon]$.

## Definice 11

Nechť $f$ je funkce definovaná na intervalu $[a, b)$ a nechť $b$ je jejím singulárním bodem. Nechť funkce $F$ je definovaná na intervalu $[a, b)$ předpisem $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Existuje-li *vlastní* limita $\lim_{x \to b^-} F(x)$, řekneme, že *nevlastní integrál* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *konverguje* a klademe

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x \to b^-} F(x).$$

Neexistuje-li vlastní $\lim_{x \to b^-} F(x)$, říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *diverguje*. Je-li tato limita nevlastní, říkáme, že nevlastní integrál *určitě diverguje* k $\pm\infty$. V případě, že tato limita neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál *osciluje*.

## Poznámka 15

*Analogicky definujeme singulární bod a funkce $f$ definované na intervalu $(a, b]$ a konvergenci nebo divergenci nevlastního integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, je-li a singulárním bodem funkce $f$.*

## Příklad 39

Vyšetřete konvergenci integrálu $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ pro $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Singulárním bodem funkce $\frac{1}{x^\alpha}$ je bod 0. Položme $F(x) = \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$. Pro $\alpha \neq 1$ je

$$F(x) = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_x^1 = \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right).$$

Tedy

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \text{je-li } \alpha < 1, \\ \infty, & \text{je-li } \alpha > 1. \end{cases}$$

V případě $\alpha = 1$ obdržíme $F(x) = [\ln t]_x^1 = -\ln x$, tudíž v tomto případě platí $\lim_{x\to 0^+} F(x) = \infty$. Celkem

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \text{je-li } \alpha < 1, \\ \infty, & \text{je-li } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Pro nevlastní integrály typu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, kde $a < b$ a $b$ je singulárním bodem funkce $f$, platí tvrzení analogická k předchozím tvrzením, např.

### Věta 28 (Limitní srovnávací kritérium)

*Nechť $f, g$ jsou nezáporné funkce definované na intervalu $[a, b)$. Nechť $b$ je singulárním bodem obou funkcí $f, g$ a nechť existuje $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.*

(i) *Je-li $L < \infty$ a konverguje-li integrál $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, je také integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergentní.*

(ii) *Je-li $L > 0$ a diverguje-li integrál $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, je také integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ divergentní.*