Diferenciální počet

Petr Hasil

Přednáška z MB152

Obsah

Reálná čísla $\mathbb{R}$ lze uvažovat jako obrazy bodů na přímce. (Matematicky lze reálná čísla zavést pomocí axiomů.)

Důležitými jsou pojmy supremum a infimum v $\mathbb{R}$. Uvažujme neprázdnou množinu $A \subseteq \mathbb{R}$.

- $b \in \mathbb{R}$ je *horní závora* množiny A, jestliže $\forall\, x \in A: \ x \leq b$.
- $b \in \mathbb{R}$ je *dolní závora* množiny A, jestliže $\forall\, x \in A: \ x \geq b$.
- Množina A je *shora ohraničená* (shora omezená), pokud má aspoň jednu horní závoru.
- Množina A je *zdola ohraničená* (zdola omezená), pokud má aspoň jednu dolní závoru.
- Pokud je A současně zdola i shora ohraničená, nazývá se *ohraničená* (omezená).
- Nejmenší horní závora množiny A se nazývá *supremum* množiny A, značíme $\sup A$.
- Největší dolní závora množiny A se nazývá *infimum* množiny A, značíme $\inf A$.

Příklad 1

Je-li A libovolný z intervalů $(0,1)$, $[0,1]$, $[0,1)$ nebo $(0,1]$, potom je vždy

$$\sup A = 1 \quad \text{a} \quad \inf A = 0.$$

Výhoda suprema či infima oproti největšímu či nejmenšímu prvku spočívá v tom, že největší či nejmenší prvek nemusí v A existovat, i když je množina A ohraničená, ale supremum a infimum existují vždy.

Axiom 1 (Tvrzení jsou ekvivalentní)

(i) *Každá neprázdná shora ohraničená množina $A \subseteq \mathbb{R}$ má supremum.*

(ii) *Každá neprázdná zdola ohraničená množina $A \subseteq \mathbb{R}$ má infimum.*

Tedy v $\mathbb{R}$ nejsou žádné „díry“.

Intervaly značíme

- otevřené (a, b),
- uzavřené $[a, b]$,
- polouzavřené $(a, b]$, $[a, b)$.

Nekonečné intervaly (neohraničené zdola nebo shora) značíme jako

$$(-\infty, \infty), \quad [a, \infty), \quad (a, \infty), \quad (-\infty, b], \quad (-\infty, b).$$

Symbol $-\infty$ a ∞ do intervalu nikdy nepatří, jedná se o tzv. nevlastní hodnoty značící, že do intervalu patří libovolně velké záporné či kladné body. Množina $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ se nazývá *rozšířená množina reálných čísel*. (Prvky z $\mathbb{R}$ jsou vlastní hodnoty.)

Poznámka 1

Základní vlastnosti funkcí si lze zopakovat např. z nahrávky přednášky k matematické analýze, příslušné prezentace, nebo z vhodných knih. Definiční obor funkce $f(x)$ budeme značit symbolem $\mathcal{D}(f)$, obor hodnot pak symbolem $\mathcal{H}(f)$.

Zabýváme se situací, kdy se nějaké hodnoty funkce (nebo posloupnosti) „blíží“ k nějakému číslu či k $\pm\infty$ (ale nikdy jí nemusí dosáhnout).

Příklad 2

(a) $A = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=2}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}, A \subset (0,1), \frac{1}{n} \to 0$ pro $n \to \infty$ ($\inf A = 0$)

(b) $B = \left\{\frac{n-1}{n}\right\}_{n=2}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right\} \in (0,1), B \subset (0,1), \frac{n-1}{n} \to 1$ pro $n \to \infty$ ($\sup B = 1$)

(c) $\{1-n\}_{n=0}^{\infty} = \{1, 0, -1, -2, \dots\}$ má pro $n \to \infty$ limitu $-\infty$

(d) Podobně se funkční hodnoty funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ „nekonečně blíží“ k číslu 0 když se nezávislá proměnná x zvyšuje k $\pm\infty$.

Intuitivní definice limity: „Funkce $f(x)$ má limitu L v bodě x_0, pokud se funkční hodnoty $f(x)$ *libovolně blíží* k číslu L, když je x *dostatečně blízko* k x_0.“ Píšeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Příklad 3 ((Ne)vlastní limita v (ne)vlastním bodě)

(a) Pro funkci $f(x) = 3x + 1$ máme

$$\lim_{x \to 3} (3x + 1) = 10, \qquad \lim_{x \to \infty} (3x + 1) = \infty.$$

(b) Pro funkci $f(x) = \frac{1}{x^2}$ máme

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty, \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Definice 1 (Okolí bodu)

Buď $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a δ (malé) kladné číslo. *Okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0* je otevřený interval s vlastností

$$\mathcal{O}(x_0) = \begin{cases} (x_0 - \delta, x_0 + \delta), & \text{je-li } x_0 \in \mathbb{R}, \\ (a, \infty), & \text{je-li } x_0 = \infty \ (a \in \mathbb{R}), \\ (-\infty, b), & \text{je-li } x_0 = -\infty \ (b \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Množina $\mathcal{P}(x_0) = \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ (pro $x_0 \in \mathbb{R}$) se nazývá *ryzí* (*prstencové*) *okolí*.

Pro $x_0 \in \mathbb{R}$ definujeme *pravé okolí bodu x_0* jako $\mathcal{O}^+(x_0) = [x_0, x_0 + \delta)$ a *levé okolí bodu x_0* jako $\mathcal{O}^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0]$. Podobně je *pravé ryzí okolí bodu x_0* $\mathcal{P}^-(x_0) = (x_0, x_0 + \delta)$ a *levé ryzí okolí bodu x_0* je $\mathcal{P}^+(x_0) = (x_0 - \delta, x_0)$.

Definice 2 (Limita)

Buď $x_0, L \in \mathbb{R}^*$. Funkce $f(x)$ má v bodě x_0 *limitu* L, píšeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

pokud pro každé okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 tak, že

$$\text{pro všechna } x \in \mathcal{P}(x_0) \ \text{ je } \ f(x) \in \mathcal{O}(L). \tag{1}$$

To, že v podmínce (1) požadujeme, aby $\boxed{x \neq x_0}$, znamená, že

limita nezávisí na hodnotě funkce v bodě x_0!

Interpretace Definice 2 záleží na tom, jestli je x_0 a L vlastní nebo nevlastní bod. Tím dostáváme vlastní limitu ve vlastním bodě, vlastní limitu v nevlastním bodě atd.

Vlastní limita ve vlastním bodě:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ tak, že } \forall x: \; 0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \varepsilon$$

Příklad 4

Ukažte z definice, že $\lim_{x \to 3}(3x + 1) = 10$.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Chceme najít číslo $\delta > 0$ takové, aby $|y - 10| < \varepsilon$, kdykoliv bude $0 < |x - 3| < \delta$. Tedy

$$\big|(3x + 1) - 10\big| < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad |3x - 9| < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad |x - 3| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Stačí tedy vzít $\boxed{\delta := \frac{\varepsilon}{3}}$, případně libovolné jiné δ splňující $0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Vlastní limita v nevlastním bodě, případ $\lim_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$. Zde pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $a > 0$ takové, že

$$\text{pro všechna } \underbrace{x > a}_{x\in\mathcal{O}(\infty)} \text{ je } \underbrace{|f(x) - L| < \varepsilon}_{f(x)\in\mathcal{O}(L)}.$$

Příklad 5

Ukažte z definice, že $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Chceme najít číslo $a > 0$ takové, aby $|y - 0| < \varepsilon$, kdykoliv bude $x > a$. Tedy

$$\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad \frac{1}{x} < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad x > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Stačí tedy vzít $\boxed{a := \frac{1}{\varepsilon}}$, případně libovolné jiné a splňující $a \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

Poznámka 2

Limita posloupnosti $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *pro* $n \to \infty$ *existuje a je konečná (vlastní), neboť lze dokázat, že je tato posloupnost rostoucí a shora ohraničená. Tuto limitu označujeme symbolem e a nazýváme ji Eulerovým číslem (základ přirozených logaritmů). Je tedy*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}.$$

Ve vlastních bodech x_0 se můžeme blížit k bodu x_0 také jen zprava nebo jen zleva, tj. v Definici 2 použijeme v podmínce (1) pouze pravé ryzí okolí bodu x_0 nebo pouze levé ryzí okolí bodu x_0. Dostáváme pak pojmy limity zprava a limity zleva.

Definice 3 (Limita zprava/zleva)

Buď $x_0 \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}^*$. Funkce $f(x)$ má v bodě x_0 *limitu zprava* rovnu číslu L, píšeme

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L,$$

pokud pro každé okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje $\delta > 0$ tak, že

$$\text{pro všechna } x \in (x_0, x_0 + \delta) \ \text{ je } \ f(x) \in \mathcal{O}(L).$$

Funkce $f(x)$ má v bodě x_0 *limitu zleva* rovnu číslu L, píšeme

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L,$$

pokud pro každé okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje $\delta > 0$ tak, že

$$\text{pro všechna } x \in (x_0 - \delta, x_0) \ \text{ je } \ f(x) \in \mathcal{O}(L).$$

Příklad 6

(a) Pro funkci $\operatorname{sgn} x$ („signum“=znaménko) definovanou jako

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0, \\ -1 & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

platí

$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1, \qquad \lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1.$$

(b) Pro funkci $\frac{1}{x}$ platí $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$

- Limita ve vlastním bodě neexistuje, jestliže se limita zleva nerovná limitě zprava, nebo jedna z jednostranných limit neexistuje (např. $\sin \frac{1}{x}$ v nule).
- $\lim_{x \to \infty} \sin x$ neexistuje (a z principu by šlo o limitu zleva, limita zprava zde nemá smysl).

Věta 1 (Vlastnosti limit)

(i) *Funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ nejvýše jednu limitu.*

(ii) *Má-li $f(x)$ vlastní limitu $L \in \mathbb{R}$ v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$, potom je $f(x)$ na nějakém ryzím okolí bodu x_0 ohraničená.*

(iii) *Limita existuje právě když existují obě jednostranné limity a jsou si rovny, tj.*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L = \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

Věta 2 (Vlastnosti limit)

Jsou-li

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L, \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = M,$$

kde $L, M \in \mathbb{R}$ *(pouze vlastní limity!) a* $x_0 \in \mathbb{R}^*$, *potom*

$$\lim_{x \to x_0} \big[f(x) \pm g(x)\big] = L \pm M,$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M,$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \qquad \textit{pokud } M \neq 0,$$

$$\lim_{x \to x_0} \big|f(x)\big| = \Big|\lim_{x \to x_0} f(x)\Big| = |L|.$$

Věta 3 (O třech limitách)

Nechť $x_0, L \in \mathbb{R}^*$. *Je-li* $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ *na nějakém ryzím okolí bodu* x_0 *a je-li*

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L = \lim_{x \to x_0} h(x),$$

potom také existuje limita funkce $f(x)$ *a je rovna číslu* L, *tj.*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Příklad 7

Rozhodněte, jestli má funkce $x \sin \frac{1}{x}$ limitu v bodě $x_0 = 0$.

Protože je funkce $\sin x$ ohraničená (jedničkou shora a mínus jedničkou zdola), pro $x \neq 0$ platí nerovnosti

$$-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|.$$

A protože $\lim_{x \to 0} |x| = 0$, existuje podle Věty 3 také limita funkce $x \sin \frac{1}{x}$ a platí

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Poznámka 3

Všechny vlastnosti limit uvedené ve Větách 1, 2 a 3 platí i pro jednostranné limity, tj. pro limity zprava a zleva.

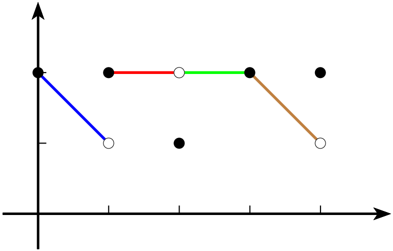
Poznámka 4

Pro výpočet limit používáme značení pro „typ" dané limity, např. $\left|typ\ \frac{0}{0}\right|$, $\left|typ\ \frac{k}{0}\right|$, $\left|typ\ \frac{k}{\infty}\right|$, $\left|typ\ \frac{\infty}{\infty}\right|$, *atd. Typ dané limity zjistíme tak, že dosadíme do daného výrazu přímo limitní hodnotu* $x = x_0$. *Kupříkladu*

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2+4} \quad \left|typ\ \frac{0}{8}\right| = 0.$$

Funkce $f(x)$ je *spojitá v bodě* $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Pokud to platí pouze s jednostrannou limitou, je *spojitá zprava/zleva*.
Spojitost na otevřeném intervalu znamená spojitost v každém jeho bodě.
Spojitost na uzavřeném intervalu znamená navíc jednostranné spojitosti v krajních bodech „zevnitř". Píšeme např. $f(x) \in C[a,b]$.

$$f(x) := \begin{cases} 2-x & \text{pro } x \in [0,1), \\ 2 & \text{pro } x \in [1,2), \\ 1 & \text{pro } x = 2, \\ 2 & \text{pro } x \in (2,3], \\ 5-x & \text{pro } x \in (3,4), \\ 2 & \text{pro } x = 4, \end{cases}$$



je

- *spojitá* v každém bodě $x \in [0,4]$ kromě $x = 0, 1, 2, 4$,
- *spojitá zprava* v každém bodě $x \in [0,4]$ kromě $x = 2, 4$,
- *spojitá zleva* v každém bodě $x \in [0,4]$ kromě $x = 0, 1, 2, 4$.

Věta 4 (Vlastnosti spojitých funkcí)

(i) *Jsou-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ spojité v bodě x_0, pak jsou zde spojité i funkce*

$$(f \pm g)(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \text{ pro } g(x_0) \neq 0.$$

(ii) *Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Je-li $\lim_{x \to x_0} g(x) = M$ a je-li funkce $f(y)$ spojitá v bodě $y_0 = M$, potom*

$$\lim_{x \to x_0} f\big(g(x)\big) = f\Big(\lim_{x \to x_0} g(x)\Big) = f(M).$$

(iii) *Je-li funkce $g(x)$ spojitá v bodě x_0 a je-li funkce $f(y)$ spojitá v bodě $y_0 = g(x_0)$, potom je složená funkce $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ spojitá v bodě x_0.*

Příklad 8

$\lim_{x\to x_0} f\big(g(x)\big)$ může existovat i v případě, že $\lim_{x\to x_0} g(x)$ neexistuje. Např. pro $g(x) = \operatorname{sgn} x$ a $f(y) = y^2$ platí, že $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ neexistuje, ale přesto je

$$\lim_{x\to 0} f\big(g(x)\big) = \lim_{x\to 0} (\operatorname{sgn} x)^2 = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Příklady spojitých funkcí:

- konstantní funkce $f(x) = C$ (v každém bodě $x \in \mathbb{R}$),
- polynom $P(x)$ (v každém bodě $x \in \mathbb{R}$),
- racionální lomená funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ (v každém bodě $x \in \mathcal{D}(R)$, tj. v každém bodě x, kde $Q(x) \neq 0$),
- trigonometrické funkce (všude, kde jsou definovány),
- elementární funkce (tj. konečné kombinace základních elementárních funkcí) na svých definičních oborech.

Příklad 9

(a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $f(x)$ je spojitá na intervalu $[-2, 2]$, tj. $f \in C[-2, 2]$.

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$ je spojitá na intervalu $(-\infty, 0)$, na intervalu $(0, \infty)$, ale není spojitá na žádném intervalu obsahujícím nulu.

(c) Spojitost funkce na intervalech $(-\infty, 0)$ a $[0, \infty)$ ještě nemusí stačit pro spojitost na celém $\mathbb{R}$. Např. funkce nabývající hodnotu 0 pro $x < 0$ a hodnotu 1 pro $x \geq 0$ je spojitá na každém z intervalů $(-\infty, 0)$ a $[0, \infty)$, ale není spojitá na $\mathbb{R}$.

(d) Dirichletova funkce $\chi(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{I} \end{cases}$ není spojitá v žádném bodě ($\lim_{x \to x_0} \chi(x)$ neexistuje – libovolně malé okolí obsahuje 1 i 0).

(e) Funkce $f(x) = x \cdot \chi(x)$ je spojitá v bodě $x_0 = 0$ a není spojitá v žádném jiném bodě.

$$\lim_{x \to 0} \underbrace{x}_{\to 0} \underbrace{\chi(x)}_{\text{ohraničená}} = 0 \quad \text{(viz věta o třech limitách)}$$

Příklad 10

Je-li funkce spojitá, limitu získáme prostým dosazením.

$$\lim_{x\to -1}(x^2+2x) = (-1)^2 + 2(-1) = -1, \qquad \lim_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1.$$

Příklad 11

Ověřte tzv. *základní limity* (limity, které potřebujeme znát k odvozování složitějších pravidel)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0, \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}.$$

Rozebereme první z nich (ostatní viz skripta), tedy $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
$\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \;\Rightarrow\; 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \;\Rightarrow\; 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

všechny jdou do 1 pro $x \to 0^+$.
Protože $\frac{\sin x}{x}$ je sudá funkce, platí to i pro $x \to 0^-$.

Poznámka 5 (Parita)

Pokud má funkce symetrický definiční obor, tedy $x \in \mathcal{D}(f) \Rightarrow -x \in \mathcal{D}(f)$, pak je

- *sudá, jestliže pro $\forall x \in \mathcal{D}(f)$ platí, že $f(-x) = f(x)$,*
- *lichá, jestliže pro $\forall x \in \mathcal{D}(f)$ platí, že $f(-x) = -f(x)$.*

Věta 5 (Weierstrassova)

Je-li funkce $f(x)$ *spojitá na intervalu* $[a, b]$, *tj. na uzavřeném konečném intervalu, potom je na tomto intervalu ohraničená a nabývá v něm své nejmenší a největší hodnoty.*

Věta 6 (Bolzanova)

Je-li funkce $f(x)$ *spojitá na intervalu* $[a, b]$, *potom* $f(x)$ *nabývá v tomto intervalu všech hodnot mezi svou nejmenší a největší hodnotou. Tj. označíme-li* $m := \min f(x)$ *a* $M := \max f(x)$, *potom pro každou hodnotu* $y \in [m, M]$ *existuje (alespoň jedno)* $c \in [a, b]$ *tak, že platí* $f(c) = y$.

Důsledek

Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $[a, b]$ a mají-li hodnoty $f(a)$ a $f(b)$ různá znaménka (tj. $f(a) \cdot f(b) < 0$)), pak existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že platí $f(c) = 0$, tj. rovnice $f(x) = 0$ má v intervalu (a, b) alespoň jedno řešení.

Věta 7 (O spojitosti inverzní funkce)

Je-li funkce $f(x)$ spojitá a ryze monotónní (tj. stále „roste“ nebo stále „klesá“) na intervalu I, potom je také inverzní funkce $f^{-1}(x)$ spojitá a ryze monotónní na intervalu $J := f(I)$.

Z výše uvedené věty plyne spojitost cyklometrických funkcí $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$, a dále spojitost logaritmických funkcí. Také platí, že pokud funkce roste, inverze také roste (ovšem mění se rychlost, viz e^x vs. $\ln x$).

Body nespojitosti

Rozlišujeme následující typy bodů nespojitosti.

(a) *Odstranitelná nespojitost*:
Existuje vlastní limita $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, ale $L \neq f(x_0)$.
($f(x_0)$ nemusí být ani definována.)

(b) *Nespojitost prvního druhu (skok)*:
Existují obě vlastní jednostranné limity $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L_1$ a $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L_2$, ale $L_1 \neq L_2$.

(c) *Nespojitost druhého druhu*:
Aspoň jedna jednostranná limita neexistuje, nebo je nevlastní.

Spojité dodefinování

Má-li funkce f v bodě x_0 odstranitelnou nespojitost a $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, můžeme ji v tomto bodě *spojitě dodefinovat* jako

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} L, & x = x_0, \\ f(x), & x \in \mathcal{D}(f) \smallsetminus \{x_0\}. \end{cases}$$

Příklad 12

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Funkce není spojitá v bodě $x = 0$, neboť $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq f(0)$, $x = 0$ je odstranitelná nespojitost.

Příklad 13

Funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ má skok v $x = 0$.

Příklad 14

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Limita $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ neexistuje, tedy $x = 0$ je nespojitost druhého druhu.

Příklad 15

Funkce $f(x) = e^{1/x}$ má v $x = 0$ jednu jednostrannou limitu nevlastní, je to bod nespojitosti druhého druhu.

Definice 4 (Derivace funkce f v bodě)

Nechť x_0 je vnitřním bodem $\mathcal{D}(f)$. Jestliže existuje limita

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

nazýváme tuto limitu *derivací funkce f v bodě x_0*, píšeme $f'(x_0)$.

Poznámka

- Je-li limita $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$ řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *vlastní derivaci*.
- Je-li limita $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$ řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *nevlastní derivaci* $+\infty$ nebo $-\infty$.

Definice 5 (Derivace funkce)

Má-li funkce f derivaci v každém bodě intervalu $I \subseteq \mathcal{D}(f)$, pak se funkce $x \mapsto f'(x)$ nazývá *derivace funkce f* a značí se f'.

Definice 6 (Derivace zprava / zleva)

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Poznámka

Zavedením h jako $x = x_0 + h$ získáme

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Následující tvrzení jsou přímým důsledkem tvrzení o limitách funkcí.

1. Funkce f má v bodě x_0 nejvýše jednu derivaci.
2. Derivace v bodě existuje právě tehdy, když existují jednostranné derivace a $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.
3. Nechť funkce f, g mají derivace v bodě x_0, pak v x_0 mají derivace i funkce: $f \pm g$, $f \cdot g$ a je-li $g(x_0) \neq 0$ i f/g.

Poznámka

Pozor, tvrzení 3 se týká pouze existence derivace, nikoli její hodnoty.

Definice 7

Nechť funkce f má v bodě x_0 derivaci $f'(x_0)$, pak se přímka

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

nazývá *tečna* ke grafu funkce f v bodě $[x_0, y_0]$.Přímka procházející bodem $[x_0, y_0]$,která je kolmá k tečně v tomto bodě se nazývá *normála* ke grafu funkce f v bodě $[x_0, y_0]$.

Poznámka

Protože součin směrnic dvou vzájemně kolmých přímek je roven -1, je rovnice normály ke grafu funkce f v bodě x_0

(i) pro $f'(x_0) \neq 0$

$$y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

(ii) pro $f'(x_0) = 0$

$$x = x_0.$$

Poznámka

Má-li funkce f v bodě x_0 nevlastní derivace a je v tomto bodě spojitá, potom má v x_0 tečnu

$$t : x = x_0$$

a normálu

$$n : y = f(x_0).$$

(Např. funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v bodě $x_0 = 0$.)

Příklad 16

Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $y = \sqrt{1 - x^2}$ v bodě $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, tedy jedná se o bod grafu funkce.

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}} = -1$$

$$t : y - \frac{1}{\sqrt{2}} = -1\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\boxed{t : y = -x + \sqrt{2}}$$

$$n : y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0)$$

$$n : y - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\boxed{n : y = x}$$

Geometrický význam derivace

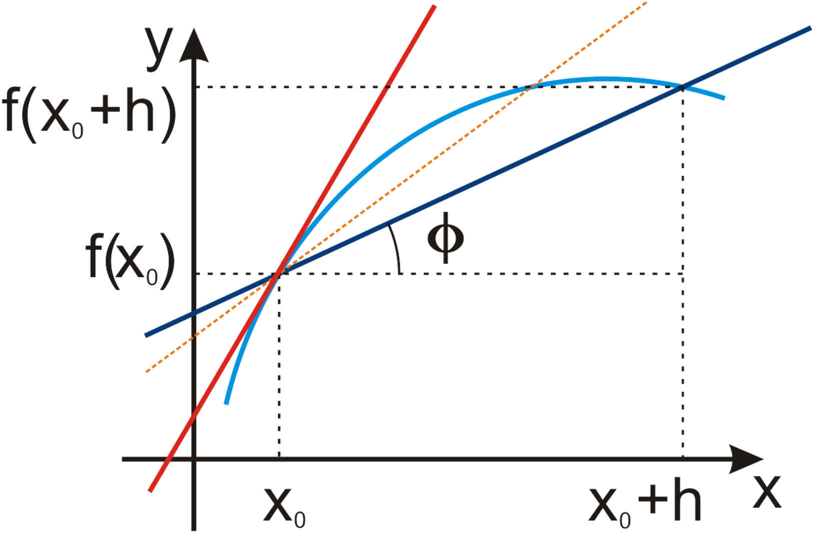
Sečna grafu funkce f procházející body $[x_0, f(x_0)]$ a $[x_0 + h, f(x_0 + h)]$ má směrnici

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Jestliže se s bodem $x_0 + h$ blížíme k bodu x_0 (tj. provádíme limitní přechod $h \to 0$), přejde tato sečna v tečnu v bodě $[x_0, f(x_0)]$. Směrnice tečny ke grafu funkce f v bodě x_0 je tedy

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

což je přesně derivace funkce f v bodě x_0.



y
$f(x_0+h)$
$f(x_0)$
ϕ
x_0
x_0+h
x

Derivace v praxi

▷ Je-li $s(t)$ poloha hmotného bodu na přímce v čase t, potom je výraz

$$\frac{\text{celková dráha}}{\text{celkový čas}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

roven průměrné rychlosti za časový úsek $[t_0, t]$. Zřejmě je pak

$$\lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = s'(t_0)$$

rychlost v okamžiku t_0, tedy $v(t) = s'(t)$. *Rychlost je derivace dráhy*. Zde je nutné vzít v úvahu, že rychlost $v(t)$ má znaménko, tj. $v(t) > 0$ ve směru pohybu, kdy se $s(t)$ zvětšuje a $v(t) < 0$, když se $s(t)$ zmenšuje.

▷ Protože je zrychlení $a(t)$ změna rychlosti, podobně platí, že

$$\lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = v'(t_0)$$

je zrychlení v okamžiku t_0, tj. $a(t) = v'(t)$. *Zrychlení je derivace rychlosti*.

▷ Protože platí, že

$$\text{výkon} = \frac{\text{změna práce}}{\text{změna času}},$$

je $P(t) = W'(t)$. *Výkon je derivace práce*.

▷ Protože platí, že

$$\text{elektrický proud} = \frac{\text{změna elektrického náboje}}{\text{změna času}},$$

je $I(t) = Q'(t)$. *Proud je derivace náboje*.

Věta 8

Nechť funkce f *a* g *mají v bodě* x_0 *derivaci a nechť* $c \in \mathbb{R}$ *je libovolné. Pak platí*

(i)
$$(cf)' = cf',$$

(ii)
$$(f \pm g)' = f' \pm g',$$

(iii)
$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g',$$

(iv)
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \quad \text{pro} \quad g \neq 0.$$

Důkaz (iii).

$$
\begin{aligned}
\big(f(x)\cdot g(x)\big)'_{x=x_0} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} g(x+h)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
&= \underbrace{\lim_{h\to 0} g(x+h)}_{g(x)}\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{f'(x)} + f(x)\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{g'(x)}\\
&= f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).
\end{aligned}
$$

(Pro $h \to 0$ máme $x \to x_0$.) □

Věta 9

Má-li funkce v bodě x_0 derivaci (vlastní), pak je v tomto bodě spojitá.

Důkaz.

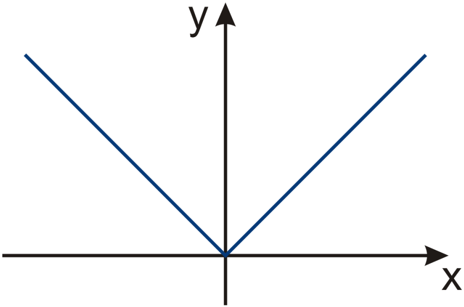
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) = \lim_{x\to x_0}(x-x_0)\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$$

$$\underbrace{\lim_{x\to x_0}(x-x_0)}_{0}\cdot\underbrace{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\text{číslo}\in\mathbb{R}} = 0.$$

□

Poznámka

Opačné tvrzení neplatí – ze spojitosti neplyne existence derivace.
Např. funkce $f(x) = |x|$ je spojitá na celém $\mathbb{R}$, ale v $x_0 = 0$ nemá derivaci.



Uvažujme soukolí tří ozubených kol, přičemž kolo A má 12 zubů, kolo B má 4 zuby a kolo C má 6 zubů. Jestliže kolo A udělá a otáček, kolo B udělá b otáček a kolo C udělá c otáček, potom platí

$$a = \frac{1}{3}\,b, \qquad b = \frac{3}{2}\,c, \qquad \text{a tedy je} \qquad a = \frac{1}{3}\,b = \frac{1}{3}\,\frac{3}{2}\,c = \frac{1}{2}\,c.$$

Velikost změny a ke změně b je zřejmě $\frac{1}{3}$, velikost změny b ke změně c je zřejmě $\frac{3}{2}$, a proto velikost změny a ke změně c je $\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$.

Ukázali jsme tedy, že při *skládání funkcí* se velikost změn *násobí*.

Věta 10

Nechť funkce f má derivaci v bodě x_0 a funkce g má derivaci v bodě $y_0 = f(x_0)$. Pak složená funkce

$$F(x) = g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x)$$

má derivaci v bodě x_0 a platí, že

$$F'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

Věta 11

Nechť funkce f má pro každé $x \in I$ derivaci a $f'(x) \neq 0$. Pak na intervalu $J = f(I) = \{y : \exists x \in I, f(x) = y\}$ existuje funkce inverzní a pro její derivaci platí

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Důkaz (odvození).

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \overset{\text{derivujeme}}{\longrightarrow} \quad f'(f^{-1}(x)) \cdot [f^{-1}(x)]' = 1$$

$$\Downarrow$$

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

$\square$

Věta 12 (O derivaci elementárních funkcí)

Nechť $n \in \mathbb{Z}$, $a, b, c, \alpha \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $b \neq 1$.

- $(c)' = 0$,
- $(x^n)' = nx^{n-1}$,
- $(e^x)' = e^x$,
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$,
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,
- $(\log_b x)' = \frac{1}{x \cdot \ln b}$,
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$,
- $(\sin x)' = \cos x$,
- $(\cos x)' = -\sin x$.
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$,
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$,
- $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Důkaz.

- $(c)' = 0, c \in \mathbb{R}$:

$$(c)' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

- $(x^n)' = nx^{n-1}, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}(x^n)' &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}h^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left[nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\right] = nx^{n-1}.\end{aligned}$$

- $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}, n \in \mathbb{N}$:

$$\left(x^{-n}\right)' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{0\cdot x^n - 1\cdot (x^n)'}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

- $(e^x)' = e^x$:

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h}$$
$$= e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x .$$

- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $a \in \mathbb{R}^+$:

$$(a^x)' = \left(e^{\ln a^x}\right)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = e^{x \ln a}(1 \cdot \ln a + x \cdot 0) = a^x \ln a.$$

- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$$(\ln x)' = \left| f^{-1}(x) = \ln x, f(x) = e^x \Rightarrow \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \right| = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

- $(\log_b x)' = \frac{1}{x \cdot \ln b}$, $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$:

$$(\log_b x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln b}\right)' = \frac{1}{\ln b}(\ln x)' = \frac{1}{x \cdot \ln b}.$$

- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{R}$:

$$(x^\alpha)' = \left(\mathrm{e}^{\alpha \ln x}\right)' = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}\,\frac{\alpha}{x} = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

- $(\sin x)' = \cos x$:

$$
\begin{aligned}
(\sin x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \cos x \frac{\sin h}{h} + \lim_{h\to 0} \sin x \frac{\cos h - 1}{h} \\
&= \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} + \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} \\
&= \cos x - 2 \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\sin^2(h/2)}{h} \\
&= \cos x - 2 \sin x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h/2)}{h}}_{=1/2} \lim_{h\to 0} \sin(h/2) \\
&= \cos x - 0 = \cos x.
\end{aligned}
$$

- $\cos x$ podobně, $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ jako derivaci podílu.

- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

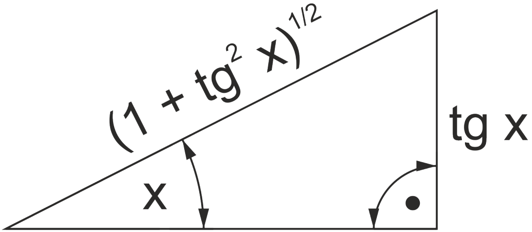
$$(\arcsin x)' = \left| f^{-1}(x) = \arcsin x, f(x) = \sin x \Rightarrow \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \right|$$
$$= \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$(\arccos x)' = \left| \arccos x = \pi/2 - \arcsin x \right| = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \left| f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x, f(x) = \operatorname{tg} x \Rightarrow \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \right|$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(arctgx)}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$



Obr. 1: $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$

- $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$:

$$(\operatorname{arccotg} x)' = \left| \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \pi/2 \right| = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Věta 13 (Logaritmická derivace)

$$\left[f(x)^{g(x)}\right]' = f(x)^{g(x)}\left[g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}\left[f(x)^{g(x)}\right]' = \left[\mathrm{e}^{\ln(f(x))^{g(x)}}\right]' = \left[\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}\right]'&\\ = \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}\left[g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{1}{f(x)}f'(x)\right]&\\ = f(x)^{g(x)}\left[g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right]&\end{aligned}$$

□

Definice 8 (Derivace vyších řádů)

$$f'' := (f')', \dots, f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

Příklad 17

Odvoďte vzorec pro výpočet n-té derivace funkce $\frac{1}{x}$.

$$f' = -\frac{1}{x^2},\ f'' = \frac{2}{x^3},\ f''' = -\frac{2 \cdot 3}{x^4},\ \dots,\ f^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

Indukční krok:

$$f^{(n+1)} = \left[(-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}\right]' = -(-1)^n \frac{n!(n+1)}{x^{n+2}} = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}.$$

Věta 14 (Leibnitzovo pravidlo)

Pro n-tou derivaci součinu platí vzorec

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(n-i)}.$$

Příklad 18

Vypočtěte třetí derivaci funkce $f(x) = \mathrm{e}^x \sin 2x$.

$$f''' = \mathrm{e}^x \sin 2x + 3 \cdot 2\,\mathrm{e}^x \cos 2x - 3 \cdot 4\,\mathrm{e}^x \sin 2x - 8\,\mathrm{e}^x \cos 2x$$
$$= \mathrm{e}^x(\sin 2x + 6\cos 2x - 12\sin 2x - 8\cos 2x) = \mathrm{e}^x(-11\sin 2x - 2\cos 2x).$$

Věta 15 (Rolleova věta o střední hodnotě)

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a na otevřeném intervalu (a, b) existuje její derivace f'.
Jestliže $f(a) = f(b)$, pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f'(c) = 0$.

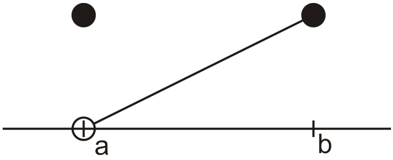
Věta 16 (Lagrangeova)

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a na intervalu (a, b) existuje derivace f'.
Pak existuje $c \in (a, b)$takové, že $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$, tj.

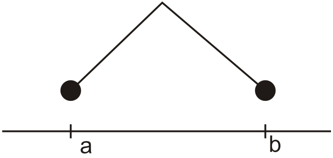
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Poznámka

Předpoklady vět 15 a 16 nelze zeslabit. Např. předpoklad spojitosti na $[a, b]$ nelze nahradit spojitostí na (a, b) (obr. 2). Nelze ani vypustit předpoklad existence derivace (obr. 3).



Obr. 2: Interval $(a, b]$



Obr. 3: Existence derivace

Důsledek

Jsou-li $f(x)$ a $g(x)$ diferencovatelné na (a, b), potom

- $f'(x) = 0$ na $(a, b) \;\Rightarrow\; f(x) \equiv c$ na (a, b).
- $f'(x) = g'(x)$ na $(a, b) \;\Rightarrow\; f(x) = g(x) + c$ na (a, b) ($f(x)$ a $g(x)$ se liší o konstantu).

Věta 17 (L'Hospitalovo pravidlo)

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, *na ryzím okolí* x_0 *jsou funkce* f, g *diferencovatelné a* $g'(x) \neq 0$. *Dále nechť je splněna jedna z podmínek*

(i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x)$,

(ii) $\lim_{x\to x_0} |g(x)| = \infty$.

Existuje-li (vlastní nebo nevlastní)

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

pak existuje také

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

a obě limity jsou stejné. Tvrzení platí i pro jednostranné limity.

Poznámka

Jestliže neexistuje limita derivací, neznamená to, že neexistuje původní limita. Pouze nejde použít L'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x+\cos x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\cos x}{1-\sin x}.$$

Tato limita neexistuje, tedy L'Hospitalovo pravidlo nelze použít. Původní limitu ale snadno spočítáme.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x+\cos x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}} = 1.$$

Poznámka

L'Hospitalovo pravidlo lze používat opakovaně, tj.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\cdots$$

Pozor na splnění předpokladů!

Příklad 19

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{2}{1}=2$$

Neurčité výrazy

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0, 1^\infty,\ \infty^0.$$

- $0\cdot\infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{\infty}{\frac{1}{0}}$
- $\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)}$

$$0^0 \to \mathrm{e}^{0\cdot(-\infty)},\quad 1^\infty \to \mathrm{e}^{\infty\cdot 0},\quad \infty^0 \to \mathrm{e}^{0\cdot\infty}$$

- $\infty-\infty$

$$f-g = \frac{1}{\frac{1}{f}} - \frac{1}{\frac{1}{g}} = \frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}} = \left|\tfrac{0}{0}\right| = \dots$$

(tento obrat se téměř nepoužívá - většinou to jde mnohem jednodušeji úpravami)

- „$0 \cdot \infty$"

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln x = |0 \cdot (-\infty)| = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = |\tfrac{-\infty}{\infty}|$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

- „$\infty - \infty$"

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x\right) = |(\infty - \infty)^+, (-\infty + \infty)^-|$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x - x\cos x}{x \sin x}\right) = |\tfrac{0}{0}| = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{\sin x + x\cos x}\right) = |\tfrac{0}{0}|$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x + x\cos x}{\cos x + \cos x - x\sin x}\right) = \frac{0}{2} = 0$$

- „$\infty - \infty$“

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x\right) &= |\infty-\infty| \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x\right)\frac{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2}+x^2}{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2}+x^2} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2}+x^2} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(1+\frac{1}{x})^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

- „0^0"

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = \left|0^0\right| = e^{\lim_{x\to 0^+} \sin x \ln x} = *$$

$$\lim_{x\to 0^+} \sin x \ln x = \left|0\cdot(-\infty)\right| = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \left|\tfrac{-\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}$$
$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x\cos x} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos x} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x} = \left|\tfrac{0}{0}\right|$$
$$= -1 \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin x\cos x}{1} = 0$$

$$* = e^0 = 1$$

- „1^∞“

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = |1^\infty| = \mathrm{e}^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}} = *$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x} = |\infty\cdot 0| = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2} = \left|\tfrac{0}{0}\right|$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}\,\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{2x^3} = \left|\tfrac{0}{0}\right|$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{6x^2} = \left|\tfrac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x - x\cos x}{12x} = \left|\tfrac{0}{0}\right|$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x - \cos x + x\sin x}{12} = \frac{-1}{6}$$

$$* = \mathrm{e}^{-1/6}$$

- Funkce $f(x)$ zadaná vzorcem $y = f(x)$ je zadaná *explicitně*, např.

$$y = x + \sin x.$$

- Funkce zadaná rovnicí $F(x, y) = 0$ je zadaná *implicitně*, např.

$$x^2 + \sin(xy) - 2y = 0.$$

- Implicitně zadanou funkci lze derivovat s využitím pravidla pro derivaci složené funkce.

Poznámka 6

Základním předpokladem je, že vše probíhá v bodech, kde je derivace $F(x, y)$ podle y (tj. podle proměnné, která reprezentuje funkci) nenulová. Pro derivace lze odvodit vzorce s použitím parciálních derivací (viz diferenciální počet více proměnných), zde je budeme počítat přímo (obtížnost je prakticky stejná).

Příklad 20

Určeme směrnici tečny ke kružnici $x^2 + y^2 = 25$ v bodě $P = [-3, 4]$. Derivováním zadané rovnice podle proměnné x dostaneme (proměnnou y chápeme jako funkci, tj. $y = y(x)$)

$$(x^2 + y^2)' = (25)' \quad \Rightarrow \quad 2x + 2yy' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

A proto je směrnice tečny v bodě P (tedy derivace v bodě P) rovna

$$y' = -\frac{-3}{4} = \frac{3}{4}.$$

Poznámka 7

Kružnice $x^2 + y^2 = 25$ zadává implicitně dvě funkce, horní a dolní půlkružnici, které lze explicitně vyjádřit jako $y = \sqrt{25 - x^2}$ a $y = -\sqrt{25 - x^2}$ a následně si „vybrat“, se kterou potřebujeme dále pracovat. Často ale explicitní vyjádření není možné, nebo je práce s implicitním tvarem efektivnější.

Příklad 21

Určeme derivaci funkce $y = f(x)$, která je zadaná rovnicí $4y = x^3 + \cos y$. Derivováním zadané rovnice podle proměnné x dostaneme

$$(4y)' = (x^3 + \cos y)' \quad \Rightarrow \quad 4y' = 3x^2 - (\sin y)\, y' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{3x^2}{4 + \sin y}.$$

Příklad 22

Určeme první a druhou derivaci funkce $y = f(x)$, která je zadaná rovnicí $3x^4 - 4y^3 = 1$. Tedy
$(3x^4 - 4y^3)' = (1)' \Rightarrow 12x^3 - 12y^2y' = 0 \Rightarrow x^3 - y^2y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{x^3}{y^2}$.
Pro zisk vyšší derivace postup opakujeme, tj.

$$(x^3 - y^2y')' = (0)' \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - (2yy' \cdot y' + y^2 \cdot y'') = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2 - 2y\,(y')^2 - y^2\,y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{3x^2 - 2y\,(y')^2}{y^2}.$$

Ve výsledku dosadíme za y' z předchozího výpočtu, tj.

$$y'' = \frac{3x^2 - 2y\left(\frac{x^3}{y^2}\right)^2}{y^2} = \frac{3x^2y^3 - 2x^6}{y^5}.$$

Příklad 23

Člověk výšky 180 cm jde rychlostí 1.5 m/s k pouliční lampě, jejíž zdroj světla je 4.8 metrů nad zemí.

(i) Jakou rychlostí se pohybuje špička jeho stínu?

(ii) Jakou rychlostí se mění délka jeho stínu, když je daný člověk 3 metry od stojanu lampy?

- $x(t)$ = pozice člověka [m],
- $y(t)$ = pozice špičky jeho stínu [m],
- t = čas [s].

Potom víme, že $x'(t) = -1.5$ m/s (vzdálenost od lampy se zmenšuje, proto je tato derivace záporná). Hledáme

(i) $y'(t)$,

(ii) $[y(t) - x(t)]'$ pro $x = 3$ m.

(i) Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků vyplývá, že

$$\frac{4.8}{y(t)} = \frac{1.8}{y(t) - x(t)} \quad \Rightarrow \quad y(t) = 1.6\,x(t).$$

Derivováním podle t obdržíme

$$y'(t) = 1.6\,x'(t) \quad \Rightarrow \quad y'(t) = 1.6 \cdot (-1.5) = -2.4 \text{ m/s}.$$

Špička stínu se pohybuje rychlostí 2.4 m/s (přibližuje se k lampě).

(ii) Máme

$$y(t) - x(t) = \frac{1.8}{4.8}\,y(t) = 0.375\,y(t),$$

tj. po derivování a dosazení

$$[y(t) - x(t)]' = 0.375\,y'(t) = 0.375 \cdot (-2.4) = -0.9 \text{ m/s}.$$

Stín se zkracuje a to rychlostí 0.9 m/s (rychlost nezávisí na vzdálenosti člověka od lampy).

■

Příklad 24

Policejní vrtulník letí 3 km nad rovnou cestou v obci rychlostí 120 km/h. Pilot vidí protijedoucí auto a radarem zjistí, že když je auto od něj 5 km daleko, jejich vzdálenost se zmenšuje rychlostí 160 km/h. Určete rychlost auta v tomto okamžiku.

- $x(t) =$ auta (vodorovná) [km],
- $y(t) =$ vrtulníku (vodorovná) [km],
- $t =$ čas [h],
- $s(t) =$ vzdušná vzdálenost vrtulníku a auta [km].

Tedy $y'(t) = 120$ km/h a $s'(t) = -160$ km/h pro $s = 5$ km
(jejich vzdušná vzdálenost se zmenšuje, proto je derivace záporná).

Hledáme $x'(t)$ v tomto okamžiku.

Z rovnice

$$[x(t) - y(t)]^2 + 3^2 = s^2(t)$$

dostaneme derivováním podle t

$$2\,[x(t) - y(t)]\,[x'(t) - y'(t)] = 2\,s(t)\,s'(t),$$

tedy

$$x'(t) = y'(t) + \frac{s(t)\,s'(t)}{x(t) - y(t)}.$$

Pro $s = 5$ km je $x - y = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ km, tedy dosazením do výše uvedeného vztahu dostaneme pro daný okamžik, že

$$x'(t) = 120 + \frac{5 \cdot (-160)}{4} = -80 \text{ km/h}.$$

Auto jede (přibližuje se z pohledu pilota vrtulníku) v obci rychlostí 80 km/h. ∎

Definice 9

Buď f funkce a $M \subseteq \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že funkce f je na množině M

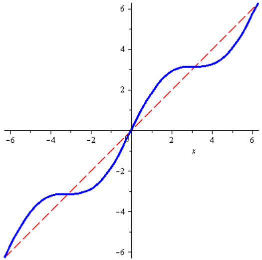
- *rostoucí*, jestliže
$$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2),$$
- *neklesající*, jestliže
$$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2),$$
- *klesající*, jestliže
$$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2),$$
- *nerostoucí*, jestliže
$$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

Věta 18

Nechť $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) pro všechna $x \in I = (a, b)$. Pak je funkce f na I rostoucí (klesající). Je-li $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) na I, pak je f neklesající (nerostoucí).

Poznámka

Opačná implikace „f je rostoucí $\Rightarrow f'(x) > 0$“ obecně neplatí, např. funkce $f(x) = x + \sin x$ je rostoucí $\mathbb{R}$, ale $f'(x) = 0$ pro $x = (2k+1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.



Platí: f je rostoucí $\Rightarrow f'(x) \geq 0$ a rovnost nule nenastane na žádném podintervalu intervalu I, kde je funkce rostoucí (tj. na žádném intervalu větším než jeden bod). Kdyby $f'(x) = 0$ na (x_1, x_2), $x_1 < x_2$, tak podle Lagrangeovy věty $\exists c \in (x_1, x_2):\ f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(c)}_{=0}(x_2 - x_1) \Rightarrow$

$f(x_1) = f(x_2)$, což je spor s tím, že je funkce rostoucí.

Definice 10 (Lokální extrémy)

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *lokální maximum (minimum)*, jestliže existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že $f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$ pro $\forall x \in \mathcal{O}(x_0)$.

Jsou-li nerovnosti pro $x \neq x_0$ ostré, mluvíme o *ostrém* lokálním maximu, resp. minimu.

Věta 19 (Nutná podmínka pro lokální extrém funkce mající derivaci)

Nechť funkce f má v bodě x_0 lokální extrém a existuje $f'(x_0)$.
Pak $f'(x_0) = 0$.

Důkaz.

Případy $f'(x_0) > 0$ a $f'(x_0) < 0$ vedou ke sporu s faktem, že funkce f má v bodě x_0 lokální extrém. □

Definice 11

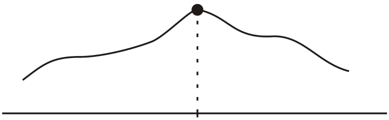
Body, kde $f'(x) = 0$, se nazývají *stacionární body* funkce f.

Věta 20

Nechť funkce f je spojitá v bodě x_0. Jestliže existuje okolí $\mathcal{P}^-(x_0)$, v němž je funkce f rostoucí (klesající), a $\mathcal{P}^+(x_0)$, v němž je funkce klesající (rostoucí), pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum (minimum).

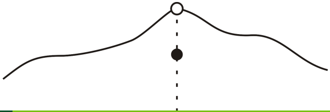
Důkaz.

- $f(x_0) > f(x)$ v levém i pravém okolí bodu x_0 (minimum podobně)



□

- pozor na spojitost



Věta 21

Nechť je funkce f spojitá v bodě x_0. Jestliže existuje okolí $\mathcal{P}^-(x_0)$, kde $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), a $\mathcal{P}^+(x_0)$, kde $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$), pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum (minimum).

Důkaz.

Plyne z vět 18 a 20. □

Věta 22

Nechť bod x_0 je stacionárním bodem funkce f (tj. $f'(x_0) = 0$), a platí, že $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$). Pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum (maximum).

Důkaz.

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f'$ je v x_0 rostoucí, tedy

$$\exists \mathcal{P}^-(x_0): \; f'(x) < f'(x_0) = 0,$$

$$\exists \mathcal{P}^+(x_0): \; f'(x) > f'(x_0) = 0.$$

$f'(x_0)$ existuje $\Rightarrow f$ je spojitá v x_0. V $P^-(x_0)$ je f klesající, v $P^+(x_0)$ je f rostoucí, tedy x_0 je ostré lokální minimum. (Pro maximum podobně.) $\square$

Definice 12 (Absolutní (globální) extrémy)

Buď $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in [a, b]$ *absolutní maximum (minimum) na intervalu* $[a, b]$, jestliže pro všechna $x \in [a, b]$ platí, že

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)).$$

Jsou-li nerovnosti pro $x \neq x_0$ ostré, mluvíme o *ostrých* absolutních extrémech funkce na $[a, b]$.

Věta 23

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$. Pak funkce f nabývá svého absolutního maxima i minima na intervalu $[a, b]$ a to buď v bodě lokálního extrému ležícího v (a, b) nebo v jednom z krajních bodů $x = a$, $x = b$.

Důkaz.

Podle 2. Weierstrassovy věty existují $x_1, x_2 \in [a, b]$ takové, že

$$f(x_1) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}, \quad f(x_2) = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Pro $x = x_1$ máme možnosti: Buď $x_1 = a$, nebo $x_1 = b$, nebo $x_1 \in (a, b)$, pak je x_1 bodem lokálního maxima. Analogicky pro x_2. $\square$

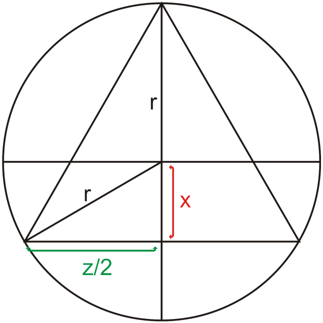
Poznámka

Globální extrémy spojité funkce f na intervalu $[a, b]$ hledáme takto:

Určíme stacionární body a body uvnitř intervalu $[a, b]$, v nichž neexistuje derivace, pak porovnáme funkční hodnoty v těchto bodech s hodnotami $f(a)$ a $f(b)$.

Příklad 25

Do kružnice s poloměrem r vepište rovnoramenný trojúhelník s maximálním obsahem. Tento maximální obsah určete.



$$P = \tfrac{1}{2}zv = \tfrac{1}{2}2\sqrt{r^2 - x^2}(x + r)$$
$$= (r + x)\sqrt{r^2 - x^2}$$
$$\to \max,\ x \in [-r, r]$$

$$P = P(x), \quad P(-r) = 0 = P(r)$$

$$P'(x) = \sqrt{r^2 - x^2} + (r + x)\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-2x^2 - rx + r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0$$

$\Rightarrow x_1 = -r \notin (-r, r),\ \ x_2 = r/2$ (max. např. z P'')

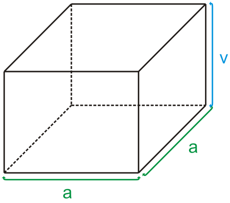
$$P(r/2) = (r + r/2)\sqrt{r^2 - r^2/4} = \tfrac{3}{4}\sqrt{3}r^2$$

Příklad 26

Určete rozměry otevřeného zahradního bazénu se čtvercovým dnem daného objemu $32\,\mathrm{m}^3$ tak, aby se na vyzdění jeho dna a stěn spotřebovalo minimum materiálu. Délka bazénu musí být v rozmezí 2–8 metrů.

Ze zadaného objemu vyjádříme výšku bazénu

$$V = a^2 \cdot v \quad \Rightarrow \quad v = \frac{V}{a^2}.$$



Funkce určující obsah dna a stěn je

$$S = a^2 + 4 \cdot v \cdot a \quad \Rightarrow \quad S(a) = a^2 + \frac{4V}{a},$$

kterou chceme minimalizovat pro $a \in [2, 8]$.

Nejprve najdeme stacionární bod

$$S'(a) = 2a - \frac{4V}{a^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[3]{2V} \quad \overset{V=32}{\Rightarrow} \quad a = 4, \;\; v = 2.$$

Nyní porovnáme hodnotu funkce objemu v nalezeném bodě $a = 4$ s hodnotami v krajních bodech, tj.

$$S(a) = a^2 + \frac{4\cdot 32}{a} \quad \Rightarrow \quad V(2) = 68, \quad V(4) = 48, \quad V(8) = 80.$$

Globální minimum je tedy v nalezeném stacionárním bodě a optimální rozměry bazénu splňujícího zadání jsou $4 \times 4 \times 2$.

Ověření, že jde skutečně o globální extrém, je samozřejmě možné i postupem z průbehu funkce, ten ale bývá většinou zdlouhavější. Zde např. ověříme, že objem na obě strany od stacionárního bodu roste a nižší hodnota tedy jinde být nemůže.

a	$(0,4)$	$(4,\infty)$
$\operatorname{sgn} S'$	$-$	$+$
S	$\searrow$	$\nearrow$

Definice 13 (Konvexní a konkávní funkce)

Funkce $f(x)$ mající vlastní derivaci na intervalu $I \subseteq \mathcal{D}(f)$ se nazývá

- *konvexní na intervalu I*, pokud je $f'(x)$ neklesající na I,
- *konkávní na intervalu I*, pokud je $f'(x)$ nerostoucí na I,
- *ostře konvexní na intervalu I*, pokud je $f'(x)$ rostoucí na I,
- *ostře konkávní na intervalu I*, pokud je $f'(x)$ klesající na I.

Poznámka

Nadgraf (množina $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \mathcal{D}(f), y \geq f(x)\}$) konvexní funkce je konvexní množina.

Věta 24

Nechť funkce f má na otevřeném intervalu I vlastní druhou derivaci a platí

$$f''(x) > 0 \quad (f''(x) < 0) \quad \forall x \in I.$$

Pak funkce f je na intervalu I ostře konvexní (ostře konkávní).

Věta 25

Nechť funkce f má na intervalu I derivaci a pro libovolné $x_0 \in I$ platí

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \forall x \in I, \tag{2}$$

tj. graf funkce f leží nad tečnou sestrojenou v libovolném bodě $x_0 \in I$. Pak je funkce f konvexní na intervalu I.

Poznámka

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \forall x, x_0 \in I,$$

tj. graf funkce f leží pod tečnou sestrojenou v libovolném bodě $x_0 \in I$, pak je f na intervalu I konkávní.

Definice 14

Předpokládejme, že funkce f má v bodě x_0 derivaci $f'(x_0)$.
Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *inflexní bod* (graf funkce f má inflexní bod), jestliže existuje okolí $\mathcal{P}^-(x_0)$, v němž je funkce ryze konvexní (konkávní), a okolí $\mathcal{P}^+(x_0)$, v němž je f ryze konkávní (konvexní).

Poznámka

Definici konvexnosti a konkávnosti funkce vyhovuje jí i lineární funkce $y = ax + b$, která je konvexní i konkávní. Žádný inflexní bod ale nemá.

Příklad 27

- $y = x^3$ má inflexní bod $x_0 = 0$,
- $y = \sin x$ má inflexní body $x_0 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Věta 26

Jestliže x_0 je inflexní bod funkce f a $f''(x_0)$ existuje, pak $f''(x_0) = 0$.

Důkaz.

Kdyby $f''(x_0) > 0$, pak je f v okolí x_0 konvexní $\rightarrow$ spor,
kdyby $f''(x_0) < 0$, pak je f v okolí x_0 konkávní $\rightarrow$ spor. $\square$

Věta 27

Nechť $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, pak funkce f má v bodě x_0 inflexní bod.

Věta 28

Nechť funkce f má v bodě x_0 derivace po řád $n \geq 1$ $(n \in \mathbb{N})$ včetně a $f'(x_0) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(x_0) = 0$ a $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

1. *Je-li n sudé, má f v x_0 lokální extrém, a to minimum pro $f^{(n)}(x_0) > 0$ a maximum pro $f^{(n)}(x_0) < 0$.*
2. *Je-li n liché, má f v x_0 inflexní bod.*

Definice 15 (Asymptota bez směrnice)

Řekneme, že svislá přímka $x = x_0$ je *asymptotou bez směrnice* grafu funkce $y = f(x)$, jestliže aspoň jedna z jednostranných limit

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x), \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

je nevlastní.

Příklad 28

Funkce $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ má asymptoty bez směrnice $x = 1$ a $x = -1$.
(Obě jednostranné limity jsou nevlastní.)

Příklad 29

Funkce $f(x) = \mathrm{e}^{1/x}$ má asymptotu bez směrnice $x = 0$.
(Jedna jednostranná limita je nevlastní.)

Příklad 30

Funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ nemá asymptotu bez směrnice.

Definice 16

Řekneme, že přímka $y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ je *asymptotou grafu funkce* $y = f(x)$ pro $x \to \infty(-\infty)$, jestliže

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

$$\left(\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \right).$$

Přímka $y = ax + b$ se nazývá *asymptota se směrnicí*.

Poznámka

Asymptoty se směrnicí může mít funkce nejvýše dvě (do $\pm\infty$).

Věta 29

Přímka $y = ax + b$ je asymptotou se směrnicí grafu funkce $y = f(x)$ právě tehdy, když

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax),$$

přičemž $x \to +\infty$ je pro asymptotu v $+\infty$ a $x \to -\infty$ pro asymptotu v $-\infty$.

Důkaz.

Přímka je asymptotou jestliže

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - ax] = b,$$

což znamená

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - a\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{b}{x} = 0,$$

tedy

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = a.$$

□

Postup při vyšetřování průběhu funkce

(i) *Přímo z funkce*:

- $D(f)$, sudost/lichost, periodičnost, průsečíky s osami, kladnost/zápornost,
- asymptoty (se směrnicí, bez směrnice).

(ii) *Z první derivace*: rostoucí/klesající, lokální extrémy.

(iii) *Z druhé derivace*: konvexní/konkávní, inflexní body.

(iv) *Načrtnutí grafu*: ke všem výše zmíněným bodům dopočítáme funkční hodnoty a zkombinujeme zjištěné informace.

Postupně tedy plníme následující body:

a) definiční obor,
b) sudost/lichost (periodičnost),
c) asymptoty bez směrnice,
d) asymptoty se směrnicí,
e) průsečíky s osami,
f) kladnost/zápornost,

g) první derivaci,
h) kde je f rostoucí/klesající,
i) lokální extrémy,

j) druhou derivaci,
k) kde je f konvexní/konkávní,
l) inflexní body,

m) funkční hodnoty ve významných bodech,
n) načrtneme graf.

Příklad 31

Vyšetřete průběh funkce
$$f(x) = -\frac{x^2}{x+1}$$

Řešení:

a) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla taková, že $x+1 \neq 0$. Proto máme
$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

b) O sudosti/lichosti funkce snadno rozhodneme dosazením $-x$. Poněvadž platí
$$f(-x) = -\frac{x^2}{-x+1} \neq \pm f(x),$$
není zadaná funkce ani lichá, ani sudá (což je vidět už z nesymetrie definičního oboru). Vzhledem k definičnímu oboru je zřejmé, že funkce nemůže být periodická.

c) Asymptoty bez směrnice popisují limitní chování funkce v bodech nespojitosti (nebo na okraji definičního oboru), proto přímým výpočtem ihned dostaneme

$$\lim_{x\to -1^+} -\frac{x^2}{x+1} = -\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{x+1} = -(+\infty) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to -1^-} -\frac{x^2}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} -\frac{x^2}{x+1} = -(-\infty) = \infty.$$

Funkce má jednu svislou asymptotu $x = -1$.

d) Pomocí vzorců určíme asymptoty se směrnicí (pokud existují).

$$a = \lim_{x\to \pm\infty} -\frac{x^2}{x^2+x} = -1,$$
$$b = \lim_{x\to \pm\infty} -\frac{x^2}{x+1} + x = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x}{x+1} = 1.$$

Funkce $f(x)$ má tedy v $+\infty$ i $-\infty$ asymptotu se směrnicí, která je dána rovnicí $y = -x + 1$.

e) Určíme průsečíky s osou x ($\Rightarrow y = 0$):

$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0,$$

tedy $P_x = [0, 0]$,
a s osou y ($\Rightarrow x = 0$):

$$y = -\frac{0^2}{0+1} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = 0,$$

tedy $P_y = [0, 0] = P_x$.

f) Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná:

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
sgn f	$+$	$-$	$-$
f	kladná	záporná	záporná

g) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x}{(x+1)^2}, \quad D(f') = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

h) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.

$$f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -x(x+2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = -2.$$

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
sgn f'	$-$	$+$	$+$	$-$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$

i) Z tabulky vidíme, že funkce má v $x = -2$ lokální minimum a v $x = 0$ lokální maximum.

j) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = \frac{-2x-2}{(x+1)^4} = \frac{-2}{(x+1)^3},$$
$$D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

k) Určíme kritické body a intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

$$f''(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -2 = 0,$$

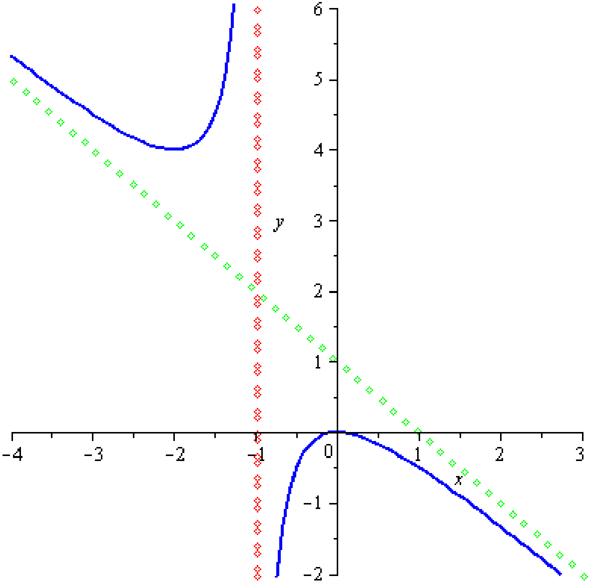
což je nesmysl. Druhá derivace tedy nemá žádný nulový bod. Nesmíme ovšem zapomenout, že její znaménko se může změnit i v bodech, ve kterých není definována (tj. v „dírách“ jejího definičního oboru).

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
sgn f''	$+$	$-$
f	$\cup$	$\cap$

l) Funkce nemá žádný inflexní bod ($-1 \notin D(f)$).

m) Zrekapitulujme význačné body a spočtěme v nich funkční hodnoty.
   - Průsečíky s osami $P_x = P_y = [0, 0]$.
   - Lokální minimum v $x = -2, f(-2) = 4$, tedy jde o bod $[-2, 4]$.
   - Lokální maximum v $x = 0, f(0) = 0$, tedy jde o bod $[0, 0]$.

n) Nyní zkombinujeme všechny získané informace a obdržíme graf funkce



Příklad 32

Dokažte pro $x \geq 0$ identitu

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} \frac{\sqrt{1+x^2} - x\frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2}2x}{(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}} \frac{-1}{2}(1+x^2)^{-3/2}2x = \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{1+x^2},$$

kde jsme využili $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$.
Dosaďme $x = 1$.

$$\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}}$$

V jednom bodě z intervalu nabývají stejné hodnoty a derivace mají stejné, tedy identita platí na celém intervalu $I = [0, \infty)$.

Příklad 33

Dokažte, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $2x \operatorname{arctg} x \geq \ln(1 + x^2)$.

$$F(x) := 2x \operatorname{arctg} x - \ln(1 + x^2)$$

a spočítáme minimum na $\mathbb{R}$.

$$F'(x) = 2 \operatorname{arctg} x + 2x \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{1 + x^2} 2x = 2 \operatorname{arctg} x,$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad F''(x) = 2 \frac{1}{1 + x^2} > 0, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

tedy $x = 0$ je lokální minimum. $F(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rovnost nastává pro $x = 0$.

Definice 17

Nechť je funkce f definovaná v $\mathcal{O}(x_0)$ a pro $h \in \mathbb{R}$ platí $x_0 + h \in \mathcal{O}(x_0)$. Pak číslo h nazýváme *přírůstek nezávisle proměnné* a rozdíl $\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ nazýváme *přírůstek závisle proměnné* (popř. detailněji $\Delta f(x_0)(h)$ jako přírůstek funkce f v bodě x_0 s krokem h).

Definice 18

Řekneme, že funkce f je *diferencovatelná v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$*, jestliže existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že

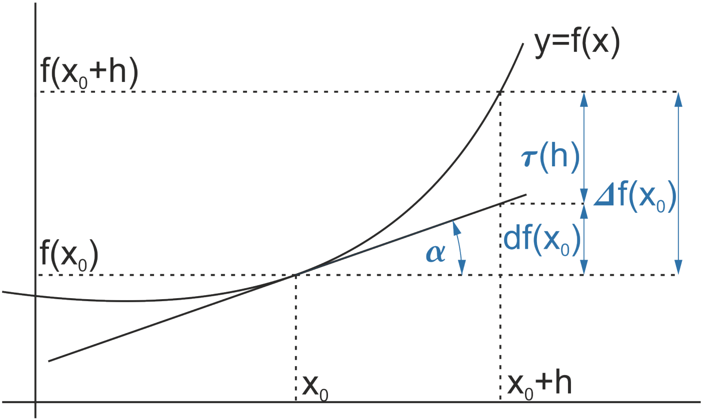
$$f(x_0 + h) - f(x_0) = A \cdot h + \tau(h),$$

kde $A \in \mathbb{R}$ je vhodné číslo a $\tau(h)$ je funkce s vlastností

$$\lim_{h \to 0} \frac{\tau(h)}{h} = 0.$$

Je-li f v x_0 diferencovatelná, nazýváme výraz $A \cdot h$ *diferenciál* funkce f a píšeme $\mathrm{d}f(x_0)$, popř. $\mathrm{d}f(x_0)(h)$.

Diferenciál funkce je lineární funkce přírůstku nezávisle proměnné h.



$$\Delta f(x_0) := f(x_0 + h) - f(x_0), \ \Delta f(x_0) := A \cdot h + \tau(h), \ A = \operatorname{tg} \alpha$$

Věta 30

Funkce f je v bodě x_0 diferencovatelná právě tehdy, když v tomto bodě existuje vlastní derivace $f'(x_0)$. Přitom platí

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0) \cdot h.$$

Tedy $A = f'(x_0)$. Často se používá značení $\mathrm{d}x = h$, tj.

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x.$$

Diferenciál v obecném bodě x

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x) \cdot \mathrm{d}x.$$

Poznámka

Využití diferenciálu pro přibližný výpočet funkčních hodnot:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot h + \tau(h),$$

tedy

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h.$$

Příklad 34

Vypočtěte pomocí diferenciálu přibližně $\sqrt[3]{7.9}$.

$$f(x) = \sqrt[3]{x},\ x_0 = 8,\ h = x - x_0 = -0.1,\ f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\sqrt[3]{7.9} \approx \sqrt[3]{8} + \tfrac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}(-0.1) = 2 - \tfrac{1}{30\cdot 4} = 2 - \tfrac{1}{120} = 2 - 0.008\overline{3} = 1.991\overline{6}.$$

Motivace k Taylorovu polynomu

Máme dánu funkci f a chceme sestrojit polynom stupně $n \in \mathbb{N}$, který v okolí bodu x_0 nejlépe aproximuje funkci f.

- Pro $n = 1$: $P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, viz diferenciál. $P(x)$ má s funkcí $f(x)$ v x_0 stejnou funkční hodnotu a hodnotu první derivace.
- Najdeme polynom $P(x) = a_n(x - x_0)^n + \cdots + a_1(x - x_0) + a_0$, mající s funkcí $f(x)$ v bodě x_0 stejnou funkční hodnotu a derivace až do řádu n.

Hledáme polynom $P(x) = a_n(x-x_0)^n + \cdots + a_1(x-x_0) + a_0$ splňující

$$P^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0), \qquad i = 0, 1, \ldots, n,$$

tedy

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= P(x_0) = a_0,\\
f'(x_0) &= P'(x_0) = 1 \cdot a_1,\\
f''(x_0) &= P''(x_0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2,\\
f^{(3)}(x_0) &= P^{(3)}(x_0) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3,\\
&\vdots\\
f^{(n-1)}(x_0) &= P^{(n-1)}(x_0) = (n-1)! \cdot a_{n-1},\\
f^{(n)}(x_0) &= P^{(n)}(x_0) = n! \cdot a_n.
\end{aligned}$$

Odtud ihned

$$a_0 = f(x_0), a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \ldots, a_{n-1} = \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Definice 19

Předpokládejme, že funkce f má v bodě x_0 derivace až do řádu $n \in \mathbb{N}$ včetně. *Taylorovým polynomem stupně n funkce f v bodě x_0*, značíme jej $T_n(x, x_0)$, rozumíme polynom, který má v bodě x_0 stejnou funkční hodnotu a stejnou hodnotu prvních n derivací jako funkce f, tj.

$$f(x_0) = T_n(x_0, x_0), f'(x_0) = T_n'(x_0, x_0), \dots, f^{(n)}(x_0) = T_n^{(n)}(x_0, x_0).$$

Věta 31 (Taylorova věta)

Nechť má funkce f v okolí bodu x_0 vlastní derivace až do řádu $n+1$ pro nějaké $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak pro všechna x z tohoto okolí platí

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

kde ξ je vhodné číslo ležící mezi x_0 a x.

Vzorec uvedený ve větě se nazývá *Taylorův vzorec*.

Zbytek $R_n(x)$ je uveden v Lagrangeově tvaru.

Vynecháme-li zbytek $R_n(x)$, obdržíme *Taylorův polynom*:

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i.$$

Pokud v položíme $x_0 = 0$, získáme tzv. *Maclaurinův polynom*:

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i.$$

Příklad 35

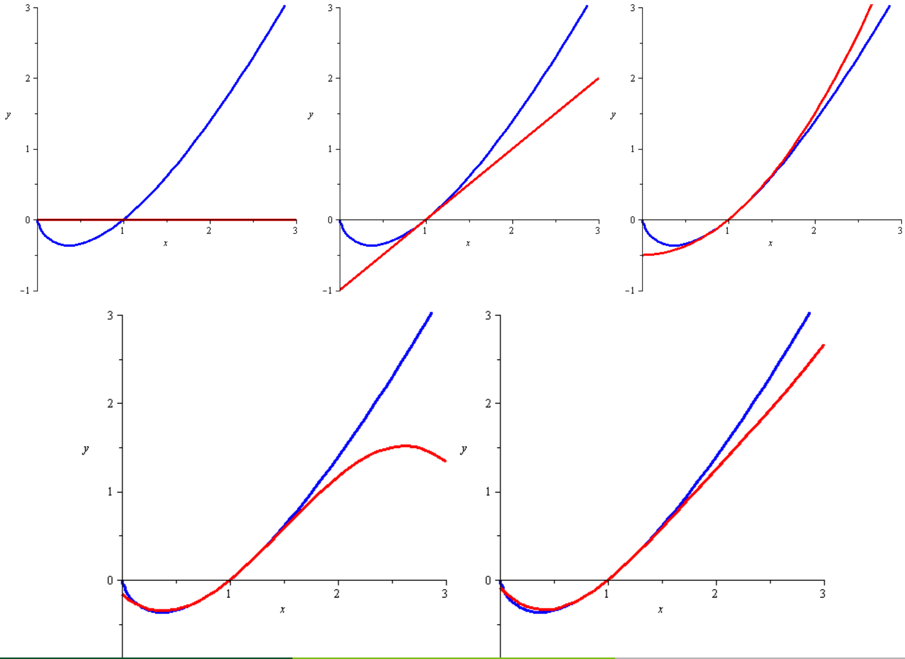
Určete Taylorův polynom 4. řádu se středem v bodě $x_0 = 1$ funkce $f(x) = x \ln x$.

$$f'(x) = 1 + \ln x,\ f''(x) = \tfrac{1}{x},\ f'''(x) = \tfrac{-1}{x^2},\ f^{(4)}(x) = \tfrac{2}{x^3}.$$

$$f(1) = 0,\ f'(1) = 1,\ f''(1) = 1,\ f'''(1) = -1,\ f^{(4)}(1) = 2.$$

Tedy

$$\begin{aligned} T(x) &= 0 + \tfrac{1}{1!}(x-1) + \tfrac{1}{2!}(x-1)^2 + \tfrac{-1}{3!}(x-1)^3 + \tfrac{2}{4!}(x-1)^4 \\ &= \tfrac{1}{12}(x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 10x - 3). \end{aligned}$$



3
2
1
0
-1
y
1
2
3
x

Věta 32

Maclaurinovy polynomy pro $\mathrm{e}^x, \sin x$ *a* $\cos x$*:*

- $\mathrm{e}^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$,
- $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$,
- $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

Příklad 36

Určete počet členů Maclaurinova polynomu funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$, abychom číslo $\frac{1}{\mathrm{e}}$ spočítali s chybou menší než 10^{-3}.

$$R_n(x) = \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad c \text{ mezi } x, x_0$$

$$\mathrm{e}^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}(-1)^{n+1}$$

$\left|\frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}(-1)^{n+1}\right| < 10^{-3}$, $c \in (-1, 0)$,tedy

$$\left|\frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}(-1)^{n+1}\right| < \frac{\mathrm{e}^0}{(n+1)!} < \frac{1}{1000} \Rightarrow (n+1)! > 1000 \Rightarrow n = 6,$$

$\mathrm{e}^{-1} \approx \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}$ toto vyjádření je s chybou menší než 10^{-3}.

Věta 33

Maclaurinovy vzorce pro $\mathrm{e}^x, \sin x$ *a* $\cos x$ *(*$n \in \mathbb{N}, c$ *mezi* 0 *a* x*):*

- $\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!} x^{n+1}$,
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{\cos c}{(2n+1)!} x^{2n+1}$,
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+2} \frac{\cos c}{(2n+2)!} x^{2n+2}$.

Taylorův (Maclaurinův) rozvoj dalších elementárních funkcí

- pro $x \in (-1, \infty)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + (-1)^{n+2}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}$$

- pro $\alpha \in \mathbb{R}, x \in (-1, \infty)$, nebo $\alpha \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \\ &\quad \cdots + \tfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \tfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+c)^{\alpha-n-1} \\ &= 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+c)^{\alpha-n-1}\end{aligned}$$

kde jsme (pro $\alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$) použili zobecněný binomický koeficient

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Využití Taylorova a Maclaurinova polynomu

- přibližný výpočet funkčních hodnot,
- výpočet limit.

Příklad 37

Pomocí Taylorova polynomu 2. řádu vypočtěte přibližně $\sqrt[3]{7.9}$.

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

$f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$, $h = x - x_0 = -0.1$, $f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3}$, $f''(x) = \frac{-2}{9} x^{-5/3}$

$$\sqrt[3]{7.9} \approx 2 - \frac{1}{3 \cdot 4}(0.1) - \frac{1}{2}\frac{2}{9 \cdot 32}(0.1)^2 = 2 - \frac{1}{120} - \frac{1}{28\,800} = \frac{57\,359}{28\,800}$$

Příklad 38

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2} = ?$$

$(1+t)^{1/2} = 1 + \binom{1/2}{1} t + \binom{1/2}{2} t^2 + \cdots$ použijeme pro $t = x^2$, tedy

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \cdots$$

$(1+t)^{1/3} = 1 + \binom{1/3}{1} t + \binom{1/3}{2} t^2 + \cdots$ použijeme pro $t = x^3$, tedy

$$\sqrt[3]{1+x^3} = 1 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{9}x^6 + \cdots$$

Odtud

$$? = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+\cdots-\left(1+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{9}x^6+\cdots\right)}{x^2} = \frac{1}{2}$$