

Jméno a příjmení	UČO	Počet listů přílohy

Příklad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	Σ
Body											

- (1) teorie
 - (2) teorie
 - (3) diferenciální počet (průběh fce, slovní úloha na extrém, slovní úloha na impl. fci, odhad Taylorem s danou přesností)
 - (4) integrální počet (několik integrálů, jeden delší, nebo aplikace)
 - (5) rovnice (sep. prom., lin. rce, počáteční úloha, slovní úloha)
 - (6) dif. počet více prom. (limita na polární souřadnice, extrémy, glob. extrémy)
 - (7) integrál více prom. (výpočet, zaměna pořadí integrace, transformace)
 - (8) nekon. řady čísel (několik řad a konvergence, slovní úloha)
 - (9) mocninné řady (sečíst a pomocí ní sečíst číselnou řadu, obvykle využití dvou operací derivace, nebo integrace, nebo jedné derivace a jedné integrace)
- body budou upraveny dle náročnosti příkladu, celková obtížnost písanky pak bude vyrovnaná mezi skupinami a termíny, celkový maximální počet bodů je 35

► Příklad 1 [4 b.]: Je dána funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

- a) Napište definici spojitosti funkce v bodě a s její pomocí rozhodněte o spojitosti funkce f v bodě $x_0 = 0$.
- b) Napište definici derivace funkce v bodě a s její pomocí určete derivaci funkce f v bodě $x_0 = 0$.

► Příklad 2 [4 b.]: Udejte příklad funkcí g, h , které nejsou na intervalu $[-2, 3]$ integrovatelné (v Riemannově smyslu), ale absolutní hodnoty těchto funkcí, tj. $|g|, |h|$, zde integrovatelné jsou a platí

$$\int_{-2}^3 |g(x)| dx = 17, \quad \int_{-2}^3 |h(x)| dx = -3.$$

Vše pro zvolené funkce řádně zdůvodněte, popř. zdůvodněte, proč požadovaná funkce neexistuje.

► Příklad 3 [4 b.]: Určete pro která $x \in \mathbb{R}$ je funkce f rostoucí, pro která je klesající a najděte její extrémy, jestliže

$$f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}.$$

Dále detailně popište a načrtněte chování grafu funkce v okolí nuly. (Zakřivení neurčujte, vyjďte z informací o funkci a její první derivaci.)

► Příklad 3 [4 b.]: Osvětlení světelným zdrojem je přímo úměrné síle světelného zdroje a nepřímo úměrné čtverci vzdálenosti od zdroje. Dva světelné zdroje, jeden sedmkrát silnější než druhý, jsou umístěny 5 centimetrů od sebe. Jak daleko od slabšího zdroje na spojnici mezi zdroji musíme umístit objekt, aby byl co nejméně osvětlen?

(Vyřešte pomocí diferenciálního počtu. Načrtněte obrázek, zapište extrémní úlohu, nezapomeňte vhodně zdůvodnit, že nalezená hodnota skutečně odpovídá minimu a napsat jednoznačnou odpověď.)

► Příklad 3 [4 b.]: Experimentální dron proletí ve výšce 2 km nad radarem rychlostí $180\sqrt{2}$ km/h a stoupá přitom pod úhlem 45° . Jakou rychlostí se mění vzdálenost dronu od radaru 2 minuty po průletu?

(Vyřešte pomocí diferenciálního počtu a derivace implicitní funkce!)

► Příklad 4 [3 b.]: Vypočítejte integrály (nebo dokažte že nekonvergují)

$$(i) \int_{-2}^3 x^2 \operatorname{sgn} x \, dx, \quad (ii) \int_0^1 (ax^2 + bx + c) e^{kx} \, dx,$$

kde $a, b, c, k \in \mathbb{R}$ a a, k jsou nenulové.

► Příklad 4 [4 b.]: Najděte neurčitý integrál funkce

$$f(x) = \frac{1}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1}$$

víte-li, že dva z parciálních zlomků při rozkladu této funkce jsou

$$\frac{-\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}}{x^2 + x + 1}, \quad \frac{-\frac{1}{2}}{x^2 - x + 1}$$

a platí

$$x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

► Příklad 4 [4 b.]: Pomocí určitého integrálu potvrďte, že vzorec pro plochu elipsy s poloosami a, b danou rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

je $S = \pi ab$.

► Příklad 5 [5 b.]: V rámci řízeného experimentu došlo k vyhasnutí malé experimentální tavicí pece při konstantní okolní teplotě 300 K. Experiment začal ve 12.00. Ve 13.00 byla měření odhadnuta teplota v peci na 1 300 K a v 15.00 na 550 K. Za předpokladu, že tyto odhady teplot jsou přesné, vypočítejte teplotu v peci ve 14.00.

► Příklad 6 [2 b.]: Rozhodněte, zda existuje limita

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{3x}{x^3 + y}.$$

Pokud existuje, určete její hodnotu. Pokud neexistuje, zdůvodněte.

► Příklad 6 [5 b.]: Určete lokální extrémy a jejich hodnoty funkce

$$f(x, y) = (2x^2 + 3y^2) e^{-x^2 - y^2}.$$

► Příklad 7 [4 b.] : Pomocí vhodné transformace integrálu určete objem tělesa

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z, z \leq 2 - x^2 - y^2\}.$$

► Příklad 8 [4 b.] : Jsou dány řady

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\arctg^n(1 + \frac{1}{n})}, \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^2}{(2n)!}, \quad (iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^7 + \sqrt[4]{n^5} + 12}{15 - \sqrt{n^3} + 3n^6} (x - 7)^n.$$

Rozhodněte, zda řady (i) a (ii) konvergují a určete interval konvergence mocninné řady (iii) (konvergenci v krajních bodech intervalu neřešte).

► Příklad 8 [2 b.] : Vypočítejte délku lomené čáry, která se skládá z úseček

$$A_1 A_2, A_2 A_3, A_3 A_4, A_4 A_5, A_5 A_6, A_6 A_7, A_7 A_8, \dots,$$

jsou-li souřadnice krajních bodů

$$A_1 = [0, 0], A_2 = [0, 1], A_3 = [1, 1], A_4 = [1, \frac{1}{2}], A_5 = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}],$$

$$A_6 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], A_7 = [\frac{3}{4}, \frac{3}{4}], A_8 = [\frac{3}{4}, \frac{5}{8}], A_9 = [\frac{5}{8}, \frac{5}{8}], \dots$$

(Začátek lomené čáry zakreslete.)

► Příklad 9 [4 b.] : Pomocí součtu vhodné mocninné řady určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \cdot 2^n}{n \cdot 3^n + 2 \cdot 3^n}.$$

(Zkontrolujte střed a poloměr konvergence použité mocninné řady. Výsledek uveďte jako jednoduchý výraz, tj. upravený a bez složených zlomků.)

Může se hodit

Pythagorova věta $c^2 = a^2 + b^2$, obsah trojúhelníku $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$, sinová věta $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$, kosinová věta $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$, goniometrická jednička $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, dvojnásobný úhel $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$, poloviční úhel $2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha$, $2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha$, $\pi \text{ rad} = 180^\circ$, objem kužele $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$, povrch kužele $S = \pi r^2 + \pi r s$, objem koule $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, povrch koule $S = 4\pi r^2$

▷ U výpočtů příkladů řádně označujte, ke kterému příkladu (a jeho části) patří.

▷ Každý výsledek musí být podpořen výpočtem (zdůvodněním), jakkoli je triviální.

▷ Je-li požadován daný způsob řešení (např. metodami diferenciálního počtu), není možné řešit jinak (např. úvahou, vypsaním všech možností atd.).

$$a) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \dots \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}) = |0 \cdot \text{OHR}| = 0 = f(0) \Rightarrow \text{SP.}$$

$$b) f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \dots \quad f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = |0 \cdot \text{OHR}| = 0$$

$$3 - (-2) = 5 \Rightarrow \frac{17}{5} \quad g(x) := \begin{cases} \frac{13}{5}, & x \in \mathbb{Q} \\ -\frac{12}{5}, & x \in \mathbb{I} \end{cases} \Rightarrow \int_{-2}^3 g(x) dx \text{ neuz.}$$

$$\int_{-2}^3 |g(x)| dx = \int_{-2}^3 \frac{13}{5} dx = \frac{13}{5} \cdot [x]_{-2}^3 = \frac{13}{5} \cdot (3 + 2) = \underline{\underline{17}}$$

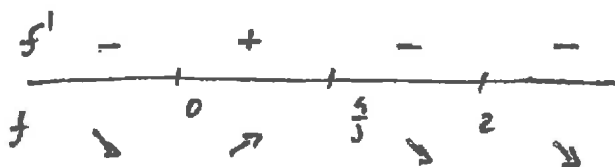
$h(x)$ LEBT. (INT. 2 LEBTAR FCF OD -2 DO 3 ANZIT' OTT LEBTAR.)

$$f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}, \quad D(f) = \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{4x - 3x^2}{3 \cdot (2x^2 - x^3)^{2/3}}, \quad D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 3x^2 = 0$$

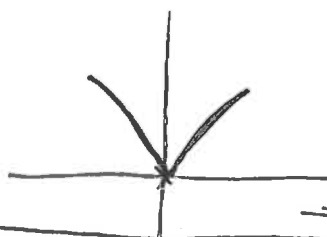
$$x \cdot (4 - 3x) = 0$$

$$x = 0, x = \frac{4}{3}$$

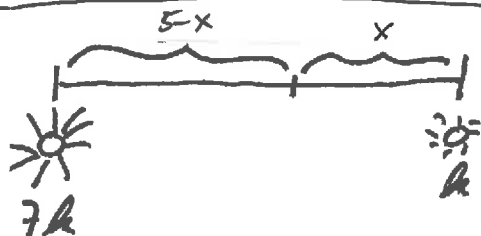


lok. min. $x=0, f(0)=0$

lok. max. $x = \frac{4}{3}, f(\frac{4}{3}) = \frac{2}{3} \sqrt[3]{4}$



$\rightarrow$ V LULE IE "HROT"



$$f(x) = \frac{7A}{(5-x)^2} + \frac{A}{x^2}$$

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in (0, 5)$$

$$f'(x) = 7A \cdot (-2) \cdot (5-x)^{-3} \cdot (-1) + A \cdot (-2) \cdot x^{-3} =$$

$$= \frac{+14A}{(5-x)^3} - \frac{2A}{x^3} = 0$$

$$14Ax^3 = 2A(5-x)^3$$

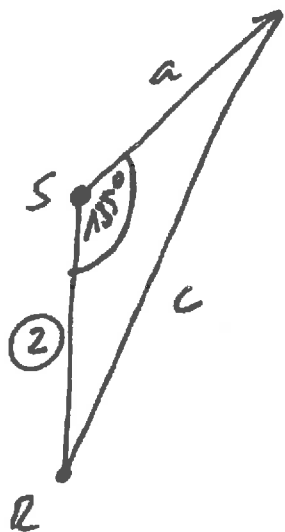
$$7x^3 = (5-x)^3$$

$$\sqrt[3]{7} x = 5 - x$$

$$x = \frac{5}{1 + \sqrt[3]{7}} =: \hat{x}$$

$$f''(x) = \frac{42A}{(5-x)^4} + \frac{6A}{x^4} > 0 \quad \forall x \in (0, 5) \Rightarrow \forall \hat{x} \text{ JE MIN.}$$

OBJEKT UNISTINE $\frac{5}{1 + \sqrt[3]{7}}$ CH OD SLABST/HO ZDRAJE



$$c^2 = a^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot a \cdot \cos 135^\circ$$

$$= a^2 + 4 - 4a \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4 + a^2 + 2\sqrt{2}a$$

$$a = a(t), \quad c = c(t) \quad \& \quad \frac{d}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2cc' = 2aa' + 2\sqrt{2}a'$$

$$\left[\begin{array}{l} a = 2 \cdot \frac{180\sqrt{2}}{60} = 6\sqrt{2} \\ c^2 = 4 + 72 + 24 = 100 \Rightarrow c = 10 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 10 \cdot c' = 2 \cdot 6\sqrt{2} \cdot 180\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \cdot 180\sqrt{2}$$

$$c' = 14 \cdot 18 = \underline{\underline{252}} \text{ [L/h]}$$

$$(i) \int_{-2}^3 x^2 \cdot \operatorname{sgn} x \, dx = \int_{-2}^0 x^2 \cdot (-1) \, dx + \int_0^3 x^2 \cdot 1 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{-2} - \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-2}^0 =$$

$$= (9 - 0) - (0 + \frac{8}{3}) = 9 - \frac{8}{3} = \underline{\underline{\frac{19}{3}}}$$

$$(ii) \int_0^1 (ax^2 + bx + c) \cdot e^{kx} \, dx = \left| \begin{array}{l} u = ax^2 + bx + c \quad u' = 2ax + b \\ v' = e^{kx} \quad v = \frac{e^{kx}}{k} \end{array} \right| =$$

$$= \left[(ax^2 + bx + c) \cdot \frac{e^{kx}}{k} \right]_0^1 - \int_0^1 (2ax + b) \cdot \frac{e^{kx}}{k} \, dx = \left| \begin{array}{l} u = 2ax + b \quad u' = 2a \\ v' = e^{kx} \quad v = \frac{e^{kx}}{k} \end{array} \right| =$$

$$= \left[(ax^2 + bx + c) \cdot \frac{e^{kx}}{k} - \frac{1}{k} \cdot (2ax + b) \cdot \frac{e^{kx}}{k} \right]_0^1 + \frac{1}{k} \cdot \int_0^1 2a \cdot \frac{e^{kx}}{k} \, dx =$$

$$= \left[(ax^2 + bx + c) \cdot \frac{e^{kx}}{k} - (2ax + b) \cdot \frac{e^{kx}}{k^2} + 2a \cdot \frac{e^{kx}}{k^3} \right]_0^1 =$$

$$= (a + b + c) \cdot \frac{e^k}{k} - (2a + b) \cdot \frac{e^k}{k^2} + 2a \cdot \frac{e^k}{k^3} - \frac{c}{k} + \frac{b}{k^2} - \frac{2a}{k^3} =$$

$$= \frac{e^k}{k} \cdot \left(a + b + c - \frac{2a + b}{k} + \frac{2a}{k^2} \right) - \frac{1}{k} \cdot \left(c - \frac{b}{k} + \frac{2a}{k^2} \right)$$

$$\int \frac{1}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1} dx = (?)$$

$$= \frac{1}{(x-1) \cdot (x^2+x+1) \cdot (x^2-x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}$$

$$\Rightarrow 1 = A \cdot (x^2+x+1) \cdot (x^2-x+1) + (Bx+C) \cdot (x-1) \cdot (x^2-x+1) + (Dx+E) \cdot (x-1) \cdot (x^2+x+1)$$

$$x=1 \Rightarrow 1 = A \cdot 3 + 0 + 0 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

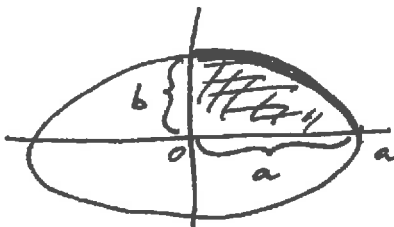
$$(?) = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{6} \int \frac{2x+1}{x^2-x+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2-x+1} dx = (*)$$

$$\int \frac{1}{x^2-x+1} dx = \int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \frac{4}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 + 1} dx = \frac{4}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \\ dt = \frac{2}{\sqrt{3}} dx \end{array} \right| = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = 2 \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \arctan t + C_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C_1$$

$$D = \frac{1}{3} \cdot \ln|x-1| - \frac{1}{6} \cdot \ln(x^2+x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

$$f(x) = b \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2}\right)}$$



$$S = 4 \cdot \int_0^a b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \frac{x}{a} = \sin t \\ dx = a \cdot \cos t dt \end{array} \right| \begin{array}{l} x=a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x=0 \Rightarrow t = 0 \end{array} =$$

$$= 4 \cdot b \cdot a \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t dt = 4ab \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

$$= 4ab \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 2ab \cdot \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2ab \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 0 \right) = \underline{\underline{ab\pi}}$$

$$OKOLV' = 300 K$$

$$13h. \dots 1300 K, \quad 15h. \dots 550 K$$

$$14h. \dots \underline{\underline{? K}}$$

$$T(t) = 300 + C \cdot e^{-kt}$$

$$T(0) = 1300 = 300 + C \Rightarrow C = 1000$$

$$T(2) = 550 = 300 + 1000 \cdot e^{-2k}$$

$$\frac{1}{4} = e^{-2k}$$

$$4 = e^{2k}$$

$$\ln 4 = 2k$$

$$\ln 4 = \ln 2^2 = 2 \ln 2 = 2k \Rightarrow k = \ln 2$$

$$\Rightarrow T(t) = 300 + 1000 \cdot e^{-t \cdot \ln 2} = 300 + 1000 \cdot e^{\ln 2^{-t}} = 300 + 1000 \cdot 2^{-t}$$

$$T(1) = 300 + 1000 \cdot 2^{-1} = 300 + 500 = \underline{\underline{800 [K]}}$$

$$T(0) = 1300, \quad T(1) = ?, \quad T(2) = 550 [K]$$

$$T'(t) = -k \cdot (T(t) - 300)$$

$$T' + kT = 300k$$

$$\mu(t) = e^{\int k dt} = e^{kt}$$

$$T' \cdot e^{kt} + kT e^{kt} = 300 e^{kt} \cdot k$$

$$\int (T e^{kt})' dt = \int 300 e^{kt} dt =$$

$$= 300 \cdot k \cdot \frac{e^{kt}}{k} = 300 e^{kt} + C$$

$$[0,0] \text{ je Hran. bod } D\left(\frac{3x}{x^3+y}\right) \Rightarrow \text{na' TO smysl}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x}{x^3+y} = \left| \begin{array}{l} x = \rho \cdot \cos \varphi \\ y = \rho \cdot \sin \varphi \end{array} \right| = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{3 \rho \cos \varphi}{\rho^3 \cos^3 \varphi + \rho \sin \varphi} =$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{3 \cdot \cos \varphi}{\rho^2 \cos^3 \varphi + \sin \varphi} = \frac{3 \cos \varphi}{\sin \varphi} = f(\varphi) \Rightarrow \underline{\underline{\text{Lim. LEBX.}}}$$

$$f(x,y) = (2x^2 + 3y^2) \cdot e^{-x^2 - y^2}$$

STAC. BODY

$$\begin{aligned} f_x &= 4x \cdot e^{-x^2 - y^2} + (2x^2 + 3y^2) \cdot e^{-x^2 - y^2} \cdot (-2x) = \\ &= 2x e^{-x^2 - y^2} \cdot (2 - 2x^2 - 3y^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y &= 6y \cdot e^{-x^2 - y^2} + (2x^2 + 3y^2) \cdot e^{-x^2 - y^2} \cdot (-2y) = \\ &= 2y e^{-x^2 - y^2} \cdot (3 - 2x^2 - 3y^2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow RCE: \quad x \cdot (2 - 2x^2 - 3y^2) = 0$$

$$y \cdot (3 - 2x^2 - 3y^2) = 0$$

$$a) \quad x = y = 0 \Rightarrow [0, 0]$$

$$b) \quad x = 0, \quad 3 - 2x^2 - 3y^2 = 0 \Rightarrow 3 - 3y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow [0, 1], [0, -1]$$

$$c) \quad 2 - 2x^2 - 3y^2 = 0, \quad y = 0 \Rightarrow 2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow [1, 0], [-1, 0]$$

$$d) \quad 2 - 2x^2 - 3y^2 = 0, \quad 3 - 2x^2 - 3y^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 3y^2 = \underline{2 = 3} \text{ stor} \Rightarrow \emptyset$$

HESSOVA NATICE ($D^2 f(x,y) = D^2 f(x,y)$)

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2 \cdot e^{-x^2 - y^2} \cdot (2 - 2x^2 - 3y^2) + 2x \cdot e^{-x^2 - y^2} \cdot (-2x) \cdot (2 - 2x^2 - 3y^2) + 2x \cdot e^{-x^2 - y^2} \cdot (-4x) \\ &= 2 \cdot e^{-x^2 - y^2} \cdot (2 + 4x^4 - 10x^2 - 3y^2 + 6x^2y^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{xy} &= 2x [e^{-x^2 - y^2} \cdot (-2y) \cdot (2 - 2x^2 - 3y^2) + e^{-x^2 - y^2} \cdot (-6y)] \\ &= 4xy \cdot e^{-x^2 - y^2} \cdot (2x^2 + 3y^2 - 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{yy} &= 2 \cdot e^{-x^2 - y^2} \cdot (3 - 2x^2 - 3y^2) + 2y \cdot e^{-x^2 - y^2} \cdot (-2y) \cdot (3 - 2x^2 - 3y^2) + 2y \cdot e^{-x^2 - y^2} \cdot (-6y) \\ &= 2 \cdot e^{-x^2 - y^2} \cdot (3 - 2x^2 - 15y^2 + 6y^4 + 4x^2y^2) \end{aligned}$$

$$f_{xx}(0,0) = 4, \quad f_{xy}(0,0) = 0, \quad f_{yy}(0,0) = 6 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ POS. DEF.} \Rightarrow \text{L. MIN.}$$

$$f(0,0) = 0$$

$$f_{xx}(0,\pm 1) = \frac{-2}{e}, \quad f_{xy}(0,\pm 1) = 0, \quad f_{yy}(0,\pm 1) = \frac{-12}{e} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2/e & 0 \\ 0 & -12/e \end{pmatrix} \text{ NEG. DEF.} \Rightarrow \text{L. MAX.}$$

$$f(0,\pm 1) = \frac{3}{e}$$

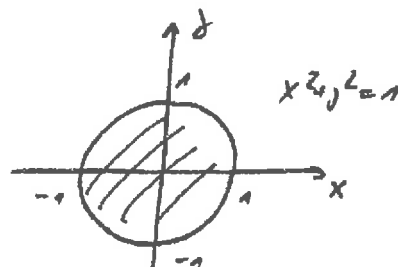
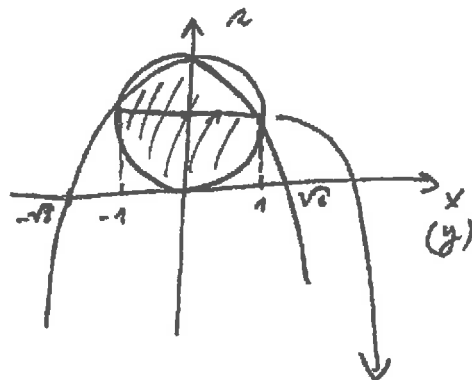
$$f_{xx}(\pm 1,0) = \frac{-8}{e}, \quad f_{xy}(\pm 1,0) = 0, \quad f_{yy}(\pm 1,0) = \frac{2}{e} \Rightarrow \begin{pmatrix} -8/e & 0 \\ 0 & 2/e \end{pmatrix} \text{ INDEF.} \Rightarrow \text{LBEL' EXTR.}$$

$$M: x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z, \quad z \leq 2 - x^2 - y^2$$

Drei PARABOLOIDEN

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1$$

(mitte die Kugel)



$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 2z & z &= 2 - x^2 - y^2 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 &= 2 - z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} 2 - z + z^2 &= 2z \\ z^2 - 3z + 2 &= 0 \\ (D = 9 - 8 = 1, z_{1,2} &= \frac{3 \pm 1}{2} = 1, 2) \end{aligned}$$

WÄHLE SONNE:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cdot \cos \varphi \\ y &= \rho \cdot \sin \varphi \\ z &= z \\ |\mathbf{r}| &= \rho \end{aligned}$$

POPE. IMMER:

$$(z-1) \cdot (z-2) = 0$$

$$\varphi \in [0, 2\pi], \quad \rho \in [0, 1], \quad z \in [1 - \sqrt{1 - \rho^2}, 2 - \rho^2]$$

DOLM' PULS FÜR

PARABOLOID

$$z-1 = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$$

$$z = 2 - (x^2 + y^2) = 2 - \rho^2$$

$$z = 1 - \sqrt{1 - \rho^2}$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1 - \sqrt{1 - \rho^2}}^{2 - \rho^2} \rho \, dz \, d\rho \, d\varphi = 2\pi \cdot \int_0^1 \rho \cdot [z]_{1 - \sqrt{1 - \rho^2}}^{2 - \rho^2} d\rho$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^1 \rho \cdot (2 - \rho^2 - 1 + \sqrt{1 - \rho^2}) d\rho = \left| \begin{array}{l} 1 - \rho^2 = t \\ -2\rho d\rho = dt \\ 2\rho d\rho = -dt \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \rho=1 \Rightarrow t=0 \\ \rho=0 \Rightarrow t=1 \end{array} \right| = -\pi \cdot \int_1^0 t + \sqrt{t} \, dt =$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{t^2}{2} + \frac{2}{3} t^{3/2} \right]_0^1 = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) = \frac{7}{6} \pi$$

POPE. / $z \in [1, 2 - \rho^2] \Rightarrow V = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3} \pi z^3 \right) + \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_1^{2 - \rho^2} \rho \, dz \, d\rho \, d\varphi =$

$$= \frac{2}{3} \pi + 2\pi \cdot \int_0^1 \rho \cdot (2 - \rho^2 - 1) d\rho = \frac{2}{3} \pi + 2\pi \cdot \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \pi + 2\pi \cdot \frac{1}{4} =$$

$$= \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) \pi = \frac{7}{6} \pi$$

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n! \cdot (1 + \frac{1}{n})}, \quad \sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{n! \cdot (1 + \frac{1}{n})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n! \cdot 1} = \frac{1}{n!} > 1$$

$\Rightarrow$ (DIV.)

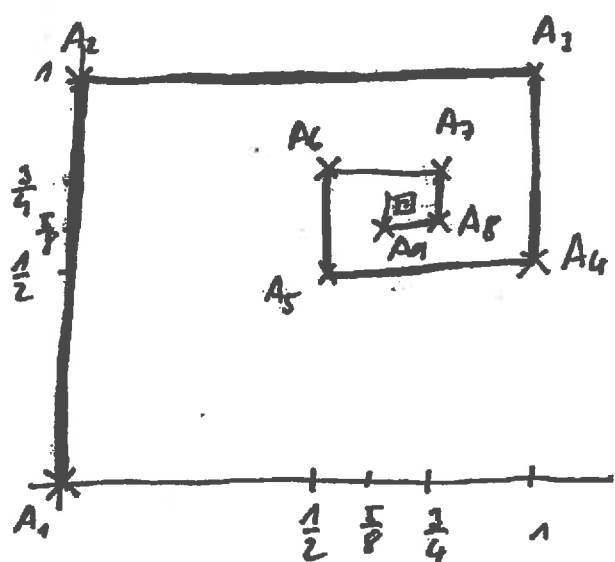
$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n^2}{(2n)!}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)^2 \cdot (2n)!}{(2 \cdot (n+1))! \cdot 2^n \cdot n^2} = \frac{2 \cdot (n+1)^2}{n^2 \cdot (2n+2) \cdot (2n+1)}$$

$$= \frac{\text{POLY ST. 2}}{\text{POLY ST. 4}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1 \Rightarrow \text{(KONV.)}$$

$$(iii) \sum_{n=4}^{\infty} \frac{2n^7 + \sqrt[4]{n^5} + 12}{15 - \sqrt{n^3} + 3n^6} \cdot (x-7)^n$$

$$x_0 = 7, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2(n+1)^7}{3(n+1)^6}}{\frac{2n^7}{3n^6}} = 1 \Rightarrow R = 1$$

$$\Rightarrow \text{K.T. KONV. JE } (7-1, 7+1) = \underline{\underline{(6, 8)}}$$



$$\begin{aligned} |A_1 A_2| = a_1 = 1 \\ |A_2 A_3| = a_2 = 1 \end{aligned} \Bigg\} = b_1 = 2$$

$$\begin{aligned} |A_3 A_4| = a_3 = \frac{1}{2} \\ |A_4 A_5| = a_4 = \frac{1}{2} \end{aligned} \Bigg\} = b_2 = 1$$

$$\begin{aligned} |A_5 A_6| = a_5 = \frac{1}{4} \\ |A_6 A_7| = a_6 = \frac{1}{4} \end{aligned} \Bigg\} = b_3 = \frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$b_m = \frac{1}{2^{m-2}}$$

$$\Rightarrow \text{DELKA} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-2}} = \left| \begin{matrix} b_1 = 2 \\ q = \frac{1}{2} \end{matrix} \right| = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = \underline{\underline{4}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \cdot 2^n}{n \cdot 3^n + 23^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \dots \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \cdot x^n, \quad x = \frac{2}{3}$$

$$R_n = \frac{n+1}{n+2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 1, \quad x_0 = 0 \Rightarrow \text{КТ. Крив. } I = (-1, 1)$$

$$\frac{2}{3} \in I \Rightarrow \underline{\text{OK}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad | \cdot x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x} \quad | \int dx \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} = - \int \frac{x}{x-1} dx = - \int \frac{x-1+1}{x-1} dx =$$

$$= - \int 1 + \frac{1}{x-1} dx = -x - \ln|x-1| + C$$

$$x=0 \Rightarrow 0 = -0 - \ln 1 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} = -x - \ln|x-1| \quad | \cdot \frac{1}{x} \quad \text{ПРАВИЛЬНО ПО } x = \frac{2}{3} \Rightarrow x-1 < 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+2} = -1 - \frac{\ln|x-1|}{x} \quad | \frac{d}{dx} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \cdot x^n = 0 - [x^{-1} \cdot \ln(1-x)]' =$$

$$= \frac{1}{x^2} \cdot \ln(1-x) + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1-x} \quad (n=1)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \cdot x^n = \frac{1}{x \cdot (1-x)} + \frac{\ln(1-x)}{x^2} - \frac{1}{2} \quad \left(\text{УЗНАЛИ, } 4 + \frac{9}{4} \ln \frac{1}{3} \right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}} + \frac{\ln\left(1-\frac{2}{3}\right)}{\frac{4}{9}} - \frac{1}{2} = \underline{\underline{4 - \frac{9}{4} \cdot \ln 3}}$$