Další poznámky

(Analýza v $\mathbb{C}$ & Integrální transformace)

Petr Hasil

Přednáška z Matematické analýzy

Obsah

Definice 1

Nechť je $M \subseteq \mathbb{C}$ otevřená množina a $f\colon M \to \mathbb{C}$. Řekneme, že funkce f je *komplexně diferencovatelná (monogenní)* v bodě $z_0 \in M$, jestliže existuje konečná limita

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}}} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \qquad \left(= \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right).$$

Tuto limita nazýváme *derivace* funkce f v bodě z_0 a píšeme se $f'(z_0)$.

Funkce $f\colon M \to \mathbb{C}$ je zřejmě komplexně diferencovatelná v bodě $z_0 \in M$ právě tehdy, když existuje $\mathbb{C}$-lineární zobrazení (tj. lineární s koeficienty z $\mathbb{C}$) $T(z) = az$ takové, že platí

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}}} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)-T(h)}{h} = 0.$$

Výraz $T(h) = ah$ se nazývá *diferenciálem* funkce $f(z)$ v bodě z_0 a značí se $\mathrm{d}f(z_0)$ nebo $\mathrm{d}f(z_0)(h)$. Přitom platí $a = f'(z_0)$.

Protože $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$ jsou jakožto $\mathbb{R}$-lineární prostory izomorfní (tj. „bijekce zachovávající strukturu“), máme

$$z = x + iy = (x,y), z_0 = x_0 + iy_0 = (x_0,y_0), f(z) = f(x+iy) = f(x,y).$$

Jsou-li $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(z) = \operatorname{Im} f(z)$, máme

$$f(z) = u(z) + iv(z) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Poznámka

Funkcí *komplexně sdruženou* s funkcí f rozumíme funkci $\overline{f}$ definovanou vztahem $\overline{f}(z) = \overline{f(z)}$ pro všechna čísla z z definičního oboru funkce f.

Poznámka

V $\mathbb{C}$ neuvažujeme na rozdíl od $\mathbb{R}$ uspořádání, proto máme jen jedno nekonečno, značené ∞ (bez znaménka). Posloupnost komplexních čísel $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ má nevlastní limitu tedy znamená

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty.$$

Podobně pro nevlastní limitu funkce. Rozšířenou množinou komplexních čísel je tedy $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Nazývá se také rozšířenou (uzavřenou) Gaussovou rovinou.

Je-li f komplexně diferencovatelná v bodě $z_0 = x_0 + iy_0$, pak zejména

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(z_0+ih) - f(z_0)}{ih}.$$

Odtud, protože h je nyní reálné, dostáváme

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{u(x_0+h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{v(x_0+h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h} \\ &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{u(x_0, y_0+h) - u(x_0, y_0)}{ih} + i \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{v(x_0, y_0+h) - v(x_0, y_0)}{ih}. \end{aligned}$$

Z toho vyplývá

$$f'(z_0) = u'_x(z_0) + iv'_x(z_0) = \frac{u'_y(z_0) + iv'_y(z_0)}{i}.$$

Nutnou podmínkou pro komplexní diferencovatelnost funkce $f = u + iv$ v bodě z_0 je tedy splnění tzv. *Cauchyových-Riemannových podmínek*

$$u'_x(z_0) = v'_y(z_0), \quad u'_y(z_0) = -v'_x(z_0). \tag{1}$$

Poznámka

Uvažujme otevřenou množinu G. Jsou-li v ní splněny podmínky (1) a navíc jsou tam reálná a imaginární část funkce f spojitě diferencovatelné (mají spojité derivace prvního řádu podle x a y), pak je f komplexně diferencovatelná v každém bodě G.

Věta 1

Je-li funkce f v bodě z_0 komplexně diferencovatelná, pak je v bodě z_0 spojitá.

Definice 2

Řekneme, že funkce f je *holomorfní v bodě z_0*, když existuje okolí bodu z_0, v jehož každém bodě má f derivaci. Řekneme, že funkce f je *holomorfní na množině $M \subseteq \mathbb{C}$*, je-li holomorfní v každém bodě $z \in M$.

Věta 2

Jsou-li $\sum_{n\geq k_0} a_n$ *a* $\sum_{n\geq k_0} b_n$ *konvergentní řady a je-li* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$*, pak*

$$\sum_{n\geq k_0} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n\geq k_0} a_n + \beta \sum_{n\geq k_0} b_n,$$

$$\overline{\sum_{n\geq k_0} a_n} = \sum_{n\geq k_0} \overline{a_n}.$$

Důsledek 1

Komplexní řada $\sum_{n\geq k_0} a_n$ *konverguje právě tehdy, když konverguje každá z obou řad* $\sum_{n\geq k_0} \operatorname{Re} a_n$ *a* $\sum_{n\geq k_0} \operatorname{Im} a_n$*, přičemž platí*

$$\sum_{n\geq k_0} a_n = \sum_{n\geq k_0} \operatorname{Re} a_n + i \sum_{n\geq k_0} \operatorname{Im} a_n.$$

Nechť je $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}, f_n \colon M \to \mathbb{C}, n = 1, 2, \dots$

Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=k_0}^{\infty}$ *konverguje* na M *stejnoměrně* k funkci $f \colon M \to \mathbb{C}$, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $z \in M$ a každé číslo $n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon$, platí nerovnost $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$. Píšeme $f_n \rightrightarrows f$.

Řekneme, že řada $\sum_{n=k_0}^{\infty} f_n(z)$, kde $k_0 \in \mathbb{Z}$, *konverguje stejnoměrně* na M, jestliže posloupnost $\{s_n(z)\}, s_n(z) = \sum_{k=k_0}^{n} f_k(z)$ konverguje stejnoměrně na M. Stejně jako u číselných řad je symbol $\sum_{n=k_0}^{\infty} f_n(z)$ používán také k označení limitní funkce (součtu funkční řady).

Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=k_0}^{\infty}$ (řada $\sum_{n=k_0}^{\infty} f_n(z)$) *konverguje skoro stejnoměrně* na M, jestliže konverguje na každé kompaktní podmnožině množiny M.

Věta 3 (Weierstrassovo kritérium stejnoměrné konvergence)

Je-li $|f_n(z)| \leq \alpha$ *pro každé* $z \in M$ *a každé* $n \in \mathbb{N}, n \geq k_0$*, a řada* $\sum_{n=k_0}^{\infty} \alpha_n$ *konverguje, pak řada* $\sum_{n=k_0}^{\infty} f_n(z)$ *konverguje na množině* M *stejnoměrně.*

Řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{2}$$

kde $a_n \in \mathbb{C}, z_0 \in \mathbb{C}$, nazýváme *mocninnou řadou se středem* v bodě z_0. Čísla a_n nazýváme *koeficienty*. Transformací $z - z_0 = w$ se tato řada transformuje na mocninnou řadu se středem v bodě nula, tj.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n.$$

Věta 4 (Cauchyova-Hadamardova věta)

Nechť pro koeficienty mocninné řady (2) platí

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \tag{3}$$

- *Je-li $L = 0$, řada (2) konverguje absolutně v každém $z \in \mathbb{C}$.*
- *Je-li $L = \infty$, pak řada (2) diverguje v každém $z \in \mathbb{C}, z \neq z_0$.*
- *Je-li $0 < L < \infty$, pak řada (2) konverguje absolutně pro každé $z \in \mathbb{C}$ splňující $|z - z_0| < 1/L$ a diverguje pro $z \in \mathbb{C}$ taková, že $|z - z_0| > 1/L$.*

Číslo $R = 1/L$, kde L je dáno vztahem (3), nazýváme *poloměrem konvergence* mocninné řady (2).

V případě $L = 0$ je $R = \infty$ a v případě $L = \infty$ je $R = 0$.

Je-li $R > 0$, nazýváme množinu $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ *konvergenčním kruhem* mocninné řady (2).

Věta 5

Mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ mající kladný poloměr konvergence konverguje v konvergenčním kruhu skoro stejnoměrně.

Pro $z \in \mathbb{C}$ definujeme *exponenciální funkci* vztahem

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Tato řada má poloměr konvergence $R = \infty$. Platí

$$\exp 0 = 1, \quad (\exp z)' = \exp z.$$

Lemma 1

Exponenciální funkce $\exp z$ je různá od nuly pro $z \in \mathbb{C}$ a pro její převrácenou hodnotu platí

$$\exp^{-1} z = \exp(-z),$$

tj. $\exp(z)\exp(-z) = 1$.

Věta 6

Buď $G \subseteq \mathbb{C}$ oblast obsahující počátek. Je-li $f : G \to \mathbb{C}$ holomorfní a

$$f(0) = 1, \quad f'(z) = f(z) \quad \text{pro } z \in G,$$

pak

$$f(z) = \exp z \quad \text{pro } z \in G.$$

Důsledek 2

Pro $z = x + iy \in \mathbb{C}$ platí

$$\exp z = e^x \cos y + i\, e^x \sin y.$$

Věta 7

Pro $z, w \in \mathbb{C}$ platí $\exp z \exp w = \exp(z + w)$.

Věta 8

Platí

1. $e^z = 1$ *právě tehdy, když* $z = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.
2. $e^z = -1$ *právě tehdy, když* $z = (2k+1)\pi i, k \in \mathbb{Z}$.
3. $e^{z_1} = e^{z_2}$ *právě tehdy, když* $z_1 = z_2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.
4. $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$.
5. $\operatorname{Re} e^z = e^{\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z)$, $\operatorname{Im} e^z = e^{\operatorname{Re} z} \sin(\operatorname{Im} z)$

Důsledek 3

Funkce e^z *je periodická s periodou* $2\pi i$. *Množina všech period je* $2\pi i\mathbb{Z}$.

Goniometrické funkce sinus, cosinus, tangens a kotangens jsou definovány vztahy

$$\begin{aligned} \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \\ \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ \operatorname{tg} z &= \frac{\sin z}{\cos z}, \\ \operatorname{cotg} z &= \frac{\cos z}{\sin z}. \end{aligned}$$

Snadno se ověří platnost *Eulerova vzorce* $\cos z \pm i \sin z = e^{\pm iz}$.

Věta 9

Funkce $\sin z, \cos z$ *jsou holomorfním rozšířením reálných funkcí* $\sin x, \cos x$ *na* $\mathbb{C}$ *a platí*

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

Goniometrické funkce mají zřejmě následující vlastnosti

- $\sin(-z) = -\sin z$ (funkce sinus je lichá),
- $\cos(-z) = \cos z$ (funkce kosinus je sudá),
- $\sin \overline{z} = \overline{\sin z}$,
- $\cos \overline{z} = \overline{\cos z}$.

Věta 10

Funkce sinus a kosinus jsou periodické s periodou 2π.

Věta 11

Platí

1. $\sin z = 0$ *právě tehdy, když* $z = k\pi$, *kde* $k \in \mathbb{Z}$,
2. $\cos z = 0$ *právě tehdy, když* $z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, *kde* $k \in \mathbb{Z}$,
3. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ *pro všechna* $z \in \mathbb{C}$.

Definice 3

- Křivka $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ se nazývá *uzavřená*, jestliže $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$.
- Křivka $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ se nazývá *hladká*, když funkce γ má spojitou a od nuly různou derivaci na $[\alpha,\beta]$.
- Křivka γ se nazývá *po částech hladká*, když existuje dělení $D\colon \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ intervalu $[\alpha,\beta]$ takové, že křivka $\gamma|_{[t_{k-1},t_k]}$ je hladká pro $k = 1, 2, \dots, n$.
- Křivka γ je *regulární*, když existuje dělení $D\colon \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ intervalu $[\alpha,\beta]$ tak, že funkce $\gamma|_{[t_{k-1},t_k]}$ má spojitou derivaci na $[t_{k-1}, t_k]$ pro $k = 1, 2, \dots, n$.
- Regulární křivku nazýváme *cesta*.
- *Uzavřenou cestou* rozumíme uzavřenou křivku, která je cestou.

Definice 4

- Křivka $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ se nazývá *jednoduchá*, jestliže pro každá dvě čísla $t_1, t_2 \in [\alpha,\beta], 0 < |t_1 - t_2| < \beta - \alpha$ platí $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$.
- Je-li navíc $\gamma(\alpha) \neq \gamma(\beta)$, hovoříme o *oblouku*, je-li $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$, mluvíme o *Jordanově křivce (jednoduché uzavřené křivce)*.
- Je-li Jordanova křivka cestou, mluvíme o *Jordanově cestě*.

Věta 12 (Cauchyova věta)

Buď $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ jednoduše souvislá oblast, f funkce holomorfní v Ω. Pak pro každou uzavřenou cestu γ v Ω platí

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Věta 13 (Cauchyův vzorec pro Jordanovu cestu)

Buď γ kladně orientovaná Jordanova cesta v $\mathbb{C}$ a G její vnitřek. Nechť funkce $f\colon \bar{G} \to \mathbb{C}$ je holomorfní v G a spojitá v $\bar{G}$. Pak

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \begin{cases} f(z) & \text{pro } z \in G, \\ 0 & \text{pro } z \notin \bar{G}. \end{cases}$$

Poznámka

Budeme používat následující značení prostorů funkcí.

- $\mathcal{S}[a,b]$ pro všechny po částech spojité funkce na intervalu $[a,b]$. Funkce z $\mathcal{S}[a,b]$ mají v každém bodě intervalu $[a,b]$ konečné jednostranné limity a bodů nespojitosti je nejvýše konečně mnoho. (Tj. mají nejvýše konečný počet nespojitostí a to buď odstranitelných, nebo skoků, jsou tedy na $[a,b]$ ohraničené.)
- $\mathcal{S}^k[a,b]$, $k \in \mathbb{N}$, pro funkce z $\mathcal{S}[a,b]$, jejichž derivace až do řádu k patří do $\mathcal{S}[a,b]$.
- Pro zdůraznění lze psát $\mathcal{S}[a,b] = \mathcal{S}^0[a,b]$.
- V případě neomezeného intervalu budeme značit $\mathcal{S}_c$ po částech spojité funkce s kompaktním nosičem, tj. nulové vně nějakého uzavřeného intervalu. Analogicky $\mathcal{S}_c^k$.

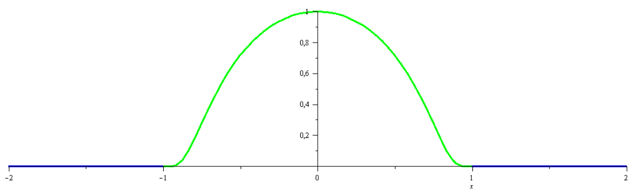
Uvažujme vektorový prostor $\mathcal{S}[a,b]$ všech po částech spojitých funkcí na intervalu $I=[a,b]$. Lineární zobrazení $\mathcal{S}\to\mathbb{R}$ se nazývají (reálné) *lineární funkcionály*. Například

- vyčíslení funkce v jednotlivých bodech je lineární funkcionál $L:\mathcal{S}\to\mathbb{R}$, tedy
$$f\mapsto L(f)=f(x_0);$$
- pomocí integrace můžeme zadat tzv. *integrální funkcionál* s pomocí pevně zvolené funkce $g(x)$ jako
$$L(f)=\int_a^b f(x)g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Funkce $g(x)$ zde hraje roli váhy, se kterou při definici Riemannova integrálu bereme jednotlivé hodnoty reprezentující funkci $f(x)$. Nejjednodušším příkladem takového funkcionálu je samozřejmě Riemannův integrál samotný, tj. případ s $g(x)=1$ pro všechny body $x\in[a,b]$.

Uvažujme nyní jako váhu například funkci
$$g(x)=\begin{cases}0 & \text{je-li } |x|\geq a\\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-a^2}+\frac{1}{a^2}} & \text{je-li } |x|<a.\end{cases}$$

Jde o funkci hladkou (tj. existují její derivace všech řádů) na celém $\mathbb{R}$ s kompaktním nosičem (množinou na které je funkce nenulová) v intervalu $(-a,a)$.



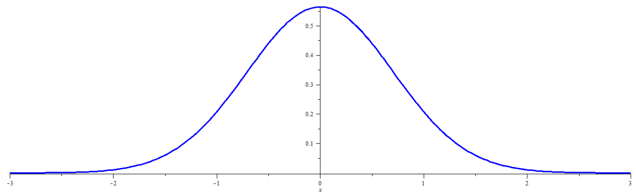
Obr.: Funkce $g(x)$ pro $a=1$.

Integrální funkcionál
$$L_y(f)=\int_a^b f(x)g(y-x)\ \mathrm{d}x$$
je pak možné vnímat jako „rozmlžené zprůměrování" hodnot funkce f kolem bodu $x=y$ (funkce g má ve svém středu hodnotu jedna a hladkým monotonním způsobem se plynule přimkne k nule ve vzdálenosti a na obě strany). Jde tedy o váženou kombinaci hodnot s rychle se zmenšující vahou při vzdalování se od počátku. Integrál funkce g na celém $\mathbb{R}$ je konečný, tedy je možné funkci přenásobením konstantou upravit na funkci, jejíž integrál přes celé $\mathbb{R}$ je 1.

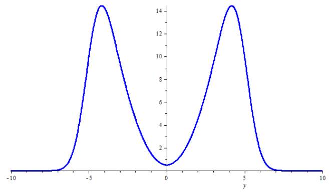
Podobně lze uvažovat tzv. Gaussovu funkci

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2}, \qquad \text{popř.} \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},$$

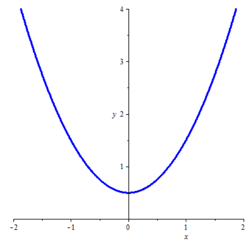
jejíž integrál přes celé $\mathbb{R}$ je 1 a jde tedy opět o „nerovnoměrné průměrování“ dané funkce. Pokud je váhou Gaussova funkce je zřejmé, že význam bodů dále od počátku bude klesat, ale nebude nulový.



Obr.: Gaussova funkce $g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2}$.



Obr.: $\int_{-5}^{5} x^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\,\mathrm{d}x$.



Obr.: $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\,\mathrm{d}x$.

Pohled na integrální funkcionál L_y jako na zprůměrované chování funkce f v okolí daného bodu je názornější pro případ nevlastních mezí integrálu $a = -\infty$, $b = \infty$. Místo prostoru $\mathcal{S}$ všech po částech spojitých funkcí na $\mathbb{R}$ budeme uvažovat po částech spojité a v absolutní hodnotě integrovatelné funkce f v roli argumentu pro náš funkcionál. Volný parametr y může být vnímán jako nová nezávislá proměnná a naše operace tedy ve skutečnosti zobrazuje funkce opět na funkce $f \mapsto \tilde{f}$, tj.

$$\tilde{f}(y) = L_y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y-x)\,\mathrm{d}x.$$

Této operaci se říká *konvoluce funkcí* f a g, značíme ji $f * g$. Většinou se konvoluce definuje pro reálné nebo komplexní funkce s kompaktním nosičem na celém $\mathbb{R}$.

Pomocí transformace $x = y - t$ se snadno spočte

$$(f*g)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y-x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\infty}^{-\infty} f(y-t)g(t)\,\mathrm{d}t = (g*f)(y),$$

tedy konvoluce je coby binární operace na dvojicích funkcí s kompaktními nosiči komutativní. Podobně lze ukázat, že platí

- asociativita
$$f*(g*h) = (f*g)*h;$$
- linearita ($c \in \mathbb{R}$)
$$f*(g+h) = f*g + f*h, \qquad f*(cg) = c(f*g) = (cf)*g;$$
-
$$|f*g| \le |f|*|g|;$$
- konvoluce dvou spojitých funkcí je spojitá funkce.

Konvoluce je mimořádně užitečný nástroj pro modelování způsobu, jak můžeme pozorovat experiment nebo jak se projevuje prostředí při přenosu informací (např. analogový audio nebo video signál ovlivňovaný šumy apod.). Argument f je přenášenou informací, funkce g je volena tak, aby co nejlépe vystihovala vlivy prostředí či zvoleného technického postupu.

Příklad 1

Uvažujme funkce

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2 & x\in[-1,1],\\ 0 & \text{jinak},\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}1 & x\in[-1,1],\\ 0 & \text{jinak}.\end{cases}$$

Určete konvoluci $f*g$.

▷ Zřejmě je konvoluce daných funkcí pro proměnnou $|y|\geq 2$ nulová.

Např. pro $y=2$ dostáváme, že funkce $f(x)$ je nenulová pro $x\in(-1,1)$ a funkce $g(2-x)$ pro $x\in[1,3]$, tedy jejich součin pro libovolné x je nulový.

Pro $y>2$ se nosiče funkcí $f(x)$ a $g(y-x)$ ještě více vzdalují. Pro $y\leq -2$ podobně (popř. přímo ze sudosti obou funkcí).

▷ Zajímá nás tedy jen interval $(-2,2)$.

Nosič funkce $f(x)$ je stále interval $(-1,1)$, zatímco nosič funkce $g(y-x)$ je „proměnný“ a jde o interval $(y-1,y+1)$. Proto musíme uvažovat dva případy.

Nejprve pro $y\in(-2,0]$ je součin $f(x)g(y-x)$ nenulový pro $x\in(-1,y+1)$, tedy máme

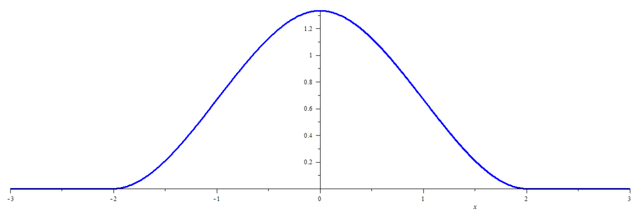
$$(f*g)(y)=\int_{-1}^{y+1}(1-x^2)\cdot 1\,\mathrm{d}x=-\frac{y^3}{3}-y^2+\frac{4}{3}.$$

Podobně pro $y\in(0,2)$ je součin $f(x)g(y-x)$ nenulový pro $x\in(y-1,1)$, tedy

$$(f*g)(y)=\int_{y-1}^{1}(1-x^2)\cdot 1\,\mathrm{d}x=\frac{y^3}{3}-y^2+\frac{4}{3}.$$

Celkem jsme tedy zjistili, že

$$(f*g)(y)=\begin{cases}-\frac{y^3}{3}-y^2+\frac{4}{3} & y\in(-2,0],\\ \frac{y^3}{3}-y^2+\frac{4}{3} & y\in(0,2),\\ 0 & \text{jinak}\end{cases}$$
$$=\begin{cases}\frac{|y|^3}{3}-y^2+\frac{4}{3} & y\in(-2,2),\\ 0 & \text{jinak}.\end{cases}$$



Obr.: Konvoluce $(f*g)(y)$ z příkladu 1.

Konvoluce jsou jedním z mnoha případů obecných integrálních operátorů na prostorech funkcí

$$K(f)(y) = \int_a^b f(x)k(y,x)\,\mathrm{d}x$$

s jádrem daným funkcí dvou proměnných $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Definiční obor takových funkcionálů je nutné vždy volit s ohledem na vlastnosti jádra tak, aby vždy existoval použitý integrál.

Nyní se zaměříme na jeden mimořádně důležitý případ integrálních operátorů, tzv. *Fourierovu transformaci* $\mathcal{F}$, která úzce souvisí s Fourierovými řadami. Připomeňme si základní formuli pro parametrizaci jednotkové kružnice v komplexní rovině s rychlostí obíhání $\omega = 2\pi/T$, kde T je čas jednoho oběhu

$$\mathrm{e}^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t.$$

Zjevně funkce $\cos\omega nt$, $\sin\omega nt$ tvoří ortogonální systém funkcí s periodou T a jejich velikosti na intervalu délky periody jsou $\sqrt{T/2}$, např.

$$||\sin\omega nt||^2 = \int_{-T/2}^{T/2} (\sin\omega nt)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin ns)^2\,\mathrm{d}s = T/2.$$

Pro (reálnou nebo komplexní) funkci $f(t)$ zavedeme její *komplexní Fourierovy koeficienty* jako komplexní čísla

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega nt}\,\mathrm{d}t.$$

Přitom platí vztahy mezi koeficienty Fourierových řad

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt)$$

a těmito čísly c_n

$$c_n = \tfrac{1}{2}(a_n - ib_n), \qquad c_{-n} = \tfrac{1}{2}(a_n + ib_n).$$

Při reálném f jsou samozřejmě c_n a c_{-n} komplexně konjugované.

Označíme-li $\omega_n = \omega n$, je původní funkce $f(t)$ s konvergující Fourierovou řadou rovna

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,\mathrm{e}^{i\omega_n t}.$$

Při pevně zvoleném T vyjadřuje výraz $\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = 2\pi/T$ změnu ve frekvenci způsobenou nárustem n o jedničku. Je to tedy právě diskrétní krok, se kterým při výpočtu koeficientů Fourierovy řady měníme frekvence. Náš další postup bude spočívat v limitním přechodu $T \to \infty$. Přitom se spočetná množina hodnot c_n „zahustí“ na celé kontinuum reálných hodnot a získáme místo Fourierových koeficientů c_n novou funkci $\tilde{f}$.

Koeficient $1/T$ u formule pro c_n je roven $\Delta\omega/2\pi$, takže můžeme řadu pro $f(t)$ přepsat jako

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\left(\Delta\omega \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,\mathrm{e}^{-i\omega_n x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{i\omega_n t}\right).$$

Představme si nyní hodnoty ω_n pro všechna $n \in \mathbb{Z}$ jako vybrané reprezentanty pro malé intervaly $[\omega_n, \omega_{n+1}]$ o délce $\Delta\omega$. Pak náš výraz ve vnitřní velké závorce ve skutečnosti vyjadřuje sčítance Riemannových součtů pro nevlastní integrál

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\mathrm{d}\omega,$$

kde $g(\omega)$ je funkce nabývající v bodech ω_n hodnoty

$$g(\omega_n) = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,\mathrm{e}^{-i\omega_n x}\,\mathrm{d}x.$$

Předpokládejme, že naše funkce f je integrovatelná v absolutní hodnotě přes celé $\mathbb{R}$. Pak můžeme limitně přejít $T \to \infty$ a dojde ke zjemňování normy $\Delta\omega$ našich intervalů. Zároveň se dostaneme v posledním výrazu k integrálu

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x.$$

Můžeme tedy položit pro (každou v absolutní hodnotě Riemannovsky integrovatelnou) funkci f na $\mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

Této funkci $\tilde{f}$ říkáme *Fourierova transformace* funkce f, kde koeficient $1/\sqrt{2\pi}$ souvisí s definicí inverzní operace. Naše odvození totiž ukazuje, že pro „rozumné“ funkce $f(t)$ bude platit

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{f})(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

Tím říkáme, že existuje k právě definované *Fourierově transformaci $\mathcal{F}$* inverzní operace $\mathcal{F}^{-1}$, které říkáme *inverzní Fourierova transformace*.

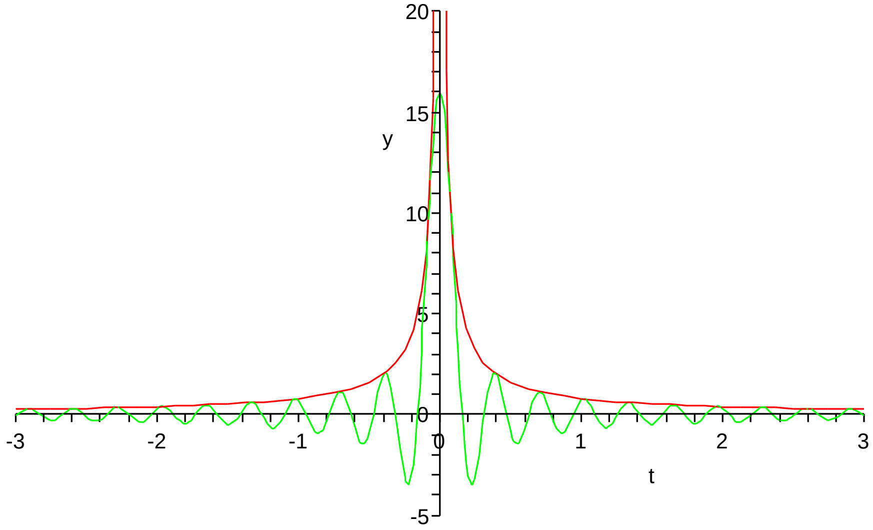
Všimněme si, že Fourierova transformace a její inverze jsou integrální operátory se skoro shodným jádrem $k(\omega, t) = \mathrm{e}^{\pm i\omega t}$.

Najděme funkci $f(t)$, která se ztransformuje na charateristickou funkci intervalu $[-\omega, \omega]$, tj. $\tilde{f}(x) = 0$ pro $|x| > \omega$ a $\tilde{f}(x) = 1$ pro $|x| \le \omega$. Inverzní transformace $\mathcal{F}^{-1}$ nám dává

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\omega}^{\omega} \mathrm{e}^{i\omega t}\,d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{it}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\right]_{-\omega}^{\omega}$$
$$= \frac{2}{t\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{i\omega t} - \mathrm{e}^{-i\omega t}) = \frac{2}{t\sqrt{2\pi}}\sin(\omega t).$$

Přímým výpočtem limity v nule spočteme, že $f(0) = 2\omega(2\pi)^{-1/2}$, nejbližší nulové body jsou v $t = \pm\pi/\omega$ a funkce poměrně rychle klesá k nule mimo počátek $x = 0$.

Na obrázku je tato funkce znázorněná zelenou křivkou pro $\omega = 20$. Zároveň je vynesena červenou křivkou oblast, ve které se s rostoucím ω naše funkce $f(t)$ stále rychleji „vlní“.



V dalším příkladu spočtěme Fourierovu transformaci derivace $f'(t)$ pro nějakou funkci f. Pro jednoduchost předpokládejme, že f má kompaktní nosič, tj. zejména $\mathcal{F}(f')$ i $\mathcal{F}(f)$ skutečně existují a počítejme metodou per partes

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f')(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} f'(t)\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\mathrm{e}^{-i\omega t} f(t)\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t \\ &= i\omega \mathcal{F}(f)(\omega).\end{aligned}$$

Transformace derivací

Fourierova transformace převádí (infinitesimální) operaci derivování na (algebraickou) operaci prostého násobení proměnnou. Samozřejmě můžeme tento vzorec iterovat, tj. $\mathcal{F}(f')(\omega) = i\omega\mathcal{F}(f)(\omega)$, $\mathcal{F}(f'')(\omega) = -\omega^2\mathcal{F}(f), \dots$.

Další mimořádně důležitou vlastností je vztah mezi konvolucemi a Fourierovou transformací. Najděme transformaci konvoluce $h = f * g$, kde opět pro jednoduchost předpokládáme, že funkce mají kompaktní nosiče.

Při výpočtu zaměníme pořadí integrovanání a v dalším kroku pak zavedeme substituci $t - x = u$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(h)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t-x)\, dx \right) \mathrm{e}^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\, dt \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\, \mathrm{e}^{-i\omega(u+x)}\, du \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{-i\omega x}\, \mathrm{d}x \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\, \mathrm{e}^{-i\omega u}\, \mathrm{d}u \right) \\
&= \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g),
\end{aligned}$$

tedy transformace konvoluce je (až na konstantu) součin transformací.

Podobný výpočet ukazuje i obrácené tvrzení, že Fourierova transformace součinu je, až na konstantu, konvoluce transformací.

$$\mathcal{F}(f \cdot g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g).$$

Jak jsme si uváděli výše, konvoluce $f * g$ velice často modeluje proces našeho pozorování nějaké sledované veličiny f. Pomocí Fourierovy transformace a její inverze nyní můžeme snadno rozpoznat původní hodnoty této veličiny, pokud známe konvoluční jádro g. Prostě spočteme $\mathcal{F}(f * g)$ a podělíme obrazem $\mathcal{F}(g)$. Hovoříme pak o *dekonvoluci*.

Fourierovu transformaci nelze dobře využít pro funkce, které nejsou integrovatelné v absolutní hodnotě přes celé $\mathbb{R}$. Laplaceova transformace se chová podobně jako Fourierova a tuto vadu nemá. Integrální operátor definující Laplaceovu transformaci

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-st}\, \mathrm{d}t$$

má jádro, které se s rostoucím s rychle zmenšuje.

Obvykle proto Laplaceovu transformaci chápeme jako zobrazení vhodných funkcí na intervalu $[0, \infty)$ do funkcí na témže nebo menším intervalu. Obraz $\mathcal{L}(f)$ bude existovat např. pro každý polynom $f(t) = P(t)$ a všechna kladná s.
Obdobně jako pro Fourierovu transformaci dostaneme prostým výpočtem per partes vztah pro Laplaceovu transformaci derivované funkce při $s > 0$, tj.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f')(s) &= \int_0^{\infty} f'(t)\, \mathrm{e}^{-st}\, \mathrm{d}t \\
&= \left[f(t)\, \mathrm{e}^{-st} \right]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-st}\, \mathrm{d}t \\
&= -f(0) + s\mathcal{L}(f)(s).
\end{aligned}$$

Příklad 2

Určete $\mathcal{L}(f)(s)$ pro $f(t) = t\,\mathrm{e}^{-t}, s > -1$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(f)(s) &= \int_0^\infty t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty t\,\mathrm{e}^{-t(s+1)}\,\mathrm{d}t \\
&= \begin{vmatrix} u = t & u' = 1 \\ v' = \mathrm{e}^{-t(s+1)} & v = -\frac{\mathrm{e}^{-t(s+1)}}{s+1} \end{vmatrix} \\
&= \left[\frac{-t\,\mathrm{e}^{-t(s+1)}}{s+1}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t(s+1)}}{s+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{-1}{s+1}\lim_{t\to\infty}\frac{t}{\mathrm{e}^{t(s+1)}} - \frac{-0\cdot 1}{s+1} + \left[-\frac{\mathrm{e}^{-t(s+1)}}{(s+1)^2}\right]_0^\infty \\
&= \frac{-1}{(s+1)^2}\lim_{t\to\infty}\frac{t}{\mathrm{e}^{t(s+1)}} - \frac{-1}{(s+1)^2} = \frac{1}{(s+1)^2}.
\end{aligned}
$$

$f(t)$	$\mathcal{L}(f(t))(s)$	s
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
$t\,\mathrm{e}^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$s > a$
$t^n\,\mathrm{e}^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$s > 0$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$s > 0$
$\mathrm{e}^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$	$s > a$
$\mathrm{e}^{at}\cos\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	$s > a$
$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$s > 0$
$\sin\omega t - \omega t\cos\omega t$	$\frac{2\omega^3}{(s^2+\omega^2)^2}$	$s > 0$
$\mathrm{e}^{at}(\cos\omega t + \frac{a}{\omega}\sin\omega t)$	$\frac{s}{(s-a)^2+\omega^2}$	$s > a$

Příklad 3

Určete transformaci hyperbolického sinu.

Z linarity nevlastního integrálu je zřejmé, že

$$
\mathcal{L}(\sinh\omega t) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}(\mathrm{e}^{\omega t}) - \mathcal{L}(\mathrm{e}^{-\omega t})\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-\omega} - \frac{1}{s+\omega}\right] = \frac{\omega}{s^2-\omega^2}.
$$

Násobení polynomem

Derivujme transformaci funkce $f(t) = -g(t)$ podle parametru s, tj.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\left[\mathcal{L}(-g(t))\right] &= \left[\int_0^\infty -g(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\right]' \\
&= \int_0^\infty -g(t)(\mathrm{e}^{-st})'\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty t\,g(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}(t\,g(t)).
\end{aligned}
$$

Příklad 4

Určete transformaci finkce $f(t) = t\sinh t$.

Víme, že

$$
\mathcal{L}(\sinh t)(s) = \frac{1}{s^2-1}.
$$

Odtud ihned

$$
\mathcal{L}(t\sinh t)(s) = \left(\frac{-1}{s^2-1}\right)' = \frac{2s}{(s^2-1)^2}.
$$

Příklad 5

Vyřešte počáteční problém

$$y'' + 4y' + 5y = 10\,\mathrm{e}^t, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

Užijeme Laplaceovu transformaci

$$\mathcal{L}(y'' + 4y' + 5y) = \mathcal{L}(10\,\mathrm{e}^t).$$

Označme transformaci hledané funkce y jako Y a využijme znalost transformace derivace $\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$, odkud vidíme

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'')(s) = s\mathcal{L}(f')(s) - f'(0) &= s[s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)] - f'(0)\\ &= s^2\mathcal{L}(f)(s) - sf(0) - f'(0).\end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y'' + 4y' + 5y) &= \mathcal{L}(y'') + 4\mathcal{L}(y') + 5\mathcal{L}(y)\\ &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4sY(s) - 4y(0) + 5Y(s)\\ &= Y(s)(s^2 + 4s + 5) - s - 6.\end{aligned}$$

Protože $\mathcal{L}(10\,\mathrm{e}^t) = \frac{10}{s-1}$, dostáváme rovnici

$$Y(s)(s^2 + 4s + 5) - s - 6 = \frac{10}{s-1},$$

tedy

$$Y(s) = \frac{s+6}{s^2+4s+5} + \frac{10}{(s-1)(s^2+4s+5)} = \frac{1}{(s+2)^2+1} + \frac{1}{s-1}.$$

Inverzní transformací pak obdržíme řešení rovnice ve tvaru

$$y(t) = \mathrm{e}^{-2t}\sin t + \mathrm{e}^t\,.$$

Literatura

- P. P. G. Dyke
  An introduction to Laplace transforms and Fourier series
  Springer, London, 2004
- J. Kalas
  Analýza v komplexním oboru
  Masarykova univerzita, Brno, 2006
- J. Slovák a kol.
  Matematika drsně a svižně
  Masarykova univerzita, Brno, 2013
- J. Veselý
  Komplexní analýza pro učitele
  Karolinum, Praha, 2000

V této prezentaci jsou použity části textu z [Kalas, 2006] a [Slovák a kol., 2013].