Nekonečné řady

Petr Hasil

Přednáška z Matematické analýzy

Obsah

1. Nekonečné číselné řady
   - Základní pojmy
   - Řady s nezápornými členy
   - Řady s libovolnými členy
   - Násobení nekonečných řad a odhad zbytku
2. Řady funkcí
   - Posloupnosti a řady funkcí
   - Mocninné řady
   - Fourierovy řady
   - Fourierovy řady vzhledem k $\{1, \sin x, \cos x, \dots\}$

Definice 1

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Položme $s_n = a_1 + \cdots + a_n$. Tuto posloupnost nazýváme *posloupnost částečných součtů* řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, přičemž symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rozumíme nekonečný součet $a_1 + \cdots + a_n + \cdots$, jehož hodnotu definujeme takto:

- Jestliže existuje konečná limita $s = \lim_{n\to\infty} s_n$, definujeme
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \left(= \lim_{n\to\infty} s_n\right)$$
a řekneme, že nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje*.
- Jestliže limita neexistuje, nebo je rovna nekonečnu, řekneme, že tato řada *diverguje*, a to k $\pm\infty$ v případě nevlastní limity (píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$), resp. řekneme, že *osciluje*, když $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje.

Číslo a_n se nazývá *n–tý člen*, číslo s_n se nazývá *n–tý částečný součet* řady.

Příklad 1

Geometrická řada je součet tvaru
$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n,$$
kde $a, q \in \mathbb{R}$ jsou pevně zvolená čísla. Tedy je to nekonečná řada, kde $a_n := aq^{n-1}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Číslo q se nazývá *kvocient* geometrické řady, přičemž q může být kladné či záporné. Posloupnost částečných součtů pro geometrickou řadu odvodíme snadno:
$$s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-2} + aq^{n-1}, \quad qs_n = aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^{n-1} + aq^n.$$
Odečtením druhé rovnice od první dostaneme
$$s_n - qs_n = a - aq^n \quad \Rightarrow \quad s_n(1-q) = a(1-q^n).$$

- Je-li $q = 1$, potom je zřejmě $s_n = na$.
- Je-li $q \neq 1$, potom je
$$s_n = a\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Ihned tedy dostáváme

- Geometrická řada s $a = 0$ (a $q \in \mathbb{R}$ libovolným) *konverguje* (k 0), protože v tomto případě jsou $s_n = 0$.
- Geometrická řada s $a \neq 0$ a $q = 1$ zřejmě *diverguje* (k $\pm\infty$ podle znaménka čísla a), protože v tomto případě jsou $s_n = na$.
- Geometrická řada s $a \neq 0$ a $q = -1$ zřejmě *osciluje*, protože je v tomto případě $s_n = \{a, 0, a, 0, a, 0, \dots\}$ a limita této posloupnosti neexistuje.

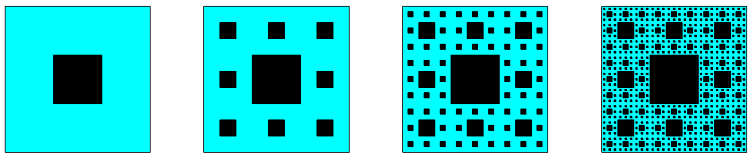
Věta 1

Nechť $a \neq 0$. Potom geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ konverguje právě tehdy když $|q| < 1$. V tomto případě (a také v případě $a = 0$) je pak její součet

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}, \qquad |q| < 1.$$

Příklad 2

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1 \qquad (a = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2})$
- Plocha Sierpinského koberce (o straně 1 jednotka)



$$P = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^{n-1}}{9^n} = 1 - \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^n = 1 - \frac{1}{8}\cdot\frac{\frac{8}{9}}{1-\frac{8}{9}} = 1 - 1 = 0$$

Příklad 3

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}}{n} - \frac{\frac{1}{2}}{n+2}$

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{3}{4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n} = \frac{3}{4}$

Příklad 4

- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ (Grandiho řada)

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n = \begin{cases} -1 & n \text{ liché} \\ 0 & n \text{ sudé} \end{cases}$$

Limita s_n neexistuje, řada osciluje.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (harmonická řada)

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{16} + \cdots \\ \geq & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{16} + \cdots \end{aligned}$$

$s_{2^n} \to \infty$, $1 + n \cdot \frac{1}{2} \to \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

Poznámka

1. $\sum a_n$ ... rozumí se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
2. Charakter chování řady (konvergence, divergence, oscilace) zachováme, jestliže změníme konečný počet členů posloupnosti a_n. (Zvláště vynecháme-li konečný počet prvků např. na začátku.)
3. Často nás spíše než součet řady zajímá, zda řada konverguje, resp. diverguje, aniž nás zajímá konkrétní hodnota součtu.

Věta 2 (Nutná podmínka konvergence)

Jestliže řada $\sum a_n$ konverguje, pak limita $\lim a_n = 0$.

Důkaz.

Když $s = \lim s_n = \lim(a_1 + \cdots + a_n)$ existuje a je konečná, pak $a_n = s_n - s_{n-1}$, tedy $\lim a_n = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0$. □

Poznámka

Opačné tvrzení neplatí – viz harmonickou řadu.

Věta 3 (Asociativní zákon pro nekonečné řady)

Nechť $\sum a_n = a$ je konvergentní. Nechť n_k je libovolná rostoucí posloupnost přirozených čísel, $n_0 = 0$ a $b_k = a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}$. Pak řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje se stejným součtem jako původní řada, tj. $\sum b_k = a$.

Důkaz.

$$\underbrace{a_1 + \cdots + a_{n_1}}_{b_1} + \underbrace{a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}}_{b_2} + \cdots = \sum a_n = a$$

Označme $s_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$, $t_k = \sum_{j=1}^{k} b_j \Rightarrow$
$t_1 = s_{n_1}$, $t_2 = b_1 + b_2 = s_{n_2}, \ldots, t_k = s_{n_k}$. Protože limita s_n je a, pak $\lim_{k\to\infty} s_{n_k} = \lim_{n\to\infty} t_k = a$, tedy $\sum b_k = a$.
(Posloupnost $\{t_i\}$ je vybraná podposloupnost $\{s_j\}$.) □

Příklad 5

$\sum(-1)^n$ – asociativní zákon neplatí!

Věta 4 (Cauchyovo–Bolzanovo kritérium konvergence)

Řada $\sum a_n$ je konvergentní právě tehdy, když posloupnost jejích částečných součtů s_n je cauchyovská, tj.
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0, \forall n > n_0$ *a* $\forall m \in \mathbb{N} : |s_{n+m} - s_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_{n+m}| < \varepsilon.$

Důkaz.

$\{s_n\}$ je konvergentní právě tehdy, když je cauchyovská ($\mathbb{R}$ je úplný metrický prostor). □

Věta 5

Nechť $\sum a_n = a$ *a* $\sum b_n = b$ *jsou konvergentní řady a* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Pak i řada $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$ *je konvergentní a platí*

$$\sum(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b.$$

Důkaz.

Vlastnosti limit – samostatné procvičení. □

Poznámka

$\sum a_n = a$ a $\sum b_n = \infty$, pak $\sum(a_n + b_n) = \infty$

Řadami s nezápornými členy rozumíme řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pro které $a_n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. (Často budemem uvažovat i řady s kladnými členy, tedy $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.)
Je zřejmé, že součet nemůže být záporný (nekladný) a nemůže nastat oscilace. Tj. limita částečných součtů existuje a platí $0 \leq \lim s_n \leq \infty$, přičemž $\lim s_n = 0$ pouze pokud $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Věta 6 (Prosté srovnávací kritérium)

Nechť $a_n, b_n \geq 0$ *a nechť* $a_n \leq b_n$ *platí pro velká* n*, tj.*
$\exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n\ \forall n \geq n_0$.

- *Je-li* $\sum b_n < \infty$, *pak* $\sum a_n < \infty$.
- *Naopak, je-li* $\sum a_n = \infty$, *pak* $\sum b_n = \infty$.

Poznámka

Řada $\sum b_n$ je majorantní řadou k řadě $\sum a_n$ a řada $\sum a_n$ je minorantní řadou k řadě $\sum b_n$.

Důkaz.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a_n \leq b_n\ \forall n \in \mathbb{N}$. Označme $s_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$, $t_k = \sum_{j=1}^{k} b_j \Rightarrow s_n \leq t_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

- Je-li $\sum b_n < \infty$, pak posloupnost $\{t_n\}$ konverguje, tedy je shora ohraničená. Potom je také posloupnost $\{s_n\}$ shora ohraničená. Protože je navíc neklesající, musí konvergovat.
- Sporem předpokládejme, že $\sum a_n = \infty$ a $\sum b_n < \infty$. Dle výše dokázaného plyne z konvergence řady $\sum b_n$ konvergence řady $\sum a_n$. Spor.

□

Příklad 6

Rozhodněte o konvergenci (divergenci) řady $\sum \frac{1}{n^2}$.

Pro $n \geq 2$ máme $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$. Pokud dokážeme, že majorantní řada konverguje, lze použít předchozí větu. Pro velká $m \in \mathbb{N}$ máme

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{m} \frac{1}{n(n-1)} &= \sum_{n=2}^{m} \frac{-1}{n} + \frac{1}{n-1} \\ &= -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \cdots - \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m-2} - \frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} \\ &= 1 - \frac{1}{m} \to 1 \text{ pro } m \to \infty,\end{aligned}$$

tedy $\sum \frac{1}{n^2}$ konverguje.

Věta 7 (Integrální kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečná řada s nezápornými členy. Nechť $f(x)$ je funkce definovaná na intervalu $[N, \infty)$ pro nějaké $N \in [0, \infty)$, která je na tomto intervalu nezáporná, nerostoucí a platí

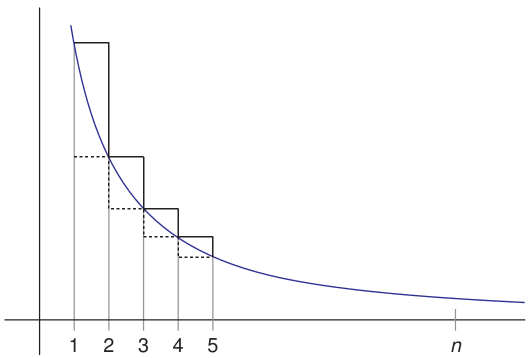
$$f(n) = a_n \qquad \text{pro všechna } n \geq N.$$

Potom

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konverguje} \quad &\Leftrightarrow \quad \int_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{konverguje}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{diverguje k } \infty \quad &\Leftrightarrow \quad \int_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \infty.\end{aligned}$$

Důkaz.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $N = 1$. Vzhledem k monotonii funkce f je tato integrovatelná na libovolném intervalu $[1, t], 1 \leq t \in \mathbb{R}$ a funkce horní meze $F(t) = \int_1^t f(x)\mathrm{d}x$ je neklesající.
Jistě platí $\sum_{i=2}^{n} a_i \leq \int_1^n f(x)\mathrm{d}x \leq \sum_{i=1}^{n-1} a_i$,



tedy $s_n - a_1 \leq F(n) \leq s_{n-1}$.

- Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak je posloupnost $\{s_n\}$ shora ohraničená a tedy $\exists k \in \mathbb{R} : F(n) \leq k \ \forall n \in \mathbb{N}$. Funkce F je neklesající, tedy $F(t) \leq k \ \forall t \in [1, \infty)$. Limita $\lim_{t\to\infty} F(t)$ tedy konverguje, což znamená konvergenci $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.
- Jestliže $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, pak je F shora ohraničená. Z nerovnosti $s_n - a_1 \leq F(n)$ plyne ohraničenost posloupnosti částečných součtů $\{s_n\}$, která je neklesající a ohraničená, tedy konvergentní.

$\square$

Příklad 7

Pomocí integrálního kritéria snadno dokážeme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{diverguje pro } \alpha \le 1, \\ \text{konverguje pro } \alpha > 1. \end{cases}$$

Věta 8 (Limitní srovnávací kritérium)

Nechť $a_n, b_n \ge 0$ a existuje limita $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ (vlastní nebo nevlastní).

- *Je-li $\sum b_n < \infty$ a $L < \infty$, pak $\sum a_n < \infty$.*
- *Je-li $\sum b_n = \infty$ a $L > 0$, pak $\sum a_n = \infty$.*

Důkaz.

Předpokládejme, že $\sum b_n < \infty$ a $L < \infty$, pak

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \ge n_0 : L - \varepsilon < \underbrace{\frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon}$. Odtud

$a_n < (L+\varepsilon)b_n \Rightarrow \sum a_n \le \sum (L+\varepsilon)b_n \Rightarrow \sum a_n \le (L+\varepsilon)\sum b_n < \infty$.

Tedy $\sum a_n$ konverguje.

Předpokládejme, že $\sum b_n = \infty$ a $L > 0$ a uvažujme dva případy.

- Jestliže $L < \infty$, pak $\exists \varepsilon > 0$ a $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \ge n_0 : 0 < L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n}$.
  Tedy $(L-\varepsilon)b_n < a_n \Rightarrow \infty \le \sum a_n$.
- Jestliže $L = \infty$, pak $\exists k > 0, k \in \mathbb{R}$, a $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \ge n_0 : k < \frac{a_n}{b_n}$.
  Tedy $kb_n < a_n \Rightarrow \infty \le \sum a_n$.

$\square$

Příklad 8

Rozhodněte o konvergenci (divergenci) řady $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{-1}{n^2}}{\frac{-1}{n^2}} = 1 > 0,$$

tj. $\sum b_n = \sum \frac{1}{n} = \infty, L > 0 \Rightarrow \sum \operatorname{arctg} \frac{1}{n} = \infty$.

Příklad 9

Rozhodněte o konvergenci (divergenci) řady $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$.

- $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = 0$, (nelze použít)
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = 1$,

  tj. $\sum b_n < \infty, L < \infty \Rightarrow \sum a_n < \infty$.

Věta 9 (Podílové (d'Alembertovo) kritérium)

Nechť $a_n > 0$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. *Jestliže $\exists k \in \mathbb{R}, k < 1 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k, \forall n \in \mathbb{N}$, pak $\sum a_n$ konverguje.* *Jestliže $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, pak $\sum a_n$ diverguje.*
2. *Nechť navíc existuje limita $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L, L \in \mathbb{R}^*$. Je-li $L < 1$, pak $\sum a_n < \infty$; je-li $L > 1$, pak $\sum a_n = \infty$; je-li $L = 1$, nelze rozhodnout.*

Poznámka

Pro $a_n = \frac{1}{n^2}$ i pro $a_n = \frac{1}{n}$ je $L = 1$, přitom jedna řada konverguje a druhá diverguje.

Důkaz.

Dokážeme limitní podílové kritérium (první část podobně).
Jestliže $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, pak $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : L - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon \Rightarrow (L-\varepsilon)a_n < a_{n+1} < (L+\varepsilon)a_n$.

- $L < 1$: Nechť $\varepsilon > 0$ je takové, že $L + \varepsilon = q < 1 \Rightarrow a_{n+1} \leq q a_n \Rightarrow a_{n_0+1} \leq q a_{n_0}, a_{n_0+2} \leq q^2 a_{n_0}, \dots, a_{n_0+k} \leq q^k a_{n_0}$, pak
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{n_0} a_n + \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k} \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{n_0} a_n}_{\text{číslo}} + a_{n_0} \sum_{k=1}^{\infty} q^k = \text{číslo} + a_{n_0} \frac{q}{1-q},$$
tedy řada $\sum a_n$ konverguje.
- $L > 1$: Porovnání s geometrickou řadou s $q = L - \varepsilon > 1$.

□

Věta 10 (Odmocninové (Cauchyovo) kritérium)

Nechť $a_n > 0$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. *Jestliže $\exists k \in \mathbb{R}, k < 1 : \sqrt[n]{a_n} \leq k, \forall n \in \mathbb{N}$, pak $\sum a_n$ konverguje.* *Jestliže $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$, pak $\sum a_n$ diverguje.*
2. *Nechť navíc existuje limita $\lim \sqrt[n]{a_n} = L, L \in \mathbb{R}^*$. Je-li $L < 1$, pak $\sum a_n < \infty$; je-li $L > 1$, pak $\sum a_n = \infty$; je-li $L = 1$, nelze rozhodnout.*

Poznámka

Opět např. pro $a_n = \frac{1}{n^2}$ i pro $a_n = \frac{1}{n}$ je $L = 1$, přitom jedna řada konverguje a druhá diverguje.

Důkaz.

Opět dokážeme limitní kritérium (první část podobně).
Jestliže $\lim \sqrt[n]{a_n} = L \Rightarrow L - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon$, pro velká n. Tedy $(L-\varepsilon)^n < a_n < (L+\varepsilon)^n$ a použijeme obdobně jako v předchozím důkazu porovnání s geometrickou řadou. □

Poznámka

Lze ukázat, že platí
$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Tedy pokud existuje limita $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, potom existuje i limita $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ a tyto dvě limity si jsou rovny.

Navíc, jestliže je podílové kritérium nerozhodnutelné ($\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$), potom je také odmocninové kritérium nerozhodnutelné ($\sqrt[n]{a_n} \to 1$). Říkáme, že odmocninové kritérium je silnější, než podílové kritérium (každý problém, který lze vyřešit podílovým kritériem, lze vyřešit i odmocninovým kritériem, ale ne naopak).

Příklad 10

Rozhodněte o konvergenci (divergenci) řady

- $\sum \frac{n^n}{n!}$
  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} \mathrm{e} > 1$ řada diverguje
- $\sum \frac{n}{(3+\frac{1}{n})^n}$
  $\lim \sqrt[n]{\frac{n}{(3+\frac{1}{n})^n}} = \lim \frac{\sqrt[n]{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} < 1$ řada konverguje

Věta 11 (Raabeovo kritérium)

Nechť $a_n > 0$ a nechť existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L, \quad L \in \mathbb{R}^*.$$

Pro $L < 1$ řada diverguje, pro $L > 1$ řada konverguje a pro $L = 1$ nelze rozhodnout.

Poznámka

Raabeovo kritérium je zesílením podílového kritéria. (Přibližování k 1 zespoda či shora.) V literatuře lze najít (či odvodit) další zobecnění, tedy další silnější kritéria. Jediné „univerzální“ je ale Cauchyovo–Bolzanovo kritérium (věta 4).

Příklad 11

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2)\cdots(\sqrt{2}+n)}$

- $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)!(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2)\cdots(\sqrt{2}+n)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2)\cdots(\sqrt{2}+n)(\sqrt{2}+n+1)n!} = \lim \frac{n+1}{\sqrt{2}+n+1} = 1$
- $\lim n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim n\left(1-\frac{n+1}{\sqrt{2}+n+1}\right) = \lim \frac{n(\sqrt{2}+n+1-n-1)}{\sqrt{2}+n+1}$
  $= \lim \frac{n\sqrt{2}}{\sqrt{2}+n+1} = \sqrt{2} > 1$, tedy řada konverguje

Poznámka

$\sum a_n$, $a_n > 0$ a člen a_n má n v exponentu, nebo obsahuje faktoriál. Pak je obvykle výhodné zkusit podílové nebo odmocninové kritérium.
Není-li tomu tak, pak zkusíme podílové srovnávací kritérium s $1/n^\alpha$. Dále je k dispozici integrální kritérium.
Např.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$$

$$\int_{\mathrm{e}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^\alpha} = \left|\ln x = t, \frac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}t\right| = \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \begin{cases} \text{konv.} & \alpha > 1 \\ \text{div.} & \alpha \le 1 \end{cases}$$

Věta 12 (Kondenzační kritérium)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní posloupnost kladných čísel. Pak je konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ekvivalentní s konvergencí řady $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

Poznámka

- Kondenzační kritérium lze někdy využít, když v odmocninovém a podílovém kritériu vyjde jednička.
- Kondenzační kritérium se často formuluje pouze pro monotónní posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Z nutné podmínky konvergence pak plyne, že daná posloupnost musí být buď kladná a klesající, nebo záporná a rostoucí, jinak jsou obě uvažované řady divergentní. (Pro zápornou a rostoucí posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jde pouze o „překlopení“.)

Důkaz.

Z platnosti nutné podmínky konvergence je zřejmé, že $a_n \geq a_{n+1}$. Rozepsáním

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = a_1 + (a_2 + a_2) + (a_4 + a_4 + a_4 + a_4) + \cdots$$

vidíme, že konvergence druhé řady implikuje konvergenci první řady. Nyní druhou řadu upravíme (konvergence není ovlivněna) na

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = a_2 + (a_4 + a_4) + (a_8 + a_8 + a_8 + a_8) + \cdots,$$

jejíž konvergence plyne z konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Příklad 12

Rozhodněme o konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- Odmocninové kritérium

$$\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}(\sqrt[n]{\ln n})^{\alpha}} = \frac{1}{1 \cdot 1^{\alpha}} = 1,$$

kde $\ln(\sqrt[n]{\ln n}) = \frac{\ln(\ln n)}{n} \to 0 \Rightarrow \sqrt[n]{\ln n} \to e^0 = 1$.

- Podílové kritérium nemá cenu zkoušet, pro úplnost dostaneme

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^{\alpha} = 1 \cdot 1^{\alpha} = 1.$$

- Kondenzačním kritériem dostaneme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n(\ln 2^n)^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2^n)^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n \ln 2)^{\alpha}} = \frac{1}{(\ln 2)^{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}},$$

tedy

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}} = \begin{cases} \text{diverguje pro } \alpha \leq 1, \\ \text{konverguje pro } \alpha > 1. \end{cases}$$

Definice 2

Nechť $a_n > 0$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ se nazývá *alternující řada*.

Poznámka

Alternující řada je také řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ a obecně řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ splňující $\operatorname{sgn} f_n = -\operatorname{sgn} f_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Věta 13 (Leibnizovo kritérium)

Nechť $a_n > 0$ je nerostoucí posloupnost. Jestliže $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, pak alternující řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ konverguje.

Poznámka

Vzhledem k platnosti nutné podmínky konvergence lze větu 13 formulovat i s ekvivalencí.

Důkaz.

$s_{2n} = \underbrace{a_1 - a_2}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{a_{2n-1} - a_{2n}}_{\geq 0}$, $s_{2n+2} = s_{2n} + \underbrace{a_{2n+1} - a_{2n+2}}_{\geq 0}$,
tedy posloupnost $\{s_{2n}\}$ je neklesající. Podobně
$s_{2n-1} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1})$,
$s_{2n+1} = s_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1})$, tedy $\{s_{2n+1}\}$ je nerostoucí.
$s_2 = a_1 - a_2 \leq s_{2n} \leq s_{2n} + a_{2n+1} = s_{2n+1} \leq s_1 = a_1 \Rightarrow \{s_{2n}\}, \{s_{2n+1}\}$ jsou ohraničené, obě mají konečnou limitu $\lim(s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim a_{2n+1} = 0 \Rightarrow$
$\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n} = s = \lim s_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = s$ konverguje. □

Příklad 13

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ (Leibnizova řada)
$\frac{1}{n} \to 0, \left(\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ konverguje

Příklad 14

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

$\lim a_n = 0$, kdyby řada konvergovala, pak bychom mohli aplikovat asociativní zákon (věta 3). Pro n liché máme

$$\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} = \frac{\sqrt{n+1}+1-\sqrt{n}+1}{(\sqrt{n}-1)(\sqrt{n+1}+1)} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}+2}{(\sqrt{n}-1)(\sqrt{n+1}+1)} \geq \frac{1}{n}.$$

Uzávorkovaná řada diverguje, tedy ve větě 13 nelze vynechat předpoklad monotonie.

Definice 3

Řekneme, že řada $\sum a_n$ *konverguje absolutně*, pokud konverguje řada $\sum |a_n|$. Řekneme, že řada konverguje *neabsolutně* (relativně), jestliže řada $\sum a_n$ konverguje, ale řada $\sum |a_n|$ diverguje.

Příklad 15

$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ je neabsolutně konvergentní – sama konverguje, ale absolutní hodnotou dostaneme harmonickou řadu, která diverguje.

$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ je absolutně konvergentní, neboť $\sum \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right| = \sum \frac{1}{n^2} < \infty$.

Věta 14

Je-li řada $\sum a_n$ absolutně konvergentní, pak je konvergentní. (Tedy z absolutní konvergence plyne konvergence.)

Důkaz.

Podle Cauchyova–Bolzanova kritéria (věta 4) je řada $\sum |a_n|$ konvergentní právě tehdy, když posloupnost $\underbrace{|a_1| + \cdots + |a_n|}_{s_n}$ je cauchyovská, tj.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0, m \in \mathbb{N}:$

$$|s_{n+m} - s_n| = \big||a_{n+m}| + \cdots + |a_{n+1}|\big| < \varepsilon \Rightarrow |a_{n+m} + \cdots + a_{n+1}| < \varepsilon.$$

tedy posloupnost částečných součtů řady $\sum a_n$ je cauchyovská, tedy řada konverguje. □

Poznámka

Opak neplatí – viz Leibnizovu řadu.

Poznámka

Při rozhodování o konvergenci/divergenci je někdy výhodné otestovat nejprve $\sum |a_n|$ pomocí kritérií o řadách s nezápornými členy. Je-li $\sum |a_n| < \infty \Rightarrow \sum a_n < \infty$.

Věta 15 (Abelovo kritérium)

Nechť $\sum a_n$ je konvergentní a $\{b_n\}$ je ohraničená a monotónní posloupnost. Pak $\sum (a_n b_n)$ je konvergentní.

Věta 16 (Dirichletovo kritérium)

Nechť $\sum a_n$ má ohraničenou posloupnost částečných součtů a $\{b_n\}$ je monotónní posloupnost s limitou nula ($b_n \to 0$). Pak $\sum (a_n b_n)$ je konvergentní.

Příklad 16

Otestujme konvergenci řady $\sum \frac{\sin nx}{n}$, $x \in \mathbb{R}$. Pokud je x celočíselný násobek π, řada konverguje. Dále postupujme pro všechna ostatní x. Zvolíme $a_n = \sin nx$, $b_n = \frac{1}{n}$, tedy $b_n \to 0$ a je ohraničená.

$$\begin{array}{rl} s_n = \sin x + \cdots + \sin nx & / \cdot i \\ c_n = \cos x + \cdots + \cos nx & \\ \hline \sum_{k=1}^{n} (\cos kx + i \sin kx) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ikx} & \end{array}$$

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = e^{ix} + e^{2ix} + \cdots + e^{nix} = e^{ix}\,\frac{e^{ixn}-1}{e^{ix}-1}$$

$$= e^{ix}\,\frac{e^{\frac{ixn}{2}}\left(e^{\frac{ixn}{2}} - e^{-\frac{ixn}{2}}\right)}{e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}\right)} = \left|e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2i\sin\alpha\right|$$

$$= e^{\frac{ix}{2}}\cdot e^{\frac{ixn}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{xn}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \left[\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) + i\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\right]\frac{\sin\frac{xn}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Imaginární část dává

$$\sin x + \cdots + \sin nx = \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin\frac{xn}{2}}{\sin\frac{x}{2}},$$

což je ohraničené, tedy řada konverguje podle Dirichletova kritéria.

Konverguje absolutně?

- Pokud je x celočíselný násobek π, pak ano.
- Pokud x není celočíselný násobek π, pak

$$\sum \frac{|\sin nx|}{n} \geq \sum \frac{\sin^2 nx}{n} = \sum \frac{1-\cos 2nx}{2n} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\sum \frac{1}{n}}_{=\infty} - \underbrace{\sum \frac{\cos 2nx}{n}}_{\text{konv. dle DK}}\right).$$

Řada $\sum \frac{|\sin nx|}{n}$ diverguje, tedy řada $\sum \frac{\sin nx}{n}$ konverguje neabsolutně.

$$\left(\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)$$

Poznámka

Leibnizovo kritérium je speciálním případem Dirichletova pro $\sum(-1)^n a_n$. $\sum(-1)^n$ má ohraničené částečné součty a $a_n \to 0$ (shora) hraje roli b_n v Dirichletově kritériu.

Definice 4

Nechť $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce. Řekneme, že řada $\sum b_n$, kde $b_n = a_{f(n)}$, je *přeřazením* řady $\sum a_n$. Řekneme, že pro řadu $\sum a_n$ platí *komutativní zákon*, jestliže pro libovolnou bijekci $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ platí $\sum a_n = \sum a_{f(n)}$.

Věta 17 (Komutativní zákon pro nekonečné řady)

Nechť řada $\sum a_n$ konverguje absolutně, tj. $\sum|a_n| < \infty$. Pak pro tuto řadu platí komutativní zákon.

Důkaz.

Označme $b_n = a_{f(n)}$ a nechť $t_n = b_1 + \cdots + b_n = a_{f(1)} + \cdots + a_{f(n)}$ je posloupnost částečných součtů $\sum b_n$ a nechť $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ je posloupnost částečných součtů $\sum a_n$. Protože $\sum a_n$ konverguje absolutně, pak $\sum a_n$ konverguje, tedy existuje konečná limita $s = \lim s_n$. Dokážeme, že $t_n \to s$.

Platí

$$|s_n - t_n| = |a_1 + \cdots + a_n - (a_{f(1)} + \cdots + a_{f(n)})|.$$

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Protože $\sum |a_n|$ je konvergentní, tak podle Cauchyova–Bolzanova kritéria (věta 4)

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, \forall m \in \mathbb{N} : ||a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+m}|| < \varepsilon.$$

Zejména máme $||a_{n_0+1}| + \cdots + |a_{n_0+m}|| < \varepsilon$. Protože $n \geq n_0$, máme

$$\begin{aligned} &|a_1 + \cdots + a_n - (a_{f(1)} + \cdots + a_{f(n)})| \\ &\qquad = |a_1 + \cdots + a_{n_0} + \cdots + a_n - (a_{f(1)} + \cdots + a_{f(n)})|. \end{aligned}$$

Nechť $n_1 \in \mathbb{N}$ je takové, že $\{1, \dots, n_0\} \subseteq \{f(1), \dots, f(n_1)\}$, pak pro $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ platí

$$|a_1 + \cdots + a_{n_0} + \cdots + a_n - (a_{f(1)} + \cdots + a_{f(n)})| \leq \underbrace{||a_{n_0+1}| + \cdots + |a_{n_0+q}||}_{<\varepsilon}$$

(q je „největší zbývající index“). Tedy $|s_n - t_n| \to 0 \Rightarrow \sum a_n = \sum a_{f(n)}$. □

Definice 5

Pro posloupnost a_n označme

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & a_n \geq 0 \\ 0 & a_n < 0 \end{cases} \quad \text{a} \quad a_n^- = \begin{cases} a_n & a_n \leq 0 \\ 0 & a_n > 0 \end{cases}.$$

Potom $\{a_n^+\}$ nazýváme *kladná část* a $\{a_n^-\}$ *záporná část posloupnosti $\{a_n\}$*.

Poznámka

Zřejmě platí $a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2} = \max\{a_n, 0\}$, resp. $a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2} = \min\{a_n, 0\}$.

Věta 18

Nechť $\sum a_n$ je neabsolutně konvergentní, pak $\sum a_n^+ = +\infty$ a $\sum a_n^- = -\infty$.

Důkaz.

1. $\sum a_n^+ < \infty$ a $\sum a_n^- > -\infty$
2. $\sum a_n^+ = \infty$ a $\sum a_n^- > -\infty$
3. $\sum a_n^+ < \infty$ a $\sum a_n^- = -\infty$
4. $\sum a_n^+ = \infty$ a $\sum a_n^- = -\infty$

Kdyby platilo 1, pak $\sum |a_n| = \sum a_n^+ - \sum a_n^-$ konverguje podle věty o konvergenci součtu dvou konvergentních řad $\to$ spor, neboť $\sum |a_n| = \infty$.
Kdyby platilo 2 nebo 3, pak $\sum a_n = \sum a_n^+ + \sum a_n^-$ a součet bude ∞ (případ 2) nebo $-\infty$ (případ 3) $\to$ spor s $\sum a_n < \infty$.
Tedy nutně $\sum a_n^+ = \infty$ a $\sum a_n^- = -\infty$. □

Věta 19 (Riemannova věta o přeřazení, velká věta o přeřazení)

Nechť řada $\sum a_n$ je neabsolutně konvergentní a $L_1, L_2 \in \mathbb{R}^*$, $L_1 \leq L_2$. Pak existuje permutace množiny $\mathbb{N}$ taková, že pro posloupnost částečných součtů t_n přeřazení řady $\sum a_{f(n)}$ (tj. $t_n = a_{f(1)} + \cdots + a_{f(n)}$) platí $\limsup t_n = L_2$ a $\liminf t_n = L_1$. Zejména neabsolutně konvergentní řadu lze přerovnat tak, že diverguje k $\pm\infty$ nebo osciluje.

Důkaz.

Předpokládejme, že $L_1, L_2 \in \mathbb{R}, L_1 < L_2$ a $L_2 > 0$ (pro ostatní případy je modifikace důkazu zřejmá). Platí $\sum a_n^+ = \infty$ a $\sum a_n^- = -\infty$.

- Existuje $n_1 : a_1^+ + \cdots + a_{n_1}^+ > L_2$ a nechť n_1 je nejmenší takový index.
- Nechť n_2 je takový index, že $a_1^+ + \cdots + a_{n_1}^+ + a_1^- + \cdots + a_{n_2}^- < L_1$ a nechť je nejmenším indexem s takovou vlastností.
- Důležité je, že $a_n \to 0$ (což je nutná podmínka konvergence $\sum a_n$) $\Rightarrow |a_n| \to 0$ a tedy velikost „přelezení/podlezení“ hodnot L_1, L_2 se blíží k nule.

Z konstrukce plyne, že $\limsup t_n = L_2$ a $\liminf t_n = L_1$.
(Např. pro $L_1 = -\infty, L_2 = \infty$ budeme součty „rozkmitávat“.) □

Poznámka

Konečné řady:

$$(a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_m) = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_m.$$

Nekonečné řady:

$$\left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right) = ?$$

$$\begin{array}{ccccc} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n & \cdots \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{array}$$

Věta 20

Nechť řady $\sum a_n, \sum b_n$ jsou absolutně konvergentní a nechť $\sum c_n$ je libovolná nekonečná řada, v níž posloupnost $\{c_n\}$ je permutací posloupnosti $\{a_i b_j\}$ (tj. $\{c_n\}$ je libovolná posloupnost obsahující permutaci prvků z uvedené tabulky). Pak $\sum c_n$ konverguje také absolutně a platí $\sum c_n = c = a \cdot b$, kde $\sum a_n = a$, $\sum b_n = b$.

Důkaz.

Pro $i_m = \min\{i_1, \dots, i_n\}, j_m = \min\{j_1, \dots, j_n\}, i_M = \max\{i_1, \dots, i_n\}, j_M = \max\{j_1, \dots, j_n\}$ máme $|c_1| + \cdots + |c_n| = |a_{i_1} b_{j_1}| + \cdots + |a_{i_n} b_{j_n}| \leq \underbrace{(|a_{i_m}| + \cdots + |a_{i_M}|)}_{\to a (i_M \to \infty)} \underbrace{(|b_{j_m}| + \cdots + |b_{j_M}|)}_{\to b (j_M \to \infty)} \leq A \cdot B$, kde $A = \sum |a_n|, B = \sum |b_n|$. Tedy posloupnost částečných součtů $\sum |c_n|$ je shora omezená, tedy $\sum |c_n| < \infty$, tedy $\sum c_n$ je absolutně konvergentní a platí pro ni komutativní zákon.
$\sum_{k=1}^{n^2} c_k = a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_1) + \cdots + (a_1 b_n + \cdots + a_n b_n + \cdots + a_n b_1) + \cdots = (a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_n) = s_n t_n \to ab \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n = ab.$ □

Poznámka

$$(a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)(b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n)$$
$$= x^2(a_1b_1) + x^3(a_1b_2 + a_2b_1) + x^4(a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \cdots$$

(Postupujeme po diagonálách.)

Definice 6

Uvažujme nekonečné řady $\sum a_n, \sum b_n$.

- Nechť $c_n = a_1b_n + \cdots + a_nb_n + \cdots + a_nb_1$ (po „elkách"), pak se řada $\sum c_n$ nazývá *Dirichletův součin* řad $\sum a_n, \sum b_n$.
- Je-li $c_n = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_2 + a_nb_1$ (po diagonálách), pak se řada $\sum c_n$ nazývá *Cauchyův součin* řad $\sum a_n, \sum b_n$.

Věta 21

- *Nechť $\sum a_n, \sum b_n$ jsou konvergentní řady, $\sum a_n = a$, $\sum b_n = b$. Pak jejich Dirichletův součin $\sum c_n$ také konverguje a $\sum c_n = ab$.*
- *(Mertensova věta) Nechť $\sum a_n, \sum b_n$ jsou konvergentní řady, $\sum a_n = a$, $\sum b_n = b$ a alespoň jedna z nich konverguje absolutně. Pak konverguje i jejich Cauchyův součin a $\sum c_n = ab$.*

Poznámka

V Mertensově větě o Cauchyově součinu nelze vypustit předpoklad absolutní konvergence alespoň jedné řady. Např. pro

$$\left[\left(\sum \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right) \cdot \left(\sum \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)\right]_{Cauchy}$$

máme $|c_n| = \frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{1}} \geq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} = 1$, $\lim c_n \neq 0$, není splněna nutná podmínka konvergence a tedy Cauchyův součin řady $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ se sebou nemůže konvergovat.

Definice 7

Předpokládejme, že řada $\sum a_n$ je konvergentní. Výraz $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ se nazývá *zbytek po n-tém členu*, tj. $\sum a_n = s_n + R_n$.

Věta 22

Uvažujme nekonečnou řadu $\sum a_n$ se zbytkem R_n. Nechť $\sum b_n$ je konvergentní řada s nezápornými členy, pro niž platí $|a_n| \leq b_n$. Pak řada $\sum a_n$ konverguje absolutně a pro její zbytek platí $|R_n| \leq \widetilde{R}_n$, kde $\widetilde{R}_n$ je zbytek po n-tém členu řady $\sum b_n$.

Důkaz.

$|R_n| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k = \widetilde{R}_n$. □

Věta 23

Nechť a_n je nerostoucí posloupnost kladných čísel a $\lim a_n = 0$. Pak pro zbytek alternující řady $\sum(-1)^{n-1}a_n$ platí $|R_n| < a_{n+1}$. Navíc $\operatorname{sgn} R_n = (-1)^n$.

Důkaz.

Dle Leibnizova kritéria je řada $\sum(-1)^{n-1}a_n$ konvergentní. Dále postupujeme jako v důkazu Leibnizova kritéria pro řadu $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$, tedy

$$R_n = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1}a_{n+2} + (-1)^{n+2}a_{n+3} + \cdots$$
$$= (-1)^n \underbrace{(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots)}_{=:r}$$

a odtud $0 < a_{n+1} - a_{n+2} < r < a_{n+1}$. Tj. $R_n = (-1)^n r \Rightarrow |R_n| = r < a_{n+1}$. □

Věta 24

Nechť a_n je monotónní posloupnost nezáporných čísel, řada $\sum a_n$ konverguje a $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ je monotónní a pro $n \in \mathbb{N} : f(n) = a_n$. Pak $R_n \leq \int_n^\infty f(x)\mathrm{d}x$.

Důkaz.

Plyne ze stejného obrázku jako důkaz integrálního kritéria. □

Příklad 17

Kolik členů řady $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ musíme vzít, aby chyba (zbytek) byla menší než 0,01?

$$R_n \leq \int_n^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{x}\right]_n^\infty = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow n \geq 100.$$

Příklad 18 (Motivace)

Uvažujme funkce $s_n(x) = x^n$ pro $x \in [0,1]$ a $n \in \mathbb{N}$. Jedná se tedy o posloupnost částečných součtů

$$s_1(x) = x, \quad s_2(x) = x^2, \quad s_3(x) = x^3, \quad s_4(x) = x^4, \dots$$

funkcí

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2 - x, \quad f_3(x) = x^3 - x^2, \dots \quad f_n(x) = x^n - x^{n-1}, \dots$$

Všechny tyto funkce $f_n(x)$ jsou spojité na intervalu $[0,1]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Dále jsou všechny funkce $s_n(x)$ spojité na intervalu $[0,1]$. Přitom

$$s_n(x) = \begin{cases} x^n \xrightarrow{n\to\infty} 0 & x \in [0,1), \\ 1^n \xrightarrow{n\to\infty} 1 & x = 1 \end{cases}.$$

Tedy posloupnost $s_n(x)$ konverguje pro každé $x \in [0,1]$ k funkci

$$\sum_{n=1}^\infty f_n(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x \in [0,1), \\ 1, & \text{pro } x = 1, \end{cases}$$

přičemž tato funkce $s(x)$ je nespojitá (konverguje pouze bodově).

Definice 8

Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}, x \in I$, *konverguje bodově* na tomto intervalu k funkci $f(x)$, jestliže $\forall \tilde{x} \in I$ číselná posloupnost $\{f_n(\tilde{x})\}$ konverguje k číslu $f(\tilde{x})$, píšeme $f_n \to f$, tj.

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in I, \exists n_0 = n_0(\varepsilon, x)\ \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Definice 9

Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}, x \in I$, *konverguje na intervalu I stejnoměrně* k funkci $f(x)$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : \forall x \in I, \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

píšeme $f_n \rightrightarrows f$.

Poznámka

- Konvergence posloupnosti $f_n(x) = x^n, x \in [0,1]$ není na $[0,1]$ stejnoměrná.
- $P = C[a,b]$, $\rho_C(f,g) = \max_{x\in[a,b]}|f(x) - g(x)| \to$ metrika stejnoměrné konvergence.
- Ze stejnoměrné konvergence plyne bodová konvergence. Naopak to neplatí.

Věta 25

Nechť posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje na intervalu I k funkci f, označme

$$r_n = \sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)|.$$

Pak posloupnost f_n konverguje na I k funkci f stejnoměrně právě tehdy, když $r_n \to 0$.

Důkaz.

($\Leftarrow$) $\lim r_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : |r_n| < \varepsilon \Rightarrow$ $\sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \forall x \in I : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

($\Rightarrow$) triviální modifikace předchozí implikace

$\square$

Příklad 19

Rozhodněte, zda posloupnost $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$ konverguje na $I = [0,1]$ stejnoměrně.

Vyřešíme bodovou konvergenci a pak podle věty 25 rozhodneme, je-li stejnoměrná nebo ne. Protože $\lim_{n\to\infty} \frac{2nx}{1+n^2x^2} = 0$, konverguje posloupnost bodově na I k funkci $f(x) \equiv 0$. Dále

$$r_n = \sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{2nx}{1+n^2x^2} - 0\right| = \max_{x\in[0,1]}\frac{2nx}{1+n^2x^2} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Posloupnost nekonverguje stejnoměrně k nule na intervalu $[0,1]$.

$\left(\frac{2nx}{1+n^2x^2}\right)' = \frac{2n(1+n^2x^2) - 2nx(n^22x)}{(1+n^2x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow 2n(1+n^2x^2) = 2nx(n^22x) \Leftrightarrow$
$1 + n^2x^2 = 2n^2x^2 \Leftrightarrow 1 = n^2x^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{n}$, $f_n(0) = 0, f_n(1) = \frac{2n}{1+n^2}, f_n(\frac{1}{n}) = 1$

Příklad 20

$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, $I = \mathbb{R}$

$$f_n \to 0, r_n = \frac{1}{n} \Rightarrow f_n(x) \rightrightarrows 0 \text{ na } \mathbb{R}$$

Definice 10

Řekneme, že řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konverguje (bodově) k funkci* $f(x)$, jestliže posloupnost částečných součtů $s_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x)$ konverguje (bodově) k funkci $f(x)$ na intervalu I, tj. $s_n(x) \to f(x)$ na I.

Řekneme, že řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konverguje stejnoměrně k funkci* $f(x)$, píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ stejnoměrně, pokud $s_n \rightrightarrows f(x)$ na I.

Příklad 21

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$ (ukážeme později).

Lemma 1 (Cauchyovo-Bolzanovo kritérium stejnoměrné konvergence)

Posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje na intervalu I stejnoměrně právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall x \in I\ \forall m, n \geq n_0 (m, n \in \mathbb{N}) : |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Důkaz.

Viz skripta. □

Věta 26 (Cauchyovo-Bolzanovo kritérium pro řady funkcí)

Řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je na intervalu I stejnoměrně konvergentní právě tehdy, když posloupnost jejích částečných součtů $s_n(x)$ je na intervalu I stejnoměrně cauchyovská, tj.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall x \in I\ \forall n \geq n_0\ \forall m \in \mathbb{N} :$$
$$|s_{n+m}(x) - s_n(x)| = |f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+m}(x)| < \varepsilon.$$

Důkaz.

Řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně k funkci $s(x)$, právě tehdy, když posloupnost jejích částečných součtů $s_n(x)$ konverguje stejnoměrně k funkci $s(x)$. Nyní stačí využít Lemma 1. □

Věta 27 (Weierstrassovo kritérium stejnoměrné konvergence)

Nechť posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}, x \in I$, splňuje na intervalu I nerovnost $|f_n(x)| \leq a_n$ a číselná řada $\sum a_n$ je konvergentní. Pak řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je na intervalu I stejnoměrně konvergentní.

Důkaz.

Podle předchozí věty stačí dokázat, že posloupnost částečných součtů $s_n(x)$ je na intervalu I stejnoměrně cauchyovská. Protože řada $\sum a_n$ konverguje, pak podle Cauchyova–Bolzanova kritéria je číselná posloupnost jejích částečných součtů cauchyovská, tzn.

$$\forall \varepsilon\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall m \in \mathbb{N} : |a_{n+1} + \cdots + a_{n+m}| < \varepsilon,$$

tedy

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+m}(x)| &\leq ||f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_{n+m}(x)|| \\ &\leq |a_{n+1} + \cdots + a_{n+m}| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0, \forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in I. \end{aligned}$$

□

Věta 28 (Abelovo kritérium)

Nechť $\sum f_n(x)$ je na intervalu I stejnoměrně konvergentní a posloupnost $\{g_n(x)\}$ je na I stejnoměrně ohraničená a monotónní. Pak $\sum f_n(x)g_n(x)$ je na intervalu I stejnoměrně konvergentní.

Věta 29 (Dirichletovo kritérium)

Nechť $\sum f_n(x)$ má stejnoměrně ohraničenou posloupnost částečných součtů, posloupnost $\{g_n(x)\}$ je na I monotónní a $g_n \rightrightarrows 0$ na I. Pak $\sum f_n(x)g_n(x)$ je na intervalu I stejnoměrně konvergentní.

- Posloupnost $\{f_n(x)\}$ je na I neklesající (nerostoucí), jestliže má tuto vlastnost každá číselná posloupnost $\{f_n(x_0)\}, x_0 \in I$.
- Jestliže $\exists k \in \mathbb{R}, k > 0 : \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I : |f_n(x)| \leq k$, nazýváme posloupnost $\{f_n(x)\}$ stejnoměrně ohraničenou.

Věta 30

Nechť funkce f_n jsou na intervalu I spojité a $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ na intervalu I. Pak je na intervalu I spojitá i limitní funkce f.

Důkaz.

Potřebujeme dokázat, že $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\ \forall x_0 \in I$.

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + |f_n(x) - f_n(x_0)| + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}}. \end{aligned}$$

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné, protože $f_n(x) \to f(x)$ na I, k $\frac{\varepsilon}{3}$ $\exists n_0, \forall n \geq n_0$, $\forall x \in I : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Protože f_n jsou spojité, pak k $\frac{\varepsilon}{3}$ $\exists \delta > 0$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.
Tedy $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ a funkce f je spojitá v bodě x_0. □

Poznámka

Předchozí Věta 30 v podstatě dokazuje, že prostor spojitých funkcí s metrikou stejnoměrné konvergence je úplný metrický prostor, a tedy lze aplikovat (na kontraktivní zobrazení) Banachovu větu o pevném bodě.

Věta 31

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ konverguje stejnoměrně na intervalu I, tj.

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \rightrightarrows f(x) \text{ na } I.$$

Je-li každá z funkcí f_n spojitá na I, je i součet f spojitou funkcí na intervalu I.

Důkaz.

Aplikace Věty 30 na posloupnost $s_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x)$, což je spojitá funkce, protože je konečným součtem spojitých funkcí. □

Poznámka

Derivace a integrace součtu dvou funkcí → platí pro libovolný <u>konečný</u> počet sčítanců.

Věta 32

Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost integrovatelných funkcí na intervalu $[a, b]$ a tato posloupnost na $[a, b]$ konverguje stejnoměrně k funkci f. Pak i limitní funkce je na $[a, b]$ integrovatelná a platí

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x,$$

tj. $\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$

Důkaz.

Funkce f je integrovatelná na $[a, b]$ právě tehdy, když $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, $\forall D$(dělení intervalu $[a, b]$) : $\nu(D) < \delta : S(D, f) - s(D, f) < \varepsilon$. Máme

$$\begin{aligned} S(D,f) - s(D,f) &= \\ &= S(D,f) - S(D,f_n) + S(D,f_n) - s(D,f_n) + s(D,f_n) - s(D,f) \\ &\le |S(D,f) - S(D,f_n)| + |S(D,f_n) - s(D,f_n)| + |s(D,f_n) - s(D,f)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |S(D,f) - S(D,f_n)| &= \left| \sum_{i=1}^{n} [M_i(f)(x_i - x_{i-1}) - M_i(f_n)(x_i - x_{i-1})] \right| \\ &\le \sum_{i=1}^{n} |M_i(f) - M_i(f_n)|(x_i - x_{i-1}) \le \frac{\varepsilon}{5(b-a)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \le \frac{\varepsilon}{5} \end{aligned}$$

a analogicky pro dolní součty ($M_i(f)$ značí supremum funkce f na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$.) Pro dostatečně jemné dělení je i $|S(D, f_n) - s(D, f_n)| \le \frac{\varepsilon}{5}$.

Dále potřebujeme dokázat, že $|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x| < \varepsilon$ pro dostatečně velké n.

$$\left| \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon$$

pro n taková, že $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ na intervalu $[a, b]$.

□

Poznámka

Za předpokladu $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, kde $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ na $[a,b]$ máme

$$x\in[a,b]\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\underbrace{\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t}_{F_n(x)}=\underbrace{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}_{F(x)}.$$

$(F_n'(x)=f_n(x), F'(x)=f(x), \underbrace{F_n(a)}_{=0}=\underbrace{F(a)}_{=0}.)$

Věta 33

Nechť $\{f_n(x)\}$ je posloupnost funkcí majících na intervalu $I=(a,b)$ derivaci a nechť tato posloupnost na I konverguje k funkci f a posloupnost $\{f_n'(x)\}$ na I konverguje stejnoměrně. Pak i limitní funkce f má na I derivaci a platí

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty}f_n'(x),$$

tj. $[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]'=\lim_{n\to\infty}f_n'(x)$.

Důkaz.

Viz skripta. □

Věta 34

Nechť posloupnost $\{f_n\}$ je na intervalu I stejnoměrně konvergentní a ke každé z těchto funkcí existuje na intervalu I primitivní funkce F_n. Jestliže f je stejnoměrná limita funkcí na I, tj. $f_n\rightrightarrows f$ na I, pak k funkci f také existuje primitivní funkce. Jestliže pro nějaké $c\in I$ platí, že $\lim_{n\to\infty}F_n(c)=F(c)$, *pak i posloupnost primitivních funkcí F_n konverguje stejnoměrně na intervalu I, a to k funkci F, tj. $F_n\rightrightarrows F$ na I.*

Věta 35

Nechť $\sum f_n(x)=f(x)$ stejnoměrně na intervalu $[a,b]$ a každá z funkcí f_n je na $[a,b]$ integrovatelná. Pak je na $[a,b]$ integrovatelný i součet f a platí $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^\infty\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$, *tj.* $\int_a^b\sum_{n=1}^\infty f_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^\infty\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$.

Důkaz.

Aplikace Věty 32 na částečné součty řady $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$. □

Příklad 22

Vypočítejte $\int_{\ln 2}^{\ln 3}\sum_{n=1}^\infty n\,\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x$.

Chtěli bychom $\sum\int n\,\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x$. To lze pokud řada stejnoměrně konverguje na intervalu $[\ln 2,\ln 3]$, použijeme Weierstrassovo kritérium

$$|f_n(x)|\le a_n, \sum a_n<\infty\Rightarrow\sum f_n\rightrightarrows f:$$

$|n\,\mathrm{e}^{-nx}|\le n\,\mathrm{e}^{-n\ln 2}=\frac{n}{2^n}$, $\frac{n+1}{2\cdot 2^n}\cdot\frac{2^n}{n}=\frac{n+1}{2n}\to\frac12<1\Rightarrow\sum\frac{n}{2^n}<\infty$, tedy řada konverguje stejnoměrně a lze počítat

$$\sum_{n=1}^\infty[-\mathrm{e}^{-nx}]_{\ln 2}^{\ln 3}=\sum\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)=\frac{\frac12}{1-\frac12}-\frac{\frac13}{1-\frac13}=1-\frac13\cdot\frac32=\frac12.$$

Věta 36

Nechť posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}$ má na intervalu $I=(a,b)$ derivace f_n' a pro řadu z těchto derivací platí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)=g(x)$ stejnoměrně na I a řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ na I konverguje. Pak součet $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=f(x)$ má na I derivaci a platí $f'(x)=g(x)$, tj.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Důkaz.

Označme $\{s_n\}$ a $\{s_n'\}$ posloupnosti částečných součtů řad $\sum f_n(x)$ a $\sum f_n'(x)$. (Zřejmě platí, že s_n' je derivací s_n.) Z předpokladů věty na I $\{s_n\}$ konverguje a $\{s_n'\}$ konverguje stejnoměrně. Dle Věty 33 má funkce $\sum f_n(x)=f(x)$ derivaci a platí

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty} s_n'(x)=\lim_{n\to\infty}\left[f_1'(x)+\cdots+f_n'(x)\right]=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Věta 37

Nechť posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}$ má na intervalu $I=(a,b)$ derivace f_n' a pro řadu z těchto derivací platí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)=g(x)$ stejnoměrně na I. Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje alespoň v jednom čísle $c\in I$, pak tato řada konverguje stejnoměrně a pro její součet $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=f(x)$ platí $f'(x)=g(x)$, tj. $(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x))'=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$.

Poznámka

Lze sestrojit příklady, kde se ukáže, že nelze nahradit stejnoměrnou konvergenci bodovou konvergencí.

Definice 11

Nechť a_n je posloupnost reálných čísel a $x_0\in\mathbb{R}$, pak nekonečná řada funkcí $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ se nazývá *mocninná řada* se středem x_0 a koeficienty a_n, $n\in\mathbb{N}_0$.

Poznámka

- Substitucí $y=x-x_0 \Rightarrow \sum a_n y_n$ lze každou řadu převést na řadu se středem $y_0=0$. Můžeme proto uvažovat řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
- Mocninná řada vždy konverguje ve svém středu.
- Konvence: $\sum a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
- $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N}\cup\{0\}$.

Věta 38

Nechť $a := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.

- *Je-li $a=0$, pak mocninná řada $\sum a_n x^n$ konverguje $\forall x\in\mathbb{R}$.*
- *Je-li $a=\infty$, pak řada konverguje pouze ve svém středu $x_0=0$.*
- *Je-li $0<a<\infty$, pak řada konverguje $\forall x\in\mathbb{R}:|x|<R:=\frac{1}{a}$ a diverguje pro $x\in\mathbb{R}:|x|>R$.*

Číslo R se nazývá poloměr konvergence mocninné řady $\sum a_n x^n$.

Poznámka

Interval I takový, že pro $x\in I$ příslušná řada (absolutně) konverguje nazýváme intervalem (absolutní) konvergence této řady.

Důkaz.

Předpokládejme pro jednoduchost, že existuje limita $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = a$. Pro nějaké $x \in \mathbb{R}$ aplikujeme na řadu $\sum |a_n x^n|$ odmocninové kritérium

$$\lim \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \cdot \lim \sqrt[n]{|a_n|} = a \cdot |x| \begin{cases} < 1 & \text{konverguje} \\ > 1 & \text{diverguje} \\ = 1 & \text{nevíme} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} |x| < \frac{1}{a} = R & \text{řada konv.} \\ |x| > \frac{1}{a} = R & \text{řada div.} \end{cases}$$

Pokud limita $\lim \sqrt[n]{a_n}$ neexistuje, pak $\limsup \sqrt[n]{a_n}$ charakterizuje jak velká čísla a_n se v posloupnosti vyskytují a čím větší jsou a_n, tím menší je interval pro x, pro něž řada konverguje. □

Poznámka

- Protože platí

$$\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le \liminf \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,$$

  lze v případě existence limity podílu použít pro určení poloměru konvergence ji.
- Protože ve zmíněných limitách jsou absolutní hodnoty, získáváme uvnitř intervalu konvergence přímo absolutní konvergenci.
- Pro hodnoty x, kde limity vychází jedna (krajní body intervalu konvergence) tyto hodnoty dosadíme a řešíme konvergenci příslušných číselných řad.

Příklad 23

1. $\sum x^n$, $\quad a = \lim \sqrt[n]{1} = 1 \Rightarrow R = 1$
   pro $x = -1$ řada osciluje, pro $x = 1$ řada diverguje, řada konverguje (absolutně) pro $x \in (-1, 1)$
2. $\sum \frac{x^n}{n}$, $\quad a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \frac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow R = 1$
   pro $x = 1$ máme $\sum \frac{1}{n}$, která diverguje (harmonická řada),
   pro $x = -1$ máme $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, která konverguje (Leibnizova řada),
   řada konverguje pro $x \in [-1, 1)$, absolutně konverguje pro $x \in (-1, 1)$
3. $\sum \frac{(-1)^n x^n}{n}$, $\quad R = 1$, konverguje pro $x \in (-1, 1]$, absolutně konverguje pro $x \in (-1, 1)$
4. $\sum \frac{x^n}{n^2}$, $\quad R = 1, \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, $x = 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{n^2}$ konverguje absolutně, $x = -1 \Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ konverguje absolutně, řada konverguje absolutně pro $x \in [-1, 1]$

Příklad 24

$R = ?$

1. $\sum \frac{x^n}{n!}$
   $a_n = \frac{1}{n!}, R = \lim \frac{1}{n!} \cdot \frac{(n+1)n!}{1} = \lim(n+1) = \infty$
   řada konverguje pro $\forall x \in \mathbb{R}$
2. $\sum n! x^n$
   $a_n = n!, R = 0$, řada konverguje pouze pro $x = 0$

Poznámka

Proč se říká poloměr konvergence?

Často se uvažuje řada $\sum a_n z^n, z \in \mathbb{C}, a_n \in \mathbb{C}$, kde pak místo intervalu konvergence pracujeme s kružnicemi o poloměru $|z|$. Tedy hledáme takové číslo R, kdy daná řada konverguje pro všechny $z \in \mathbb{C}, |z| < R$ a diverguje pro všechny $z \in \mathbb{C}, |z| > R$.

Věta 39

Nechť mocninná řada $\sum a_n x^n$ má poloměr konvergence $R > 0$. Pak $\forall r: 0 < r < R$ řada konverguje na intervalu $[-r, r]$ stejnoměrně (a absolutně).

Důkaz.

Nechť $0 < r < R$ je libovolné. Použijeme Weierstrassovo kritérium stejnoměrné konvergence, tj. $\sum a_n x^n \Rightarrow |a_n x^n| = |a_n| \cdot |x^n| \leq |a_n| \cdot |r^n|$ pro $x \in [-r, r]$, řada $\sum |a_n| \cdot |r^n|$ konverguje, neboť $|r| < R$, tedy $\sum a_n x^n$ konverguje na $[-r, r]$ stejnoměrně. Absolutní konvergence plyne z faktu, že v nerovnosti $|a_n x^n| \leq |a_n| \cdot |r^n|$ vystupuje absolutní hodnota. □

Věta 40

Nechť mocninná řada $\sum a_n x^n$ má poloměr konvergence $R > 0$. Pak $\forall x \in (-R, R)$ platí

$$\int_0^x \sum a_n t^n \mathrm{d}t = \sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

přičemž řada na pravé straně rovnosti má poloměr konvergence opět R.

Důkaz.

$$\int_0^x \sum a_n t^n \mathrm{d}t \overset{st.konv.}{=} \sum a_n \int_0^x t^n \mathrm{d}t = \sum a_n \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Předpokládejme, že existuje limita $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = a = \frac{1}{R}$, potom

$$\lim \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}} = \lim \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \lim \left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= a \cdot \lim \left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} = |0^0| = a \cdot \lim \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n+1}\right)} = a \cdot \lim \mathrm{e}^{\frac{-\ln(n+1)}{n}} = a \cdot \mathrm{e}^0 = a,$$

tedy poloměr konvergence řady $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ je R.

Protože $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = x \cdot \sum \frac{a_n}{n+1} x^n$ mohli jsme použít n-tou odmocninu místo $(n+1)$-ní. □

Věta 41

Nechť mocninná řada $\sum a_n x^n$ má poloměr konvergence $R > 0$. Pak $\forall x \in (-R, R)$ platí

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

přičemž derivováním se poloměr konvergence nemění.

Důkaz.

Opět plyne ze stejnoměrné konvergence a jednoduchého výpočtu. □

Věta 42 (Abelova věta)

Nechť mocninná řada $\sum a_n x^n$ má poloměr konvergence $0 < R < \infty$ a předpokládejme, že pro $x = R$ je tato řada konvergentní. Pak její součet $f(x) = \sum a_n x^n$ je funkce, která je v $x = R$ zleva spojitá, tj.

$$\sum a_n R^n = f(R) = \lim_{x \to R^-} f(x).$$

Důkaz.

Pro důkaz využijeme Abelovo kritérium (věta 28).

Pro $x \in [0, R]$ je číselná řada $\sum a_n R^n$ konvergentní, tedy je pro libovolné x konvergentní stejnoměrně (jako funkce vystupují konstanty). Přepišme řadu z tvrzení věty takto

$$\sum a_n x^n = \sum a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n.$$

Pro použití Abelova kritéria musí být posloupnost funkcí $\left\{\left(\frac{x}{R}\right)^n\right\}$ nerostoucí a stejnoměrně ohraničená, což je pro $x \in [0, R]$ splněno. □

Příklad 25

Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

$\lim \frac{n+1}{2^n \cdot 2} \cdot \frac{2^n}{n} = \lim \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ řada konverguje a má tedy smysl pokračovat.

- Využijeme mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n$. Ihned máme $R = \lim \left|\frac{n}{n+1}\right| = 1$, tedy pro $x = \frac{1}{2}$ absolutně konverguje.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = x \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} n \int x^{n-1} \mathrm{d}x\right]'$$

$$= x \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right]' = x \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)' = x \cdot \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$x = \tfrac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{1} = 2$$

- Využijeme Cauchyův součin (absolutně konvergentní) řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ se sebou. Tedy

$$1\cdot 1 = \left(\sum \frac{1}{2^n}\right)\cdot\left(\sum \frac{1}{2^n}\right) = 1\cdot\frac{1}{2^2} + 2\cdot\frac{1}{2^3} + 3\cdot\frac{1}{2^4} + \cdots + n\cdot\frac{1}{2^{n+1}} + \cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n},$$

odkud ihned $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$.

- Přímo pomocí částečných součtů máme

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{n}{2^n}, \quad \frac{s_n}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + \cdots + \frac{n}{2^{n+1}}.$$

Odkud odečtením získáme

$$\frac{s_n}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2.$$

Příklad 26

Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Využijeme mocninnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Ihned máme $R = \lim\left|\frac{n+1}{n}\right| = 1$, tedy pro $x = \frac{1}{2}$ absolutně konverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{n-1}\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^x \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t = [-\ln|1-t|]_0^x = -\ln(1-x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n} = -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2$$

Příklad 27

Určete poloměr konvergence a součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} n(n+2)x^n$.

$$R = \lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)} = 1$$

Pro $x \in (-1,1)$ máme $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Protože pro $x = 0$ máme ihned $\sum_{n=0}^{\infty} n(n+2)x^n = 0$, budeme předpokládat, že $x \neq 0$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \Big/ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \left[\frac{1}{1-x}\right]' \quad \Big/ \cdot x^3$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n+2} = \frac{x^3}{(1-x)^2} \quad \Big/ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+2)x^{n+1} = \frac{3x^2-x^3}{(1-x)^3} \quad \Big/ \cdot\frac{1}{x}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+2)x^n = \frac{3x-x^2}{(1-x)^3}$$

Výsledný vztah platí i pro $x = 0$, tedy lze ho použít pro všechna $x \in (-1,1)$.

Definice 12

Nechť funkce f má v bodě x_0 derivace všech řádů, pak se mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

nazývá *Taylorova řada* funkce f. Je-li $x_0 = 0$, pak se řada nazývá *Maclaurinova řada*.

Poznámka

$$f \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Problém – platí (a kde) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$?

Příklad 28

Uvažujme funkci $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$ Potom $a_0 = 0, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, n \in \mathbb{N}$.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = |x = \tfrac{1}{t}| = \lim_{t\to\pm\infty} (t \cdot e^{-t^2})$$

$$= \lim_{t\to\pm\infty} \frac{t}{e^{t^2}} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{2t\, e^{t^2}} = 0$$

$$f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' - f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)'}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\, e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} = 0$$

Podobně

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

což znamená

$$f(x) \mapsto \sum 0 \cdot x^n = 0 \neq f(x).$$

Poznámka

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

kde ξ je mezi 0 a x, $T_n(x)$ je $(n+1)$-ní částečný součet $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$. Platí $T_n(x) \to f(x)$, pokud $R_n(x) \to 0$.

Věta 43

Nechť funkce f má na intervalu $I = [-r, r]$ derivace všech řádů a existuje konstanta $K > 0$ taková, že

$$|f^{(n)}(x)| \leq K \quad \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pak Maclaurinova řada funkce f konverguje na intervalu $I = [-r, r]$ stejnoměrně k funkci f.

Důkaz.

$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \right| \leq K \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$, neboť řada $\sum \frac{r^n}{n!}$ konverguje.

$\left(\sum \frac{r^n}{n!} : \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{r^n} = \frac{r}{n+1} \to 0 \right)$ □

Příklad 29

- $e^x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
  $\forall r \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : (e^x)^{(n)} = e^x \Rightarrow |e^x| \le e^r \ \forall x \in [-r, r]$
  $\Rightarrow |R_n(x)| \le \frac{e^r}{(n+1)!} \to 0 \Rightarrow \sum \frac{x^n}{n!} = e^x$ na $[-r, r]$
  $$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$
- pro $\sin x, \cos x$ platí
  $\forall r > 0, \forall n \in \mathbb{N} : |(\sin x)^{(n)}| \le 1, |(\cos x)^{(n)}| \le 1 \ \forall x \in [-r, r]$
  $$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$
  $$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

Příklad 30

- $\ln(1+x) \mapsto x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + \cdots, \ R = 1,$
  pro $[-r, r] \subset (-1, 1) : |R_n(x)| \le \frac{1}{(1-r)^{n+1}(n+1)} \to 0$
  $$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}, \quad \forall x \in (-1, 1]}$$
  Pro $x = 1$ konverguje podle Abelovy věty 42. (Tedy známe součet Leibnizovy řady $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2$.)
- $$\boxed{(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \cdots, \forall x \in (-1, 1)}$$
  $$\alpha \in \mathbb{R}, \ R = 1, \ \binom{\alpha}{n} = \frac{\overbrace{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}^{n \text{ činitelů}}}{n!}$$

Příklad 31

Určete součet číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots$$

Maclaurinova řada funkce $\frac{\sin x}{x}$ je

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \cdot \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots \right)$$
$$= 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$$

pro $x \in \mathbb{R}, \ x \neq 0$.

Kořeny funkce $\frac{\sin x}{x}$ jsou zřejmě v bodech $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 4\pi$, atd. a tedy tuto funkci lze „rozložit“ na (nekonečný) součin kořenových činitelů

$$\left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{3\pi}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{3\pi}\right) \cdots$$
$$= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right) \cdots$$

Porovnáním koeficientů u mocniny x^2 s příslušným koeficientem v rozvoji funkce $\frac{\sin x}{x}$ dostaneme

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{9\pi^2} - \frac{1}{16\pi^2} - \cdots,$$

čili po vynásobení číslem $-\pi^2$ dostaneme

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Poznámka

Protože je $\sin\frac{\pi}{2}=1$, plyne ze vzorců v předchozím příkladu volbou $x=\frac{\pi}{2}$ vyjádření

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=\left(1-\frac{\frac{\pi}{2}}{\pi}\right)\cdot\left(1+\frac{\frac{\pi}{2}}{\pi}\right)\cdot\left(1-\frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi}\right)\cdot\left(1+\frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi}\right)\cdot\left(1-\frac{\frac{\pi}{2}}{3\pi}\right)\cdot\left(1+\frac{\frac{\pi}{2}}{3\pi}\right)\cdots$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{6}\right)\cdots$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{8}\cdot\ldots,$$

neboli dostáváme tzv. Wallisův vzorec

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\ldots$$

pro vyjádření čísla $\frac{\pi}{2}$ (a tedy i čísla π) pomocí nekonečného součinu.

Věta 44

Nechť $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ pro $x\in(-r,r), r>0$. Pak

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\quad\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Tedy, je-li f součtem mocninné řady se středem $x_0=0$ na $(-r,r), r>0$, pak tato řada je Maclaurinovou řadou funkce f.

Důkaz.

Pro $x=0$ máme $f(0)=a_0$. Zderivováním dostaneme

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\Rightarrow f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}\Big|_{x=0}\Rightarrow f'(0)=a_1.$$

Postupně derivujeme a dosazujeme $x=0$. Odtud $f^{(n)}(0)=n!a_n$. □

Příklad 32

Určete Maclaurinův rozvoj funkcí
a) $f(x)=\operatorname{arctg}x$, b) $f(x)=\arcsin x$, c) $f(x)=e^x\sin x$, d) $f(x)=\operatorname{tg}x$.

a) $f(x)=\operatorname{arctg}x$ má derivaci

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^nx^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n},$$

což je geometrická řada s $q=-x^2$ a $R=1$. Tedy

$$\operatorname{arctg}x=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nt^{2n}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$
$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{2n+1}+\cdots,\quad x\in[-1,1].$$

Poznámka

Volbou $x=1$ dostáváme historický vzoreček $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$.

c)

$$f(x)=e^x\sin x=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\right)\times$$
$$\times\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\right)$$
$$=x+x^2+x^3\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+x^4\left(-\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}\right)+\cdots$$

d) $f(x) = \operatorname{tg} x$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots} = c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \cdots$$

vynásobíme kosinem a získáme

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) \cdot (c_1 x + c_3 x^3 + \cdots)$$

a porovnáním koeficientů máme

$$\begin{aligned} x^1 &: 1 = c_1, \\ x^3 &: -\frac{1}{3!} = c_3 - \frac{c_1}{2!} = c_3 - \frac{1}{2} \Rightarrow c_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}, \\ x^5 &: \frac{1}{5!} = \frac{c_1}{4!} - \frac{c_3}{2!} + c_5 \Rightarrow c_5 = \frac{2}{15}, \end{aligned}$$

tedy $f(x) = \operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \cdots$.

b) Pro $f(x) = \arcsin x$ využijeme rozvoj do binomické řady z příkladu 30.

$$\begin{aligned} (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \left| t = x^2, (1-t)^{-1/2} = (1 + (-t))^{-1/2} \right| \\ &= \binom{\frac{-1}{2}}{0} + \binom{\frac{-1}{2}}{1}(-t) + \cdots + \binom{\frac{-1}{2}}{n}(-t)^n + \cdots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2}) \cdots (-\frac{2n-1}{2})}{n!} t^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!} t^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} t^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n}, \quad x \in (-1, 1) \end{aligned}$$

$$\arcsin x = \int_0^x 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} s^{2n} \mathrm{d}s = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n! (2n+1)} x^{2n+1}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \sin(\arcsin x) = x, \quad x \in (-1, 1)$$

tedy

$$x = \arcsin x - \frac{\arcsin^3 x}{3!} + \frac{\arcsin^5 x}{5!} + \cdots$$

předpokládejme

$$\arcsin x = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdots$$

potom

$$\begin{aligned} x = (a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdots) &- \frac{1}{3!} (a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdots)^3 \\ &+ \frac{1}{5!} (a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdots)^5 + \cdots \end{aligned}$$

a porovnáním koeficientů

$x^1 : 1 = a_1, x^3 : 0 = a_3 - \frac{a_1^3}{3!} \Rightarrow a_3 = \frac{1}{6}, x^5 : 0 = a_5 - \frac{3}{3!} a_1^2 a_3 + \frac{a_1}{5!} \Rightarrow a_5 = \frac{3}{40}$

Příklad 33

Určete součet mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n}.$$

Cílem je využít předchozí znalosti. Víme, že $\mathrm{e}^x = \sum \frac{x^n}{n!}$, tedy $\mathrm{e}^{x^2} = \sum \frac{x^{2n}}{n!}$. S využitím $(x^{2n+1})' = (2n+1) x^{2n}$ dostaneme

$$\begin{aligned} \sum \frac{2n+1}{n!} x^{2n} &= \sum \frac{1}{n!} (x^{2n+1})' = \left[x \sum \frac{x^{2n}}{n!} \right]' \\ &= (x \,\mathrm{e}^{x^2})' = \mathrm{e}^{x^2} + x \,\mathrm{e}^{x^2} 2x = \mathrm{e}^{x^2} (2x^2 + 1). \end{aligned}$$

Poznámka

Použití mocninných řad (mj.):

- přibližný výpočet funkčních hodnot ($f(x) = \sum a_n(x - x_0)^n$)
- přibližný výpočet integrálů
- řešení diferenciálních rovnic

Příklad 34

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \text{ s přesností } 10^{-3}.$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \underbrace{1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!}}_{\text{stačí pro naši přesnost}} - \frac{1}{7 \cdot 7!} + \cdots$$

Příklad 35

$$y'' + y = 0$$

Hledáme řešení ve tvaru $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$, tedy $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$. Rovnice má potom tvar

$$\begin{aligned} y'' + y &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= (a_0 + 2 \cdot 1 \cdot a_2) + x(a_1 + 3 \cdot 2 \cdot a_3) + x^2(a_2 + 4 \cdot 3 \cdot a_4) + \cdots \\ &\qquad + x^{n-2}(a_{n-2} + n(n-1)a_n) + \cdots = 0 \end{aligned}$$

Odtud $a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n-1)}$. Volbou $a_0 = 0, a_1 = 1$ dostaneme

$$a_{2n} = 0, a_{2n-1} = -\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \Rightarrow y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sin x.$$

Volbou $a_0 = 1, a_1 = 0$ dostaneme podobně $y = \cos x$. Pokud bychom nepokládali a_1 rovno 1, resp. a_0, získali bychom řešení $y = a_1 \sin x$, resp. $y = a_0 \cos x$. Řešení je tedy

$$y = a_1 \sin x + a_0 \cos x, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Příklad 36

$$y'' + xy = 0$$

Řešení hledáme ve tvaru $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$, tedy

$$\begin{aligned} y'' + xy &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \\ &= 2a_2x^0 + x^1(3\cdot 2\cdot a_3 + a_0) + x^2(4\cdot 3\cdot a_4 + a_1) + \cdots \\ &\qquad + x^{n-2}(n(n-1)a_n + a_{n-3}) + \cdots = 0. \end{aligned}$$

Odtud

$$a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{a_0}{3\cdot 2}, \quad a_4 = -\frac{a_1}{4\cdot 3}, \quad \cdots \quad , a_n = -\frac{a_{n-3}}{n(n-1)},$$

tedy $a_5 = a_8 = \cdots = 0$,

$$a_3 = \frac{-a_0}{3\cdot 2}, \quad a_6 = \frac{-a_3}{6\cdot 5} = \frac{a_0}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}, \quad a_9 = \frac{-a_0}{9\cdot 8\cdot 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}, \cdots$$

$$a_4 = \frac{-a_1}{4\cdot 3}, \quad a_7 = \frac{a_1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}, \quad a_{10} = \frac{-a_1}{10\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}, \cdots$$

Proto

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1x - \frac{a_0}{3\cdot 2}x^3 - \frac{a_1}{4\cdot 3}x^4 + \frac{a_0}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}x^6 + \frac{a_1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}x^7 + \cdots \\ &= a_0\left(\underbrace{1 - \frac{x^3}{3\cdot 2} + \frac{x^6}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2} + \cdots}_{y_1}\right) + a_1\left(\underbrace{x - \frac{x^4}{4\cdot 3} + \frac{x^7}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3} + \cdots}_{y_2}\right). \end{aligned}$$

Poznámka

Řady lze využít k zavedení elementárních funkcí, studiu jejich vlastností, popř. pro rozšíření jejich definice do komplexního oboru.

$$f(x) = \sum a_n x^n, \quad |x| < R, \quad z \mapsto \sum a_n z^n$$

Např.

$$e^z = \sum \frac{z^n}{n!}, \sin z = \sum \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \cos z = \sum \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

V $\mathbb{C}$ pak lze takto zjistit, že $\ln(-1) = i\pi$, nebo řešit rovnici $\sin z = 2$. ($\sin(x+iy)$ dosadíme do řady a vyjde nám součet vedoucí na $\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$, $z = 1.5708 \pm 1.31696i$.)

Poznámka (Sčítání divergentních řad)

- Cesàrova sumace:

$$(\mathcal{C})\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n},$$

kde $s_n = a_1 + \cdots + a_n$. Např. pro Grandiho řadu dostaneme

$$(\mathcal{C})\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = \lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{1}, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{4}, -\frac{3}{5}, -\frac{3}{6}, \dots\right\} = -\frac{1}{2}.$$

- Abelova sumace:
  Pro $\sum a_n$ uvažujeme $\sum a_n x^n$. Pokud konverguje pro $x \in (-R, R)$ k funkci, která má pro $x \to R^-$ limitu, nazveme tuto limitu Abelovou sumou, tj.

$$(\mathcal{A}) \sum a_n R^n := \lim_{x \to R^-} f(x), \quad f(x) = \sum a_n x^n, x \in (-R, R).$$

(Konzistence s předchozí teorií plyne z Abelovy věty 42.)
Sečtěme Grandiho řadu použitím

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^n$$

což je geometrická mocninná řada s poloměrem $R = 1$ a součtem $\frac{-x}{1+x}$. Tedy

$$(\mathcal{A}) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = \lim_{x \to 1^-} \frac{-x}{1+x} = -\frac{1}{2}.$$

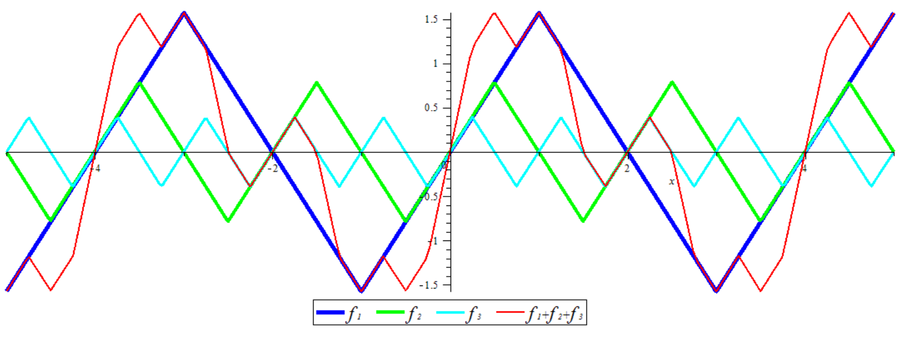
Poznámka (Konstrukce spojitých funkcí bez derivace)

Uvažujme funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danou předpisem $f(x) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)$ a posloupnost funkcí

$$f_1(x) = f(x),\ f_2(x) = \frac{f(2x)}{2}, \ldots, f_n(x) = \frac{f(2^n x)}{2^n}.$$

Je zřejmé, že $|f(2^n x)| \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow |f_n(x)| \le \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2^n}$. Přitom $\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$, tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(2^n x)$ stejnoměrně konverguje podle Weierstrassova kritéria (věta 27). Označme součet této řady $F(x)$.

Funkce F je spojitá na $\mathbb{R}$, protože je stejnoměrným součtem spojitých funkcí, ale nemá derivaci v číslech $\frac{m}{2^n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0$. (Čísla tvaru $\frac{m}{2^n}$ se nazývají dyadická čísla a jsou hustá v $\mathbb{R}$.)



$$f(x) \mapsto \sum a_n x^n = \sum f_n(x), \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

…Maclaurinova řada

$f(x)$ periodická s periodou 2π …

$$f(x) \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

(rezonanční kmitočet LC obvodu – elektromagnetického oscilátoru tvořeného cívkou a kondenzátorem)

Definice 13

Na množině $P = C[a,b]$ definujeme *skalární součin*

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

a *normu* (velikost funkce)

$$\|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle} = \left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]^{1/2}.$$

Takto definovaný skalární součin má obvyklé vlastnosti, zejména je komutativní

$$\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$$

a bilineární

$$\langle \alpha f_1 + \beta f_2, g\rangle = \alpha\langle f_1,g\rangle + \beta\langle f_2,g\rangle.$$

Dále, takto definovaná *norma* jistě splňuje

- $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$
- $\|\alpha f\| = |\alpha|\cdot\|f\|$
- $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$
- $\left[\int_a^b (f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x\right]^{1/2} \le \left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]^{1/2} + \left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]^{1/2}$ (Minkowského nerovnost)

Metrika na prostoru $C[a,b]$:

$$\rho(f,g) = \|f-g\| = \left[\int_a^b (f(x)-g(x))^2\mathrm{d}x\right]^{1/2}.$$

Definice 14

Řekneme, že funkce f a g jsou *ortogonální* na intervalu $[a,b]$, pokud

$$\langle f,g\rangle = 0, \text{ tj. } \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Dále řekneme, že funkce f je *normovaná*, pokud $\|f\| = 1$. Pokud $f \neq 0$, pak $g = \frac{f}{\|f\|}$ je normovaná.
Řekneme, že systém funkcí $\varphi_n \in C[a,b]$ je *ortogonální*, pokud $\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle = 0$ pro $i \neq j$. Jestliže navíc platí, že $\|\varphi_i\| = 1$, řekneme, že systém funkcí je *ortonormální*.

$C[a,b]$ je *vektorový prostor*, $f,g \in C[a,b], \alpha,\beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g \in C[a,b]$.
Dimenze tohoto prostoru je ∞, neboť polynomy jsou spojité funkce, prostor polynomů má dimenzi ∞ a je podprostorem spojitých funkcí.

Poznámka

Z ortonormality systému φ_n plyne jeho nezávislost, tedy φ_n je ortonormální báze.
Jestliže $\langle f,\varphi_n\rangle = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, potom $f \equiv 0$.

Poznámka

Úvahy lze samozřejmě dělat i na všech funkcích integrovatelných s kvadrátem, tj.

$$L^2[a,b] = \left\{f : [a,b] \to \mathbb{R};\ \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x < \infty\right\}.$$

Máme-li generátory g_i s vlastností

$$\langle g_i, g_j\rangle = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j \\ 1 & \text{pro } i = j \end{cases}$$

hovoříme o *ortonormální bázi* (pracujeme také s ortogonální).
Grammova–Schmidtova ortogonalizace vytvoří z libovolného spočetného systému generátorů f_i nové ortogonální generátory g_i téhož prostoru, tj. $\langle g_i, g_j\rangle = 0$ pro všechny $i \neq j$. Spočteme je postupně: $g_1 = f_1$ a formulemi

$$g_{\ell+1} = f_{\ell+1} + a_1 g_1 + \cdots + a_\ell g_\ell, \quad a_i = -\frac{\langle f_{\ell+1}, g_i\rangle}{\|g_i\|^2}$$

pro $\ell > 1$.
Příkladem jsou např. ortogonální polynomy.

Aplikujme tuto proceduru na první tři polynomy $1, x, x^2$ na intervalu $[-1, 1]$. Dostaneme $g_1 = 1$,

$$\begin{aligned} g_2 &= x - \frac{1}{\|g_1\|^2}\int_{-1}^{1} x\cdot 1\,dx\cdot 1 = x - 0 = x \\ g_3 &= x^2 - \frac{1}{\|g_1\|^2}\int_{-1}^{1} x^2\cdot 1\,dx\cdot 1 - \frac{1}{\|g_2\|^2}\int_{-1}^{1} x^2\cdot x\,dx\cdot x \\ &= x^2 - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Příslušná ortogonální báze prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ na intervalu $[-1, 1]$ je tedy $1, x, x^2 - 1/3$. Normalizací, tj. vhodným násobením skalárem tak, aby prvky v bázi měly velikost jedna dostaneme ortonormální bázi

$$h_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad h_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad h_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2 - 1).$$

Takovým ortonormálním generátorům $\mathbb{R}_k[x]$ se říká *Legendreovy polynomy*.

Poznámka

Budeme-li uvažovat skalární součin $\int_0^\infty P_n(x)P_m(x)x^a\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$, $n \neq m$, $a > -1$, získáme tzv. Laguerrovy polynomy (viz numerické metody).

Věta 45

Systém funkcí

$$\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots\}$$

tvoří ortogonální systém na intervalu $[-\pi, \pi]$ (obecně na každém intervalu délky 2π).

Důkaz.

Přímým výpočtem. Pro $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0$, v druhém a třetím případě $m \neq n$, máme

- $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m+n)x\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m-n)x\mathrm{d}x = 0$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m-n)x\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m+n)x\mathrm{d}x = 0$
- analogicky $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx \cos nx\mathrm{d}x = 0$

$\Rightarrow \{1, \sin x, \cos x, \dots\}$ je ortogonální systém na $[-\pi, \pi]$. □

Poznámka

- Pokud $f \equiv 1$, potom $\|f\| = \left[\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x\right]^{1/2} = \sqrt{2\pi}$.
- $\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \mathrm{d}x} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2nx}{2} \mathrm{d}x} = \sqrt{\pi - 0} = \sqrt{\pi}$.
- $\|\cos nx\| = \sqrt{\pi}$.
- Nechť f je libovolná 2π-periodická funkce, pak pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{a+2\pi} f(x)\mathrm{d}x.$$

Tedy $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots\} \subseteq L^2[a, a+2\pi]$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x + \int_{2\pi}^{a+2\pi} f(x)\mathrm{d}x = |x = t + 2\pi, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t|$$
$$= \int_a^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(t+2\pi)\mathrm{d}t = \int_a^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x.$$

Předpokládejme nyní, že je možné funkci $f \in L^2[a, b]$ zapsat jako kombinaci funkcí z daného ortogonálního systému $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$, tedy

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x),$$

přičemž řada napravo konverguje k funkci f na intervalu $[a, b]$ stejnoměrně. Vynásobením funkcí φ_j a následnou integrací od a do b obdržíme

$$\int_a^b f(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nyní s použitím věty 35 zaměníme sumaci a integraci (koeficient c_i je vzhledem k integrálu konstantní, tedy je možné ho vytknout)

$$\int_a^b f(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nyní vezmeme v úvahu, že systém funkcí $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ je ortogonální. To znamená, že na pravé straně zůstane jediný nenulový sčítanec, tedy

$$\int_a^b f(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x = c_j \int_a^b \varphi_j^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Odtud snadno vyjádříme koeficient c_j jako

$$c_j = \frac{1}{\|\varphi_j\|^2} \int_a^b f(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x.$$

Takto vypočtené koeficienty budeme nazývat *Fourierovy koeficienty* funkce f v systému $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$.

Věta 46

Nechť je $\{\varphi_n\}$ ortogonální systém (posloupnost) funkcí na intervalu $[a, b]$ a $\{c_n\} \subseteq \mathbb{R}$ číselná posloupnost. Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ konverguje stejnoměrně k funkci f na intervalu $[a, b]$, potom

$$c_n = \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\|\varphi_n\|^2}.$$

Definice 15

Nechť $\{\varphi_n\}$ je ortogonální systém funkcí na $[a, b]$, tj.

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\mathrm{d}x = 0, n \neq m.$$

Nechť $c_n = \frac{\langle f,\varphi_n\rangle}{\|\varphi_n\|^2}$, pak řadu $\sum c_n\varphi_n(x)$ funkcí nazýváme *Fourierova řada* funkce f vzhledem k ortogonálnímu systému $\{\varphi_n\}$ a čísla c_n *Fourierovy koeficienty* funkce f vzhledem k $\{\varphi_n\}$.

Poznámka

Uvažujeme $f(x) \mapsto \sum c_n\varphi_n(x)$ a budeme zkoumat, kdy můžeme šipku nahradit rovnítkem a kdy je „rovnítko stejnoměrné“.

Věta 47

Nechť $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ je ortogonální systém funkcí na intervalu $[a, b]$. Označme L_n lineární obal tohoto systému. Nechť $f \in C[a, b]$ a nechť $c_1, \dots, c_n$ jsou Fourierovy koeficienty funkce f.
Pak vzdálenost f od L_n je

$$\rho(f, L_n) = \|f - \sum c_k\varphi_k\|,$$

tj. prvek $g = c_1\varphi_1 + \cdots + c_n\varphi_n$ je ten prvek prostoru L_n, pro nějž $\rho(f, L_n) = \rho(f, g)$.

Poznámka

Řešíme problém, jak aproximují částečné součty Fourierovy řady funkci f.

Definice 16

Číslo $\|f - g\| = \left[\int_a^b (f(x) - g(x))^2 \mathrm{d}x\right]^{1/2}$ se nazývá *kvadratická odchylka* funkcí f a g.

Věta 48

Nechť f je integrovatelná na $[a, b]$ a nechť $\{\varphi_n\}$ je ortogonální systém funkcí na $[a, b]$. Mezi všemi lineárními kombinacemi funkcí $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ má od funkce f nejmenší kvadratickou odchylku ta lineární kombinace, jejíž koeficienty jsou Fourierovy koeficienty funkce f, tj.

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} d_k\varphi_k\| \to \min \quad \textit{pro} \;\; d_k = c_k = \frac{\langle f, \varphi_k\rangle}{\|\varphi_k\|^2}.$$

Důkaz.

Platí

$$\|f-\sum_{k=1}^{n}d_k\varphi_k(x)\|^2=\int_a^b\left[f-\sum_{k=1}^{n}d_k\varphi_k(x)\right]^2\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^b f^2\mathrm{d}x-2\int_a^b f\cdot\sum_{k=1}^{n}d_k\varphi_k(x)\mathrm{d}x+\int_a^b\left[\sum_{k=1}^{n}d_k\varphi_k(x)\right]^2\mathrm{d}x$$
$$=\|f\|^2-2\sum_{k=1}^{n}d_k\langle f,\varphi_k\rangle+\sum_{k=1}^{n}d_k^2\int_a^b\varphi_k^2\mathrm{d}x$$
$$=\|f\|^2-2\sum_{k=1}^{n}d_kc_k\|\varphi_k\|^2+\sum_{k=1}^{n}d_k^2\|\varphi_k\|^2$$
$$=\|f\|^2+\sum_{k=1}^{n}\|\varphi_k\|^2\left[(c_k-d_k)^2-c_k^2\right]\to\min$$

minimum nastává pro $d_k=c_k$. □

Poznámka

Z důkazu plyne pro $d_k=c_k$ a libovolné $n\in\mathbb{N}$, že

$$0\le\|f-\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k\|^2=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}c_k^2\|\varphi_k\|^2\Rightarrow\|f\|^2\ge\sum_{k=1}^{n}c_k^2\|\varphi_k\|^2,$$

což je tzv. *Besselova nerovnost*. Odtud plyne, že $\sum_{n=1}^{\infty}c_k^2\|\varphi_k\|^2$ je ohraničená (zdola nulou a shora normou funkce) a protože je to řada s nezápornými členy, pak tato řada konverguje a $\lim c_k\|\varphi_k\|=0$.

Poznámka

Jestliže v Besselově nerovnosti platí rovnost, říkáme, že pro funkci f platí *Parsevalova rovnost*. Řekneme, že Fourierova řada $\sum c_n\varphi_n$ konverguje podle středu k funkci f, jestliže

$$\|f-\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k\|\xrightarrow{n\to\infty}0.$$

Důsledek

Fourierova řada $\sum c_k\varphi_k$ konverguje podle středu k funkci f právě tehdy, když platí $\|f\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2\|\varphi_n\|^2$.

Věta 49

Fourierova řada integrovatelné funkce f na intervalu $[-\pi,\pi]$ má vzhledem k systému $\{1,\sin x,\cos x,\dots\}$ tvar

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

kde

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x,\quad n\in\mathbb{N}_0,$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Důkaz.

Přímo vytvoříme řadu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$, kde $c_n = \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\|\varphi_n\|^2}$. Již víme, že $\|1\| = \sqrt{2\pi}$, $\|\cos nx\| = \sqrt{\pi}$ a $\|\sin nx\| = \sqrt{\pi}$, takže přeznačením $c_n, n \in \mathbb{N}$, dostáváme

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N},$$

a pro první koeficient c_0 máme

$$c_0 = \frac{\langle f, \varphi_0 \rangle}{\|\varphi_0\|^2} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x}{2\pi}.$$

Jestliže první koeficient zahrneme do a_n, máme ihned $c_0 = \frac{a_0}{2}$. □

Poznámka

- Je-li f lichá, pak $f \cdot \cos nx$ je také lichá. Proto $a_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}_0$.
- Je-li f sudá, pak $f \cdot \sin nx$ je lichá. Proto $b_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Důsledek

Nechť f je integrovatelná na $[-\pi, \pi]$.

a) *Je-li f sudá funkce, pak má její Fourierova řada tvar*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \ \text{kde } a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x, n \in \mathbb{N}_0.$$

b) *Je-li f lichá funkce, pak má její Fourierova řada tvar*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \ \text{kde } b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \mathrm{d}x, n \in \mathbb{N}.$$

Definice 17

Nechť f je integrovatelná na $[-\pi, \pi]$. Funkci f^* nazveme *2π periodické rozšíření* funkce f, jestliže

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (-\pi, \pi), \\ f(x - 2k\pi) & x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi), \\ \frac{1}{2}(f(-\pi^+) + f(\pi^-)) & x = (2k+1)\pi. \end{cases}$$

Označení $f(a^+) = \lim_{x \to a^+} f(x)$, resp. $f(a^-) = \lim_{x \to a^-} f(x)$.

Definice 18

Nechť f je integrovatelná na $[0, \pi]$, *sudé rozšíření* funkce f na interval $[-\pi, \pi]$ je funkce

$$f_s(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [0, \pi], \\ f(-x) & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

a Fourierova řada se pak nazývá *kosinová řada*.

Liché rozšíření funkce f na interval $[-\pi, \pi]$ je funkce

$$f_\ell(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (0, \pi], \\ 0 & x = 0, \\ -f(-x) & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

a Fourierova řada se pak nazývá *sinová řada*.

Věta 50 (Dirichletova věta)

Nechť funkce f je 2π periodická, na intervalu $[-\pi, \pi]$ po částech spojitá a po částech monotónní, tj. $[-\pi, \pi] = \bigcup_{k=1}^{n} [\alpha_k, \beta_k]$ tak, že (α_k, β_k) jsou po dvou disjunktní, funkce f je spojitá na $[\alpha_k, \beta_k]$ a monotónní na (α_k, β_k), zejména body nespojitosti funkce f jsou skoky. Pak platí

1. *Pro každé $x_0 \in (-\pi, \pi)$, v němž je funkce f spojitá je součet Fourierovy řady roven $f(x_0)$.*
2. *Pro $x_0 \in (-\pi, \pi)$, v němž má funkce f skok je součet Fourierovy řady roven*
$$\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to x_0^-} f(x) + \lim_{x\to x_0^+} f(x)\right],$$
tj. součet je aritmetickým průměrem limity zleva a limity zprava.
3. *V krajních bodech $\pm\pi$ je součet Fourierovy řady roven*
$$\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to -\pi^+} f(x) + \lim_{x\to \pi^-} f(x)\right].$$

Předchozí úvahy lze samozřejmě provést i na libovolném intervalu $[a, b]$ pro funkci $g \in L^2[a, b]$. Ortogonální systém bude mít potom tvar

$$\left\{1, \sin\frac{2\pi x}{b-a}, \cos\frac{2\pi x}{b-a}, \sin\frac{4\pi x}{b-a}, \cos\frac{4\pi x}{b-a}, \dots, \sin\frac{2n\pi x}{b-a}, \cos\frac{2n\pi x}{b-a}, \dots\right\}$$

a Fourierova řada bude

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2n\pi x}{b-a} + b_n \sin\frac{2n\pi x}{b-a}\right)$$

s koeficienty

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b g(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$
$$b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b g(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Příklad 37

Určete Fourierovu řadu funkce $g(x) = x, x \in (-\pi, \pi)$ a rozhodněte k jaké funkci získaná řada konverguje na $\mathbb{R}$.

Přímým výpočtem s použitím metody per-partes obdržíme koeficienty

$$a_0 = 0, \qquad a_n = 0, \qquad b_n = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin nx & v = \frac{-\cos nx}{n} \end{array} \right|$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\underbrace{\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\mathrm{d}x}_{=0} = \frac{2}{\pi n}[-\pi\cos n\pi] = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

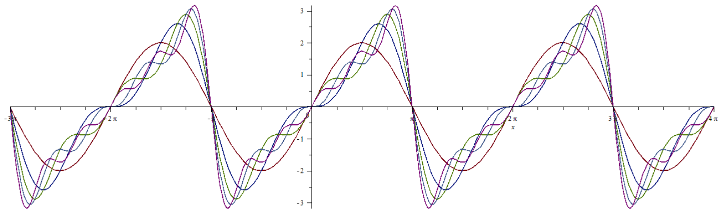
Řada je tedy tvaru

$$F(x) = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots\right), \qquad x \in (-\pi, \pi).$$

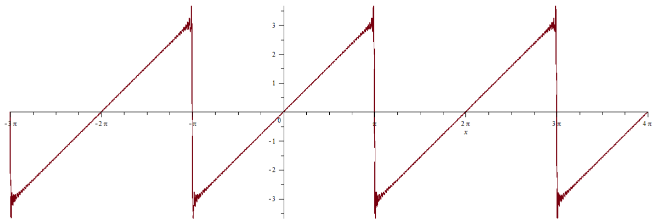
Vzhledem ke spojitosti a spojitosti derivace funkce $g(x)$ pro $x \in (-\pi, \pi)$ konverguje tato řada k zadané funkci, tj.

$$F(x) = x, \qquad x \in (-\pi, \pi).$$

Pro rozhodnutí k jaké funkci získaná řada konverguje na $\mathbb{R}$ potřebujeme ještě hodnoty v krajních bodech intervalu (body nespojitosti uvnitř intervalu nejsou). Hodnoty v krajních bodech intervalu snadno dopočítáme jako $F(\pi) = F(-\pi) = 0$. Součet řady na $\mathbb{R}$ je pak dán periodickým opakováním intervalu $[-\pi, \pi]$.



Obr.: Součet pro $n = 1, 2, 3, 4, 5$



Obr.: Součet pro $n = 100$

Poznámka

Pro $x = \frac{\pi}{2}$ máme

$$\frac{\pi}{2} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

protože

$$\sin n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & n = 2k, \\ (-1)^k & n = 2k+1, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Příklad 38

Určete Fourierovu řadu funkce $g(x) = \operatorname{sgn} x, x \in (-1, 1)$ a rozhodněte k jaké funkci získaná řada konverguje na $\mathbb{R}$.

Jde o lichou funkci, tedy

$$a_0 = 0, \qquad a_n = 0.$$

Dále

$$b_n = \int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x \sin(n\pi x)\,dx = 2\int_0^1 \sin(n\pi x)\,dx = 2\left[\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^1$$
$$= \frac{2}{n\pi}[(-1)^{n+1} - (-1)] = \frac{2}{n\pi}[1 - (-1)^n]$$

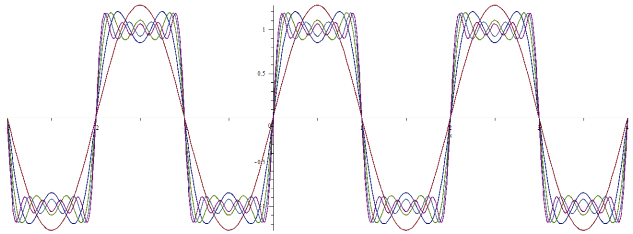
Řada je tedy tvaru

$$F(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin \pi x + \frac{\sin 3\pi x}{3} + \frac{\sin 5\pi x}{5} + \dots\right).$$

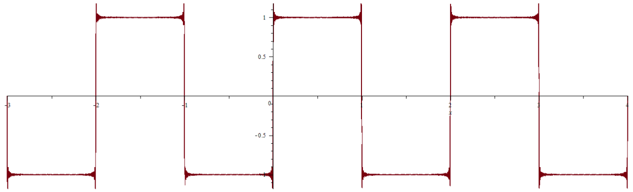
Vzhledem ke spojitosti a spojitosti derivace funkce $g(x)$ pro $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ konverguje tato řada k zadané funkci, tj.

$$F(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-1, 0), \\ 1, & x \in (0, 1). \end{cases}$$

Pro rozhodnutí k jaké funkci získaná řada konverguje na $\mathbb{R}$ potřebujeme ještě hodnoty v krajních bodech intervalu a v bodě nespojitosti uvnitř intervalu. Tyto hodnoty snadno dopočítáme jako $F(1) = F(-1) = F(0) = 0$. Součet řady na $\mathbb{R}$ je pak dán periodickým opakováním intervalu $[-1, 1]$.



Obr.: Součet pro $n = 1, 2, 3, 4, 5$



Obr.: Součet pro $n = 100$

Příklad 39

Nechť $f(x)$ je 2π periodické rozšíření funkce x^2 z intervalu $[-\pi, \pi]$. Pomocí Fourierova rozvoje této funkce sečtěte $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

Sudá funkce $\Rightarrow b_n = 0$. Vypočítáme

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^3}{3} = \frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \mathrm{d}x = \underbrace{\frac{2}{\pi} \left[x^2 \frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{4}{\pi n} \int_0^{\pi} x \sin nx \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{4}{\pi n} \left[-x \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n^2} \underbrace{\int_0^{\pi} \cos nx \mathrm{d}x}_{=0} = \frac{4}{\pi n} \pi \frac{(-1)^n}{n} = \frac{4}{n^2}(-1)^n.$$

Pro $x \in [-\pi, \pi]$ máme

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

- Zvolme $x = 0$, potom

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

- Zvolme $x = \pi$, potom

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Věta 51

Nechť f je 2π periodická funkce, která je spojitá na $\mathbb{R}$, její derivace je na intervalu $[-\pi, \pi]$ po částech spojitá. (Body nespojitosti f' jsou skoky.) Pak Fourierova řada funkce f konverguje na $\mathbb{R}$ stejnoměrně k funkci f.

Věta 52

Nechť $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ stejnoměrně na $[-\pi, \pi]$, kde f je spojitá 2π periodická funkce. Pak $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}_0$, a $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$.

Důkaz.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) / \cdot \cos mx, \int_{-\pi}^{\pi} dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right]\cos mx dx$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cos mx dx \right.$$

$$\left. + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx\right]$$

$$= a_m \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx dx = \pi a_m \Rightarrow a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx$$

□

Příklad 40

Určete Fourierův rozvoj funkce $f(x) = \cos^4 x, x \in [-\pi, \pi]$.

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^4 x \cos nx dx = \begin{cases} a_0 = \frac{3}{4}, \\ a_2 = \frac{1}{2}, \\ a_4 = \frac{1}{8}, \end{cases}$$

ostatní a_n a b_n jsou rovny nule. Ke stejnému závěru dospějeme i přímou úpravou

$$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cdot\frac{1+\cos 4x}{2} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.$$

Komplexní zápis Fourierova rozvoje: Využijeme

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\Rightarrow \quad \cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \ \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}.$$

Odtud ihned

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}\right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

kde

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i \sin nx) dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

a podobně

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx, \quad c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Komplexní Fourierova řada funkce f je tedy

$$f(x) \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

kde

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Definice 19

Nechť H je vektorový prostor nad tělesem reálných čísel, na kterém je definován skalární součin, tj. zobrazení $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon H \times H \to \mathbb{R}$, které je bilineární. Pokud je prostor H v metrice definované skalárním součinem ($\rho(x, y) = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$) úplný, pak se nazývá *Hilbertův prostor*.

$\langle\cdot,\cdot\rangle\colon H \times H \to \mathbb{R}$, $\forall x, y, z \in H$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

- $\langle x, x\rangle \geq 0$ a $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$,
- $\langle ax + by, z\rangle = a\langle x, z\rangle + b\langle y, z\rangle$.

(Prostor se skalárním součinem je unitární prostor. Metrický prostor je úplný, jestliže každá cauchyovská posloupnost je v něm konvergentní.)

Příklad 41

1. Prostor $\mathbb{E}^n$ je Hilbertův prostor. ($\mathbb{E}^n$ je euklidovský prostor $(\mathbb{R}^n, \varrho_2)$.)
2. Prostor $\ell^2 = \left\{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\right\}$ je Hilbertův prostor. $(x = \{x_n\}, y = \{y_n\}, \langle x, y\rangle = \sum x_n y_n)$
3. Prostor $C[a, b]$ s metrikou $\rho(f, g) = \left[\int_a^b (f(x) - g(x))^2 \mathrm{d}x\right]^{1/2}$ není úplný, zúplněním prostoru $C[a, b]$ s výše uvedenou metrikou je $L^2[a, b]$ (prostor funkcí, jejichž kvadrát je na $[a, b]$ integrovatelný v Lebesgueově smyslu).

Definice 20

Řekneme, že metrický prostor (P, ρ) je *separabilní*, pokud obsahuje nejvýše spočetnou množinu $A \subseteq P$, která je v P hustá, tj. $\overline{A} = P$.

Příklad 42

- $\mathbb{E}^n$ je separabilní ($\mathbb{Q}$ je spočetná hustá podmnožina $\mathbb{R}$);
- prostor ℓ^2 je separabilní – množina A je tvořena posloupnostmi racionálních čísel s konečným počtem nenulových členů;
- $L^2[a, b]$ – hůře se dokazuje, ke každé funkci lze najít polynom – množina polynomů je hustá, ale nespočetná (reálné koeficienty), avšak lze vzít polynomy s racionálními koeficienty.

Věta 53

Nechť H je separabilní Hilbertův prostor, pak existuje zobrazení $T\colon H \to \ell^2$, které je lineární a izometrické, tj.

$$\rho_{\ell^2}(T(x), T(y)) = \rho_H(x, y), \quad \forall x, y \in H.$$

Jak ztotožnit L^2 a ℓ^2?
$L^2(-\pi, \pi) \supseteq C(-\pi, \pi)$. Pro $f \in L^2(a, b)$ máme

$$f \overset{T}{\mapsto} \left\{\frac{a_0}{2}, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots\right\},$$

kde $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \mathrm{d}x$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \mathrm{d}x$.

- T je lineární.
- Náleží posloupnost Fourierových koeficientů do ℓ^2? Nemůže nastat případ, že by kvadrát posloupnosti divergoval – viz Besselova nerovnost $\sum c_k^2 \|\varphi_k\|^2 \leq \|f\|^2$.
- $\{\frac{1}{2}, \cos nx, \sin nx; n \in \mathbb{N}\}$ je ortogonální systém, tedy T zachovává velikost.

Definice 21

Nechť H je Hilbertův prostor a $\{\varphi_n\}$ je ortogonální systém funkcí v H. Řekneme, že systém $\{\varphi_n\}$ je *úplný*, pokud $\langle f, \varphi_n\rangle = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, pak $f = 0$. Systém funkcí $\{\varphi_n\}$ nazveme *uzavřený*, jestliže lineární obal prvků $\{\varphi_n\}$, tj. množina konečných lineárních kombinací prvků φ_n, je hustý v H.

Poznámka

- Je-li $f \equiv 0$ a $g(x) = f(x)$ všude mimo odstranitelné nespojitosti např. $g\left(\frac{a+b}{2}\right) = 1$, potom $\|f\|_{L^2} = 0$ a $\|g\|_{L^2} = 0$ – prvky $L^2(a, b)$ jsou třídy funkcí (nikoli samotné funkce).
- $\forall f \in H\ \exists d_1, \dots, d_n : \|f - \sum d_k\varphi_k\| < \varepsilon$.

Věta 54

Nechť H je (separabilní) Hilbertův prostor. Pak jsou následující výroky ekvivalentní

(i) *ortogonální systém $\{\varphi_n\}$ je úplný,*

(ii) *systém $\{\varphi_n\}$ je uzavřený,*

(iii) *platí Parsevalova rovnost: $\sum c_k^2\|\varphi_k\|^2 = \|f\|^2$.*

Věta 55

Systém $\{\frac{1}{2}, \cos nx, \sin nx\}$ je úplný (uzavřený, platí Parsevalova rovnost) v $L^2(-\pi, \pi)$.

Příklad 43

Pomocí Fourierova rozvoje periodického rozšíření funkce x^2 na $[-\pi, \pi]$ sečtěte řadu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

$$a_0 = \frac{2}{3}\pi^2, \quad a_n = \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

Parsevalova rovnost dává

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \frac{2}{9}\pi^4 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^4\mathrm{d}x = \frac{2}{5}\pi^4.$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{16}\left(\frac{2}{5}\pi^4 - \frac{2}{9}\pi^4\right) = \frac{\pi^4}{16}\cdot\frac{18-10}{45} = \frac{\pi^4}{90}$.