

# Metrické prostory

Petr Hasil

Přednáška z Matematické analýzy



## 1 Metrické prostory

- Úvod
- Otevřené a uzavřené množiny
- Úplné a kompaktní prostory
- Zobrazení mezi metrickými prostory

## Definice 1

Nechť  $P$  je libovolná neprázdná množina. Uvažujme zobrazení

$\rho: P \times P \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , které splňuje pro každé  $x, y, z \in P$

- 1  $\rho(x, y) \geq 0$  a  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ,
- 2  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ ,
- 3  $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$ .

Zobrazení  $\rho$  se nazývá *metrika na  $P$* , dvojice  $(P, \rho)$  je *metrický prostor*.

## Poznámka

Požadavek na nezápornost je v definici uveden již při první zmínce o  $\rho$ , nemusí být tedy v axiomu 1, který se pak nazývá *axiom totožnosti*.

Axiom 2 je *axiom symetrie* a axiom 3 je *trojúhelníková nerovnost*.

Prvky množiny  $P$  jsou *body* metrického prostoru  $(P, \rho)$  a číslo  $\rho(x, y)$  je *vzdálenost* bodů  $x, y$  v prostoru  $(P, \rho)$ .

Axiomy 2 a 3 lze zapsat dohromady jako  $\rho(y, x) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$ .

## Příklad 1 (Příklady metrik)

- vzdálenost na přímce („obvyklá“ metrika)

$$P = \mathbb{R}, \quad \rho(x, y) = |x - y|$$

- součtová (taxikářská) metrika

$$P = \mathbb{R}^2, \quad \rho_1([x_1, y_1], [x_2, y_2]) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

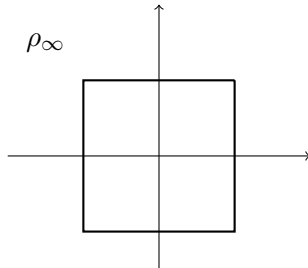
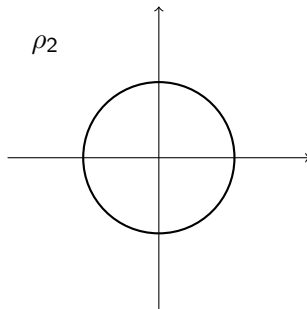
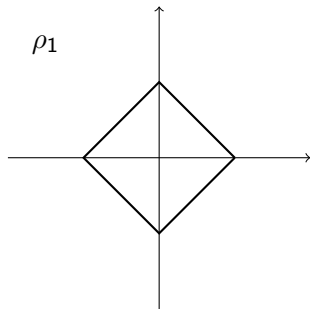
- Euklidovský prostor  $\mathbb{E}^2$

$$P = \mathbb{R}^2, \quad \rho_2([x_1, y_1], [x_2, y_2]) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

- maximální metrika

$$P = \mathbb{R}^2, \quad \rho_\infty([x_1, y_1], [x_2, y_2]) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

## Příklad 2 (Jednotková kružnice)



## Příklad 3 (Příklady metrik)

Uvažujme body  $A, B \in \mathbb{R}^n$ ,  $A = [a_1, \dots, a_n]$ ,  $B = [b_1, \dots, b_n]$ .

- součtová metrika

$$P = \mathbb{R}^n, \quad \rho_1(A, B) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$$

- Euklidovský prostor  $\mathbb{E}^n$

$$P = \mathbb{R}^n, \quad \rho_2(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2}$$

- maximální metrika

$$P = \mathbb{R}^n, \quad \rho_\infty(A, B) = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i - b_i|$$

- (Minkowski)  $P = \mathbb{R}^n, \quad \rho_p(A, B) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |a_i - b_i|^p}, \quad p \geq 1$

## Příklad 4 (Příklady metrik)

- metrika stejnoměrné konvergence

$$P = C[a, b], \quad \rho_C(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

- integrální metrika

$$P = C[a, b], \quad \rho_I(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$$

- $P = C[a, b], \quad \rho_p(f, g) = \sqrt[p]{\int_a^b |f(x) - g(x)|^p \, dx}, \quad p \geq 1$

## Poznámka

V metrice stejnoměrné konvergence jsme využili faktu, že spojitá funkce nabývá na uzavřeném intervalu svého maxima. Pokud bychom uvažovali funkce jen integrovatelné, v definici bychom místo maxima použili supremum.

## Příklad 5 (Příklady metrik)

- pampeliškový prostor

$$P = \mathbb{R}^2, \quad \rho([x_1, y_1], [x_2, y_2]) = \begin{cases} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, & (*) \\ \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}, & \text{jinak} \end{cases}$$

(\*) pro body na stejné polopřímce procházející počátkem

- diskrétní (triviální) prostor

$$P \neq \emptyset, \quad A, B \in P, \quad \rho_d(A, B) = \begin{cases} 0, & A = B \\ 1, & A \neq B \end{cases}$$

## Poznámka

Samozřejmě lze zavést metriku na dalších množinách, např. množině ohraničených posloupností, slov, . . .



## Definice 2

Nechť  $(P, \rho)$  je metrický prostor a  $A \subseteq P$ . Vzdálenost bodu od množiny je hodnota

$$\rho(x, A) = \inf_{a \in A} \rho(x, a).$$

Vzdálenost dvou množin  $A, B \subseteq P$  je definováno jako

$$\rho(A, B) = \inf_{[a,b] \in A \times B} \rho(a, b).$$

## Definice 3

Nechť  $(P, \rho)$  a  $(Q, \sigma)$  jsou metrické prostory. Řekneme, že zobrazení  $f: P \rightarrow Q$  je *izometrické*, pokud

$$\sigma(f(x), f(y)) = \rho(x, y), \quad \forall x, y \in P.$$

## Definice 4 (Okolí bodu)

Nechť  $(P, \rho)$  je metrický prostor,  $a \in P$ . Okolím bodu  $a$  rozumíme množinu

$$\mathcal{O}(a, \varepsilon) = \{x \in P : \rho(x, a) < \varepsilon\}.$$

Nechť  $A \subseteq P$ ,  $a \in P$ , řekneme, že bod  $a$  je

- *vnitřní bod* množiny  $A$ , pokud  $\exists \varepsilon > 0$  takové, že  $\mathcal{O}(a, \varepsilon) \subset A$ ,
- *hraniční bod* množiny  $A$ , pokud  $\forall \varepsilon > 0$  je

$$\mathcal{O}(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad \wedge \quad \mathcal{O}(a, \varepsilon) \cap (P \setminus A) \neq \emptyset,$$

- *vnější bod* množiny  $A$ , pokud  $\exists \varepsilon > 0$  takové, že  $\mathcal{O}(a, \varepsilon) \subset P \setminus A$ ,
- *hromadný bod* množiny  $A$ , pokud  $\forall \varepsilon > 0$  obsahuje  $\mathcal{O}(a, \varepsilon)$  nekonečně mnoho bodů množiny  $A$ ,
- *izolovaný bod* množiny  $A$ , pokud  $\exists \varepsilon > 0$  takové, že  $\mathcal{O}(a, \varepsilon) \cap A = \{a\}$ .

### Poznámka

Množina  $\mathcal{O}(a, \varepsilon)$  se také nazývá  $\varepsilon$ -okolí, přičemž  $\varepsilon$  se často vynechává. S ohledem např. na topologii lze okolí zadefinovat jako libovolnou otevřenou množinu obsahující příslušný bod. Tyto definice jsou ekvivalentní.

## Definice 5

Nechť  $(P, \rho)$  je metrický prostor. Řekneme, že posloupnost  $x_n \in P$  *konverguje* k prvku  $x \in P$ , jestliže  $\rho(x, x_n) \rightarrow 0$ , tj.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : \rho(x_n, x) < \varepsilon.$$

## Příklad 6

- $P = \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y|, x_n \xrightarrow{\rho} x$  je obvyklá konvergence na  $\mathbb{R}$
- $P = \mathbb{R}^2, [x_m, y_n] \xrightarrow{\rho_P} [x, y] \Leftrightarrow x_n \rightarrow x \wedge y_n \rightarrow y$
- $P$  libovolná,  $\rho$  diskrétní metrika,  $x_n \xrightarrow{\rho_d} x$  je skorostacionární posloupnosti (od určitého indexu jsou prvky stejné).

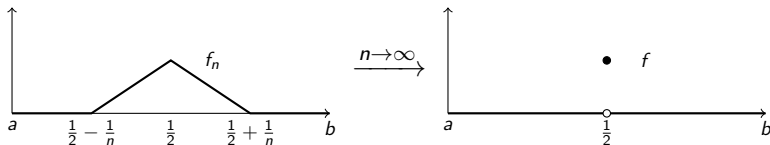
## Definice 6

Řekneme, že metriky  $\rho, \hat{\rho}$  jsou *ekvivalentní*, pokud pro každou posloupnost  $x_n \in P$  platí  $x_n \xrightarrow{\rho} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\hat{\rho}} x$ .

## Příklad 7

- $P = \mathbb{R}^2$  :  $\forall p \geq 1$  jsou všechny  $\rho_p$  ekvivalentní
- $P = C[a, b]$  :  $\rho_C$  a  $\rho_I$  nejsou ekvivalentní

Posloupnost funkcí z obrázku níže (nalevo) konverguje v integrální metrice k nulové funkci, tj.  $\rho_I(f_n, 0) \rightarrow 0$ .



Posloupnost čísel (funkčních hodnot)  $\{f_n(x)\}$  konverguje k funkci na obrázku výše (napravo), výsledek není spojitá funkce.

Dále  $\rho_C(f_n, 0) > 0$ , tedy v  $\rho_C$  limita neexistuje.

## Definice 7

Nechť  $(P, \rho)$  je metrický prostor a  $A \subseteq P$ .

- **Uzávěr** množiny  $A$  definujeme jako  $\bar{A} = \{x \in P : \rho(x, A) = 0\}$ .
- Řekneme, že  $A$  je **uzavřená**, pokud je stejná jako její uzávěr, tj.  $A = \bar{A}$ .
- **Vnitřek** množiny  $A$  je množina všech vnitřních bodů množiny  $A$ , značíme  $\text{int}(A)$ , nebo  $A^0$ .
- **Hranici** množiny  $A$  tvoří množina všech hraničních bodů, značíme  $h(A)$  nebo  $\partial A$ .
- **Derivaci** množiny  $A$  tvoří množina všech hromadných bodů, značíme  $A'$ .
- **Adherenci** množiny  $A$  tvoří množina všech izolovaných bodů.

## Věta 1

Pro  $A, B \subseteq P$  platí

- $\bar{A} = h(A) \cup A^0$ ,
- $h(A) = \bar{A} \setminus A^0$ ,
- $h(A) = \bar{A} \cap \overline{P \setminus A}$ ,
- $(A \cap B)^0 = A^0 \cap B^0$ ,
- $A$  je otevřená právě tehdy, když  $A = A^0$ .

## Důkaz.

Bod a).

- $x \in \bar{A} \Rightarrow \rho(x, A) = 0 \Rightarrow \inf_{a \in A} \rho(x, a) = 0$   
 $\Rightarrow \exists a_n \in A : \rho(a_n, x) \rightarrow 0$   
 $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : a_n \in \mathcal{O}(x, \varepsilon)$  pro  $n \geq n_0 \Rightarrow x \in h(A) \vee x \in A^0$   
 $\Rightarrow x \in h(A) \cup A^0$
- $x \in h(A) \cup A^0 \Rightarrow (x \in A^0) \vee (x \in h(A)) \Rightarrow \rho(x, A) = 0 \Rightarrow x \in \bar{A}$



## Věta 2

*Nechť  $(P, \rho)$  je metrický prostor a  $A \subseteq P$ . Množina  $A$  je uzavřená právě tehdy, když každá konvergentní posloupnost má v  $A$  svůj limitní bod, tj.*

$$\forall x_n \in A, x_n \xrightarrow{\rho} x \Rightarrow x \in A.$$

## Důkaz.

$\Rightarrow$   $A$  je uzavřená,  $x_n \in A, x_n \rightarrow x$  je lib.  $\Rightarrow A = \bar{A}$ .

Kdyby  $x \notin A \Rightarrow \rho(x, A) = \varepsilon > 0 \Rightarrow \mathcal{O}(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A = \emptyset$  a současně  $x_n \rightarrow x \Rightarrow \rho(x_n, x) = 0, x_n \in A, \rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \rightarrow$  spor.

$\Leftarrow$  Kdyby  $A$  nebyla uzavřená, pak  $A \neq \bar{A} \Rightarrow \exists a \in \bar{A} \wedge a \notin A \Rightarrow \rho(a, A) = 0, \forall \varepsilon > 0 \exists a_n : \rho(a_n, a) < \varepsilon, a_n \xrightarrow{\rho} a$ , což je spor s  $x_n \rightarrow x \Rightarrow x \in A$ .

(Našli jsme konvergentní posloupnost  $\{a_n\}$ , pro kterou to, dosadíme-li ji za  $\{x_n\}$ , neplatí.)





## Poznámka

Věta 2 říká, že uzávěr je množina limit konvergentních posloupností.

V diskretním prostoru  $(P, \rho_d)$  je každá množina  $A \subset P$  otevřená i uzavřená zároveň (tzv. obojaká množina), neboť  $\bar{A} = A, A^0 = A$ .

## Důkaz druhé části poznámky.

Bud'  $A \subseteq P$  libovolná.

- $\bar{A}$  : co přidat? Všechny body vzdálené od  $A$  o nula – to jsou ale jen body té množiny, tedy  $\bar{A} = A$ .
- $A^0$  :  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  (mezi 0 a 1 libovolně), pak každý bod je vnitřním bodem, protože lze najít okolí, které je celé pod tou množinou  $\mathcal{O}(a, \frac{1}{2}) = \{a\} \subset A$  pro  $a \in A$ , tedy  $A^0 = A$ .



## Věta 3

Množina  $A \subseteq P$  v metrickém prostoru  $(P, \rho)$  je uzavřená právě tehdy, když je její doplněk  $(P \setminus A)$  otevřená množina.

## Důkaz.

- $\Rightarrow$  Necht'  $A \subseteq P$  je uzavřená, pak  $A = \bar{A}$ . Necht'  $x \in P \setminus A$  je lib. bod, pak  $x \in P \setminus \bar{A} \Rightarrow x \notin \bar{A} \Rightarrow \rho(x, A) = \varepsilon > 0$ . Pak  $\mathcal{O}(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A = \emptyset \Rightarrow \mathcal{O}(x, \frac{\varepsilon}{2}) \subset P \setminus A \Rightarrow x \in (P \setminus A)^0 \Rightarrow P \setminus A$  je otevřená množina.
- $\Leftarrow$  Předpokládáme, že  $P \setminus A$  je otevřená množina. Necht'  $x \in \bar{A}$ . Protože vždy platí  $A \subseteq \bar{A}$ , stačí ukázat, že  $x \in A$ .  
Sporem předpokládejme, že  $x \notin A \Rightarrow x \in P \setminus A$  (otevřená, tedy každý bod je vnitřní)  
 $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \mathcal{O}(x, \varepsilon) \subset P \setminus A \Rightarrow \mathcal{O}(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset \Rightarrow \rho(x, A) \geq \varepsilon \Rightarrow x \notin \bar{A} \Rightarrow$  spor  $\Rightarrow x \in A \Rightarrow \bar{A} \subseteq A \Rightarrow A = \bar{A} \Rightarrow A$  je uzavřená.



### Poznámka

Pro *konečný* počet množin lze přímo z definice ukázat, že jsou-li  $A_1, A_2$  otevřené (uzavřené), pak  $A_1 \cup A_2$  a  $A_1 \cap A_2$  jsou opět otevřené (uzavřené) množiny.

### Poznámka

Z definice lze dokázat také:

- Je-li  $A_i, i \in I$ , libovolný systém otevřených množin, pak  $\bigcup_{i \in I} A_i$  je otevřená množina.
- Je-li  $A_i, i \in I$ , libovolný systém uzavřených množin, pak  $\bigcap_{i \in I} A_i$  je opět uzavřená množina.

POZOR:

- $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$  jsou otevřené, ale  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{0\}$  je uzavřená.
- $A_n = \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$  jsou uzavřené, ale  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = (-1, 1)$  je otevřená.

## Definice 8

Řekneme, že posloupnost prvků  $x_n \in P$  je *cauchyovská*, jestliže ke každému  $\varepsilon > 0$  existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro  $m, n > n_0$  je  $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$ .

## Věta 4

Je-li posloupnost prvků  $x_n \in P$  konvergentní, tj.  $\exists x \in P : x_n \xrightarrow{\rho} x$ , pak je posloupnost  $x_n$  cauchyovská.

## Důkaz.

Nechť  $\varepsilon > 0$  libovolné. Protože  $x_n \xrightarrow{\rho} x$ , k číslu  $\frac{\varepsilon}{2}$  existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro každé  $n > n_0$  je  $\rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Nyní uvažujme  $m, n > n_0$  libovolné, pak

$$\rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_m, x) + \rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

tedy  $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$ . □

## Definice 9

Nechť je  $(P, \rho)$  metrický prostor a  $A \subseteq P$ . Pokud na množině  $A$  zavedeme metriku jako

$$\sigma(x, y) = \rho(x, y), \quad \forall x, y \in A,$$

řekneme, že metrický prostor  $(A, \sigma)$  je vnořený do prostoru  $(P, \rho)$  a metrika  $\sigma$  je indukována metrikou  $\rho$ .

Problém: Nechť je  $x_n$  cauchyovská, existuje  $x : x_n \xrightarrow{\rho} x$ ?

- na  $\mathbb{R}$  tvrzení platí – viz princip vnořených intervalů, tedy každá cauchyovská posloupnost je konvergentní,
- uvažujme  $P = \mathbb{Q}$ ,  $\rho(p, q) = |p - q|$  indukovaná metrika z  $\mathbb{R}$ ,  
 $x_n = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\} \in \mathbb{Q}$ , ale  $x_n \rightarrow e \notin \mathbb{Q}$ .

## Definice 10

Nechť  $(P, \rho)$  je metrický prostor. Řekneme, že tento prostor je **úplný**, jestliže každá cauchyovská posloupnost  $x_n \in P$  má v  $P$  svoji limitu.

## Příklad 8

- $\mathbb{R}, \rho(p, q) = |p - q|$  je úplný
- $\mathbb{Q}, \rho(x, y) = |x - y|$  není úplný
- $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  není úplný, např.  $x_n = \frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{I}$ , ale  $x_n \rightarrow 0 \in \mathbb{Q}$
- Diskrétní metrický prostor  $(P, \rho_d)$ :  $x_n \in P$  je cauchyovská právě tehdy, když je skorostacionární, tedy  $x_n$  je konvergentní, tedy každý diskrétní metrický prostor je úplný.
- $P = C[a, b], \rho_C(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$  je úplný
- $P = C[a, b], \rho_I(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$  není úplný

## Definice 11

Nechť  $(P, \rho)$  je metrický prostor, který není úplný. Řekneme, že prostor  $(Q, \sigma)$  je *úplný obal* metrického prostoru  $(P, \rho)$ , pokud platí

- 1  $P \subseteq Q$ ,
- 2  $\sigma|_{P \times P} = \rho$  (zúžení, restrikce),
- 3 uzávěr  $P$  v metrice  $\sigma$  je  $Q$  (přidáme jen to, co je nutné k zúplnění).

## Příklad 9

- $P = \mathbb{Q}$ , úplným obalem je  $\mathbb{R}$  (např. s metrikou  $\rho(x, y) = |x - y|$ )
- $P = C[a, b]$  s metrikou  $\rho_I$ , zúplnění tohoto prostoru se značí  $\mathcal{L}(a, b)$  a je to množina všech s kvadrátem integrovatelných funkcí na intervalu  $(a, b)$  v Lebesgueově smyslu.



### Věta 5

*Nechť  $(P, \rho)$  je metrický prostor. Pak existuje (v jistém smyslu jediný) metrický prostor  $(Q, \sigma)$ , který je úplným obalem metrického prostoru  $(P, \rho)$ .*

Existence v jistém smyslu jediného:

Jsou-li  $(Q_1, \sigma_1)$  a  $(Q_2, \sigma_2)$  dva prostory s uvedenou vlastností, pak existuje zobrazení  $f: Q_1 \rightarrow Q_2$ , které je izometrické (zachovává vzdálenost), tj.  $\sigma_2(f(x), f(y)) = \sigma_1(x, y) \forall x, y \in Q_1$ , takové, že jeho zúžením na  $P$  je identita.

### Důkaz.

Nástin ve skriptech. □

## Věta 6

Nechť  $(P, \rho)$  je úplný metrický prostor,  $A \subseteq P$  je uzavřená podmnožina v  $P$ , pak  $(A, \rho)$  je také úplný metrický prostor.

## Důkaz.

Přímo z definice. Nechť  $x_n \in A$  je libovolná cauchyovská posloupnost, pak je  $x_n$  cauchyovská i v  $(P, \rho)$ , tedy (úplnost  $P$ ) existuje  $x$  takové, že  $x_n \xrightarrow{\rho} x$ , a tedy (uzavřenost  $A$ )  $x \in A$ , tudíž  $(A, \rho)$  je úplný metrický prostor.  $\square$

## Příklad 10

$$A = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$$

## Definice 12

Řekneme, že množina  $A$  je *hustá* v  $P$ , jestliže je její uzávěr roven  $P$ , tj.

$$\bar{A} = P.$$

## Příklad 11

$(P, \rho) = \mathbb{R}$  s obvyklou metrikou,  $A = \mathbb{Q}$ , pak  $\bar{A} = \mathbb{R}$ .

## Věta 7

Množina  $A$  je hustá v metrickém prostoru  $(P, \rho)$  právě tehdy, když ke každému prvku  $x \in P$  a ke každému  $\varepsilon > 0$  existuje  $a \in A : \rho(x, a) < \varepsilon$ .

## Důkaz.

$\Rightarrow$  Předpokládejme  $\bar{A} = P$  a necht'  $x \in P$  a  $\varepsilon > 0$  jsou libovolná. Sporem předpokládáme, že neexistuje prvek  $a \in A : \rho(x, a) < \varepsilon$ . Protože  $x \in P = \bar{A} \Rightarrow \rho(x, A) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : \rho(x, a) < \varepsilon$ , což je spor, tedy prvek  $a$  s vlastností  $\rho(x, a) < \varepsilon$  existuje.

$\Leftarrow$  Předpokládejme, že ke každému  $x \in P$  a každému  $\varepsilon > 0$  existuje  $a \in A : \rho(x, a) < \varepsilon$ , chceme dokázat, že  $\bar{A} = P$ . Sporem předpokládáme, že  $\bar{A} \neq P$ , tedy  $\exists x \in P \setminus \bar{A} \Rightarrow x \notin \bar{A} \Rightarrow \rho(x, A) = \varepsilon > 0 \Rightarrow \mathcal{O}(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A = \emptyset$ , pro  $\frac{\varepsilon}{2} > 0$  neexistuje prvek  $a \in A$  takový, že  $\rho(x, a) \leq \frac{\varepsilon}{2} \rightarrow$  spor.



## Příklad 12

$C[a, b]$ ,  $\rho_C(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$ ,  $A$  je množina polynomů libovolného stupně, pak  $A \subset P$ . Pokud  $\overline{A} = C[a, b] \Rightarrow \forall f \in C[a, b] \exists P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 : \rho_C(f, P_n) < \varepsilon$ . Lze dokázat, že opravdu  $\overline{A} = C[a, b]$ , tj. spojitě funkce na intervalu  $[a, b]$  můžeme s libovolnou přesností aproximovat polynomy.

## Definice 13

Nechť  $(P, \rho)$  je metrický prostor a  $A \subseteq P$ . Řekneme, že množina  $A$  je *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti  $x_n$  prvků z  $A$  lze vybrat podposloupnost, která má limitu v  $A$ , tj.  $\exists x_{n_k} \xrightarrow{\rho} x \in A$ .

## Příklad 13

$$(P, \rho) = (\mathbb{R}, \rho_2), A = [a, b]$$

$x_n \in [a, b] \Rightarrow x_n$  je ohraničená a dle Bolzanovy–Weierstrassovy věty existuje  $x_{n_k} \rightarrow x \in \mathbb{R}$ ,  $[a, b]$  je uzavřená množina v  $\mathbb{R}$ , tedy obsahuje všechny limity všech konvergentních posloupností prvků z  $[a, b]$ , tedy i limita podposloupnosti  $x_{n_k}$  je v  $[a, b]$ .

### Definice 14

Nechť  $(P, \rho)$  je metrický prostor,  $A \subseteq P$ . Řekneme, že množina  $A$  je *omezená (ohraničená)*, jestliže  $\text{diam}(A) = \sup_{a,b \in A} \rho(a, b) < \infty$ , kde  $\text{diam}(A)$  se nazývá průměr množiny  $A$ .

### Věta 8

*Nechť  $A$  je kompaktní množina v metrickém prostoru  $(P, \rho)$ , pak  $A$  je uzavřená a ohraničená.*

## Důkaz.

Sporem předpokládáme, že  $A$  není ohraničená. Necht'  $x_1 \in A$  je lib.,  
 $\exists x_2 \in A : \rho(x_1, x_2) \geq 1$  (kdyby neexistovalo, pak by  $A \subset \mathcal{O}(x_1, 1)$ ). Dále  
indukcí,  $x_1, \dots, x_n \in A$  jsou takové, že  $\rho(x_i, x_j) \geq 1, i \neq j, i, j = 1, \dots, n$  a  
necht'  $x_{n+1} \in A$  je takové, že  $\rho(x_{n+1}, x_i) \geq 1, i = 1, \dots, n$ . Kdyby takový  
prvek neexistoval,  $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}(x_i, 1)$ ,  $A$  je omezená  $\rightarrow$  spor, tedy  $x_{n+1}$  s  
výše uvedenou vlastností existuje. Výsledkem konstrukce je posloupnost  
 $x_n \in A : \rho(x_i, x_j) \geq 1, \forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j$ . Z této posloupnosti nelze vybrat  
konvergentní podposloupnost, což vede ke sporu, a tedy kompaktní  
množina je ohraničená.

Sporem předpokládáme, že  $A$  není uzavřená, tj.  $A \neq \bar{A}$ , tedy  
 $\exists x : x \in \bar{A} \wedge x \notin A$ . Protože  $x \in \bar{A}$ , tj.  $\rho(x, A) = 0 = \inf_{a \in A} \rho(x, a)$ , tzn.  
existuje posloupnost  $x_n \in A : x_n \xrightarrow{\rho} x$ , pro libovolnou podposloupnost  
 $x_{n_k} \xrightarrow{\rho} x \notin A$ , spor s kompaktností  $A$ . □



### Příklad 14 (Kompaktní množina v diskrétním metrickém prostoru)

Uvažujme prostor  $(P, \rho_d)$ , kde  $P$  je libovolná množina. Necht' je  $A \subseteq P$  libovolná, pak je  $A$  uzavřená a  $\text{diam}(A) = \sup_{a,b \in A} \rho_d(a, b) = 1$ , tzn.  $A$  je omezená. Pokud  $A \subseteq P$  má nekonečně mnoho prvků, tj. existuje posloupnost

$$x_n \in A : x_i \neq x_j, i \neq j, i, j \in \mathbb{N},$$

pak  $A$  není kompaktní. Pokud má konečně mnoho prvků, pak je  $A$  kompaktní.

### Příklad 15

Uvažujme množinu  $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$  v pampeliškovém prostoru (pod  $\mathbb{R}^2$ ). Tato množina je uzavřená a omezená ( $\text{diam}(A) = 2$ ), ale není kompaktní, vzdálenost dvou libovolných prvků je 2, nelze vybrat konvergentní podposloupnost.

### Věta 9

*Nechť  $A \subseteq \mathbb{R}$  je uzavřená a ohraničená, pak  $A$  je kompaktní v  $\mathbb{R}$ .*

### Důkaz.

Nechť  $x_n \in A$  je libovolná, pak  $x_n$  je ohraničená a z Bolzanovy–Weierstrassovy věty plyne, že  $\exists x_{n_k} \in A \rightarrow x \in A$ , neboť  $A$  je uzavřená, a tedy obsahuje limity všech konvergentních posloupností svých prvků (věta 2). □

### Věta 10

*Nechť  $A$  je podmnožina v  $\mathbb{E}^n$ , pak je kompaktní právě tehdy, když je uzavřená a ohraničená.*

## Věta 11

Nechť  $(P, \rho)$  je metrický prostor. Uvažujme  $Q = P^n = P \times \dots \times P$ . Na  $Q$  definujeme metriku  $\sigma_p, p \geq 1$ , následujícím způsobem. Pro

$$[x_1, \dots, x_n], [y_1, \dots, y_n] \in Q$$

je vzdálenost

$$\sigma_p([x_1, \dots, x_n], [y_1, \dots, y_n]) = \left[ \sum_{k=1}^n (\rho(x_k, y_k))^p \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Je-li  $A \subseteq P$  kompaktní množina v  $P$ , pak  $A^n = A \times \dots \times A$  je kompaktní množina v  $(Q, \sigma_p)$ .

## Důkaz.

Důkaz provedeme pro  $(P, \rho) = \mathbb{R}$  a  $p = 2$ , tj.

$$\sigma_2([x_1, \dots, x_n], [y_1, \dots, y_n]) = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2}.$$

Nechť  $X^m = [x_1^m, \dots, x_n^m] \in A^n$  je libovolná posloupnost. Posloupnost  $X^m$  obsahuje konvergentní podposloupnost s limitou opět v  $A^n$ , tzn.  $A^n$  je kompaktní. □

### Důsledek 1

*Kartézský součin konečného počtu kompaktních množin je kompaktní množina. Odtud – libovolná uzavřená a ohraničená množina  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  je kompaktní. Tedy  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  je kompaktní právě tehdy, když je uzavřená a ohraničená.*

## Příklad 16

$$\ell^2 = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k^2 < \infty \right\},$$

$$x = \{x_n\}, y = \{y_n\}, \quad \rho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2},$$

$\ell^2$  lze chápat jako kartézský součin spočetně mnoha  $\mathbb{R}$ , tj.  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ .

Nechť  $A = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ , kde  $e_n = \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots\}$ , jednička je na  $n$ -tém místě,  $A$  je uzavřená a omezená, ale není kompaktní, protože vzdálenost  $\rho_2(e_n, e_m) = \sqrt{2}$  pro  $n \neq m$ , tedy nelze z ní vybrat konvergentní podposloupnost. Dále např. pro  $B = [0, 1]$ ,  $A \subseteq B^{\mathbb{N}_0}$  není kompaktní.

## Poznámka

Izometrické zobrazení znamená

$$\sigma(f(x), f(y)) = \rho(x, y), f: (P, \rho) \rightarrow (Q, \sigma).$$

Už známe zobrazení  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , což je funkce jedné reálné proměnné, počítali jsme se sčítáním a násobením a jinými operacemi, ale metrické prostory jsou „holé“ množiny se vzdáleností. Můžeme ale snadno „přenést“ spojitost funkce. Funkce je spojitá v  $x_0$ , pokud  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , tj.

$$\forall \mathcal{O}(f(x_0), \varepsilon) \quad \exists \mathcal{O}(x_0, \delta), \quad \forall x \in \mathcal{O}(x_0, \delta) : f(x) \in \mathcal{O}(f(x_0), \varepsilon).$$

## Definice 15

Nechť  $(P, \rho), (Q, \sigma)$  jsou metrické prostory a  $f: P \rightarrow Q$ .

- Řekneme, že zobrazení  $f$  je *spojité* v bodě  $x_0 \in P$ , jestliže ke každému okolí  $\mathcal{O}(f(x_0))$  existuje okolí  $\mathcal{O}(x_0)$  takové, že  $\forall x \in \mathcal{O}(x_0)$  je  $f(x) \in \mathcal{O}(f(x_0))$ .
- Řekneme, že zobrazení  $f$  je *spojité* na  $P$ , je-li spojité v každém bodě  $P$ .



## Věta 12

*Nechť  $(P, \rho), (Q, \sigma)$  jsou metrické prostory. Zobrazení  $f: (P, \rho) \rightarrow (Q, \sigma)$  je spojitě v bodě  $x_0 \in P$  právě tehdy, když pro každou posloupnost  $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$  platí, že posloupnost  $f(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(x_0)$ .*

## Poznámka

Tato věta je často uváděna jako definice spojitosti zobrazení (díky ekvivalenci).

## Důkaz.

⇒ Předpokládejme, že  $f$  je spojitě v  $x_0$ . Nechť  $x_n$  je libovolná posloupnost  $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$ . Chceme dokázat, že

$$f(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(x_0) \Leftrightarrow \sigma(f(x_n), f(x_0)) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \\ \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, \sigma(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Nechť  $\varepsilon > 0$  je lib. K  $\mathcal{O}(f(x_0), \varepsilon)$  dle definice spojitosti existuje  $\mathcal{O}(x_0, \delta)$  takové, že  $x \in \mathcal{O}(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{O}(f(x_0), \varepsilon)$ .

Protože  $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$ , tj. k číslu  $\delta > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$  je  $\rho(x_n, x_0) < \delta \Rightarrow x_n \in \mathcal{O}(x_0, \delta)$ . Tedy pro  $n \geq n_0$  je  $x_n \in \mathcal{O}(x_0, \delta)$ , a tedy  $f(x_n) \in \mathcal{O}(f(x_0), \varepsilon)$ , tzn.  $\sigma(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$ .

⇐ Sporem, stejně jako v případě funkcí jedné proměnné.



## Příklad 17

Uvažujme  $(P, \rho_C)$ , kde  $P = C[a, b]$ , a  $F: C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

a)  $f \in C[a, b] \Rightarrow F(f) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$  (dosazení)

b)  $f \in C[a, b] \Rightarrow F(f) = \int_a^b f(x) dx$  (integrál)

Ukažme, že jsou obě tato zobrazení spojitá na  $C[a, b]$ .

a) Necht'  $f \in C[a, b]$  a  $f_n \xrightarrow{\rho_C} f$  je libovolná posloupnost. Dokazujeme, že

$$F(f_n) \xrightarrow{\rho_{\mathbb{R}}} F(f), \quad f_n \left( \frac{a+b}{2} \right) \xrightarrow{\rho_{\mathbb{R}}} f \left( \frac{a+b}{2} \right),$$

tedy

$$\left| f_n \left( \frac{a+b}{2} \right) - f \left( \frac{a+b}{2} \right) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Pro  $\rho_C$  platí

$$\max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0.$$

Protože maximum jde do nuly, pak

$$\left| f_n \left( \frac{a+b}{2} \right) - f \left( \frac{a+b}{2} \right) \right| \rightarrow 0.$$

Tzn., že  $F$  je spojitě v  $f \in C[a, b]$  a jelikož  $f$  bylo libovolné, pak  $F$  je spojitě na celém  $C[a, b]$ .

b) Postupujeme podobně, tedy

$$\max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Chceme dokázat, že  $|F(f_n) - F(f)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , tj.

$$\left| \int_a^b f_n(x) \, dx - \int_a^b f(x) \, dx \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Nechť  $\varepsilon > 0$ . Jelikož  $\rho_C(f_n, f) \rightarrow 0$ , pak k číslu  $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$  existuje  $n_0$  :

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_0 \quad \rho_C(f_n, f) < \frac{\varepsilon}{b-a} &\Leftrightarrow \max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \\ &\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad \forall x \in [a, b], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) \, dx - \int_a^b f(x) \, dx \right| &= \left| \int_a^b f_n(x) - f(x) \, dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \, dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} \, dx = \varepsilon \quad (\text{pro } n \geq n_0). \end{aligned}$$

## Příklad 18

Charakterizujte spojitě zobrazení mezi prostory  $P = \mathbb{R}$  s obvyklou  $(\rho)$  a diskrétní  $(\rho_d)$  metrikou.

a)  $f: (\mathbb{R}, \rho_d) \rightarrow (\mathbb{R}, \rho)$

$x_n \xrightarrow{\rho_d} x_0 \Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| \rightarrow 0 \forall x_0 \in \mathbb{R}$ , každé zobrazení je spojitě.  
 Posloupnost v  $(\mathbb{R}, \rho_d)$  je skorostacionární, tj. od jistého indexu je pořád  $x_0$ , tedy od tohoto indexu je  $|f(x_n) - f(x_0)| = 0$ .

b)  $f: (\mathbb{R}, \rho) \rightarrow (\mathbb{R}, \rho_d)$

spojitost je ekvivalentní tomu, že  $x_n \xrightarrow{\rho} x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{\rho_d} f(x_0)$ , což lze pouze pokud je posloupnost  $\{f(x_n)\}$  skorostacionární, tj.

$\exists n_0 : f(x_n) = f(x_{n+1}) \forall n \geq n_0$ . Protože posloupnost  $\{x_n\}$  je libovolná (konv. k  $x_0$ ), musí být zobrazení  $f$  konstantní.

Tedy  $f$  je spojitě právě tehdy, když je konstantní

$(\exists c \in \mathbb{R} : f(x) \equiv c \forall x \in \mathbb{R})$ .

## Definice 16

Nechť  $(P, \rho), (Q, \sigma)$  jsou metrické prostory. Řekneme, že zobrazení  $f: P \rightarrow Q$  je *kontraktivní* (kontrakce), jestliže existuje  $k \in [0, 1)$  s vlastností

$$\sigma(f(x), f(y)) \leq k \cdot \rho(x, y) \quad \forall x, y \in P.$$

## Poznámka

- Zobrazení  $f$  splňující

$$\sigma(f(x), f(y)) \leq \rho(x, y)$$

se nazývá *neexpanzivní*.

- Pokud existuje konstanta  $k \geq 0$ , pak zobrazení  $f$  nazýváme *lipschitzovské* (a konstantu  $k$ , obvykle značenou  $L$ , *Lipschitzova konstanta*).

### Příklad 19

Stejnolehlost v rovině s koeficientem stejnoolehlosti  $k$ .

### Poznámka

Je-li zobrazení  $f$  kontrakce, pak je spojitě, neboť

$$\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0 \Rightarrow \sigma(f(x_n), f(x_0)) \rightarrow 0.$$

### Poznámka

Je-li zobrazení  $f$  kontrakce, pak rovnice typu  $x = f(x)$  lze řešit nejen graficky či náhradou funkce Taylorovým polynomem, ale také pomocí následující věty. . .



### Věta 13 (Banachova věta o pevném bodě)

Nechť  $(P, \rho)$  je úplný metrický prostor a  $f: P \rightarrow P$  je kontrakce. Pak existuje právě jeden bod  $x_0 \in P$  s vlastností

$$f(x_0) = x_0.$$

Bod  $x_0$  se nazývá **pevný bod** zobrazení  $f$ .

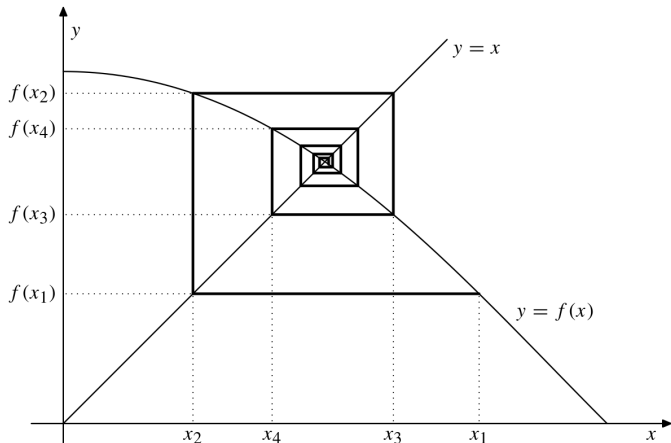
### Poznámka

Tento bod najdeme jako limitu postupných aproximací.

Nechť je  $x_1 \in P$  libovolný a definujeme  $x_{n+1} = f(x_n)$ , pak platí  $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$ , kde  $x_0$  je pevný bod.

## Příklad 20

Uvažujme např. rovnici  $x = \cos x$ , potom lze postupovat iteracemi jak je zobrazeno na obrázku.



Obrázek ze skript Z. Došlá, O. Došlý: Metrické prostory, MU Brno 2006

## Důkaz.

- 1 Necht'  $x_1 \in P$  libovolný a  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Pak lze ukázat, že posloupnost  $\{x_n\}$  je cauchyovská (plyne z faktu, že zobrazení  $f$  je kontrakce).
- 2  $(P, \rho)$  je úplný, pak existuje  $x_0 \in P : x_n \xrightarrow{\rho} x_0$  (každá cauchyovská posloupnost má limitu, tedy i ta, kterou jsme vytvořili).
- 3 Dokážeme, že  $x_0$  je pevný bod zobrazení  $f$ . Sporem předpokládáme, že  $\rho(x_0, f(x_0)) = \varepsilon > 0$ , což nelze, protože  $x_n \rightarrow x_0$ . Přesněji

$$0 \leq \rho(x_0, f(x_0)) \leq \underbrace{\rho(x_0, x_{n+1})}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\rho(x_{n+1}, f(x_0))}_{\rho(f(x_n), f(x_0)) \leq q \cdot \underbrace{\rho(x_n, x_0)}_{\rightarrow 0}} \rightarrow 0.$$

- 4 Kdyby  $x_0, \bar{x}$  byly dva různé pevné body, tj.  $\rho(x_0, \bar{x}) > 0$ , dostáváme spor z kontraktivity zobrazení  $f$ , neboť  $k \in [0, 1)$  a tedy

$$\rho(x_0, \bar{x}) = \rho(f(x_0), f(\bar{x})) \leq k \cdot \rho(x_0, \bar{x}) < \rho(x_0, \bar{x}).$$



## Příklad 21

Řešme počáteční úlohu

$$y' + 2xy = 0, \quad y(0) = 1.$$

Rovnici přepíšeme na  $y' = -2xy$ , integrujeme na intervalu  $[0, x]$  a použijeme počáteční podmínku, čímž dostaneme

$$y(x) - y(0) = y(x) - 1 = -2 \int_0^x t y(t) dt.$$

Hledáme tedy pevný bod zobrazení

$$y \xrightarrow{F} 1 - 2 \int_0^x t y(t) dt,$$

které zobrazuje spojitou funkci  $y$  na spojitou funkci (integrál jako funkce horní meze je spojitá funkce) na jistém intervalu  $[-\delta, \delta]$ ,  $\delta > 0$ . Uvažujeme tedy zobrazení  $F : P \rightarrow P$ , kde  $(P, \rho) = (C[-\delta, \delta], \rho_C)$  je úplný metrický prostor ( $\rho_C$  je metrika stejnoměrné konvergence).

Ověříme, že  $F(y) = 1 - 2 \int_0^x t y(t) dt$  je kontrakce. Necht'  $y, z \in C([- \delta, \delta])$ , potom

$$\begin{aligned}
 \rho_C(F(y), F(z)) &= \max_{x \in [-\delta, \delta]} |F(y(x)) - F(z(x))| \\
 &= \max_{x \in [-\delta, \delta]} \left| 1 - 2 \int_0^x t y(t) dt - 1 + 2 \int_0^x t z(t) dt \right| \\
 &\leq 2 \max_{x \in [-\delta, \delta]} \left| \int_0^x t [z(t) - y(t)] dt \right| \\
 &\leq 2 \max_{x \in [-\delta, \delta]} |z(x) - y(x)| \int_0^\delta t dt = 2 \max_{x \in [-\delta, \delta]} |y(x) - z(x)| \frac{\delta^2}{2} \\
 &= \delta^2 \max_{x \in [-\delta, \delta]} |y(x) - z(x)| = \delta^2 \cdot \rho_C(y, z)
 \end{aligned}$$

a jedná se o kontrakci kdykoli  $\delta < 1$ , tj.  $[-\delta, \delta] \subset (-1, 1)$ .

K řešení tedy lze použít Banachovu větu (postupné aproximace). Zvolme  $y_0 \equiv 1$ , pak

$$y_1 = 1 - 2 \int_0^x t y_0(t) dt = 1 - 2 \int_0^x t dt = 1 - x^2,$$

$$y_2 = 1 - 2 \int_0^x t y_1(t) dt = 1 - 2 \int_0^x t - t^3 dt = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2},$$

$$y_3 = 1 - 2 \int_0^x t y_2(t) dt = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6},$$

$\vdots$

$$y_n = 1 - 2 \int_0^x t y_{n-1}(t) dt = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}.$$

Jedná se o Maclaurinův polynom řádu  $n$  funkce  $y = e^{-x^2}$ , která je hledaným řešením zadaného problému (dosazením snadno ověříme, že jde skutečně o řešení  $\forall x \in \mathbb{R}$ ).

## Důsledek 2

*Nechť funkce  $g$  zobrazuje interval  $[a, b]$  do sebe a nechť má na tomto intervalu derivaci. Jestliže existuje číslo  $\alpha \in [0, 1)$  tak, že*

$$|g'(x)| \leq \alpha \quad \forall x \in [a, b],$$

*pak v intervalu  $[a, b]$  existuje pevný bod  $\xi$  funkce  $g(\cdot)$  a posloupnost postupných aproximací k němu konverguje pro libovolnou počáteční aproximaci  $x_0 \in [a, b]$ .*

### Poznámka

Použitím konceptu stejnoměrné konvergence v teorii nekonečných řad funkcí lze snadno dokázat, že

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



## Poznámka

Weierstrassovy věty říkaly, že pro  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  je  $f([a, b])$  opět uzavřená a ohraničená množina („spojitý obraz spojitého je spojitý“).

## Věta 14

*Nechť  $(P, \rho), (Q, \sigma)$  jsou metrické prostory,  $f: P \rightarrow Q$  je spojitě zobrazení a  $A \subseteq P$  je kompaktní. Pak její obraz  $f(A) \subseteq Q$  je kompaktní množina v  $Q$ .*

## Důkaz.

Uvažme posloupnost  $\{y_n\}$  v  $f(A)$ ,  $y_n$  má svůj vzor  $x_n$  v  $A$ , existuje  $x_{n_k} \rightarrow x_0$ , posloupnost  $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0) = y_0 \in f(A)$ . Našli jsme konvergentní podposloupnost (která díky spojitosti zůstala zachována).  $\square$