Metrické prostory

Petr Hasil

Přednáška z Matematické analýzy

Obsah

Definice 1

Nechť P je libovolná neprázdná množina. Uvažujme zobrazení $\rho\colon P \times P \to \mathbb{R}_0^+$, které splňuje pro každé $x, y, z \in P$

1. $\rho(x, y) \geq 0$ a $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$.

Zobrazení ρ se nazývá *metrika na P*, dvojice (P, ρ) je *metrický prostor*.

Poznámka

Požadavek na nezápornost je v definici uveden již při první zmínce o ρ, nemusí být tedy v axiomu 1, který se pak nazývá *axiom totožnosti*.
Axiom 2 je *axiom symetrie* a axiom 3 je *trojúhelníková nerovnost*.
Prvky množiny P jsou *body* metrického prostoru (P, ρ) a číslo $\rho(x, y)$ je *vzdálenost* bodů x, y v prostoru (P, ρ).
Axiomy 2 a 3 lze zapsat dohromady jako $\rho(y, x) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$.

Příklad 1 (Příklady metrik)

- vzdálenost na přímce („obvyklá“ metrika)

$$P = \mathbb{R}, \quad \rho(x, y) = |x - y|$$

- součtová (taxikářská) metrika

$$P = \mathbb{R}^2, \quad \rho_1([x_1, y_1], [x_2, y_2]) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

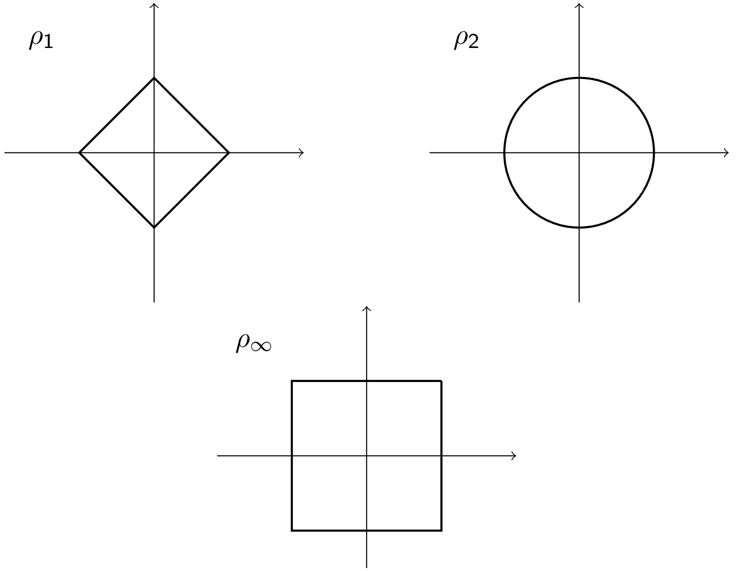
- Euklidovský prostor $\mathbb{E}^2$

$$P = \mathbb{R}^2, \quad \rho_2([x_1, y_1], [x_2, y_2]) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

- maximální metrika

$$P = \mathbb{R}^2, \quad \rho_\infty([x_1, y_1], [x_2, y_2]) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

Příklad 2 (Jednotková kružnice)



Příklad 3 (Příklady metrik)

Uvažujme body $A, B \in \mathbb{R}^n$, $A = [a_1, \dots, a_n]$, $B = [b_1, \dots, b_n]$.

- součtová metrika

$$P = \mathbb{R}^n, \quad \rho_1(A, B) = \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|$$

- Euklidovský prostor $\mathbb{E}^n$

$$P = \mathbb{R}^n, \quad \rho_2(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2}$$

- maximální metrika

$$P = \mathbb{R}^n, \quad \rho_\infty(A, B) = \max_{1 \le i \le n} |a_i - b_i|$$

- (Minkowski) $\quad P = \mathbb{R}^n, \quad \rho_p(A, B) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|^p}, \quad p \ge 1$

Příklad 4 (Příklady metrik)

- metrika stejnoměrné konvergence

$$P = C[a, b], \quad \rho_C(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

- integrální metrika

$$P = C[a, b], \quad \rho_I(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$$

- $P = C[a, b], \quad \rho_p(f, g) = \sqrt[p]{\int_a^b |f(x) - g(x)|^p \, dx}, \quad p \ge 1$

Poznámka

V metrice stejnoměrné konvergence jsme využili faktu, že spojitá funkce nabývá na uzavřeném intervalu svého maxima. Pokud bychom uvažovali funkce jen integrovatelné, v definici bychom místo maxima použili supremum.

Příklad 5 (Příklady metrik)

- pampeliškový prostor

$$P = \mathbb{R}^2, \quad \rho([x_1, y_1], [x_2, y_2]) = \begin{cases} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, & (*) \\ \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}, & \text{jinak} \end{cases}$$

$(*)$ pro body na stejné polopřímce procházející počátkem

- diskrétní (triviální) prostor

$$P \neq \emptyset, \quad A, B \in P, \quad \rho_d(A, B) = \begin{cases} 0, & A = B \\ 1, & A \neq B \end{cases}$$

Poznámka

Samozřejmě lze zavést metriku na dalších množinách, např. množině ohraničených posloupností, slov,. . .

Definice 2

Nechť (P,ρ) je metrický prostor a $A \subseteq P$. Vzdálenost bodu od množiny je hodnota

$$\rho(x,A) = \inf_{a \in A} \rho(x,a).$$

Vzdálenost dvou množin $A, B \subseteq P$ je definováno jako

$$\rho(A,B) = \inf_{[a,b] \in A \times B} \rho(a,b).$$

Definice 3

Nechť (P,ρ) a (Q,σ) jsou metrické prostory. Řekneme, že zobrazení $f\colon P \to Q$ je *izometrické*, pokud

$$\sigma\left(f(x), f(y)\right) = \rho(x,y), \quad \forall x, y \in P.$$

Definice 4 (Okolí bodu)

Nechť (P,ρ) je metrický prostor, $a \in P$. Okolím bodu a rozumíme množinu

$$\mathcal{O}(a,\varepsilon) = \{x \in P : \rho(x,a) < \varepsilon\}.$$

Nechť $A \subseteq P$, $a \in P$, řekneme, že bod a je

- *vnitřní bod* množiny A, pokud $\exists \varepsilon > 0$ takové, že $\mathcal{O}(a,\varepsilon) \subset A$,
- *hraniční bod* množiny A, pokud $\forall \varepsilon > 0$ je
$$\mathcal{O}(a,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad \wedge \quad \mathcal{O}(a,\varepsilon) \cap (P \setminus A) \neq \emptyset,$$
- *vnější bod* množiny A, pokud $\exists \varepsilon > 0$ takové, že $\mathcal{O}(a,\varepsilon) \subset P \setminus A$,
- *hromadný bod* množiny A, pokud $\forall \varepsilon > 0$ obsahuje $\mathcal{O}(a,\varepsilon)$ nekonečně mnoho bodů množiny A,
- *izolovaný bod* množiny A, pokud $\exists \varepsilon > 0$ takové, že $\mathcal{O}(a,\varepsilon) \cap A = \{a\}$.

Poznámka

Množina $\mathcal{O}(a,\varepsilon)$ se také nazývá ε-okolí, přičemž ε se často vynechává. S ohledem např. na topologii lze okolí zadefinovat jako libovolnou otevřenou množinu obsahující příslušný bod. Tyto definice jsou ekvivalentní.

Definice 5

Nechť (P,ρ) je metrický prostor. Řekneme, že posloupnost $x_n \in P$ *konverguje* k prvku $x \in P$, jestliže $\rho(x, x_n) \to 0$, tj.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n > n_0 : \quad \rho(x_n, x) < \varepsilon.$$

Příklad 6

- $P = \mathbb{R}, \rho(x,y) = |x-y|, x_n \xrightarrow{\rho} x$ je obvyklá konvergence na $\mathbb{R}$
- $P = \mathbb{R}^2, [x_m, y_n] \xrightarrow{\rho_p} [x,y] \Leftrightarrow x_n \to x \wedge y_n \to y$
- P libovolná, ρ diskrétní metrika, $x_n \xrightarrow{\rho_d} x$ je skorostacionární posloupnosti (od určitého indexu jsou prvky stejné).

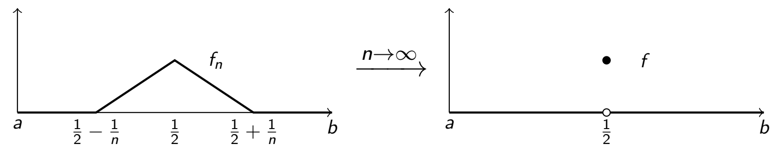
Definice 6

Řekneme, že metriky $\rho, \hat{\rho}$ jsou *ekvivalentní*, pokud pro každou posloupnost $x_n \in P$ platí $x_n \xrightarrow{\rho} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\hat{\rho}} x$.

Příklad 7

- $P = \mathbb{R}^2$: $\forall p \geq 1$ jsou všechny ρ_p ekvivalentní
- $P = C[a, b]$: ρ_C a ρ_I nejsou ekvivalentní

  Posloupnost funkcí z obrázku níže (nalevo) konverguje v integrální metrice k nulové funkci, tj. $\rho_I(f_n, 0) \to 0$.



  Posloupnost čísel (funkčních hodnot) $\{f_n(x)\}$ konverguje k funkci na obrázku výše (napravo), výsledek není spojitá funkce.
  Dále $\rho_C(f_n, 0) > 0$, tedy v ρ_C limita neexistuje.

Definice 7

Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $A \subseteq P$.

- *Uzávěr* množiny A definujeme jako $\overline{A} = \{x \in P : \rho(x, A) = 0\}$.
- Řekneme, že A je *uzavřená*, pokud je stejná jako její uzávěr, tj. $A = \overline{A}$.
- *Vnitřek* množiny A je množina všech vnitřních bodů množiny A, značíme $\operatorname{int}(A)$, nebo A^0.
- *Hranici* množiny A tvoří množina všech hraničních bodů, značíme $h(A)$ nebo ∂A.
- *Derivaci* množiny A tvoří množina všech hromadných bodů, značíme A'.
- *Adherenci* množiny A tvoří množina všech izolovaných bodů.

Věta 1

Pro $A, B \subseteq P$ platí

a) $\overline{A} = h(A) \cup A^0$,
b) $h(A) = \overline{A} \setminus A^0$,
c) $h(A) = \overline{A} \cap \overline{P \setminus A}$,
d) $(A \cap B)^0 = A^0 \cap B^0$,
e) *A je otevřená právě tehdy, když $A = A^0$.*

Důkaz.

Bod a).

- $x \in \overline{A} \;\Rightarrow\; \rho(x, A) = 0 \;\Rightarrow\; \inf_{a\in A} \rho(x, a) = 0$
  $\Rightarrow\; \exists a_n \in A : \rho(a_n, x) \to 0$
  $\Rightarrow\; \forall \varepsilon > 0 : a_n \in \mathcal{O}(x, \varepsilon)$ pro $n \geq n_0 \;\Rightarrow\; x \in h(A) \vee x \in A^0$
  $\Rightarrow\; x \in h(A) \cup A^0$
- $x \in h(A) \cup A^0 \;\Rightarrow\; (x \in A^0) \vee (x \in h(A)) \;\Rightarrow\; \rho(x, A) = 0 \;\Rightarrow\; x \in \overline{A}$

□

Věta 2

Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $A \subseteq P$. Množina A je uzavřená právě tehdy, když každá konvergentní posloupnost má v A svůj limitní bod, tj.

$$\forall x_n \in A, x_n \xrightarrow{\rho} x \Rightarrow x \in A.$$

Důkaz.

$\Rightarrow$ A je uzavřená, $x_n \in A, x_n \to x$ je lib. $\Rightarrow A = \overline{A}$.
Kdyby $x \notin A \;\Rightarrow\; \rho(x, A) = \varepsilon > 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{O}(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A = \emptyset$ a současně
$x_n \to x \;\Rightarrow\; \rho(x_n, x) = 0, x_n \in A, \rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \to$ spor.

$\Leftarrow$ Kdyby A nebyla uzavřená, pak $A \neq \overline{A} \;\Rightarrow\; \exists a \in \overline{A} \wedge a \notin A \Rightarrow$
$\rho(a, A) = 0, \forall \varepsilon > 0\ \exists a_n : \rho(a_n, a) < \varepsilon, a_n \xrightarrow{\rho} a$, což je spor
s $x_n \to x \Rightarrow x \in A$.
(Našli jsme konvergentní posloupnost $\{a_n\}$, pro kterou to, dosadíme-li ji za $\{x_n\}$, neplatí.)

□

Poznámka

Věta 2 říká, že uzávěr je množina limit konvergentních posloupností.

V diskrétním prostoru (P, ρ_d) je každá množina $A \subset P$ otevřená i uzavřená zároveň (tzv. obojaká množina), neboť $\overline{A} = A, A^0 = A$.

Důkaz druhé části poznámky.

Buď $A \subseteq P$ libovolná.

- $\overline{A}$: co přidat? Všechny body vzdálené od A o nula – to jsou ale jen body té množiny, tedy $\overline{A} = A$.
- $A^0 : \varepsilon = \frac{1}{2}$ (mezi 0 a 1 libovolně), pak každý bod je vnitřním bodem, protože lze najít okolí, které je celé pod tou množinou $\mathcal{O}(a, \frac{1}{2}) = \{a\} \subset A$ pro $a \in A$, tedy $A^0 = A$.

□

Věta 3

Množina $A \subseteq P$ v metrickém prostoru (P, ρ) je uzavřená právě tehdy, když je její doplněk $(P \smallsetminus A)$ otevřená množina.

Důkaz.

$\Rightarrow$ Nechť $A \subseteq P$ je uzavřená, pak $A = \overline{A}$. Nechť $x \in P \smallsetminus A$ je lib. bod, pak $x \in P \smallsetminus \overline{A} \ \Rightarrow\ x \notin \overline{A} \Rightarrow \rho(x, A) = \varepsilon > 0$. Pak $\mathcal{O}(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A = \emptyset \ \Rightarrow\ \mathcal{O}(x, \frac{\varepsilon}{2}) \subset P \smallsetminus A \ \Rightarrow\ x \in (P \smallsetminus A)^0 \ \Rightarrow\ P \smallsetminus A$ je otevřená množina.

$\Leftarrow$ Předpokládáme, že $P \smallsetminus A$ je otevřená množina. Nechť $x \in \overline{A}$. Protože vždy platí $A \subseteq \overline{A}$, stačí ukázat, že $x \in A$.
Sporem předpokládejme, že $x \notin A \Rightarrow x \in P \smallsetminus A$ (otevřená, tedy každý bod je vnitřní)
$\Rightarrow\ \exists \varepsilon > 0 : \mathcal{O}(x, \varepsilon) \subset P \smallsetminus A \ \Rightarrow\ \mathcal{O}(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset \ \Rightarrow\ \rho(x, A) \geq \varepsilon \ \Rightarrow$ $x \notin \overline{A} \ \Rightarrow$ spor $\Rightarrow\ x \in A \ \Rightarrow\ \overline{A} \subseteq A \ \Rightarrow\ A = \overline{A} \ \Rightarrow\ A$ je uzavřená.

□

Poznámka

Pro *konečný* počet množin lze přímo z definice ukázat, že jsou-li A_1, A_2 otevřené (uzavřené), pak $A_1 \cup A_2$ a $A_1 \cap A_2$ jsou opět otevřené (uzavřené) množiny.

Poznámka

Z definice lze dokázat také:

- Je-li $A_i, i \in I$, libovolný systém otevřených množin, pak $\bigcup_{i \in I} A_i$ je otevřená množina.
- Je-li $A_i, i \in I$, libovolný systém uzavřených množin, pak $\bigcap_{i \in I} A_i$ je opět uzavřená množina.

POZOR:

- $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ jsou otevřené, ale $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{0\}$ je uzavřená.
- $A_n = \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$ jsou uzavřené, ale $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = (-1, 1)$ je otevřená.

Definice 8

Řekneme, že poslopnost prvků $x_n \in P$ je *cauchyovská*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $m, n > n_0$ je $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Věta 4

Je-li posloupnost prvků $x_n \in P$ konvergentní, tj. $\exists x \in P : x_n \xrightarrow{\rho} x$, pak je posloupnost x_n cauchyovská.

Důkaz.

Nechť $\varepsilon > 0$ libovolné. Protože $x_n \xrightarrow{\rho} x$, k číslu $\frac{\varepsilon}{2}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ je $\rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Nyní uvažujme $m, n > n_0$ libovolné, pak

$$\rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_m, x) + \rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

tedy $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$. □

Definice 9

Nechť je (P, ρ) metrický prostor a $A \subseteq P$. Pokud na množině A zavedeme metriku jako

$$\sigma(x, y) = \rho(x, y), \qquad \forall x, y \in A,$$

řekneme, že metrický prostor (A, σ) je vnořený do prostoru (P, ρ) a metrika σ je indukována metrikou ρ.

Problém: Nechť je x_n cauchyovská, existuje $x : x_n \xrightarrow{\rho} x$?

- na $\mathbb{R}$ tvrzení platí – viz princip vnořených intervalů, tedy každá cauchyovská posloupnost je konvergentní,
- uvažujme $P = \mathbb{Q}, \rho(p, q) = |p - q|$ indukovaná metrika z $\mathbb{R}$, $x_n = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\} \in \mathbb{Q}$, ale $x_n \to e \notin \mathbb{Q}$.

Definice 10

Nechť (P, ρ) je metrický prostor. Řekneme, že tento prostor je *úplný*, jestliže každá cauchyovská posloupnost $x_n \in P$ má v P svoji limitu.

Příklad 8

- $\mathbb{R}, \rho(p, q) = |p - q|$ je úplný
- $\mathbb{Q}, \rho(x, y) = |x - y|$ není úplný
- $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ není úplný, např. $x_n = \frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{I}$, ale $x_n \to 0 \in \mathbb{Q}$
- Diskrétní metrický prostor (P, ρ_d): $x_n \in P$ je cauchyovská právě tehdy, když je skorostacionární, tedy x_n je konvergentní, tedy každý diskrétní metrický prostor je úplný.
- $P = C[a, b], \rho_C(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$ je úplný
- $P = C[a, b], \rho_I(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$ není úplný

Definice 11

Nechť (P, ρ) je metrický prostor, který není úplný. Řekneme, že prostor (Q, σ) je *úplný obal* metrického prostoru (P, ρ), pokud platí

1. $P \subseteq Q$,
2. $\sigma\big|_{P \times P} = \rho$ (zúžení, restrikce),
3. uzávěr P v metrice σ je Q (přidáme jen to, co je nutné k zúplnění).

Příklad 9

- $P = \mathbb{Q}$, úplným obalem je $\mathbb{R}$ (např. s metrikou $\rho(x, y) = |x - y|$)
- $P = C[a, b]$ s metrikou ρ_I, zúplnění tohoto prostoru se značí $\mathcal{L}(a, b)$ a je to množina všech s kvadrátem integrovatelných funkcí na intervalu (a, b) v Lebesgueově smyslu.

Věta 5

Nechť (P,ρ) je metrický prostor. Pak existuje (v jistém smyslu jediný) metrický prostor (Q,σ), který je úplným obalem metrického prostoru (P,ρ).

Existence v jistém smyslu jediného:

Jsou-li (Q_1,σ_1) a (Q_2,σ_2) dva prostory s uvedenou vlastností, pak existuje zobrazení $f\colon Q_1 \to Q_2$, které je izometrické (zachovává vzdálenost), tj. $\sigma_2(f(x),f(y)) = \sigma_1(x,y)\ \forall x,y\in Q_1$, takové, že jeho zúžením na P je identita.

Důkaz.

Nástin ve skriptech. □

Věta 6

Nechť (P,ρ) je úplný metrický prostor, $A\subseteq P$ je uzavřená podmnožina v P, pak (A,ρ) je také úplný metrický prostor.

Důkaz.

Přímo z definice. Nechť $x_n\in A$ je libovolná cauchyovská posloupnost, pak je x_n cauchyovská i v (P,ρ), tedy (úplnost P) existuje x takové, že $x_n \xrightarrow{\rho} x$, a tedy (uzavřenost A) $x\in A$, tudíž (A,ρ) je úplný metrický prostor. □

Příklad 10

$A=[a,b]\subseteq\mathbb{R}$

Definice 12

Řekneme, že množina A je *hustá* v P, jestliže je její uzávěr roven P, tj.

$$\overline{A}=P.$$

Příklad 11

$(P,\rho)=\mathbb{R}$ s obvyklou metrikou, $A=\mathbb{Q}$, pak $\overline{A}=\mathbb{R}$.

Věta 7

Množina A je hustá v metrickém prostoru (P,ρ) právě tehdy, když ke každému prvku $x\in P$ a ke každému $\varepsilon>0$ existuje $a\in A : \rho(x,a)<\varepsilon$.

Důkaz.

- $\Rightarrow$ Předpokládejme $\overline{A}=P$ a nechť $x\in P$ a $\varepsilon>0$ jsou libovolná. Sporem předpokládáme, že neexistuje prvek $a\in A:\rho(x,a)<\varepsilon$. Protože $x\in P=\overline{A}\Rightarrow\rho(x,A)=0\ \Rightarrow\ \forall\varepsilon>0\ \exists a\in A:\rho(x,a)<\varepsilon$, což je spor, tedy prvek a s vlastností $\rho(x,a)<\varepsilon$ existuje.
- $\Leftarrow$ Předpokládejme, že ke každému $x\in P$ a každému $\varepsilon>0$ existuje $a\in A:\rho(x,a)<\varepsilon$, chceme dokázat, že $\overline{A}=P$. Sporem předpokládáme, že $\overline{A}\neq P$, tedy $\exists x\in P\setminus\overline{A}\ \Rightarrow\ x\notin\overline{A}\ \Rightarrow\ \rho(x,A)=\varepsilon>0\ \Rightarrow\ \mathcal{O}(x,\frac{\varepsilon}{2})\cap A=\emptyset$, pro $\frac{\varepsilon}{2}>0$ neexistuje prvek $a\in A$ takový, že $\rho(x,a)\le\frac{\varepsilon}{2}\to$ spor.

□

Příklad 12

$C[a,b], \rho_C(f,g) = \max_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$, A je množina polynomů libovolného stupně, pak $A \subset P$. Pokud $\overline{A} = C[a,b] \Rightarrow \forall f \in C[a,b]\ \exists P_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 : \rho_C(f,P_n) < \varepsilon$. Lze dokázat, že opravdu $\overline{A} = C[a,b]$, tj. spojité funkce na intervalu $[a,b]$ můžeme s libovolnou přesností aproximovat polynomy.

Definice 13

Nechť (P,ρ) je metrický prostor a $A \subseteq P$. Řekneme, že množina A je *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti x_n prvků z A lze vybrat podposloupnost, která má limitu v A, tj. $\exists x_{n_k} \xrightarrow{\rho} x \in A$.

Příklad 13

$(P,\rho) = (\mathbb{R},\rho_2), A = [a,b]$

$x_n \in [a,b] \Rightarrow x_n$ je ohraničená a dle Bolzanovy–Weierstrassovy věty existuje $x_{n_k} \to x \in \mathbb{R}$, $[a,b]$ je uzavřená množina v $\mathbb{R}$, tedy obsahuje všechny limity všech konvergentních posloupností prvků z $[a,b]$, tedy i limita podposloupnosti x_{n_k} je v $[a,b]$.

Definice 14

Nechť (P,ρ) je metrický prostor, $A \subseteq P$. Řekneme, že množina A je *omezená (ohraničená)*, jestliže $\operatorname{diam}(A) = \sup_{a,b\in A} \rho(a,b) < \infty$, kde $\operatorname{diam}(A)$ se nazývá průměr množiny A.

Věta 8

Nechť A je kompaktní množina v metrickém prostoru (P,ρ), pak A je uzavřená a ohraničená.

Důkaz.

Sporem předpokládáme, že A není ohraničená. Nechť $x_1 \in A$ je lib., $\exists x_2 \in A : \rho(x_1,x_2) \geq 1$ (kdyby neexistovalo, pak by $A \subset \mathcal{O}(x_1,1)$). Dále indukcí, $x_1,\dots,x_n \in A$ jsou takové, že $\rho(x_i,x_j) \geq 1, i \neq j, i,j = 1,\dots,n$ a nechť $x_{n+1} \in A$ je takové, že $\rho(x_{n+1},x_i) \geq 1, i = 1,\dots,n$. Kdyby takový prvek neexistoval, $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}(x_i,1)$, A je omezená $\to$ spor, tedy x_{n+1} s výše uvedenou vlastností existuje. Výsledkem konstrukce je posloupnost $x_n \in A : \rho(x_i,x_j) \geq 1, \forall i,j \in \mathbb{N}, i \neq j$. Z této posloupnosti nelze vybrat konvergentní podposloupnost, což vede ke sporu, a tedy kompaktní množina je ohraničená.

Sporem předpokládáme, že A není uzavřená, tj. $A \neq \overline{A}$, tedy $\exists x : x \in \overline{A} \wedge x \notin A$. Protože $x \in \overline{A}$, tj. $\rho(x,A) = 0 = \inf_{a\in A} \rho(x,a)$, tzn. existuje posloupnost $x_n \in A : x_n \xrightarrow{\rho} x$, pro libovolnou podposloupnost $x_{n_k} \xrightarrow{\rho} x \notin A$, spor s kompaktností A. □

Příklad 14 (Kompaktní množina v diskrétním metrickém prostoru)

Uvažujme prostor (P, ρ_d), kde P je libovolná množina. Nechť je $A \subseteq P$ libovolná, pak je A uzavřená a $\operatorname{diam}(A) = \sup_{a,b \in A} \rho_d(a, b) = 1$, tzn. A je omezená. Pokud $A \subseteq P$ má nekonečně mnoho prvků, tj. existuje posloupnost

$$x_n \in A : x_i \neq x_j, i \neq j, i, j \in \mathbb{N},$$

pak A není kompaktní. Pokud má konečně mnoho prvků, pak je A kompaktní.

Příklad 15

Uvažujme množinu $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$ v pampeliškovém prostoru (pod $\mathbb{R}^2$). Tato množina je uzavřená a omezená ($\operatorname{diam}(A) = 2$), ale není kompaktní, vzdálenost dvou libovolných prvků je 2, nelze vybrat konvergentní podposloupnost.

Věta 9

Nechť $A \subseteq \mathbb{R}$ je uzavřená a ohraničená, pak A je kompaktní v $\mathbb{R}$.

Důkaz.

Nechť $x_n \in A$ je libovolná, pak x_n je ohraničená a z Bolzanovy–Weierstrassovy věty plyne, že $\exists x_{n_k} \in A \to x \in A$, neboť A je uzavřená, a tedy obsahuje limity všech konvergentních posloupností svých prvků (věta 2). □

Věta 10

Nechť A je podmnožina v $\mathbb{E}^n$, pak je kompaktní právě tehdy, když je uzavřená a ohraničená.

Věta 11

Nechť (P, ρ) je metrický prostor. Uvažujme $Q = P^n = P \times \cdots \times P$. Na Q definujeme metriku $\sigma_p, p \geq 1$, následujícím způsobem. Pro

$$[x_1, \ldots, x_n], [y_1, \ldots, y_n] \in Q$$

je vzdálenost

$$\sigma_p([x_1, \ldots, x_n], [y_1, \ldots, y_n]) = \left[\sum_{k=1}^{n} (\rho(x_k, y_k))^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Je-li $A \subseteq P$ kompaktní množina v P, pak $A^n = A \times \cdots \times A$ je kompaktní množina v (Q, σ_p).

Důkaz.

Důkaz provedeme pro $(P, \rho) = \mathbb{R}$ a $p = 2$, tj.

$$\sigma_2([x_1, \ldots, x_n], [y_1, \ldots, y_n]) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}.$$

Nechť $X^m = [x_1^m, \ldots, x_n^m] \in A^n$ je libovolná posloupnost. Posloupnost X^m obsahuje konvergentní podposloupnost s limitou opět v A^n, tzn. A^n je kompaktní. □

Důsledek 1

Kartézský součin konečného počtu kompaktních množin je kompaktní množina. Odtud – libovolná uzavřená a ohraničená množina $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktní. Tedy $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktní právě tehdy, když je uzavřená a ohraničená.

Příklad 16

$$\ell^2 = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 < \infty \right\},$$

$$x = \{x_n\}, y = \{y_n\}, \qquad \rho_2(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2},$$

ℓ^2 lze chápat jako kartézský součin spočetně mnoha $\mathbb{R}$, tj. $\mathbb{R}^{\aleph_0}$.
Nechť $A = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, kde $e_n = \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots\}$, jednička je na n-tém místě, A je uzavřená a omezená, ale není kompaktní, protože vzdálenost $\rho_2(e_n, e_m) = \sqrt{2}$ pro $n \neq m$, tedy nelze z ní vybrat konvergentní podposloupnost. Dále např. pro $B = [0,1]$, $A \subseteq B^{\aleph_0}$ není kompaktní.

Poznámka

Izometrické zobrazení znamená

$$\sigma(f(x), f(y)) = \rho(x,y), f\colon (P,\rho) \to (Q,\sigma).$$

Už známe zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, což je funkce jedné reálné proměnné, počítali jsme se sčítáním a násobením a jinými operacemi, ale metrické prostory jsou „holé“ množiny se vzdáleností. Můžeme ale snadno „přenést“ spojitost funkce. Funkce je spojitá v x_0, pokud $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, tj.

$$\forall \mathcal{O}(f(x_0),\varepsilon) \quad \exists \mathcal{O}(x_0,\delta), \quad \forall x \in \mathcal{O}(x_0,\delta): \quad f(x) \in \mathcal{O}(f(x_0),\varepsilon).$$

Definice 15

Nechť $(P,\rho), (Q,\sigma)$ jsou metrické prostory a $f\colon P \to Q$.

- Řekneme, že zobrazení f je *spojité* v bodě $x_0 \in P$, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(f(x_0))$ existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že $\forall x \in \mathcal{O}(x_0)$ je $f(x) \in \mathcal{O}(f(x_0))$.
- Řekneme, že zobrazení f je *spojité* na P, je-li spojité v každém bodě P.

Věta 12

Nechť $(P,\rho),(Q,\sigma)$ jsou metrické prostory. Zobrazení $f\colon (P,\rho)\to(Q,\sigma)$ je spojité v bodě $x_0\in P$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$ platí, že posloupnost $f(x_n)\xrightarrow{\sigma} f(x_0)$.

Poznámka

Tato věta je často uváděna jako definice spojitosti zobrazení (díky ekvivalenci).

Důkaz.

$\Rightarrow$ Předpokládejme, že f je spojité v x_0. Nechť x_n je libovolná posloupnost $x_n\xrightarrow{\rho} x_0$. Chceme dokázat, že

$$f(x_n)\xrightarrow{\sigma} f(x_0)\Leftrightarrow \sigma\left(f(x_n),f(x_0)\right)\to 0\Leftrightarrow$$
$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n\geq n_0, \sigma\left(f(x_n),f(x_0)\right)<\varepsilon.$$

Nechť $\varepsilon>0$ je lib. K $\mathcal{O}(f(x_0),\varepsilon)$ dle definice spojitosti existuje $\mathcal{O}(x_0,\delta)$ takové, že $x\in\mathcal{O}(x_0,\delta)\ \Rightarrow\ f(x)\in\mathcal{O}(f(x_0),\varepsilon)$. Protože $x_n\xrightarrow{\rho} x_0$, tj. k číslu $\delta>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n\geq n_0$ je $\rho(x_n,x_0)<\delta\ \Rightarrow\ x_n\in\mathcal{O}(x_0,\delta)$. Tedy pro $n\geq n_0$ je $x_n\in\mathcal{O}(x_0,\delta)$, a tedy $f(x_n)\in\mathcal{O}(f(x_0),\varepsilon)$, tzn. $\sigma(f(x_n),f(x_0))<\varepsilon$.

$\Leftarrow$ Sporem, stejně jako v případě funkcí jedné proměnné.

□

Příklad 17

Uvažujme (P,ρ_C), kde $P=C[a,b]$, a $F\colon C[a,b]\to\mathbb{R}$.

a) $f\in C[a,b]\Rightarrow F(f)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ (dosazení)

b) $f\in C[a,b]\Rightarrow F(f)=\int_a^b f(x)\,dx$ (integrál)

Ukažme, že jsou obě tato zobrazení spojitá na $C[a,b]$.

a) Nechť $f\in C[a,b]$ a $f_n\xrightarrow{\rho_C} f$ je libovolná posloupnost. Dokazujeme, že

$$F(f_n)\xrightarrow{\rho_{\mathbb{R}}} F(f),\quad f_n\left(\frac{a+b}{2}\right)\xrightarrow{\rho_{\mathbb{R}}} f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

tedy

$$\left|f_n\left(\frac{a+b}{2}\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\xrightarrow{n\to\infty}0.$$

Pro ρ_C platí

$$\max_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|\to 0.$$

Protože maximum jde do nuly, pak

$$\left|f_n\left(\frac{a+b}{2}\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\to 0.$$

Tzn., že F je spojité v $f\in C[a,b]$ a jelikož f bylo libovolné, pak F je spojité na celém $C[a,b]$.

b) Postupujeme podobně, tedy
$$\max_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$
Chceme dokázat, že $|F(f_n)-F(f)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, tj.
$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$
Nechť $\varepsilon>0$. Jelikož $\rho_C(f_n,f)\to 0$, pak k číslu $\frac{\varepsilon}{b-a}>0$ existuje n_0 :
$$\forall n\geq n_0\ \rho_C(f_n,f)<\frac{\varepsilon}{b-a} \Leftrightarrow \max_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$
$$\Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a},\ \forall x\in[a,b],$$
$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int_a^b f_n(x)-f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$
$$\leq\int_a^b|f_n(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x<\int_a^b\frac{\varepsilon}{b-a}\,\mathrm{d}x=\varepsilon \text{ (pro } n\geq n_0).$$

Příklad 18

Charakterizujte spojité zobrazení mezi prostory $P=\mathbb{R}$ s obvyklou (ρ) a diskrétní (ρ_d) metrikou.

a) $f\colon(\mathbb{R},\rho_d)\to(\mathbb{R},\rho)$
$x_n \xrightarrow{\rho_d} x_0 \ \Rightarrow\ |f(x_n)-f(x_0)|\to 0\ \forall x_0\in\mathbb{R}$, každé zobrazení je spojité. Posloupnost v $(\mathbb{R},\rho_d)$ je skorostacionární, tj. od jistého indexu je pořád x_0, tedy od tohoto indexu je $|f(x_n)-f(x_0)|=0$.

b) $f\colon(\mathbb{R},\rho)\to(\mathbb{R},\rho_d)$
spojitost je ekvivalentní tomu, že $x_n \xrightarrow{\rho} x_0 \ \Rightarrow\ f(x_n) \xrightarrow{\rho_d} f(x_0)$, což lze pouze pokud je posloupnost $\{f(x_n)\}$ skorostacionární, tj. $\exists n_0:\ f(x_n)=f(x_{n+1})\ \forall n\geq n_0$. Protože posloupnost $\{x_n\}$ je libovolná (konv. k x_0), musí být zobrazení f konstantní.
Tedy f je spojité právě tehdy, když je konstantní ($\exists c\in\mathbb{R}:\ f(x)\equiv c\ \forall x\in\mathbb{R}$).

Definice 16

Nechť $(P,\rho),(Q,\sigma)$ jsou metrické prostory. Řekneme, že zobrazení $f\colon P\to Q$ je *kontraktivní* (kontrakce), jestliže existuje $k\in[0,1)$ s vlastností
$$\sigma(f(x),f(y))\leq k\cdot\rho(x,y)\qquad\forall x,y\in P.$$

Poznámka

- Zobrazení f splňující
$$\sigma(f(x),f(y))\leq\rho(x,y)$$
se nazývá *neexpanzivní*.
- Pokud existuje konstanta $k\geq 0$, pak zobrazení f nazýváme *lipschitzovské* (a konstantu k, obvykle značenou L, *Lipschitzova konstanta*).

Příklad 19

Stejnolehlost v rovině s koeficientem stejnolehlosti k.

Poznámka

Je-li zobrazení f kontrakce, pak je spojité, neboť
$$\rho(x_n,x_0)\to 0\ \Rightarrow\ \sigma(f(x_n),f(x_0))\to 0.$$

Poznámka

Je-li zobrazení f kontrakce, pak rovnice typu $x=f(x)$ lze řešit nejen graficky či náhradou funkce Taylorovým polynomem, ale také pomocí následující věty...

Věta 13 (Banachova věta o pevném bodě)

Nechť (P, ρ) je úplný metrický prostor a $f\colon P \to P$ je kontrakce. Pak existuje právě jeden bod $x_0 \in P$ s vlastností

$$f(x_0) = x_0.$$

Bod x_0 se nazývá pevný bod zobrazení f.

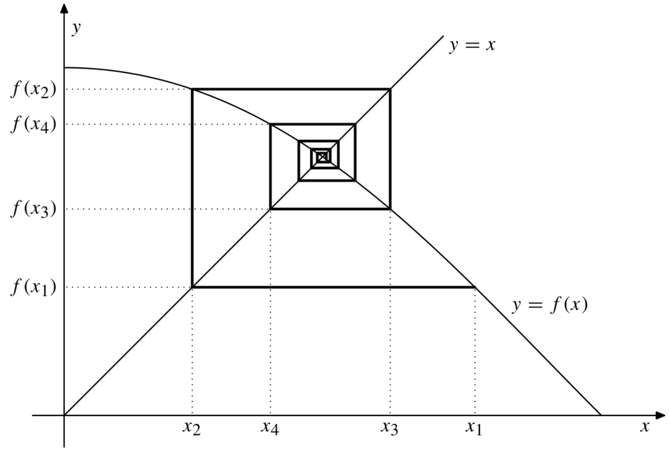
Poznámka

Tento bod najdeme jako limitu postupných aproximací.

Nechť je $x_1 \in P$ libovolný a definujeme $x_{n+1} = f(x_n)$, pak platí $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$, kde x_0 je pevný bod.

Příklad 20

Uvažujme např. rovnici $x = \cos x$, potom lze postupovat iteracemi jak je zobrazeno na obrázku.



Obrázek ze skript Z. Došlá, O. Došlý: Metrické prostory, MU Brno 2006

Důkaz.

1. Nechť $x_1 \in P$ libovolný a $x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N}$. Pak lze ukázat, že posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská (plyne z faktu, že zobrazení f je kontrakce).
2. (P, ρ) je úplný, pak existuje $x_0 \in P : x_n \xrightarrow{\rho} x_0$ (každá cauchyovská posloupnost má limitu, tedy i ta, kterou jsme vytvořili).
3. Dokážeme, že x_0 je pevný bod zobrazení f. Sporem předpokládáme, že $\rho(x_0, f(x_0)) = \varepsilon > 0$, což nelze, protože $x_n \to x_0$. Přesněji
$$0 \le \rho(x_0, f(x_0)) \le \underbrace{\rho(x_0, x_{n+1})}_{\to 0} + \underbrace{\rho(x_{n+1}, f(x_0))}_{\rho(f(x_n), f(x_0)) \le q \cdot \underbrace{\rho(x_n, x_0)}_{\to 0}} \to 0.$$
4. Kdyby $x_0, \overline{x}$ byly dva různé pevné body, tj. $\rho(x_0, \overline{x}) > 0$, dostáváme spor z kontraktivity zobrazení f, neboť $k \in [0, 1)$ a tedy
$$\rho(x_0, \overline{x}) = \rho(f(x_0), f(\overline{x})) \le k \cdot \rho(x_0, \overline{x}) < \rho(x_0, \overline{x}).$$

□

Příklad 21

Řešme počáteční úlohu

$$y' + 2xy = 0, \qquad y(0) = 1.$$

Rovnici přepíšeme na $y' = -2xy$, integrujeme na intervalu $[0, x]$ a použijeme počáteční podmínku, čímž dostaneme

$$y(x) - y(0) = y(x) - 1 = -2 \int_0^x t\, y(t)\, \mathrm{d}t.$$

Hledáme tedy pevný bod zobrazení

$$y \xrightarrow{F} 1 - 2 \int_0^x t\, y(t)\, \mathrm{d}t,$$

které zobrazuje spojitou funkci y na spojitou funkci (integrál jako funkce horní meze je spojitá funkce) na jistém intervalu $[-\delta, \delta], \delta > 0$. Uvažujeme tedy zobrazení $F : P \to P$, kde $(P, \rho) = (C[-\delta, \delta], \rho_C)$ je úplný metrický prostor (ρ_C je metrika stejnoměrné konvergence).

Ověříme, že $F(y) = 1 - 2\int_0^x t\,y(t)\,\mathrm{d}t$ je kontrakce. Nechť $y, z \in C([-\delta, \delta])$, potom

$$\begin{aligned}
\rho_C(F(y), F(z)) &= \max_{x\in[-\delta,\delta]} |F(y(x)) - F(z(x))| \\
&= \max_{x\in[-\delta,\delta]} \left|1 - 2\int_0^x t\,y(t)\,\mathrm{d}t - 1 + 2\int_0^x t\,z(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\le 2 \max_{x\in[-\delta,\delta]} \left|\int_0^x t\,[z(t) - y(t)]\,\mathrm{d}t\right| \\
&\le 2 \max_{x\in[-\delta,\delta]} |z(x) - y(x)| \int_0^\delta t\,\mathrm{d}t = 2 \max_{x\in[-\delta,\delta]} |y(x) - z(x)|\,\frac{\delta^2}{2} \\
&= \delta^2 \max_{x\in[-\delta,\delta]} |y(x) - z(x)| = \delta^2 \cdot \rho_C(y, z)
\end{aligned}$$

a jedná se o kontrakci kdykoli $\delta < 1$, tj. $[-\delta, \delta] \subset (-1, 1)$.

K řešení tedy lze použít Banachovu větu (postupné aproximace). Zvolme $y_0 \equiv 1$, pak

$$\begin{aligned}
y_1 &= 1 - 2\int_0^x t\,y_0(t)\,\mathrm{d}t = 1 - 2\int_0^x t\,\mathrm{d}t = 1 - x^2, \\
y_2 &= 1 - 2\int_0^x t\,y_1(t)\,\mathrm{d}t = 1 - 2\int_0^x t - t^3\,\mathrm{d}t = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}, \\
y_3 &= 1 - 2\int_0^x t\,y_2(t)\,\mathrm{d}t = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6}, \\
&\vdots \\
y_n &= 1 - 2\int_0^x t\,y_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \dots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}.
\end{aligned}$$

Jedná se o Maclaurinův polynom řádu n funkce $y = \mathrm{e}^{-x^2}$, která je hledaným řešením zadaného problému (dosazením snadno ověříme, že jde skutečně o řešení $\forall x \in \mathbb{R}$).

Důsledek 2

Nechť funkce g zobrazuje interval $[a, b]$ do sebe a nechť má na tomto intervalu derivaci. Jestliže existuje číslo $\alpha \in [0, 1)$ tak, že

$$|g'(x)| \le \alpha \quad \forall x \in [a, b],$$

pak v intervalu $[a, b]$ existuje pevný bod ξ funkce $g(\cdot)$ a posloupnost postupných aproximací k němu konverguje pro libovolnou počáteční aproximaci $x_0 \in [a, b]$.

Poznámka

Použitím konceptu stejnoměrné konvergence v teorii nekonečných řad funkcí lze snadno dokázat, že

$$\mathrm{e}^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Poznámka

Weierstrassovy věty říkaly, že pro $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je $f([a,b])$ opět uzavřená a ohraničená množina („spojitý obraz spojitého je spojitý“).

Věta 14

Nechť $(P,\rho),(Q,\sigma)$ jsou metrické prostory, $f\colon P \to Q$ je spojité zobrazení a $A \subseteq P$ je kompaktní. Pak její obraz $f(A) \subseteq Q$ je kompaktní množina v Q.

Důkaz.

Uvažme posloupnost $\{y_n\}$ v $f(A)$, y_n má svůj vzor x_n v A, existuje $x_{n_k} \to x_0$, posloupnost $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x_0) = y_0 \in f(A)$. Našli jsme konvergentní podposloupnost (která díky spojitosti zůstala zachována). □