Limita posloupnosti a funkce

Petr Hasil

Přednáška z Matematické analýzy

Obsah

Definice 1 (Rozšířená množina reálných čísel)

Rozšířenou množinou reálných čísel $\mathbb{R}^*$ rozumíme množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ rozšířenou o body $-\infty$ a $+\infty$, tj

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Body $\pm\infty$ nazýváme nevlastní body, zatímco body množiny $\mathbb{R}$ nazýváme vlastní body.

Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme:

- $a + \infty = \infty$,
- $a - \infty = -\infty$,
- $\infty + \infty = \infty$,
- $-\infty - \infty = -\infty$,
- $\infty \cdot \infty = \infty$,
- $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$,
- $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$,
- $|\pm\infty| = \infty$,
- $\frac{a}{\pm\infty} = 0$.

- Je-li $a > 0$, pak $a \cdot \infty = \infty, a \cdot (-\infty) = -\infty$.
- Je-li $a < 0$, pak $a \cdot \infty = -\infty, a \cdot (-\infty) = \infty$.

Poznámka

Nejsou definovány výrazy

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0 \cdot \infty,\ \infty - \infty,\ 0^0, 1^\infty,\ \infty^0.$$

Tyto výrazy nazýváme *neurčité výrazy*.

Samozřejmě není definováno dělení nulou.

Definice 2

Posloupnost reálných čísel je zobrazení, jehož definičním oborem je množina $\mathbb{N}$ a oborem hodnot podmnožina $\mathbb{R}$, tj. $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, většinou místo $a(n)$ píšeme a_n.

Příklad 1

- $a_n = \frac{1}{n} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n =$ „vzorec pro a_n"
- $a_n = n \sin(n\frac{\pi}{2}) \to \{1, 0, -3, 0, 5, 0, -7, \dots\}$
- $a_n = \{1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

Definice 3 (Limita posloupnosti)

Řekneme, že posloupnost a_n *konverguje* k číslu $a \in \mathbb{R}$, píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, jestliže

$$\text{ke } \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\text{: pro } \forall n \geq n_0 \text{ platí } |a_n - a| < \varepsilon,$$

tj. $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Řekneme, že posloupnost a_n *diverguje* k $+\infty(-\infty)$, píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty(-\infty)$, jestliže

$$\text{ke } \forall A \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ takové, že pro } \forall n \geq n_0 \text{ je } a_n > A\ (a_n < A).$$

Jestliže posloupnost nekonverguje ani nediverguje, řekneme, že osciluje.

Definice 4 (Okolí bodu)

Libovolný otevřený interval $I \subseteq \mathbb{R}$ obsahující bod $x_0 \in \mathbb{R}$ nazýváme *okolí bodu* x_0 a značíme jej $\mathcal{O}(x_0)$.

Definice 5 (Okolí $\pm\infty$)

Nechť $A \in \mathbb{R}$ je libovolné. Interval (A, ∞), resp. $(-\infty, A)$, nazýváme okolí $+\infty$, resp. $-\infty$.

Poznámka

(i) Průnik dvou okolí bodu x_0 je opět okolím bodu x_0.

(ii) Pro dva body $x_1 \neq x_2$ existují jejich okolí tak, že $\mathcal{O}(x_1) \cap \mathcal{O}(x_2) = \emptyset$.

Speciální typy okolí bodu

- δ-okolí bodu x_0

$$\mathcal{O}_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

- Prstencové (ryzí) δ-okolí bodu x_0

$$\mathcal{P}_\delta(x_0) = \mathcal{O}_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta).$$

- Levé a pravé δ-okolí bodu x_0

$$\mathcal{O}_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0], \qquad \mathcal{O}_\delta^+(x_0) = [x_0, x_0 + \delta).$$

- Levé a pravé prstencové δ-okolí bodu x_0

$$\mathcal{P}_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0), \qquad \mathcal{P}_\delta^+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta).$$

Definice limity posloupnosti pomocí okolí bodu

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}^*\colon \forall \mathcal{O}(a)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\colon a_n \in \mathcal{O}(a).$$

Příklad 2

Limita posloupnosti $a_n = (-1)^{n-1}$ neexistuje.

Definice 6

- Řekneme, že posloupnost je a_n je *shora (zdola) ohraničená*, jestliže existuje $M \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n \leq M$ ($a_n \geq M$) pro každé $n \in \mathbb{N}$.
- Posloupnost a_n je *ohraničená*, pokud je ohraničená shora i zdola.
- Řekneme, že a_n je *rostoucí (neklesající, nerostoucí, klesající)*, jestliže $a_{n+1} > a_n$ ($a_{n+1} \geq a_n$, $a_{n+1} \leq a_n$, $a_{n+1} < a_n$) pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

Příklad 3

Dokažte, že posloupnost $a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, je klesající a že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

$n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad n < n+1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 1. \qquad \checkmark$

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Hledáme $n_0 :\ n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$, tj.

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Označíme $n_0 := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \ (> \frac{1}{\varepsilon})$.

$$n \geq n_0 > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \checkmark$$

Věta 1

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Důkaz.

Sporem předpokládejme, že

$$\exists a, b \in \mathbb{R}^*, a \neq b : a_n \to a \text{ a současně } a_n \to b.$$

Pro $\forall \mathcal{O}(a)$ $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_1$: $a_n \in \mathcal{O}(a)$ a současně $\forall \mathcal{O}(b)$ $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_2$: $a_n \in \mathcal{O}(b)$. Označme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, pak pro $n \geq n_0$: $a_n \in \mathcal{O}(a) \cap \mathcal{O}(b) \quad \to \quad$ spor pokud $\mathcal{O}(a) \cap \mathcal{O}(b) = \emptyset$.

Uvažujme $\varepsilon < \frac{|a-b|}{2}$, potom $\mathcal{O}_\varepsilon(a) \cap \mathcal{O}_\varepsilon(b) = \emptyset$. □

Věta 2

Nechť a_n *je konvergentní posloupnost, tj.* $\lim a_n = a$, $a \in \mathbb{R}$. *Pak* a_n *je ohraničená posloupnost.*

Věta 3

Nechť $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$, $a, b \in \mathbb{R}$. *Pak platí*

(1) $\lim(a_n \pm b_n) = a \pm b$,

(2) $\lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,

(3) *je-li* $b \neq 0$, $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$,

(4) $\lim |a_n| = |a|$.

Důkaz bodu (2).

Potřebujeme dokázat, že pro $\forall \varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$:

$$|a_n b_n - ab| < \varepsilon.$$

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| &\leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\ &= \underbrace{|a_n|}_{\leq M} \underbrace{|b_n - b|}_{< \frac{\varepsilon}{2M}} + |b| \underbrace{|a_n - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2|b|}} \end{aligned}$$

(Existence M plyne z ohraničenosti a_n, tj. $|a_n| < M, \forall n \in \mathbb{N}$.)
Pro libovolné $\varepsilon > 0$ zvolíme n_1, n_2 tak, že $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}$ pro $n \geq n_1$ a $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|b|}$ pro $n \geq n_2$. Označíme $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$, potom

$$\forall n \geq n_0 : |a_n b_n - ab| < M \frac{\varepsilon}{2M} + |b| \frac{\varepsilon}{2|b|} = \varepsilon.$$

(Kdyby $b = 0$, pak jím nedělíme, ale celý člen je roven nule a stačí $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{M}$

Věta 4

Nechť posloupnost a_n je neklesající (nerostoucí) a shora (zdola) ohraničená. Pak posloupnost a_n je konvergentní, tj. existuje $a \in \mathbb{R}$: $a_n \to a$, přičemž $a = \sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ $(a = \inf\{a_n, n \in \mathbb{N}\})$.

Důkaz.

Nechť posloupnost a_n je neklesající a shora ohraničená. Ohraničenost shora $\Rightarrow \exists A : a_n \leq A$, tedy existuje supremum. Označme jej a.
Potom $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$: $a_{n_0} > a - \varepsilon$. Kdyby to neplatilo, pak by a nebylo $\sup\{a_n\}$. Posloupnost je neklesající, tedy
$a_n \geq a_{n_0} > a - \varepsilon, \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \lim a_n = a.$ □

Poznámka (Bernoulliova nerovnost)

Pro $\forall x \in \mathbb{R}, x > -1$ a $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Pro $x \neq 0, n > 1$ platí nerovnost ostře.

(Důkaz matematickou indukcí.)

Příklad 4

Posloupnosti $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ a $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ jsou konvergentní a mají stejnou limitu.

Nejprve ukážeme, že $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ je rostoucí.

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{n}{n-1}\left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)^n = \frac{n}{n-1}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n$$
$$= \frac{n}{n-1}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n > \frac{n}{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n-1}\,\frac{n-1}{n} = 1$$

$\Rightarrow a_n > a_{n-1}, \forall n > 1$ (použita „ostrá“ varianta Bernoulliovy nerovnosti), tedy posloupnost je rostoucí.

Podobně ukážeme, že posloupnost b_n je klesající.

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} = \cdots > \cdots = 1$$

$\Rightarrow b_{n-1} > b_n, \forall n > 1$, tedy posloupnost je klesající.
Nyní stačí uvážit

$$b_n = \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \tfrac{1}{n}\right) a_n > a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

tj. $a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1, \forall n \in \mathbb{N}$. Tím jsme potvrdili tvrzení o ohraničenosti posloupností a_n (shora) a b_n (zdola).
Obě posloupnosti jsou konvergentní a mají stejnou limitu, tj.

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \tfrac{1}{n}\right) a_n\right] = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Definice 7

Limitu $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ nazýváme *Eulerovo číslo* a značíme e.

Definice 8

Řekneme, že $a \in \mathbb{R}^*$ je *hromadný bod* posloupnosti a_n, jestliže v každém okolí $\mathcal{O}(a)$ existuje nekonečně mnoho indexů $n \in \mathbb{N}$ takových, že $a_n \in \mathcal{O}(a)$. Množinu všech hromadných bodů posloupnosti a_n budeme značit $H(a_n)$.

Příklad 5

- $a_n = (-1)^{n-1} = \{1, -1, 1, -1, \dots\}$; $\qquad H(a_n) = \{-1, 1\}$
- $a_n = (-1)^{n-1} + \frac{1}{n}$; $\qquad H(a_n) = \{-1, 1\}$
- $\lim a_n = a$, $a \in \mathbb{R}^*$; $\qquad H(a_n) = \{a\}$
- $a_n = \{1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \dots\}$; $\qquad H(a_n) = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

Definice 9

Nechť $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \cdots$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost a_{n_k} se nazývá *vybraná podposloupnost* posloupnosti a_n.

Věta 5

Nechť $a_n \to a$, $a \in \mathbb{R}^*$, pak pro každou vybranou podposloupnost posloupnosti a_n platí, že $a_{n_k} \to a$ pro $k \to \infty$.

Důkaz.

Vybíráme, ale nepřehazujeme, tj.

$$a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon), n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad a_{n_k} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon), n_k \geq n_0.$$

$\square$

Věta 6

Číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadným bodem posloupnosti a_n právě tehdy, když existuje vybraná podposloupnost a_{n_k} posloupnosti a_n taková, že $a_{n_k} \to a$ pro $k \to \infty$.

Důkaz.

($\Rightarrow$) Hromadný bod $\Rightarrow$ nekonečně mnoho bodů posloupnosti v jeho libovolném okolí $\Rightarrow$ pro $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$ $\exists a_{n_k} : |a_{n_k} - a| < \frac{1}{2^k}$.

($\Leftarrow$) Z definice limity a hromadného bodu.

$\square$

Věta 7 (Princip vnořených intervalů)

Nechť $I_n = [a_n, b_n]$ je posloupnost uzavřených intervalů na množině $\mathbb{R}$ s vlastností, že intervaly jsou do sebe vnořeny ($I_{n+1} \subset I_n$) a $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Pak existuje právě jedno $c \in \mathbb{R}$ s vlastností $c \in I_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, přičemž platí $\{c\} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$.

Důkaz.

Posloupnost dolních krajních bodů a_n je neklesající a posloupnost horních krajních bodů b_n je nerostoucí (plyne z $I_{n+1} \subset I_n$), navíc posloupnost a_n (b_n) je shora (zdola) omezená. Podle věty 4 existují limity $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. Pak platí $a = b$. (Určitě platí $a \leq b$, neboť $a_n \leq b_n$ a kdyby $a < b \to$ spor s $\lim(a_n - b_n) = 0 \Leftrightarrow \lim a_n = \lim b_n$.) Tedy hledané číslo $c = a = b$, neboť $a_n \leq a = c = b \leq b_n \Rightarrow c \in I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tedy leží v průniku $c \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Kdyby existovala $c_1, c_2 \in \bigcap I_n$ a $c_2 > c_1 \to$ spor s $b_n - a_n \to 0$, neboť by pak $[c_1, c_2] \subseteq \bigcap I_n$. □

Věta 8 (Bolzano-Weierstrass)

Z každé ohraničené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Důkaz.

Důkaz je založen na metodě půlení intervalů.Nechť a_n je ohraničená posloupnost, pak existuje $M \geq 0$: $|a_n| \leq M\ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a_n \in [-M, M]$
Aspoň jeden z intervalů $[-M, 0]$, $[0, M]$ obsahuje nekonečně mnoho prvků a_n.Předpokládejme, že to je $[0, M] \to [0, M/2]$ a $[M/2, M]$, jeden z nich obsahuje nekonečně mnoho členů a_n ... Metodou půlení intervalů obdržíme posloupnost vnořených intervalů I_n, z nichž každý obsahuje nekonečně mnoho prvků posloupnosti a_n a pro délku intervalu $I_n : d(I_n) \to 0$ existuje podle věty 7 právě jedno $a \in \bigcap I_n$, tak, že každý interval I_k, $k \in \mathbb{N}$, obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti a_n.Vždy vybereme jeden z těchto prvků a označíme jej a_{n_k} tak, aby posloupnost n_k byla rostoucí, tj. a_{n_k} je vybraná podposloupnost z a_n, $a_{n_k} \in I_k$, $|a_{n_k} - a| \leq d(I_k) \to 0$ pro $k \to \infty$, tzn. $a_{n_k} \to a$. $\square$

Důsledek (Věty 8)

Pro libovolnou posloupnost reálných čísel je množina jejích hromadných bodů neprázdná ($H(a_n) \neq \emptyset$).

Důkaz.

Je-li posloupnost a_n ohraničená, podle věty 8 existuje $a_{n_k} \to a$, tj. a je hromadný bod (podle věty 6). Není-li posloupnost shora (zdola) ohraničená, pak $\infty \in H(a_n)$ ($-\infty \in H(a_n)$). □

Definice 10

Nechť a_n je posloupnost reálných čísel a $H(a_n)$ je množina jejích hromadných bodů. Hodnoty $b = \sup H(a_n) \in \mathbb{R}^*$, $c = \inf H(a_n) \in \mathbb{R}^*$ (s konvencí: je-li $H(a_n)$ shora (zdola) neomezená, pak její $\sup = \infty$ ($\inf = -\infty$)), se nazývají *limita superior*, *limita inferior* posloupnosti a_n a značí se

$$b = \limsup_{n\to\infty} a_n, \qquad c = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Věta 9

Pro posloupnost reálných čísel a_n *definujme* $b_n = \sup\{a_k, k \geq n\}$ *a* $c_n = \inf\{a_k, k \geq n\}$*. Pak platí, že* $\lim b_n = \limsup a_n$ *a* $\lim c_n = \liminf a_n$*.*

Důkaz.

Z předpokladů je vidět, že $b_{n+1} \leq b_n$, $c_{n+1} \geq c_n$, tedy b_n je nerostoucí a c_n neklesající, pak existuje $b = \lim b_n$ ($b \in \mathbb{R}$ nebo $b = -\infty$), podobně existuje $c = \lim c_n$ ($c = \infty$ nebo $c \in \mathbb{R}$). Z konstrukce posloupností b_n a c_n plyne, že jsou supremem, resp. infimem $H(a_n)$. □

Věta 10

Nechť a_n *je ohraničená posloupnost,* $b = \limsup a_n$, $c = \liminf a_n$ $(b, c \in \mathbb{R}$, *tj.* $b, c \neq \pm\infty)$. *Pak* $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tak, že pro* $\forall n \geq n_0$ *je* $a_n < b + \varepsilon$, $a_n > c - \varepsilon$.

Důkaz.

Sporem nechť pro ohraničenou posloupnost a_n $\exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_0$: $a_n \geq b + \varepsilon$. Pak existuje nekonečně mnoho bodů nad (nebo rovno) $b + \varepsilon$, tj. je zde alespoň jeden hromadný bod (včetně možnosti $b + \varepsilon$ a ∞) $\to$ spor. $\square$

Věta 11

Platí, že $\lim a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \limsup a_n = \liminf a_n = a.$

Důkaz.

($\Rightarrow$) $\lim a_n = a \quad \Rightarrow \quad H(a_n) = \{a\}$,
$\limsup a_n = \sup H(a_n) = a = \inf H(a_n) = \liminf a_n$.

($\Leftarrow$) Podle věty 10 ke $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0$ je $a_n < \underbrace{\limsup a_n}_{b=a} + \varepsilon$ a

současně $a_n > \underbrace{\liminf a_n}_{c=a} - \varepsilon \Rightarrow a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \Rightarrow \lim a_n = a$.

$\square$

Definice 11

Řekneme, že posloupnost je *Cauchyovská*, jestliže ke $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $\forall m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_0$ je $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Věta 12

Posloupnost a_n je konvergentní ($a_n \to a \in \mathbb{R}$) právě tehdy, když je Cauchyovská.

Poznámka

Pokud by šlo o racionální čísla ($\mathbb{Q}$), tak věta neplatí. Např. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in \mathbb{Q}$, ale $e \notin \mathbb{Q}$.

Důkaz ($\Rightarrow$).

Nechť je a_n konvergentní a $\lim a_n = a$. Buď $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ libovolné. Potom $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$ je $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tedy pro $m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq n_0$ platí

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| &= |(a_m - a) - (a_n - a)| \\ &\leq |a_m - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Posloupnost a_n je tedy Cauchyovská. □

Důkaz ($\Leftarrow$).

Nechť je a_n je Cauchyovská a $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ je libovolné.
$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0 : |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Speciálně platí $|a_n - a_{n_0}| < \frac{\varepsilon}{2}$, tedy

$$a_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2} < a_n < a_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Označme $c_n := \inf\{a_k, k \geq n\}$ a $d_n := \sup\{a_k, k \geq n\}$. Potom

$$a_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2} < c_n < d_n < a_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq n_0,$$

tedy platí

$$a_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2} \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq a_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Tj. $\limsup a_n \in \mathbb{R}, \liminf a_n \in \mathbb{R}$ a pro libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ máme

$$\limsup a_n - \liminf a_n \leq \varepsilon,$$

což znamená, že $\limsup a_n = \liminf a_n \Rightarrow a_n$ je konvergentní. $\square$

Příklad 6

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + 2}{4n^3 - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(2 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^3})}{n^3(4 - \frac{1}{n^2})} = \frac{1}{2}$$

Poznámka

- st. čitatele $<$ st. jmenovatele $\Rightarrow 0$
- st. čitatele $>$ st. jmenovatele $\Rightarrow \pm\infty$
- st. čitatele $=$ st. jmenovatele $\Rightarrow$ podíl koeficientů

Příklad 7

$$\lim_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2+n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-\sqrt{n^2+n})(n+\sqrt{n^2+n})}{n+\sqrt{n^2+n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n^2-n}{n+\sqrt{n^2+n}}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{-1}{1+\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = -\frac{1}{2}$$

Motivace:

Příklad 8

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}, \quad 1 \notin \mathcal{D}(f)$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x + 2)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 2) = 3$$

Příklad 9

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \qquad \lim_{x \to 0} g(x) = 0$$

Definice 12 (Limita)

Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ *limitu* rovnu $L \in \mathbb{R}$, jestliže $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ takové, že pro $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ platí $|f(x) - L| < \varepsilon$. Píšeme

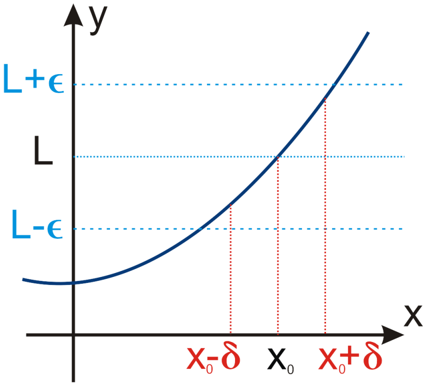
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Definice 13 (Limita pomocí okolí)

$$\forall \mathcal{O}_\varepsilon(L)\ \exists \mathcal{O}_\delta(x_0) :\ \forall x \in \mathcal{P}_\delta(x_0)\ f(x) \in \mathcal{O}_\varepsilon(L).$$

Poznámka

Limita funkce nezávisí na funkční hodnotě $f(x_0)$ (ta nemusí být dokonce ani definována).



Nepřesně, ale ilustrativně:

"Je-li x blízko x_0, pak je $f(x)$ blízko L."

Definice 14 (Limita, nevlastní limita, limita v nevlastním bodě)

Nechť $x_0, L \in \mathbb{R}^*$. Jestliže ke každému $\mathcal{O}(L)$ existuje $\mathcal{P}(x_0)$ takové, že pro každé $x \in \mathcal{P}(x_0)$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$, pak řekneme, že $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

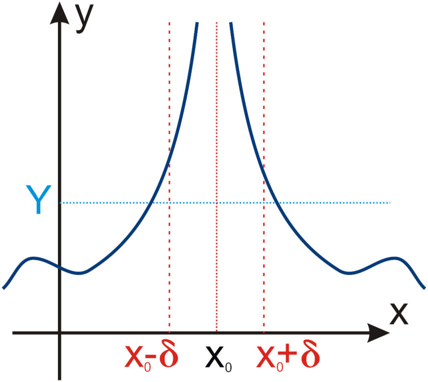
Příklad 10

Např. pro $x_0 = -\infty$, $L = \infty$ máme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$, tj.

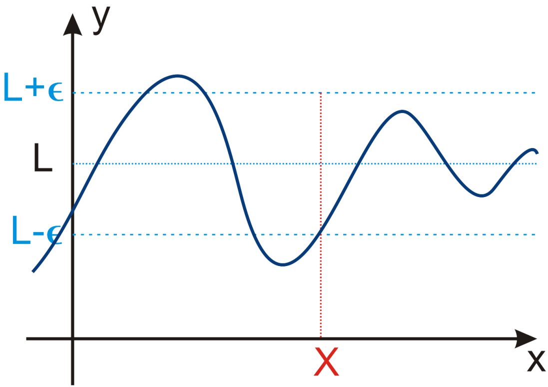
$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists B \in \mathbb{R} :\ \forall x < B \ \text{ je } f(x) > A.$$

Příklad 11

Limita $\lim_{x \to \infty} \sin x$ neexistuje.



Obr.: Nevlastní limita



Obr.: Limita v nevlastním bodě

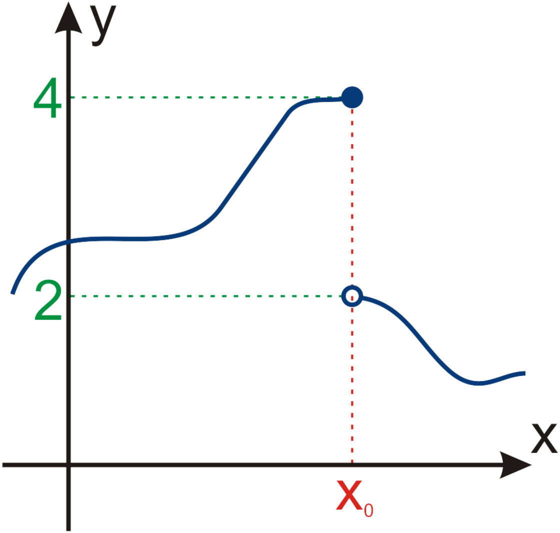
Definice 15 (Jednostranná limita)

Limitu zprava $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$ definujeme takto

$$\forall \mathcal{O}(L)\ \exists \mathcal{P}^+(x_0):\ \forall x \in \mathcal{P}^+(x_0) \text{ je } f(x) \in \mathcal{O}(L).$$

Limitu zleva definujeme analogicky.

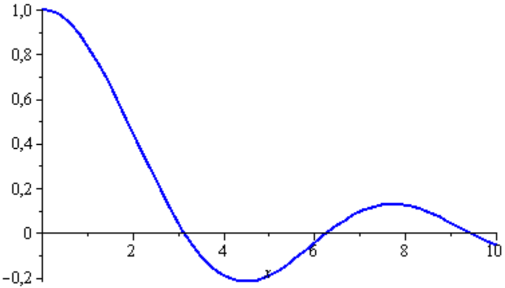
$$\mathcal{P}^+(x_0) = \begin{cases} (x_0, x_0 + \delta) & x \in \mathbb{R} \\ (-\infty, B) & x = -\infty \\ \text{nemá smysl} & x = \infty \end{cases}$$


y
4
2
x
x_0

Není-li možné číslo do funkce dosadit jinak než "limitně", můžeme představu o limitním chování funkce získat i empiricky a to dosazováním blízkých čísel. Podívejme se na chování funkce $\frac{\sin x}{x}$ pro $x \to 0^+$.

x	1	$0,1$	$0,01$	$0,001$	$0,0001$
$\frac{\sin x}{x}$	$0,841470985$	$0,998334167$	$0,999983333$	$0,999999833$	$0,999999998$

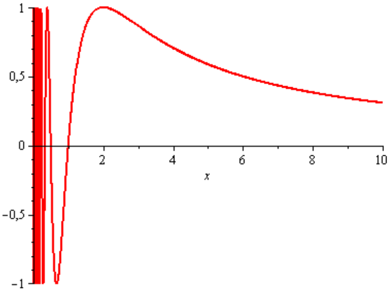
Z tabulky vidíme, že hodnoty se blíží jedničce. A skutečně $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$.



POZOR – nejde o neprůstřelnou metodu:

x	1	$0,1$	$0,01$	$0,001$	$0,0001$	$\cdots$
$\sin\frac{\pi}{x}$	0	0	0	0	0	$\cdots$

Přitom $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin\frac{\pi}{x}$ neexistuje.



(Zkuste dosazovat *náhodná* čísla blížící se k nule zprava.

Např. $\sin\frac{\pi}{0{,}003} \doteq -0,8660253055$.)

Věta 13

(1) *Funkce má v libovolném bodě x_0 nejvýše jednu limitu.*

(2) *Je-li $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$, pak existuje $\mathcal{P}(x_0)$ takové, že funkce f je v tomto okolí ohraničená. Tj. $\exists M \geq 0 : |f(x)| \leq M$ pro $\forall x \in \mathcal{P}(x_0)$.*

Důkaz.

(1) Obdobně jako u limity posloupností. (Sporem předpokládáme existenci dvou limit.)

(2) $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ znamená, že pro $\forall \varepsilon > 0\ \exists \mathcal{P}(x_0)$ takové, že pro $\forall x \in \mathcal{P}(x_0)\ f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. Stačí vzít $M = \max\{|L-\varepsilon|, |L+\varepsilon|\} \Rightarrow |f(x)| \leq M$.

□

Věta 14

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$, *pak* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}^*$ *právě tehdy, když*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L = \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

Důkaz (⇒).

$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, pak podle definice $\forall \mathcal{O}(L)\ \exists \delta > 0$:
$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ jsou funkční hodnoty $f(x) \in \mathcal{O}(L) \Rightarrow$

$$\forall \mathcal{O}(L)\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)\ f(x) \in \mathcal{O}(L),$$

tj. podle definice $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$,

$$\forall \mathcal{O}(L)\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)\ f(x) \in \mathcal{O}(L),$$

tj. podle definice $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$. □

Důkaz ($\Leftarrow$).

$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$ a $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$, tj. podle definice

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \;\Leftrightarrow\; \forall \mathcal{O}(L)\; \exists \delta_1 > 0 : \; \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0)\; f(x) \in \mathcal{O}(L)$$

a podobně

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L \;\Leftrightarrow\; \forall \mathcal{O}(L)\; \exists \delta_2 > 0 : \; \forall x \in (x_0, x_0 + \delta_2)\; f(x) \in \mathcal{O}(L).$$

Označme $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} \Rightarrow \forall \mathcal{O}(L)\; \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = L$. (Toto δ jsme našli.) $\square$

Věta 15 (Věta o třech limitách)

Předpokládejme, že existuje $\mathcal{P}(x_0)$*, v němž pro trojici funkcí* f, g, h *platí nerovnost* $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ *pro* $\forall x \in \mathcal{P}(x_0)$*. Jestliže* $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$ *a* $\lim_{x\to x_0} h(x) = L$*, pak* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$*.*

Důkaz.

Přímo z definice limity. $\square$

Věta 16

Nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ *a* $\exists \mathcal{P}(x_0)$*, v němž je funkce* g *ohraničená (tj.* $\exists M > 0$, $|g(x)| \leq M\ \forall x \in \mathcal{P}(x_0)$*), pak* $\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = 0$.

Důkaz.

Nechť $\varepsilon > 0$ je lib., chceme $|f(x)\cdot g(x) - 0| < \varepsilon$ (pro x „blízko x_0“)

$$|f(x)\cdot g(x)| \leq \underbrace{|f(x)|}_{\text{malé v okolí } x_0} \cdot \underbrace{|g(x)|}_{\leq M \text{ na } \mathcal{P}(x_0)} \leq |f(x)|\cdot M$$

Protože $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, k číslu $\frac{\varepsilon}{M}$ (>0) existuje $\widetilde{\mathcal{P}}(x_0)$: $\forall x \in \widetilde{\mathcal{P}}(x_0)$ $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$.Nechť $\overline{\mathcal{P}}(x_0) := \mathcal{P}(x_0) \cap \widetilde{\mathcal{P}}(x_0)$, pak

$$\forall x \in \overline{\mathcal{P}}(x_0):\ |f(x)\cdot g(x) - 0| \leq |f(x)|\cdot M < \frac{\varepsilon}{M}M = \varepsilon$$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = 0.$ □

Věta 17

Nechť $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ $(-\infty)$ *a* $\exists \mathcal{P}(x_0)$, *v němž je funkce* g *zdola (shora) ohraničená, pak*

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \infty \ (-\infty).$$

Příklad 12

- Použití věty 16:

$$\lim_{x \to 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$$

$f(x) = x$, $g(x) = \sin \frac{1}{x}$ a $\lim_{x \to 0} x = 0$, $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$

- Použití věty 17:

$$\lim_{x \to \infty} (x + \sin x) = +\infty.$$

Poznámka

Předpokládejme $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = ?$$

Např. $f(x) = x, x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ neexistuje, protože

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \neq \infty = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}.$$

Věta 18

Nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ *a existuje* $\mathcal{P}(x_0)$*, v němž je funkce kladná (záporná), pak*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty\ (-\infty).$$

Poznámka

$$\frac{1}{\text{„kladná nula“}} = \infty, \qquad \frac{1}{\text{„záporná nula“}} = -\infty$$

Věta 19

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$, $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$.
Pak platí

(1) $\lim_{x\to x_0}[f(x) \pm g(x)] = L_1 \pm L_2$,

(2) $\lim_{x\to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = L_1 \cdot L_2$,

(3) $L_2 \neq 0$*:* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$,

(4) $\lim_{x\to x_0}|f(x)| = |L_1|$.

Důkaz.

Podobně jako u posloupností. □

Věta 20

Nechť

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0, \quad \lim_{y\to y_0} g(y) = L$$

a existuje $\mathcal{P}(x_0)$*, v němž* $f(x) \neq y_0$*, pak*

$$\lim_{x\to x_0} g\big(f(x)\big) = L.$$

Důkaz.

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné.

$\lim_{y \to y_0} g(y) = L \quad \Leftrightarrow \quad$ podle definice k $\varepsilon > 0$ existuje $\mathcal{P}(y_0)$:

$$\text{pro } \forall y \in \mathcal{P}(y_0) \text{ je } g(y) \in \mathcal{O}_\varepsilon(L).$$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \quad \Leftrightarrow \quad$ podle definice k $\delta > 0$ existuje $\overline{\mathcal{P}}(x_0)$:

$$\text{pro } \forall x \in \overline{\mathcal{P}}(x_0) \text{ je } f(x) \in \mathcal{O}_\delta(y_0).$$

Nechť $\mathcal{P}(x_0)$ je prstencové okolí bodu x_0, v němž $f(x) \neq y_0$.Pak pro $\forall x \in \overline{\mathcal{P}}(x_0) \cap \mathcal{P}(x_0)$, platí $f(x) \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \setminus \{y_0\} = \mathcal{P}(y_0)$, tedy $g\big(f(x)\big) \in \mathcal{O}_\varepsilon(L)$ a podle definice $\lim_{x \to x_0} g\big(f(x)\big) = L$. $\square$

Příklad 13

$$f(x) \equiv 0, \qquad g(y) = \begin{cases} 1 & y = 0 \\ 0 & y \neq 0 \end{cases},$$

pak

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0, \qquad \lim_{y \to 0} g(y) = 0,$$

ale

$$\lim_{x \to 0} g\big(f(x)\big) = \lim_{x \to 0} 1 = 1.$$

Poznámka

Tvrzení uvedená dosud v této kapitole platí i pro jednostranné limity (po příslušné modifikaci).

Věta 21

$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ *právě tehdy, když pro každou posloupnost* $x_n \to x_0$ *platí, že posloupnost* $f(x_n) \to L$.

Důkaz ($\Rightarrow$).

Předpokládejme $x_0, L \in \mathbb{R}$ (Pro $x_0, L = \pm\infty$ obdobně.)
$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad$ podle definice $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$:

$$\text{pro } \forall x \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \text{ je } f(x) \in \mathcal{O}_\varepsilon(L).$$

Nechť x_n je libovolná posloupnost, pro niž platí $x_n \to x_0$, pak (dle definice) $\forall \delta > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\text{pro } \forall n \geq n_0 \quad x_n \in \mathcal{O}_\delta(x_0) \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \in \mathcal{O}_\varepsilon(L).$$

Označený text = definice toho, že $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$. $\square$

Důkaz ($\Leftarrow$).

Sporem předpokládejme, že $\forall x_n \to x_0$ platí $f(x_n) \to L$ a *neplatí* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, tedy že

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x \in \mathcal{P}_\delta(x_0) : \; f(x) \notin \mathcal{O}_\varepsilon(L).$$

Nechť $\delta_1 = 1$, $\exists x_1 \in \mathcal{P}_{\delta_1}(x_0)$: $f(x_1) \notin \mathcal{O}_\varepsilon(L)$

$\delta_2 = \frac{1}{2}$, $\exists x_2 \in \mathcal{P}_{\delta_2}(x_0)$: $f(x_2) \notin \mathcal{O}_\varepsilon(L)$

$\vdots$

$\delta_n = \frac{1}{2^{n-1}}$, $\exists x_n \in \mathcal{P}_{\delta_n}(x_0)$: $f(x_n) \notin \mathcal{O}_\varepsilon(L)$

Tím máme

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{2^{n-1}} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

tedy existuje $x_n \to x_0$ a zároveň $f(x_n) \notin \mathcal{O}_\varepsilon(L)$, což je spor s předpokladem ($\forall x_n \to x_0 \; f(x_n) \to L$). $\square$

Příklad 14

- $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$

$$\forall x > 0 : \; 0 < \sin x < x$$

z věty o třech limitách $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0^+} 0 \le \lim_{x\to 0^+} \sin x \le \lim_{x\to 0^+} x,$$

tedy $\lim_{x\to 0^+} \sin x = 0$.Protože $\sin x$ je lichá funkce, limita zleva je také nula $\Rightarrow \lim_{x\to 0} \sin x = 0$.

- $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$

$$\lim_{x\to 0} \cos x = \lim_{x\to 0} \left(\cos^2 \tfrac{x}{2} - \sin^2 \tfrac{x}{2}\right) = \lim_{x\to 0} \left(1 - 2\sin^2 \tfrac{x}{2}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0} 1 - 2 \lim_{x\to 0} \sin^2 \tfrac{x}{2} = 1$$

Příklad 15

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
  $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \;\Rightarrow\; 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \;\Rightarrow\; 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

  všechny jdou do 1 pro $x \to 0^+$.
  Protože $\frac{\sin x}{x}$ je sudá funkce, platí to i pro $x \to 0^-$.

Příklad 16

- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
  Z definice e máme
$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < e < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}.$$
  Nechť $x \in (0, \frac{1}{2})$ a $n \in \mathbb{N}$ splňuje $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$.Potom platí
$$1+\frac{1}{n+1} < e^{\frac{1}{n+1}} < e^x \leq e^{\frac{1}{n}} < 1+\frac{1}{n-1}.$$
  Protože $n \leq \frac{1}{x}$, platí $n+1 \leq \frac{1}{x}+1 = \frac{x+1}{x}$, tedy $\frac{1}{n+1} \geq \frac{x}{x+1}$.
  Vztah $n+1 > \frac{1}{x}$ dává $n-1 > \frac{1}{x} - 2 = \frac{1-2x}{x}$, tedy
  $\frac{1}{n-1} < \frac{x}{1-2x}$.Celkem jsme dostali
$$1+\frac{x}{x+1} < e^x < 1+\frac{x}{1-2x}.$$

Odečteme jedna a podělíme x (> 0)

$$\frac{1}{x+1} < \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} < \frac{1}{1-2x}.$$

Pro $x \to 0^+$ s použitím věty o třech limitách máme $\lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$. Limita zleva podobně.

Příklad 17

- $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln a} - 1}{x} \frac{\ln a}{\ln a} = \ln a \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln a} - 1}{x\ln a} = \ln a.$$

Definice 16 (Spojitost v bodě)

Řekneme, že funkce f je *spojitá v bodě $x_0 \in \mathcal{D}(f)$*, jestliže $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existuje a je rovna $f(x_0)$, tj.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall x \in \mathcal{O}_\delta(x_0) \text{ platí } f(x) \in \mathcal{O}_\varepsilon(f(x_0)).$$

Řekneme, že funkce f je *spojitá v bodě x_0 zprava (zleva)*, je-li

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0) \qquad \left(\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)\right).$$

Definice 17 (Spojitost na intervalu)

Řekneme, že funkce f je *spojitá na otevřeném intervalu* (a, b), je-li spojitá v každém $x \in (a, b)$.

Řekneme, že funkce f je *spojitá na uzavřeném intervalu* $[a, b]$, je-li spojitá na otevřeném intervalu (a, b) a v bodech a (b) je spojitá zprava (zleva).

Příklad 18

Dirichletova funkce $\chi(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{I} \end{cases}$ není spojitá v žádném bodě ($\lim_{x\to x_0} \chi(x)$ neexistuje – libovolně malé okolí obsahuje 1 i 0).

Příklad 19

Funkce $f(x) = x \cdot \chi(x)$ je spojitá v bodě $x_0 = 0$ a není spojitá v žádném jiném bodě.

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{x}_{\to 0} \underbrace{\chi(x)}_{\text{ohraničená}} = 0$$

Poznámka

Představa, že funkce je spojitá jestliže se „nepřetrhne“ platí, ale je zavádějící. Např. funkce $f(x) = x(x-1)(x-2)\chi(x)$ je spojitá v bodech $0, 1$ a 2.

Věta 22 (Spojitost operací se spojitými funkcemi)

Nechť f, g jsou funkce spojité v x_0. Pak jsou v x_0 spojité i funkce $f \pm g$, $f \cdot g$ a je-li $g(x_0) \neq 0$, je spojitá i funkce f/g.

Je-li h funkce, která je spojitá v bodě $y_0 = f(x_0)$, pak je v x_0 spojitá i funkce $(h \circ f)(x) = h\big(f(x)\big)$.

Důkaz.

Tvrzení plyne z příslušných vět pro limitu funkce. □

Věta 23 (O spojitosti elementárních funkcí)

(i) *Polynom* $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ *je funkce spojitá na celém* $\mathbb{R}$.

(ii) *Racionální lomená funkce je spojitá ve všech bodech, kde je polynom ve jmenovateli různý od nuly.*

(iii) *Funkce* $\sin x$ *a* $\cos x$ *jsou spojité na* $\mathbb{R}$*; funkce* $\operatorname{tg} x$ *je spojitá na* $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$*; funkce* $\operatorname{cotg} x$ *je spojitá na* $\mathbb{R} \setminus \{(k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

(iv) *Funkce* a^x *je spojitá na* $\mathbb{R}$.

Důkaz.

(i) $\lim_{x\to x_0} x = x_0$, tedy $f(x) = x$ je spojitá na $\mathbb{R}$. Ze spojitosti operací (V.22) vyplývá spojitost $P(x)$ na $\mathbb{R}$.

(ii) $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, pak f je spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{\alpha : Q(\alpha) = 0\}$.

(iii) Pro $f(x) = \sin x$ potřebujeme dokázat, že $\lim_{x\to x_0}(\sin x - \sin x_0) = 0$.

$$\lim_{x\to x_0}(\sin x - \sin x_0) = 2 \lim_{x\to x_0}(\underbrace{\cos \frac{x + x_0}{2}}_{\text{ohraničená}} \cdot \underbrace{\sin \frac{x - x_0}{2}}_{\to 0}) = 0.$$

(iv) $\lim_{x\to x_0}(a^x - a^{x_0}) = \lim_{x\to x_0} a^{x_0}(\underbrace{a^{x-x_0}}_{\to 1} - 1) = 0.$

□

Věta 24

Nechť f je spojitá a rostoucí (klesající) na itervalu I, pak inverzní funkce f^{-1} je také spojitá a rostoucí (klesající) na

$$f(I) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in I, f(x) = y\}.$$

Důkaz.

Předpokládejme, že f je rostoucí (pro klesající postupujeme obdobně). Tvrzení o monotonii f^{-1} bylo dokázáno už dříve, stačí tedy dokázat spojitost.

Nechť $y_0 \in f(I)$. Potřebujeme dokázat, že ke $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$:

$$y \in \mathcal{O}_\delta(y_0) \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(y) \in \mathcal{O}_\varepsilon(f^{-1}(y_0)).$$

Tuto konstrukci lze provést záměnou ε a δ v definici spojitosti funkce f v bodě $x_0 = f^{-1}(y_0)$, tj. v definici $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. $\square$

Věta 25 (1. Weierstrassova věta)

Nechť funkce f je na uzavřeném intervalu $[a, b]$ spojitá. Pak je na tomto intervalu ohraničená, tj. existuje $M \geq 0$: $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in [a, b]$, neboli $f([a, b])$ je ohraničená množina.

Důkaz.

Sporem předpokládejme, že f není shora ohraničená (pro ohraničenost zdola by se postupovalo obdobně), tj.

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \text{ takové, že } f(x_n) > n.$$

Posloupnost $x_n \in [a, b]$, tzn. že je ohraničená a podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty existuje vybraná konvergentní podposloupnost $x_{n_k} \to c \in [a, b]$.Ze spojitosti f plyne $f(x_{n_k}) \to f(c)$ a současně $f(x_{n_k}) > n_k \to \infty$. Spor – posloupnost nemůže jít současně ke konstantě a do nekonečna. $\square$

Věta 26 (2. Weierstrassova věta)

Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$, dále nechť

$$M = \sup\{f(x), x \in [a, b]\} \text{ a } m = \inf\{f(x), x \in [a, b]\}.$$

Pak existují čísla x_1, x_2 taková, že $f(x_1) = M$, $f(x_2) = m$. Tedy spojitá funkce nabývá na uzavřeném intervalu své největší a nejmenší hodnoty.

Důkaz.

Dokážeme pro M (pro m analogicky).Podle definice suprema

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in [a, b] : \ f(x) > M - \varepsilon \text{ a } M \geq f(x).$$

$$\varepsilon_1 = 1 \Rightarrow \exists x_1 \in [a, b] : \ M \geq f(x_1) > M - \varepsilon_1,$$

$$\varepsilon_2 = \tfrac{1}{2} \Rightarrow \exists x_2 \in [a, b] : \ M \geq f(x_2) > M - \varepsilon_2,$$

$$\vdots$$

$$\varepsilon_n = \tfrac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow \exists x_n \in [a, b] : \ M \geq f(x_n) > M - \varepsilon_n.$$

Výsledkem konstrukce je posloupnost $x_n \in [a, b]$: $M \geq f(x_n) > M - \frac{1}{2^{n-1}}$.

Posloupnost x_n je ohraničená, tedy (podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty) existuje vybraná konvergentní podposloupnost, tj.

$$\exists x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} c \in [a, b].$$

Funkce f je spojitá, pak podle věty 21

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c) \text{ a současně } M \geq f(x_{n_k}) > M - \tfrac{1}{2^{n-1}},$$

tj. $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M$ a tedy $f(c) = M$. Bod c je proto hledaným bodem, v němž funkce nabývá hodnotu M. $\square$

Věta 27 (1. Bolzanova věta)

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a v krajních bodech intervalu nabývá hodnot s opačným znaménkem ($f(a) \cdot f(b) < 0$). Pak existuje číslo $c \in (a, b)$ takové, že $f(c) = 0$.

Důkaz.

Použijeme metodu půlení intervalů. Nechť $x_1 \in (a, b)$. Pak nastává jedna z následujících možností.

1. $f(x_1) = 0 \Rightarrow c = x_1$
2. $f(x_1) \neq 0$, pak alespoň jeden z intervalů $[a, x_1]$, $[x_1, b]$ má funkce f v krajních bodech opačné znaménko – zvolíme x_2 z tohoto intervalu.
    1. $f(x_2) = 0 \Rightarrow c = x_2$
    2. $f(x_2) \neq 0$, pak alespoň jeden z intervalů ...

Tuto konstrukci opakujeme a buď po konečném počtu kroků najdeme $c : f(c) = 0$, nebo je výsledkem posloupnost vnořených uzavřených intervalů $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n = [a_n, b_n]$ s opačnými znaménky v krajních bodech.

Tedy $b_n - a_n \to 0$, pak (dle principu vnořených intervalů)

$$\exists! c \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n, \text{ tj. } c = \lim a_n \text{ a } c = \lim b_n.$$

Ze spojitosti plyne

$$\lim \underbrace{f(a_n)}_{<0} = \underbrace{f(c)}_{\leq 0} \quad \wedge \quad \lim \underbrace{f(b_n)}_{>0} = \underbrace{f(c)}_{\geq 0}$$

$$\Downarrow$$

$$f(c) \leq 0 \wedge f(c) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(c) = 0.$$

$\square$

Věta 28 (2. Bolzanova věta)

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a

$$M = \sup\{f(x), x \in [a, b]\}, \quad m = \inf\{f(x), x \in [a, b]\}.$$

Pak

$$\forall y \in [m, M]\ \exists c \in [a, b]: \ f(c) = y.$$

Tj. spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá všech hodnot mezi svou největší a nejmenší hodnotou.

Důkaz.

Pokud $y = M$, nebo $y = m$, tvrzení plyne z 2. Weierstrassovy věty.

Pokud $y \in (m, M)$, pak uvažujme funkci

$$g(x) = f(x) - y.$$

Nechť $x_1, x_2 \in [a, b]$ jsou taková, že $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$, pak

$$g(x_1) = m - y < 0, \quad g(x_2) = M - y > 0.$$

Funkce g je spojitá a podle 1. Bolzanovy věty existuje číslo c: $g(c) = 0$, tedy $f(c) = y$. $\square$

Poznámka

- Důsledek – „spojitý obraz spojitého je spojitý"

$$f([a,b]) = [m,M].$$

- Předpoklad spojitosti na *uzavřeném* intervalu $[a,b]$ nelze zeslabit, např. nahradit spojitostní na (a,b):

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ je na } (0,1) \text{ spojitá, ale ne omezená.}$$

- Polynom $P(x)$ lichého stupně má aspoň jeden reálný kořen.

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = \infty, \lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty \quad \text{(nebo obráceně).}$$

$\Rightarrow$ musí protnout osu x.

- Metoda půlení intervalů = numerické řešení rovnice $f(x) = 0$.

Body nespojitosti

Rozlišujeme následující typy bodů nespojitosti.

(a) *Odstranitelná nespojitost*:
Existuje vlastní limita $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, ale $L \neq f(x_0)$.
($f(x_0)$ nemusí být ani definována.)

(b) *Nespojitost prvního druhu (skok)*:
Existují obě vlastní jednostranné limity $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_1$ a $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_2$, ale $L_1 \neq L_2$.

(c) *Nespojitost druhého druhu*:
Aspoň jedna jednostranná limita neexistuje, nebo je nevlastní.

Spojité dodefinování

Má-li funkce f v bodě x_0 odstranitelnou nespojitost a $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, můžeme ji v tomto bodě *spojitě dodefinovat* jako

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} L, & x = x_0, \\ f(x), & x \in \mathcal{D}(f) \smallsetminus \{x_0\}. \end{cases}$$

Příklad 20

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Funkce není spojitá v bodě $x = 0$, neboť $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq f(0)$, $x = 0$ je odstranitelná nespojitost.

Příklad 21

$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

Funkce má skok v $x = 0$.

Příklad 22

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Limita $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neexistuje, tedy $x = 0$ je nespojitost druhého druhu.

Příklad 23

$f(x) = \mathrm{e}^{1/x}$

Jedna jednostranná limita je nevlastní, tedy $x = 0$ je bod nespojitosti druhého druhu.