

Limita posloupnosti a funkce

Petr Hasil

Přednáška z Matematické analýzy



Obsah

- 1 Posloupnosti reálných čísel
 - Úvod
 - Limita posloupnosti
- 2 Limita a spojitost funkce
 - Limita funkce
 - Spojitost funkce

Definice 1 (Rozšířená množina reálných čísel)

Rozšířenou množinou reálných čísel \mathbb{R}^* rozumíme množinu reálných čísel \mathbb{R} rozšířenou o body $-\infty$ a $+\infty$, tj

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Body $\pm\infty$ nazýváme nevlastní body, zatímco body množiny \mathbb{R} nazýváme vlastní body.

Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme:

- $a + \infty = \infty$,
- $a - \infty = -\infty$,
- $\infty + \infty = \infty$,
- $-\infty - \infty = -\infty$,
- $\infty \cdot \infty = \infty$,
- $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$,
- $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$,
- $|\pm\infty| = \infty$,
- $\frac{a}{\pm\infty} = 0$.
- Je-li $a > 0$, pak $a \cdot \infty = \infty$, $a \cdot (-\infty) = -\infty$.
- Je-li $a < 0$, pak $a \cdot \infty = -\infty$, $a \cdot (-\infty) = \infty$.

Poznámka

Nejsou definovány výrazy

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0.$$

Tyto výrazy nazýváme *neurčité výrazy*.

Samozřejmě není definováno dělení nulou.

Definice 2

Posloupnost reálných čísel je zobrazení, jehož definičním oborem je množina \mathbb{N} a oborem hodnot podmnožina \mathbb{R} , tj. $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, většinou místo $a(n)$ píšeme a_n .

Příklad 1

- $a_n = \frac{1}{n} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n =$ „vzorec pro a_n “
- $a_n = n \sin(n\frac{\pi}{2}) \rightarrow \{1, 0, -3, 0, 5, 0, -7, \dots\}$
- $a_n = \{1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

Definice 3 (Limita posloupnosti)

Řekneme, že posloupnost a_n *konverguje* k číslu $a \in \mathbb{R}$, píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, jestliže

$$\text{ke } \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}: \text{ pro } \forall n \geq n_0 \text{ platí } |a_n - a| < \varepsilon,$$

tj. $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Řekneme, že posloupnost a_n *diverguje* k $+\infty(-\infty)$, píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty(-\infty)$, jestliže

$$\text{ke } \forall A \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ takové, že pro } \forall n \geq n_0 \text{ je } a_n > A \text{ (} a_n < A \text{)}.$$

Jestliže posloupnost nekonverguje ani nediverguje, řekneme, že osciluje.

Definice 4 (Okolí bodu)

Libovolný otevřený interval $I \subseteq \mathbb{R}$ obsahující bod $x_0 \in \mathbb{R}$ nazýváme *okolí bodu* x_0 a značíme jej $\mathcal{O}(x_0)$.

Definice 5 (Okolí $\pm\infty$)

Nechť $A \in \mathbb{R}$ je libovolné. Interval (A, ∞) , resp. $(-\infty, A)$, nazýváme okolí $+\infty$, resp. $-\infty$.

Poznámka

- Průnik dvou okolí bodu x_0 je opět okolím bodu x_0 .
- Pro dva body $x_1 \neq x_2$ existují jejich okolí tak, že $\mathcal{O}(x_1) \cap \mathcal{O}(x_2) = \emptyset$.

Speciální typy okolí bodu

- δ -okolí bodu x_0

$$\mathcal{O}_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

- Prstencové (ryzí) δ -okolí bodu x_0

$$\mathcal{P}_\delta(x_0) = \mathcal{O}_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta).$$

- Levé a pravé δ -okolí bodu x_0

$$\mathcal{O}_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0], \quad \mathcal{O}_\delta^+(x_0) = [x_0, x_0 + \delta).$$

- Levé a pravé prstencové δ -okolí bodu x_0

$$\mathcal{P}_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0), \quad \mathcal{P}_\delta^+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta).$$

Definice limity posloupnosti pomocí okolí bodu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}^*: \forall \mathcal{O}(a) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: a_n \in \mathcal{O}(a).$$

Příklad 2

Limita posloupnosti $a_n = (-1)^{n-1}$ neexistuje.

Definice 6

- Řekneme, že posloupnost a_n je *shora (zdola) ohraničená*, jestliže existuje $M \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n \leq M$ ($a_n \geq M$) pro každé $n \in \mathbb{N}$.
- Posloupnost a_n je *ohraničená*, pokud je ohraničená shora i zdola.
- Řekneme, že a_n je *rostoucí (neklesající, nerostoucí, klesající)*, jestliže $a_{n+1} > a_n$ ($a_{n+1} \geq a_n$, $a_{n+1} \leq a_n$, $a_{n+1} < a_n$) pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

Příklad 3

Dokažte, že posloupnost $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, je klesající a že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

$$n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Leftrightarrow n < n+1 \Leftrightarrow 0 < 1. \quad \checkmark$$

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Hledáme $n_0: n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$, tj.

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Označíme $n_0 := \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$ ($> \frac{1}{\varepsilon}$).

$$n \geq n_0 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \checkmark$$

Věta 1

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Důkaz.

Sporem předpokládejme, že

$$\exists a, b \in \mathbb{R}^*, a \neq b: a_n \rightarrow a \text{ a současně } a_n \rightarrow b.$$

Pro $\forall \mathcal{O}(a) \exists n_1 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_1: a_n \in \mathcal{O}(a)$ a současně $\forall \mathcal{O}(b) \exists n_2 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_2: a_n \in \mathcal{O}(b)$. Označme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, pak pro $n \geq n_0$:
 $a_n \in \mathcal{O}(a) \cap \mathcal{O}(b) \rightarrow$ spor pokud $\mathcal{O}(a) \cap \mathcal{O}(b) = \emptyset$.

Uvažujme $\varepsilon < \frac{|a-b|}{2}$, potom $\mathcal{O}_\varepsilon(a) \cap \mathcal{O}_\varepsilon(b) = \emptyset$. □

Věta 2

Nechť a_n je konvergentní posloupnost, tj. $\lim a_n = a$, $a \in \mathbb{R}$. Pak a_n je ohraničená posloupnost.

Věta 3

Nechť $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Pak platí

- (1) $\lim(a_n \pm b_n) = a \pm b$,
- (2) $\lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,
- (3) je-li $b \neq 0$, $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$,
- (4) $\lim |a_n| = |a|$.

Důkaz bodu (2).

Potřebujeme dokázat, že pro $\forall \varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$:

$$|a_n b_n - ab| < \varepsilon.$$

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\ &= \underbrace{|a_n|}_{\leq M} \underbrace{|b_n - b|}_{< \frac{\varepsilon}{2M}} + |b| \underbrace{|a_n - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2|b|}} \end{aligned}$$

(Existence M plyne z ohraničenosti a_n , tj. $|a_n| < M, \forall n \in \mathbb{N}$.)

Pro libovolné $\varepsilon > 0$ zvolíme n_1, n_2 tak, že $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}$ pro $n \geq n_1$ a $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|b|}$ pro $n \geq n_2$. Označíme $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$, potom

$$\forall n \geq n_0 : |a_n b_n - ab| < M \frac{\varepsilon}{2M} + |b| \frac{\varepsilon}{2|b|} = \varepsilon.$$

(Kdyby $b = 0$, pak jím nedělíme, ale celý člen je roven nule a stačí

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Věta 4

Nechť posloupnost a_n je neklesající (nerostoucí) a shora (zdola) ohraničená. Pak posloupnost a_n je konvergentní, tj. existuje $a \in \mathbb{R}$: $a_n \rightarrow a$, přičemž $a = \sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ ($a = \inf\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$).

Důkaz.

Nechť posloupnost a_n je neklesající a shora ohraničená. Ohraničenost shora $\Rightarrow \exists A : a_n \leq A$, tedy existuje supremum. Označme jej a .

Potom $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} > a - \varepsilon$. Kdyby to neplatilo, pak by a nebylo $\sup\{a_n\}$. Posloupnost je neklesající, tedy

$$a_n \geq a_{n_0} > a - \varepsilon, \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \lim a_n = a. \quad \square$$

Poznámka (Bernoulliho nerovnost)

Pro $\forall x \in \mathbb{R}, x > -1$ a $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Pro $x \neq 0, n > 1$ platí nerovnost ostře.

(Důkaz matematickou indukcí.)

Příklad 4

Posloupnosti $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ a $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ jsou konvergentní a mají stejnou limitu.

Nejprve ukážeme, že $a_n = (\frac{n+1}{n})^n$ je rostoucí.

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{(\frac{n+1}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^{n-1}} = \frac{n}{n-1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{n}{n-1} \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \\ &= \frac{n}{n-1} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > \frac{n}{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n-1} \frac{n-1}{n} = 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow a_n > a_{n-1}, \forall n > 1$ (použita „ostrá“ varianta Bernoulliovy nerovnosti), tedy posloupnost je rostoucí.

Podobně ukážeme, že posloupnost b_n je klesající.

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} = \dots > \dots = 1$$

$\Rightarrow b_{n-1} > b_n, \forall n > 1$, tedy posloupnost je klesající.

Nyní stačí uvážit

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n > a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

tj. $a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1, \forall n \in \mathbb{N}$. Tím jsme potvrdili tvrzení o ohraničenosti posloupností a_n (shora) a b_n (zdola).

Obě posloupnosti jsou konvergentní a mají stejnou limitu, tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Definice 7

Limitu $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ nazýváme *Eulerovo číslo* a značíme e .

Definice 8

Řekneme, že $a \in \mathbb{R}^*$ je *hromadný bod* posloupnosti a_n , jestliže v každém okolí $\mathcal{O}(a)$ existuje nekonečně mnoho indexů $n \in \mathbb{N}$ takových, že $a_n \in \mathcal{O}(a)$. Množinu všech hromadných bodů posloupnosti a_n budeme značit $H(a_n)$.

Příklad 5

- $a_n = (-1)^{n-1} = \{1, -1, 1, -1, \dots\}; \quad H(a_n) = \{-1, 1\}$
- $a_n = (-1)^{n-1} + \frac{1}{n}; \quad H(a_n) = \{-1, 1\}$
- $\lim a_n = a, a \in \mathbb{R}^*; \quad H(a_n) = \{a\}$
- $a_n = \{1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \dots\}; \quad H(a_n) = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

Definice 9

Nechť $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \dots$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost a_{n_k} se nazývá *vybraná podposloupnost* posloupnosti a_n .

Věta 5

Nechť $a_n \rightarrow a, a \in \mathbb{R}^*$, pak pro každou vybranou podposloupnost posloupnosti a_n platí, že $a_{n_k} \rightarrow a$ pro $k \rightarrow \infty$.

Důkaz.

Vybíráme, ale nepřehazujeme, tj.

$$a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon), n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad a_{n_k} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon), n_k \geq n_0.$$

□

Věta 6

Číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadným bodem posloupnosti a_n právě tehdy, když existuje vybraná podposloupnost a_{n_k} posloupnosti a_n taková, že $a_{n_k} \rightarrow a$ pro $k \rightarrow \infty$.

Důkaz.

- (\Rightarrow) Hromadný bod \Rightarrow nekonečně mnoho bodů posloupnosti v jeho libovolném okolí \Rightarrow pro $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k} \exists a_{n_k} : |a_{n_k} - a| < \frac{1}{2^k}$.
- (\Leftarrow) Z definice limity a hromadného bodu. □

Věta 7 (Princip vnořených intervalů)

Nechť $I_n = [a_n, b_n]$ je posloupnost uzavřených intervalů na množině \mathbb{R} s vlastností, že intervaly jsou do sebe vnořeny ($I_{n+1} \subset I_n$) a $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$. Pak existuje právě jedno $c \in \mathbb{R}$ s vlastností $c \in I_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, přičemž platí $\{c\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$.

Důkaz.

Posloupnost dolních krajních bodů a_n je neklesající a posloupnost horních krajních bodů b_n je nerostoucí (plyne z $I_{n+1} \subset I_n$), navíc posloupnost a_n (b_n) je shora (zdola) omezená. Podle věty 4 existují limity $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. Pak platí $a = b$. (Určitě platí $a \leq b$, neboť $a_n \leq b_n$ a kdyby $a < b \rightarrow$ spor s $\lim(a_n - b_n) = 0 \Leftrightarrow \lim a_n = \lim b_n$.) Tedy hledané číslo $c = a = b$, neboť $a_n \leq a = c = b \leq b_n \Rightarrow c \in I_n, \forall n \in \mathbb{N}$, tedy leží v průniku $c \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Kdyby existovala $c_1, c_2 \in \bigcap I_n$ a $c_2 > c_1 \rightarrow$ spor s $b_n - a_n \rightarrow 0$, neboť by pak $[c_1, c_2] \subseteq \bigcap I_n$. □

Věta 8 (Bolzano-Weierstrass)

Z každé ohraničené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Důkaz.

Důkaz je založen na metodě půlení intervalů. Nechť a_n je ohraničená posloupnost, pak existuje $M \geq 0: |a_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a_n \in [-M, M]$ Aspoň jeden z intervalů $[-M, 0]$, $[0, M]$ obsahuje nekonečně mnoho prvků a_n . Předpokládejme, že to je $[0, M] \rightarrow [0, M/2]$ a $[M/2, M]$, jeden z nich obsahuje nekonečně mnoho členů $a_n \dots$ Metodou půlení intervalů obdržíme posloupnost vnořených intervalů I_n , z nichž každý obsahuje nekonečně mnoho prvků posloupnosti a_n a pro délku intervalu $I_n: d(I_n) \rightarrow 0$ existuje podle věty 7 právě jedno $a \in \bigcap I_n$, tak, že každý interval $I_k, k \in \mathbb{N}$, obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti a_n . Vždy vybereme jeden z těchto prvků a označíme jej a_{n_k} tak, aby posloupnost n_k byla rostoucí, tj. a_{n_k} je vybraná podposloupnost z a_n , $a_{n_k} \in I_k$, $|a_{n_k} - a| \leq d(I_k) \rightarrow 0$ pro $k \rightarrow \infty$, tzn. $a_{n_k} \rightarrow a$. □

Důsledek (Věty 8)

Pro libovolnou posloupnost reálných čísel je množina jejích hromadných bodů neprázdná ($H(a_n) \neq \emptyset$).

Důkaz.

Je-li posloupnost a_n ohraničená, podle věty 8 existuje $a_{n_k} \rightarrow a$, tj. a je hromadný bod (podle věty 6). Není-li posloupnost shora (zdola) ohraničená, pak $\infty \in H(a_n)$ ($-\infty \in H(a_n)$). □

Definice 10

Nechť a_n je posloupnost reálných čísel a $H(a_n)$ je množina jejích hromadných bodů. Hodnoty $b = \sup H(a_n) \in \mathbb{R}^*$, $c = \inf H(a_n) \in \mathbb{R}^*$ (s konvencí: je-li $H(a_n)$ shora (zdola) neomezená, pak její $\sup = \infty$ ($\inf = -\infty$)), se nazývají *limita superior*, *limita inferior* posloupnosti a_n a značí se

$$b = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad c = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Věta 9

Pro posloupnost reálných čísel a_n definujme $b_n = \sup\{a_k, k \geq n\}$ a $c_n = \inf\{a_k, k \geq n\}$. Pak platí, že $\lim b_n = \limsup a_n$ a $\lim c_n = \liminf a_n$.

Důkaz.

Z předpokladů je vidět, že $b_{n+1} \leq b_n$, $c_{n+1} \geq c_n$, tedy b_n je nerostoucí a c_n neklesající, pak existuje $b = \lim b_n$ ($b \in \mathbb{R}$ nebo $b = -\infty$), podobně existuje $c = \lim c_n$ ($c = \infty$ nebo $c \in \mathbb{R}$). Z konstrukce posloupností b_n a c_n plyne, že jsou supremem, resp. infimem $H(a_n)$. \square

Věta 10

Nechť a_n je ohraničená posloupnost, $b = \limsup a_n$, $c = \liminf a_n$ ($b, c \in \mathbb{R}$, tj. $b, c \neq \pm\infty$). Pak $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $\forall n \geq n_0$ je $a_n < b + \varepsilon$, $a_n > c - \varepsilon$.

Důkaz.

Sporem necht' pro ohraničenou posloupnost $a_n \exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \geq n_0$: $a_n \geq b + \varepsilon$. Pak existuje nekonečně mnoho bodů nad (nebo rovno) $b + \varepsilon$, tj. je zde alespoň jeden hromadný bod (včetně možnosti $b + \varepsilon = \infty$) \rightarrow spor. \square

Věta 11

Platí, že $\lim a_n = a \Leftrightarrow \limsup a_n = \liminf a_n = a$.

Důkaz.

(\Rightarrow) $\lim a_n = a \Rightarrow H(a_n) = \{a\}$,
 $\limsup a_n = \sup H(a_n) = a = \inf H(a_n) = \liminf a_n$.

(\Leftarrow) Podle věty 10 ke $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0$ je $a_n < \underbrace{\limsup a_n}_{b=a} + \varepsilon$ a
současně $a_n > \underbrace{\liminf a_n}_{c=a} - \varepsilon \Rightarrow a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \Rightarrow \lim a_n = a$. \square

Definice 11

Řekneme, že posloupnost je **Cauchyovská**, jestliže ke $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $\forall m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq n_0$ je $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Věta 12

Posloupnost a_n je konvergentní ($a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$) právě tehdy, když je Cauchyovská.

Poznámka

Pokud by šlo o racionální čísla (\mathbb{Q}), tak věta neplatí. Např. $(1 + \frac{1}{n})^n \in \mathbb{Q}$, ale $e \notin \mathbb{Q}$.

Důkaz (\Rightarrow).

Nechť je a_n konvergentní a $\lim a_n = a$. Bud' $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ libovolné. Potom $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$ je $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tedy pro $m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq n_0$ platí

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= |a_m - a + a - a_n| = |(a_m - a) - (a_n - a)| \\ &\leq |a_m - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Posloupnost a_n je tedy Cauchyovská. \square

Důkaz (\Leftarrow).

Nechť je a_n je Cauchyovská a $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ je libovolné. $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0 : |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Speciálně platí $|a_n - a_{n_0}| < \frac{\varepsilon}{2}$, tedy

$$a_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2} < a_n < a_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Označme $c_n := \inf\{a_k, k \geq n\}$ a $d_n := \sup\{a_k, k \geq n\}$. Potom

$$a_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2} < c_n < d_n < a_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq n_0,$$

tedy platí

$$a_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2} \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq a_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Tj. $\limsup a_n \in \mathbb{R}, \liminf a_n \in \mathbb{R}$ a pro libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ máme

$$\limsup a_n - \liminf a_n \leq \varepsilon,$$

což znamená, že $\limsup a_n = \liminf a_n \Rightarrow a_n$ je konvergentní. \square

Příklad 6

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + 2}{4n^3 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3(2 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^3})}{n^3(4 - \frac{1}{n^2})} = \frac{1}{2}$$

Poznámka

- st. čitatele < st. jmenovatele $\Rightarrow 0$
- st. čitatele > st. jmenovatele $\Rightarrow \pm\infty$
- st. čitatele = st. jmenovatele \Rightarrow podíl koeficientů

Příklad 7

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n - \sqrt{n^2 + n})(n + \sqrt{n^2 + n})}{n + \sqrt{n^2 + n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n^2 - n}{n + \sqrt{n^2 + n}} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{1 + \sqrt{\frac{n^2 + n}{n^2}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Motivace:

Příklad 8

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}, \quad 1 \notin \mathcal{D}(f)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 2)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) = 3$$

Příklad 9

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

Definice 12 (Limita)

Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ *limitu* rovnou $L \in \mathbb{R}$, jestliže $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ takové, že pro $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ platí $|f(x) - L| < \varepsilon$. Píšeme

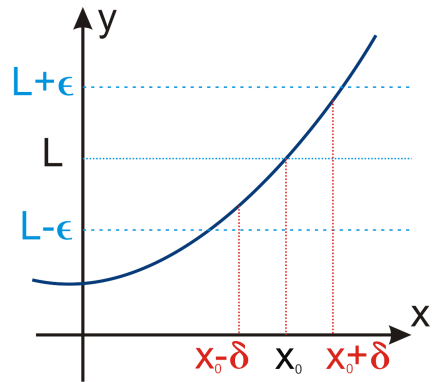
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

Definice 13 (Limita pomocí okolí)

$$\forall \mathcal{O}_\varepsilon(L) \exists \mathcal{O}_\delta(x_0) : \forall x \in \mathcal{P}_\delta(x_0) f(x) \in \mathcal{O}_\varepsilon(L).$$

Poznámka

Limita funkce nezávisí na funkční hodnotě $f(x_0)$ (ta nemusí být dokonce ani definována).



Nepřesně, ale ilustrativně:
 "Je-li x blízko x_0 , pak je $f(x)$ blízko L ."

Definice 14 (Limita, nevlastní limita, limita v nevlastním bodě)

Nechť $x_0, L \in \mathbb{R}^*$. Jestliže ke každému $\mathcal{O}(L)$ existuje $\mathcal{P}(x_0)$ takové, že pro každé $x \in \mathcal{P}(x_0)$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$, pak řekneme, že $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

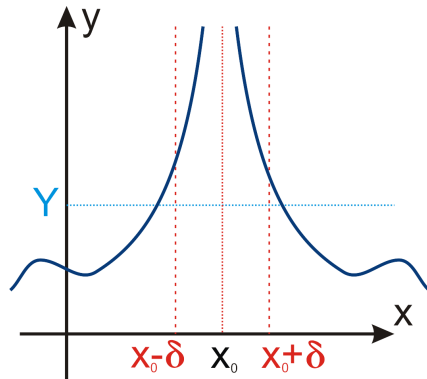
Příklad 10

Např. pro $x_0 = -\infty, L = \infty$ máme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, tj.

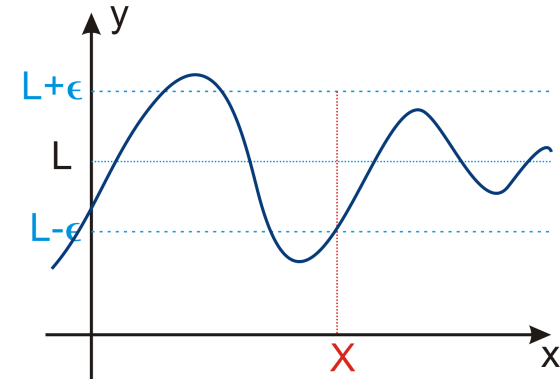
$$\forall A \in \mathbb{R} \exists B \in \mathbb{R} : \forall x < B \text{ je } f(x) > A.$$

Příklad 11

Limita $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ neexistuje.



Obr.: Nevlastní limita



Obr.: Limita v nevlastním bodě

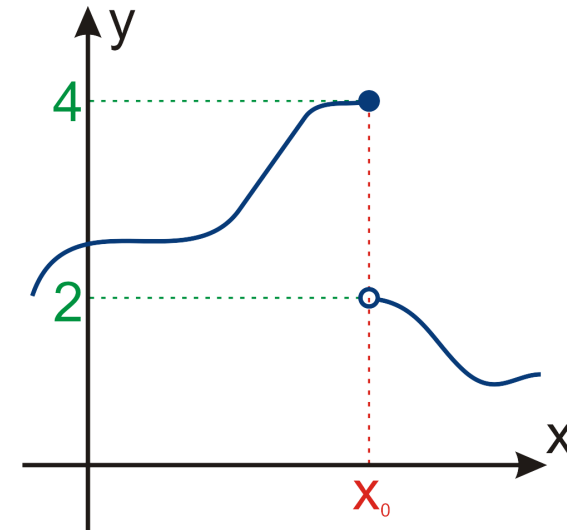
Definice 15 (Jednostranná limita)

Limitu zprava $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ definujeme takto

$$\forall \mathcal{O}(L) \exists \mathcal{P}^+(x_0) : \forall x \in \mathcal{P}^+(x_0) \text{ je } f(x) \in \mathcal{O}(L).$$

Limitu zleva definujeme analogicky.

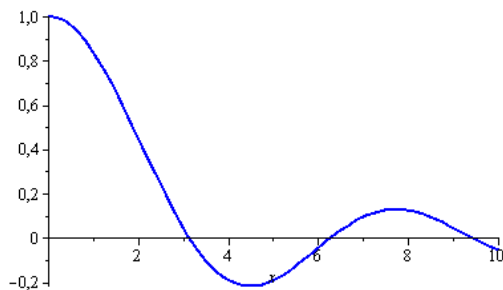
$$\mathcal{P}^+(x_0) = \begin{cases} (x_0, x_0 + \delta) & x \in \mathbb{R} \\ (-\infty, B) & x = -\infty \\ \text{nemá smysl} & x = \infty \end{cases}$$



Není-li možné číslo do funkce dosadit jinak než "limitně", můžeme představu o limitním chování funkce získat i empiricky a to dosazováním blízkých čísel. Podívejme se na chování funkce $\frac{\sin x}{x}$ pro $x \rightarrow 0^+$.

x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{\sin x}{x}$	0,841470985	0,998334167	0,999983333	0,999999833	0,999999998

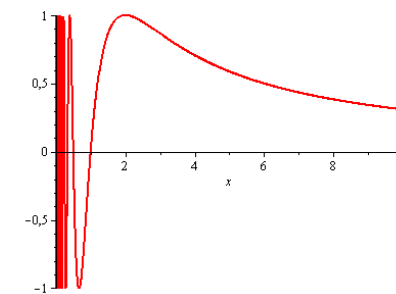
Z tabulky vidíme, že hodnoty se blíží jedničce. A skutečně $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$.



POZOR – nejde o neprůstřednou metodu:

x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	...
$\sin \frac{\pi}{x}$	0	0	0	0	0	...

Přitom $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{\pi}{x}$ **neexistuje**.



(Zkuste dosazovat **náhodná** čísla blízká se k nule zprava.

Např. $\sin \frac{\pi}{0,003} \doteq -0,8660253055$.)

Věta 13

- (1) Funkce má v libovolném bodě x_0 nejvýše jednu limitu.
- (2) Je-li $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$, pak existuje $\mathcal{P}(x_0)$ takové, že funkce f je v tomto okolí ohraničená. Tj. $\exists M \geq 0 : |f(x)| \leq M$ pro $\forall x \in \mathcal{P}(x_0)$.

Důkaz.

- (1) Obdobně jako u limity posloupností. (Sporem předpokládáme existenci dvou limit.)
- (2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ znamená, že pro $\forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{P}(x_0)$ takové, že pro $\forall x \in \mathcal{P}(x_0) f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Stačí vzít $M = \max\{|L - \varepsilon|, |L + \varepsilon|\} \Rightarrow |f(x)| \leq M$.

□

Věta 14

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$, pak $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}^*$ právě tehdy, když

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

Důkaz (\Rightarrow).

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, pak podle definice $\forall \mathcal{O}(L) \exists \delta > 0$:
 $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ jsou funkční hodnoty $f(x) \in \mathcal{O}(L) \Rightarrow$

$$\forall \mathcal{O}(L) \exists \delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) f(x) \in \mathcal{O}(L),$$

tj. podle definice $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$,

$$\forall \mathcal{O}(L) \exists \delta > 0 \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) f(x) \in \mathcal{O}(L),$$

tj. podle definice $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$.

□

Důkaz (\Leftarrow).

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ a $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$, tj. podle definice

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \mathcal{O}(L) \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0) f(x) \in \mathcal{O}(L)$$

a podobně

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \mathcal{O}(L) \exists \delta_2 > 0 : \forall x \in (x_0, x_0 + \delta_2) f(x) \in \mathcal{O}(L).$$

Označme $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} \Rightarrow \forall \mathcal{O}(L) \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$
 platí $f(x) \in \mathcal{O}(L) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$. (Toto δ jsme našli.) □

Věta 15 (Věta o třech limitách)

Předpokládejme, že existuje $\mathcal{P}(x_0)$, v němž pro trojici funkcí f, g, h platí nerovnost $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ pro $\forall x \in \mathcal{P}(x_0)$. Jestliže $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$, pak $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

Důkaz.

Přímo z definice limity. □

Věta 16

Nechť $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ a $\exists \mathcal{P}(x_0)$, v němž je funkce g ohraničená (tj. $\exists M > 0, |g(x)| \leq M \forall x \in \mathcal{P}(x_0)$), pak $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0$.

Důkaz.

Nechť $\varepsilon > 0$ je lib., chceme $|f(x) \cdot g(x) - 0| < \varepsilon$ (pro x „blízko x_0 “)

$$|f(x) \cdot g(x)| \leq \underbrace{|f(x)|}_{\text{malé v okolí } x_0} \cdot \underbrace{|g(x)|}_{\leq M \text{ na } \mathcal{P}(x_0)} \leq |f(x)| \cdot M$$

Protože $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, k číslu $\frac{\varepsilon}{M}$ (> 0) existuje $\tilde{\mathcal{P}}(x_0): \forall x \in \tilde{\mathcal{P}}(x_0) |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$. Nechť $\overline{\mathcal{P}}(x_0) := \mathcal{P}(x_0) \cap \tilde{\mathcal{P}}(x_0)$, pak

$$\forall x \in \overline{\mathcal{P}}(x_0): |f(x) \cdot g(x) - 0| \leq |f(x)| \cdot M < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0. \quad \square$$

Věta 17

Nechť $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ($-\infty$) a $\exists \mathcal{P}(x_0)$, v němž je funkce g zdola (shora) ohraničená, pak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \infty \text{ } (-\infty).$$

Příklad 12

- Použití věty 16:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$$

$$f(x) = x, g(x) = \sin \frac{1}{x} \text{ a } \lim_{x \rightarrow 0} x = 0, |\sin \frac{1}{x}| \leq 1$$

- Použití věty 17:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sin x) = +\infty.$$

Poznámka

Předpokládejme $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = ?$$

Např. $f(x) = x, x_0 = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ neexistuje, protože

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \neq \infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}.$$

Věta 18

Nechť $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ a existuje $\mathcal{P}(x_0)$, v němž je funkce kladná (záporná), pak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty \text{ } (-\infty).$$

Poznámka

$$\frac{1}{\text{„kladná nula“}} = \infty, \quad \frac{1}{\text{„záporná nula“}} = -\infty$$

Věta 19

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$, $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$.

Pak platí

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = L_1 \pm L_2,$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L_1 \cdot L_2,$$

$$(3) L_2 \neq 0: \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2},$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |L_1|.$$

Důkaz.

Podobně jako u posloupností. \square

Věta 20

Nechť

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0, \quad \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = L$$

a existuje $\mathcal{P}(x_0)$, v němž $f(x) \neq y_0$, pak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = L.$$

Důkaz.

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné.

$\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = L \Leftrightarrow$ podle definice k $\varepsilon > 0$ existuje $\mathcal{P}(y_0)$:

pro $\forall y \in \mathcal{P}(y_0)$ je $g(y) \in \mathcal{O}_\varepsilon(L)$.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \Leftrightarrow$ podle definice k $\delta > 0$ existuje $\bar{\mathcal{P}}(x_0)$:

pro $\forall x \in \bar{\mathcal{P}}(x_0)$ je $f(x) \in \mathcal{O}_\delta(y_0)$.

Nechť $\mathcal{P}(x_0)$ je prstencové okolí bodu x_0 , v němž $f(x) \neq y_0$. Pak pro $\forall x \in \bar{\mathcal{P}}(x_0) \cap \mathcal{P}(x_0)$, platí $f(x) \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \setminus \{y_0\} = \mathcal{P}(y_0)$, tedy $g(f(x)) \in \mathcal{O}_\varepsilon(L)$ a podle definice $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = L$. \square

Příklad 13

$$f(x) \equiv 0, \quad g(y) = \begin{cases} 1 & y = 0 \\ 0 & y \neq 0 \end{cases},$$

pak

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 0,$$

ale

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Poznámka

Tvrzení uvedená dosud v této kapitole platí i pro jednostranné limity (po příslušné modifikaci).

Věta 21

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $x_n \rightarrow x_0$ platí, že posloupnost $f(x_n) \rightarrow L$.

Důkaz (\Rightarrow).

Předpokládejme $x_0, L \in \mathbb{R}$ (Pro $x_0, L = \pm\infty$ obdobně.)
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$ podle definice $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$:

$$\text{pro } \forall x \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \text{ je } f(x) \in \mathcal{O}_\varepsilon(L).$$

Nechť x_n je libovolná posloupnost, pro niž platí $x_n \rightarrow x_0$, pak (dle definice) $\forall \delta > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\text{pro } \forall n \geq n_0 \quad x_n \in \mathcal{O}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x_n) \in \mathcal{O}_\varepsilon(L).$$

Označený text = definice toho, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$. □

Důkaz (\Leftarrow).

Sporem předpokládejme, že $\forall x_n \rightarrow x_0$ platí $f(x_n) \rightarrow L$ a *neplatí* $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, tedy že

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in \mathcal{P}_\delta(x_0) : f(x) \notin \mathcal{O}_\varepsilon(L).$$

Nechť $\delta_1 = 1, \exists x_1 \in \mathcal{P}_{\delta_1}(x_0) : f(x_1) \notin \mathcal{O}_\varepsilon(L)$

$$\delta_2 = \frac{1}{2}, \exists x_2 \in \mathcal{P}_{\delta_2}(x_0) : f(x_2) \notin \mathcal{O}_\varepsilon(L)$$

\vdots

$$\delta_n = \frac{1}{2^{n-1}}, \exists x_n \in \mathcal{P}_{\delta_n}(x_0) : f(x_n) \notin \mathcal{O}_\varepsilon(L)$$

Tím máme

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{2^{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

tedy existuje $x_n \rightarrow x_0$ a zároveň $f(x_n) \notin \mathcal{O}_\varepsilon(L)$, což je spor s předpokladem ($\forall x_n \rightarrow x_0 f(x_n) \rightarrow L$). □

Příklad 14

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

$$\forall x > 0 : 0 < \sin x < x$$

z věty o třech limitách \Rightarrow

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 0 \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} x,$$

tedy $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 0$. Protože $\sin x$ je lichá funkce, limita zleva je také nula $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \cos x &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 1 - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 \frac{x}{2} = 1 \end{aligned}$$

Příklad 15

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
 $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

všechny jdou do 1 pro $x \rightarrow 0^+$.

Protože $\frac{\sin x}{x}$ je sudá funkce, platí to i pro $x \rightarrow 0^-$.

Příklad 16

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
 Z definice e máme

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < e < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n.$$

Nechť $x \in (0, \frac{1}{2})$ a $n \in \mathbb{N}$ splňuje $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$. Potom platí

$$1 + \frac{1}{n+1} < e^{\frac{1}{n+1}} < e^x \leq e^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n-1}.$$

Protože $n \leq \frac{1}{x}$, platí $n+1 \leq \frac{1}{x} + 1 = \frac{x+1}{x}$, tedy $\frac{1}{n+1} \geq \frac{x}{x+1}$.

Vztah $n+1 > \frac{1}{x}$ dává $n-1 > \frac{1}{x} - 2 = \frac{1-2x}{x}$, tedy $\frac{1}{n-1} < \frac{x}{1-2x}$. Celkem jsme dostali

$$1 + \frac{x}{x+1} < e^x < 1 + \frac{x}{1-2x}.$$

Odečteme jedna a podělíme $x (> 0)$

$$\frac{1}{x+1} < \frac{e^x - 1}{x} < \frac{1}{1-2x}.$$

Pro $x \rightarrow 0^+$ s použitím věty o třech limitách máme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.
 Limita zleva podobně.

Příklad 17

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x} \cdot \frac{\ln a}{\ln a} = \ln a \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} = \ln a.$$

Definice 16 (Spojítost v bodě)

Řekneme, že funkce f je *spojitá v bodě* $x_0 \in \mathcal{D}(f)$, jestliže $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existuje a je rovna $f(x_0)$, tj.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathcal{O}_\delta(x_0) \text{ platí } f(x) \in \mathcal{O}_\varepsilon(f(x_0)).$$

Řekneme, že funkce f je *spojitá v bodě* x_0 *zprava (zleva)*, je-li

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \quad \left(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \right).$$

Definice 17 (Spojítost na intervalu)

Řekneme, že funkce f je *spojitá na otevřeném intervalu* (a, b) , je-li spojitá v každém $x \in (a, b)$.

Řekneme, že funkce f je *spojitá na uzavřeném intervalu* $[a, b]$, je-li spojitá na otevřeném intervalu (a, b) a v bodech a (b) je spojitá zprava (zleva).

Příklad 18

Dirichletova funkce $\chi(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{I} \end{cases}$ není spojitá v žádném bodě

($\lim_{x \rightarrow x_0} \chi(x)$ neexistuje – libovolně malé okolí obsahuje 1 i 0).

Příklad 19

Funkce $f(x) = x \cdot \chi(x)$ je spojitá v bodě $x_0 = 0$ a není spojitá v žádném jiném bodě.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x}_{\rightarrow 0 \text{ ohraničená}} \chi(x) = 0$$

Poznámka

Představa, že funkce je spojitá jestliže se „nepřetrhne“ platí, ale je zavádějící. Např. funkce $f(x) = x(x - 1)(x - 2)\chi(x)$ je spojitá v bodech 0, 1 a 2.

Věta 22 (Spojitost operací se spojitými funkcemi)

Nechť f, g jsou funkce spojité v x_0 . Pak jsou v x_0 spojitě i funkce $f \pm g$, $f \cdot g$ a je-li $g(x_0) \neq 0$, je spojitá i funkce f/g .

Je-li h funkce, která je spojitá v bodě $y_0 = f(x_0)$, pak je v x_0 spojitá i funkce $(h \circ f)(x) = h(f(x))$.

Důkaz.

Tvrzení plyne z příslušných vět pro limitu funkce. □

Věta 23 (O spojitosti elementárních funkcí)

- (i) Polynom $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ je funkce spojitá na celém \mathbb{R} .
- (ii) Racionální lomená funkce je spojitá ve všech bodech, kde je polynom ve jmenovateli různý od nuly.
- (iii) Funkce $\sin x$ a $\cos x$ jsou spojitě na \mathbb{R} ; funkce $\operatorname{tg} x$ je spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$; funkce $\operatorname{cotg} x$ je spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- (iv) Funkce a^x je spojitá na \mathbb{R} .

Důkaz.

- (i) $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$, tedy $f(x) = x$ je spojitá na \mathbb{R} . Ze spojitosti operací (V.22) vyplývá spojitost $P(x)$ na \mathbb{R} .
- (ii) $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, pak f je spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{\alpha : Q(\alpha) = 0\}$.
- (iii) Pro $f(x) = \sin x$ potřebujeme dokázat, že $\lim_{x \rightarrow x_0} (\sin x - \sin x_0) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\sin x - \sin x_0) = 2 \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\left(\cos \frac{x+x_0}{2}\right)}_{\text{ohraničená}} \cdot \underbrace{\left(\sin \frac{x-x_0}{2}\right)}_{\rightarrow 0} = 0.$$

- (iv) $\lim_{x \rightarrow x_0} (a^x - a^{x_0}) = \lim_{x \rightarrow x_0} a^{x_0} \underbrace{(a^{x-x_0} - 1)}_{\rightarrow 1} = 0$. □

Věta 24

Nechť f je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu I , pak inverzní funkce f^{-1} je také spojitá a rostoucí (klesající) na

$$f(I) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in I, f(x) = y\}.$$

Důkaz.

Předpokládejme, že f je rostoucí (pro klesající postupujeme obdobně). Tvrzení o monotonii f^{-1} bylo dokázáno už dříve, stačí tedy dokázat spojitost.

Nechť $y_0 \in f(I)$. Potřebujeme dokázat, že ke $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$:

$$y \in \mathcal{O}_\delta(y_0) \Rightarrow f^{-1}(y) \in \mathcal{O}_\varepsilon(f^{-1}(y_0)).$$

Tuto konstrukci lze provést záměnou ε a δ v definici spojitosti funkce f v bodě $x_0 = f^{-1}(y_0)$, tj. v definici $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. □

Věta 25 (1. Weierstrassova věta)

Nechť funkce f je na uzavřeném intervalu $[a, b]$ spojitá. Pak je na tomto intervalu ohraničená, tj. existuje $M \geq 0: |f(x)| \leq M \forall x \in [a, b]$, neboli $f([a, b])$ je ohraničená množina.

Důkaz.

Sporem předpokládejme, že f není shora ohraničená (pro ohraničenost zdola by se postupovalo obdobně), tj.

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \text{ takové, že } f(x_n) > n.$$

Posloupnost $x_n \in [a, b]$, tzn. že je ohraničená a podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty existuje vybraná konvergentní podposloupnost $x_{n_k} \rightarrow c \in [a, b]$. Ze spojitosti f plyne $f(x_{n_k}) \rightarrow f(c)$ a současně $f(x_{n_k}) > n_k \rightarrow \infty$. Spor – posloupnost nemůže jít současně ke konstantě a do nekonečna. □

Věta 26 (2. Weierstrassova věta)

Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$, dále necht

$$M = \sup\{f(x), x \in [a, b]\} \text{ a } m = \inf\{f(x), x \in [a, b]\}.$$

Pak existují čísla x_1, x_2 taková, že $f(x_1) = M, f(x_2) = m$. Tedy spojitá funkce nabývá na uzavřeném intervalu své největší a nejmenší hodnoty.

Důkaz.

Dokážeme pro M (pro m analogicky). Podle definice suprema

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in [a, b] : f(x) > M - \varepsilon \text{ a } M \geq f(x).$$

$$\varepsilon_1 = 1 \Rightarrow \exists x_1 \in [a, b] : M \geq f(x_1) > M - \varepsilon_1,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \exists x_2 \in [a, b] : M \geq f(x_2) > M - \varepsilon_2,$$

⋮

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow \exists x_n \in [a, b] : M \geq f(x_n) > M - \varepsilon_n.$$

Výsledkem konstrukce je posloupnost $x_n \in [a, b]: M \geq f(x_n) > M - \frac{1}{2^{n-1}}$.

Posloupnost x_n je ohraničená, tedy (podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty) existuje vybraná konvergentní podposloupnost, tj.

$$\exists x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} c \in [a, b].$$

Funkce f je spojitá, pak podle věty 21

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(c) \text{ a současně } M \geq f(x_{n_k}) > M - \frac{1}{2^{n-1}},$$

tj. $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = M$ a tedy $f(c) = M$. Bod c je proto hledaným bodem, v němž funkce nabývá hodnotu M . □

Věta 27 (1. Bolzanova věta)

Nechť funkce f je spojítá na intervalu $[a, b]$ a v krajních bodech intervalu nabývá hodnot s opačným znaménkem ($f(a) \cdot f(b) < 0$). Pak existuje číslo $c \in (a, b)$ takové, že $f(c) = 0$.

Důkaz.

Použijeme metodu půlení intervalů. Nechť $x_1 \in (a, b)$. Pak nastává jedna z následujících možností.

- 1 $f(x_1) = 0 \Rightarrow c = x_1$
- 2 $f(x_1) \neq 0$, pak alespoň jeden z intervalů $[a, x_1]$, $[x_1, b]$ má funkce f v krajních bodech opačné znaménko – zvolíme x_2 z tohoto intervalu.
 - 1 $f(x_2) = 0 \Rightarrow c = x_2$
 - 2 $f(x_2) \neq 0$, pak alespoň jeden z intervalů ...

Tuto konstrukci opakujeme a buď po konečném počtu kroků najdeme $c : f(c) = 0$, nebo je výsledkem posloupnost vnořených uzavřených intervalů $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n = [a_n, b_n]$ s opačnými znaménky v krajních bodech.

Tedy $b_n - a_n \rightarrow 0$, pak (dle principu vnořených intervalů)

$$\exists! c \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n, \text{ tj. } c = \lim a_n \text{ a } c = \lim b_n.$$

Ze spojítosti plyne

$$\lim_{\substack{a_n \\ < 0}} f(a_n) = f(c) \leq f(c) \quad \wedge \quad \lim_{\substack{b_n \\ > 0}} f(b_n) = f(c) \geq f(c)$$

↓

$$f(c) \leq 0 \wedge f(c) \geq 0 \Rightarrow f(c) = 0.$$

□

Věta 28 (2. Bolzanova věta)

Nechť funkce f je spojítá na intervalu $[a, b]$ a

$$M = \sup\{f(x), x \in [a, b]\}, \quad m = \inf\{f(x), x \in [a, b]\}.$$

Pak

$$\forall y \in [m, M] \exists c \in [a, b] : f(c) = y.$$

Tj. spojítá funkce na uzavřeném intervalu nabývá všech hodnot mezi svou největší a nejmenší hodnotou.

Důkaz.

Pokud $y = M$, nebo $y = m$, tvrzení plyne z 2. Weierstrassovy věty.

Pokud $y \in (m, M)$, pak uvažujme funkci

$$g(x) = f(x) - y.$$

Nechť $x_1, x_2 \in [a, b]$ jsou taková, že $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$, pak

$$g(x_1) = m - y < 0, \quad g(x_2) = M - y > 0.$$

Funkce g je spojitá a podle 1. Bolzanovy věty existuje číslo c : $g(c) = 0$, tedy $f(c) = y$. □

Poznámka

- Důsledek – „spojitý obraz spojitého je spojitý“

$$f([a, b]) = [m, M].$$

- Předpoklad spojitosti na *uzavřeném* intervalu $[a, b]$ nelze zeslabit, např. nahradit spojitostí na (a, b) :

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ je na } (0, 1) \text{ spojitá, ale ne omezená.}$$

- Polynom $P(x)$ lichého stupně má aspoň jeden reálný kořen.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty \quad (\text{nebo obráceně}).$$

\Rightarrow musí protnout osu x .

- Metoda půlení intervalů = numerické řešení rovnice $f(x) = 0$.

Body nespojitosti

Rozlišujeme následující typy bodů nespojitosti.

- (a) *Odstranitelná nespojitost:*

Existuje vlastní limita $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, ale $L \neq f(x_0)$.
($f(x_0)$ nemusí být ani definována.)

- (b) *Nespojitost prvního druhu (skok):*

Existují obě vlastní jednostranné limity $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L_1$ a $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L_2$, ale $L_1 \neq L_2$.

- (c) *Nespojitost druhého druhu:*

Aspoň jedna jednostranná limita neexistuje, nebo je nevlastní.

Spojitě dodefinování

Má-li funkce f v bodě x_0 odstranitelnou nespojitost a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, můžeme ji v tomto bodě *spojitě dodefinovat* jako

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} L, & x = x_0, \\ f(x), & x \in \mathcal{D}(f) \setminus \{x_0\}. \end{cases}$$

Příklad 20

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Funkce není spojítá v bodě $x = 0$, neboť $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq f(0)$, $x = 0$ je odstranitelná nespojítost.

Příklad 21

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

Funkce má skok v $x = 0$.

Příklad 22

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Límata $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ neexistuje, tedy $x = 0$ je nespojítost druhého druhu.

Příklad 23

$$f(x) = e^{1/x}$$

Jedna jednostranná límata je nevlastní, tedy $x = 0$ je bod nespojítosti druhého druhu.