Riemannův integrál v $\mathbb{R}^n$

Petr Hasil

Přednáška z Matematické analýzy

Obsah

1. Konstrukce
   - Jordanova míra
   - Konstrukce Riemannova integrálu
2. Výpočet Riemannova integrálu
   - Základní postup
   - Transformace dvojného a trojného integrálu
   - Nevlastní vícerozměrné integrály
     - Nevlastní integrál z neohraničené funkce
     - Nevlastní integrál na neomezené množině
   - Integrály závislé na parametru
   - Eulerova Gamma funkce

Obsah

3. Křivkový integrál
   - Křivkový integrál prvního druhu (KI ze skalární funkce)
   - Křivkový integrál druhého druhu (KI z vektorového pole)
   - Greenova věta a nezávislost na integrační cestě
   - Křivkový integrál v prostoru
4. Plošný integrál
   - Motivace, diferenciální geometrie ploch v $\mathbb{R}^3$
   - Plošný integrál prvního a druhého druhu
   - Gaussova–Ostrogradského a Stokesova věta

$$n = 1: \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \quad F' = f$$

$$n = 2: \quad D \subseteq \mathbb{R}^2, f\colon D \to \mathbb{R}, \quad \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ?$$

$$n = 3, 4, \dots$$

Podmnožině $\mathbb{R}^n$ přiřadíme reálné číslo.
Pro $A \subseteq \mathbb{R}^n$ značí $m(A)$ *míru množiny A* (tj. $m(\cdot)$ je zobrazení z množiny podmnožin $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}_0^+ = [0, \infty)$).
Míra by měla splňovat (přirozené) podmínky pro (měřitelné) $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$

- $A = B \quad \Rightarrow \quad m(A) = m(B)$
- $A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad m(A) \leq m(B)$
- $A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

V poslední podmínce se někdy nahrazuje $A \cap B = \emptyset$ za slabší podmínku $m(A \cap B) = 0$ (platnost dokážeme jako Větu 3). Pojem míry sjednocuje a zobecňuje pojem obsahu a objemu množin z $\mathbb{R}^n$, je tedy také přirozené očekávat např. v $\mathbb{R}^2$, že $m([0,1] \times [0,1]) = 1$.

Formálně množinovou funkci $m(\cdot)$ nazýváme mírou, jestliže

1. $m(\emptyset) = 0$,
2. $m(A) \geq 0 \quad \forall A$ (nezápornost),
3. $A_n, n \in M \subseteq \mathbb{N}$, po dvou disjunktní množiny, pak
$$m(\bigcup A_n) = \sum m(A_n).$$

Jestliže vztah platí pro spočetnou množinu M, tedy lze i $M = \mathbb{N}$, pak mluvíme o spočetné aditivitě, neboli σ-aditivitě, pokud platí jen pro konečné počty množin A_n, jedná se o konečnou aditivitu.

Definice 1

Nechť $n, j, k \in \mathbb{Z}, n \geq 0$. Množinu

$$W_{j,k}^n = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : \frac{j}{2^n} \leq x \leq \frac{j+1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \leq y \leq \frac{k+1}{2^n} \right\}$$

nazýváme *čtverec řádu n*.

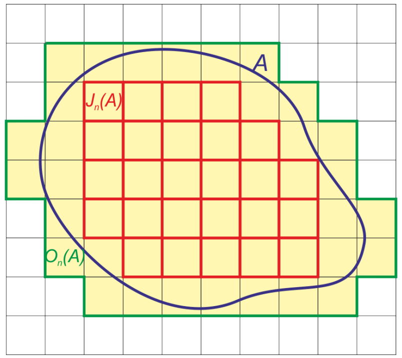
- Množinu všech čtverců řádu n nazýváme *síť řádu n*.
- Síť řádu 0 nazýváme *základní síť*.
- Konečné sjednocení čtverců řádu n nazýváme *elementární množina řádu n*.
- Číslo $m(W_{j,k}^n) = \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = \frac{1}{4^n}$ nazýváme *mírou čtverce řádu n*.
- *Míra elementární množiny řádu n* je součtem měr všech čtverců, které ji tvoří.
- Klademe $m(\emptyset) = 0$.

Poznámka

- Často nezáleží na konkrétní poloze daného čtverce a dolní indexy se proto vynechávají.
- Každý čtverec řádu n je sjednocením čtyř čtverců řádu $n+1$, tedy platí
$$m(W^n) = 4 \cdot m(W^{n+1}).$$

Definice 2

- *Jádro* řádu n omezené množiny A, označíme $J_n(A)$, je elementární množina řádu n tvořená čtverci, které jsou podmnožinami vnitřku množiny A.
- *Obal* řádu n omezené množiny A, označíme $O_n(A)$, je elementární množina řádu n tvořená čtverci, které mají neprázdný průnik s uzávěrem množiny A.



Platí

$$J_n(A) \subseteq J_{n+1}(A), \qquad O_n(A) \supseteq O_{n+1}(A),$$

tedy

$$m(J_n(A)) \leq m(J_{n+1}(A)), \qquad m(O_n(A)) \geq m(O_{n+1}(A)).$$

Dále platí $\forall n, m \in \mathbb{N} : J_n(A) \subseteq O_m(A)$, neboť

$$J_n(A) \subseteq A^\circ \subseteq \overline{A} \subseteq O_m(A) \quad \Rightarrow \quad m(J_n(A)) \leq m(O_m(A)).$$

Odtud ihned dostáváme, že posloupnost $m(J_n(A))$ je neklesající a shora ohraničená. Podobně posloupnost $m(O_n(A))$ je nerostoucí a zdola ohraničená.

Tedy existují konečné limity

$$m_*(A) = \lim_{n\to\infty} m(J_n(A)), \qquad m^*(A) = \lim_{n\to\infty} m(O_n(A)).$$

$m_*(A)$ se nazývá *dolní (vnitřní) Jordanova míra* a $m^*(A)$ se nazývá *horní (vnější) Jordanova míra*.
Samozřejmě platí

$$0 \leq m_*(A) \leq m^*(A).$$

Definice 3

Řekneme, že omezená množina A je *Jordanovsky měřitelná* (dále jen měřitelná), pokud $m_*(A) = m^*(A)$, a definujeme její Jordanovu míru jako

$$m(A) = m_*(A) = m^*(A).$$

Poznámka

1. Pokud $m^*(A) = 0$, je A měřitelná a $m(A) = 0$, neboť $m_*(A) \geq 0$ a $m_*(A) \leq m^*(A)$, což platí pro každou omezenou množinu $A \subseteq \mathbb{R}^2$.
2. Pokud je A tvořena konečným počtem bodů v rovině, pak $m(A) = 0$.
3. V teorii Riemannova integrálu bylo uvedeno tvrzení:
   Funkce f je integrovatelná na intervalu $[a, b]$ právě tehdy, když $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ takové, že pro každé dělení D intervalu $[a, b]$ s normou $\nu(D) < \delta$ platí
   $$S(D, f) - s(D, f) < \varepsilon.$$
   Podobné tvrzení platí pro míru:
   Omezená množina $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná právě tehdy, když
   $$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : m(O_n(A)) - m(J_n(A)) < \varepsilon.$$

Budeme používat značení

- A° = vnitřek množiny A,
- $\overline{A}$ = uzávěr množiny A,
- $h(A)$ = hranice množiny A,
- A^c = doplněk množiny A.

Příklad 1

Nechť $A = [0,1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$, tj. body z jednotkového čtverce s racionálními souřadnicemi, pak A není měřitelná.

$$A^\circ = \emptyset, m_*(A) = 0, \overline{A} = [0,1]^2$$

$$\Rightarrow \quad m(O_n(A)) \geq 1 \quad (\overline{A} \subseteq O_n(A)) \quad \Rightarrow \quad m^*(A) \geq 1$$

Věta 1

Omezená množina $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná právě tehdy, když $m(h(A)) = 0$.

Důkaz.

Tvrzení plyne z rovnosti

$$\underbrace{m(O_n(A))}_{\to m^*(A)} = \underbrace{m(J_n(A))}_{\to m_*(A)} + \underbrace{m(O_n(h(A)))}_{m^*(h(A))}$$

pro $n \to \infty$, $\overline{A} = A^\circ \cup h(A)$. □

Věta 2

Nechť A, B jsou měřitelné množiny, pak množiny

$$A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$$

jsou také měřitelné.

Důkaz.

A, B jsou měřitelné, tedy $m(h(A)) = 0 = m(h(B))$.

- $h(A \cup B) \subseteq h(A) \cup h(B) \Rightarrow$
  $0 \leq m^*(h(A \cup B)) \leq m^*(h(A)) + m^*(h(B)) = 0 \Rightarrow A \cup B$ je měřitelná.
- $h(A \setminus B) = h(A \cap B^c) \subseteq h(A) \cup h(B^c) = h(A) \cup h(B)$
  $\Rightarrow 0 \leq m^*(h(A \setminus B)) \leq m^*(h(A)) + m^*(h(B)) = 0$
  $\Rightarrow A \setminus B$ je měřitelná.
- $h(A \cap B) \subseteq h(A) \cup h(B) \Rightarrow m^*(h(A \cap B)) = 0 \Rightarrow A \cap B$ je měřitelná.

□

Poznámka

Jestliže $A_1, \dots, A_n$ jsou měřitelné množiny, pak množina $A_1 \cup \dots \cup A_n$ je měřitelná.

Toto tvrzení neplatí pro spočetná sjednocení!

Hlavní nevýhodou Jordanovy míry je, že je pouze konečně aditivní, ale není spočetně aditivní. Např. $A = [0,1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$ je spočetná, míra jednobodové množiny je nula, přitom A není měřitelná.

Věta 3

Jsou-li A, B měřitelné a $m(A \cap B) = 0$, pak

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B).$$

Důkaz.

Předpokládejme, že $A \cap B = \emptyset$, pak

$$m_*(A) + m_*(B) \leq m_*(A \cup B) \leq m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B),$$

tedy vzhledem k měřitelnosti A a B máme

$$m(A) + m(B) \leq m_*(A \cup B) \leq m^*(A \cup B) \leq m(A) + m(B).$$

Nechť platí pouze předpoklady věty, zejména $m(A \cap B) = 0$. Máme $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, přičemž $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, tedy víme, že

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B \setminus A). \tag{1}$$

Jistě platí $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$, kde $(B \setminus A) \cap (A \cap B) = \emptyset$, tedy

$$m(B) = m(B \setminus A) + m(A \cap B). \tag{2}$$

Odečtením rovnice (2) od rovnice (1) obdržíme

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B).$$

$\square$

Lemma 1

Jordanova míra rovnoběžníku R o straně a s výškou v_a je

$$m(R) = a \cdot v_a.$$

Lemma 2

Jordanova míra rovnoběžníku R daného vektory $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)$ je rovna absolutní hodnotě determinantu

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}.$$

Je-li $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineární zobrazení, pak existuje matice $L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}$ taková, že

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} L \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Věta 4 (Závislost míry na lineární transformaci)

Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná, $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je regulární lineární zobrazení a L je libovolná matice reprezentující toto zobrazení. Pak množina $\mathcal{L}(A)$ je měřitelná a

$$m(\mathcal{L}(A)) = |\det L| \cdot m(A).$$

Regulární lineární zobrazení: $\det L \neq 0$.

Důkaz.
Lineární zobrazení transformuje systém rovnoběžných stejně vzdálených přímek na jiný systém rovnoběžných stejně vzdálených přímek, tj. síť čtverců řádu n je transformována na soustavu shodných rovnoběžníků. Potřebujeme tedy nejprve určit $m(L(W^n))$ (např. $m(L(W^n_{0,0}))$).
Čtverec $W^n_{0,0}$ je dán vektory $(2^{-n},0),(0,2^{-n})$ a rovnoběžník $L(W^n_{0,0})$ je dán vektory $u=\left(\frac{\ell_{11}}{2^n},\frac{\ell_{21}}{2^n}\right)$, $v=\left(\frac{\ell_{12}}{2^n},\frac{\ell_{22}}{2^n}\right)$, tedy

$$m(L(W^n_{0,0}))=\begin{vmatrix}\frac{\ell_{11}}{2^n} & \frac{\ell_{12}}{2^n}\\ \frac{\ell_{21}}{2^n} & \frac{\ell_{22}}{2^n}\end{vmatrix}=\frac{1}{2^{2n}}|\det L|=m(W^n_{0,0})|\det L|.$$

Předpokládejme, že se jádro $J_n(A)$ množiny A skládá z k čtverců řádu n. Protože z $J_n(A)\subseteq A$ plyne $\mathcal{L}(J_n(A))\subseteq\mathcal{L}(A)$, máme

$$m_*(\mathcal{L}(A))\geq m_*(\mathcal{L}(J_n(A)))=m_*\left(\mathcal{L}\left(\bigcup_{(p,q)\in I}W^n_{p,q}\right)\right),$$

kde I je k-prvková množina dvojic celých čísel. Jistě platí

$$\bigcup_{(p,q)\in I}\mathcal{L}(W^n_{p,q})\subseteq\mathcal{L}\left(\bigcup_{(p,q)\in I}W^n_{p,q}\right).$$

Každá z množin $\mathcal{L}(W^n_{p,q})$ je měřitelná a vzájemně mají společnou nejvýše hranici o míře nula.

Tím dostáváme

$$\begin{aligned}m_*(\mathcal{L}(A))&\geq m_*\left(\mathcal{L}\left(\bigcup_{(p,q)\in I}W^n_{p,q}\right)\right)\geq m_*\left(\bigcup_{(p,q)\in I}\mathcal{L}\left(W^n_{p,q}\right)\right)\\&=\sum_{(p,q)\in I}m\left(\mathcal{L}\left(W^n_{p,q}\right)\right)=\sum_{(p,q)\in I}|\det L|m\left(W^n_{p,q}\right)\\&=|\det L|\sum_{(p,q)\in I}m\left(W^n_{p,q}\right)=|\det L|m(J_n(A)).\end{aligned}$$

Analogicky platí

$$m^*(\mathcal{L}(A))\leq|\det L|m(O_n(A)).$$

Celkem tedy máme

$$|\det L|m(J_n(A))\leq m_*(\mathcal{L}(A))\leq m^*(\mathcal{L}(A))\leq|\det L|m(O_n(A)).$$

Nyní stačí použít limitní přechod $n\to\infty$ a větu o třech limitách. □

Poznámka

$\mathcal{L}\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2:\|x\|=\|\mathcal{L}x\|\ \forall x\in\mathbb{R}^2$ (izometrie), $\mathcal{L}: Lx+q$ a platí $\langle x,y\rangle=\langle Lx,Ly\rangle=\langle x,L^TLy\rangle=\langle x,y\rangle$ (L je ortogonální matice), tedy Jordanova míra je invariantní vzhledem k ortogonálnímu zobrazení ($m(\mathcal{L}(A))=m(A)$).

Poznámka

Jordanovu míru v $\mathbb{R}^k$ pro $k \in \mathbb{N}$ lze konstruovat analogicky s použitím k-rozměrných krychlí řádu n

$$W^n_{m_1,\dots,m_k} = \left\{[x_1,\dots,x_k] \in \mathbb{R}^k : \frac{m_1}{2^n} \le x_1 \le \frac{m_1+1}{2^n}, \dots \right.$$
$$\left. \dots \frac{m_k}{2^n} \le x_k \le \frac{m_k+1}{2^n} \right\}$$

s Jordanovou mírou $m(W^n) = \frac{1}{2^{kn}}$.

Věta 5

Nechť funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je na uzavřeném intervalu $[a,b]$ spojitá, pak její graf $G(f) = \{[x, f(x)], x \in [a,b]\}$ má míru nula v prostoru $\mathbb{E}^2$, tj. $m(G(f)) = 0$. Zejména podgraf nezáporné funkce je měřitelná množina, neboť míra její hranice je nula.

Poznámka

Řekneme, že funkce f je *stejnoměrně spojitá* na intervalu $[a,b]$, pokud

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in [a,b], |x_1 - x_2| < \delta : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Pro funkci f na uzavřeném intervalu $[a,b]$ je stejnoměrná spojitost ekvivalentní s („normální“) spojitostí.

Důkaz.

Funkce f je stejnoměrně spojitá na $[a,b]$. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné, pak k $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$|x_1 - x_2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Množinu $G(f)$ pokryjeme obdélníky s výškou $\frac{\varepsilon}{b-a}$ a základnou δ. Pro součet těchto obdélníků platí

$$\sum \frac{\varepsilon}{b-a}(x_{i+1} - x_i) = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum (x_{i+1} - x_i) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Protože ε bylo libovolné, $m^*(G(f)) = 0$. □

Shrnutí

- Jordanova míra $m(A)$ je konečně aditivní (není spočetně aditivní).
- Třída jordanovsky měřitelných množin se nezmění, pokud síť zjemňujeme nikoliv 2^2-krát (1 čtvereček na 4 malé), ale n^2-krát, kde n je libovolné přirozené číslo.
- V $\mathbb{E}^1$ jde v podstatě o dělení intervalu (místo čtverečků máme úsečky).

Náčrt konstrukce Lebesgueovy míry

Lebesgueova míra je založena na následujícím tvrzení.

Věta 6

Nechť $A \subseteq \mathbb{R}$ je otevřená množina. Pak existuje nejvýše spočetně mnoho otevřených, po dvou disjunktních intervalů $(\alpha_n, \beta_n), n \in \mathbb{N}$, tak, že $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\alpha_n, \beta_n)$.

- $m_L(A) = \sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n - \alpha_n)$ pro omezenou otevřenou množinu $A \subseteq \mathbb{R}$
- $A \subset \mathbb{R}$ uzavřená a omezená, tj. $\exists c, d \in \mathbb{R} : A \subseteq (c,d) \Rightarrow (c,d) \setminus A$ je otevřená množina a tedy $m_L(A) = (d-c) - m_L((c,d) \setminus A)$
- nechť $A \subseteq \mathbb{R}$ je libovolná omezená množina, pak $m_L^*(A) = \inf m(B)$, $A \subseteq B$, B je otevřená; $m_{*L}(A) = \sup m(B)$, $B \subseteq A$, B je uzavřená
- $m_L^* = m_{*L}$, pak je množina lebegueovsky měřitelná

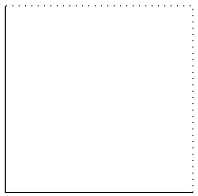
Příklad 2

$m_L([0,1]^2 \cap \mathbb{Q}^2) = ?$
Je rovno nule, každý bod má míru nula a Lebesgueova míra je spočetně aditivní.

Existuje $A \subseteq \mathbb{R}$ omezená, pro niž $m_{*L}(A) < m_L^*(A)$, tj. není lebesgueovsky měřitelná?

(Lze je zkonstruovat s použitím axiomu výběru, např. Vitaliho nebo Bernsteinova konstrukce.)

Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná, omezená množina a $f : A \to \mathbb{R}$ je omezená funkce na A. Síť řádu n vytvoří tzv. *pokrytí* řádu n množiny A. Čtverce



s touto dohodou jsou navzájem disjunktní množiny. Položíme $A = \bigcup_{j=1}^{m} D_j$, kde množiny D_j jsou tvaru $D_j^n = A \cap C_j^n$, kde C_j^n je nějaký čtverec sítě řádu n.

Systém $\{D_1^n, \dots, D_m^n\}$ se nazývá *pokrytí* řádu n množiny A. Každá z množin D_j^n je měřitelná, neboť je průnikem měřitelných množin.

Poznámka

Obecně v $\mathbb{R}^k$ používáme tzv. *krychlové množiny řádu n*

$$C^n_{j_1,\dots,j_k} = \left\{[x_1,\dots,x_k] \in \mathbb{R}^k : \frac{i_1}{2^n} \le x_1 < \frac{i_1+1}{2^n}, \dots, \frac{i_k}{2^n} \le x_k < \frac{i_k+1}{2^n}\right\},$$

což jsou (neuzavřené) po dvou disjunktní měřitelné množiny pokrývající $\mathbb{R}^k$ s mírou $m(C^n) = 2^{-kn}$.

Konstrukci a vlastnosti si pro přehlednost předvedeme v $\mathbb{R}^2$.

Nechť

$$M_j = \sup_{[x,y]\in D_j^n} f(x,y), \quad m_j = \inf_{[x,y]\in D_j^n} f(x,y),$$

pak definujeme

$$S_n(f,A) = \sum_{j=1}^{m} M_j \cdot m(D_j^n), \quad s_n(f,A) = \sum_{j=1}^{m} m_j \cdot m(D_j^n)$$

horní a dolní součet řádu n a platí

$$S_{n+1}(f,A) \leq S_n(f,A), \quad s_{n+1}(f,A) \geq s_n(f,A),$$

tj. posloupnost $\{S_n(f,A)\}$ je nerostoucí a zdola ohraničená a posloupnost $\{s_n(f,A)\}$ je neklesající a shora ohraničená, pak existují

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f,A) =: \overline{\iint_A} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad \lim_{n\to\infty} s_n(f,A) =: \underline{\iint_A} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

horní a dolní Riemannův integrál funkce f na množině A.

Definice 4

Pokud se horní Riemannův integrál rovná dolnímu, tj.

$$\overline{\iint_A} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \underline{\iint_A} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

řekneme, že funkce f je na A riemannovsky integrovatelná a definujeme

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \overline{\iint_A} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \underline{\iint_A} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Poznámka

Pro $n=1$ lze použít libovolné dělení D, popř. se omezit na dyadické dělení $D^{[2]}$ (dyadická čísla $\frac{m}{2^n}, m,n\in\mathbb{N}$). Samozřejmě platí $D \supset D^{[2]}$, tedy

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \geq [2]\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq [2]\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

odkud ihned plyne, že $[2]\underline{\int} \leq \underline{\int} \leq \overline{\int} \leq [2]\overline{\int}$. Tento vztah musí platit i naopak, jinak by šlo o jinou konstrukci.

Např. víme, že platí: *Je-li D_n nulová posloupnost dělení, pak*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} s(f,D_n).$$

Věta 7

Nechť $A\subseteq\mathbb{R}^2$ je měřitelná a omezená množina, $f,g\colon A\to\mathbb{R}$. Jsou-li f,g integrovatelné na A, pak jsou na A integrovatelné i funkce $f\pm g$ a platí

$$\iint_A f(x,y)\pm g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \pm \iint_A g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Dále, pro $\alpha\in\mathbb{R}$ libovolné je integrovatelná i funkce $\alpha\cdot f$ a platí

$$\iint_A \alpha\cdot f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \alpha\cdot\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Důkaz.

$$\underline{\iint}_A (f+g)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty} s_n(f+g,A) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{m} \inf_{D_j^n}(f+g)\cdot m(D_j^n)$$

$$\ge \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{m}\left(\inf_{D_j^n} f + \inf_{D_j^n} g\right) m(D_j^n) = \lim_{n\to\infty}[s_n(f,A)+s_n(g,A)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} s_n(f,A) + \lim_{n\to\infty} s_n(g,A) = \underline{\iint}_A f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \underline{\iint}_A g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

podobně $\overline{\iint}_A (f+g)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le \overline{\iint}_A f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \overline{\iint}_A g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Celkem tedy máme

$$\underline{\iint}_A f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \underline{\iint}_A g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le \underline{\iint}_A (f+g)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le \overline{\iint}_A (f+g)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$\le \overline{\iint}_A f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \overline{\iint}_A g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Jsou-li f, g integrovatelné, sevřou integrály mezi sebou.
Násobení konstantou dokážeme podobně. Jen je potřeba hlídat znaménko konstanty α, tj. je-li $\alpha \ge 0$, je vše v pořádku; je-li $\alpha < 0$, potom např.

$$\sup(\alpha f) = \alpha \inf(f).$$

Rozdíl je triviálním důsledkem předchozího. □

Věta 8

Nechť f je integrovatelná na omezené měřitelné množině $A \subseteq \mathbb{R}^2$ a $B \subseteq A$ je měřitelná množina. Pak funkce f je integrovatelná i na B.

Důkaz.

Nechť je $\{D_1^n, \dots, D_m^n\}$ pokrytí řádu n množiny A. Toto pokrytí vytváří přirozeným způsobem pokrytí

$$\{D_1^n \cap B, \dots, D_m^n \cap B\}, \qquad \{D_1^n \cap (A \setminus B), \dots, D_m^n \cap (A \setminus B)\}$$

množin B a $A \setminus B$. Platí

$$s_n(A,f) \le s_n(B,f) + s_n(A\setminus B, f), \qquad S_n(A,f) \ge S_n(B,f) + S_n(A\setminus B,f),$$

a pro $n \to \infty$ máme

$$\underline{\iint}_B f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \underline{\iint}_{A\setminus B} f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \ge \underline{\iint}_A f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$\ge \overline{\iint}_B f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \overline{\iint}_{A\setminus B} f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Tedy

$$0 \geq \underline{\iint}_B f \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} - \overline{\iint}_B f \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$$

$$\geq \overline{\iint}_{A\smallsetminus B} f \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} - \underline{\iint}_{A\smallsetminus B} f \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} \geq 0.$$

Odtud ihned

$$\underline{\iint}_B f \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \overline{\iint}_B f \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}, \qquad \underline{\iint}_{A\smallsetminus B} f \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \overline{\iint}_{A\smallsetminus B} f \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}.$$

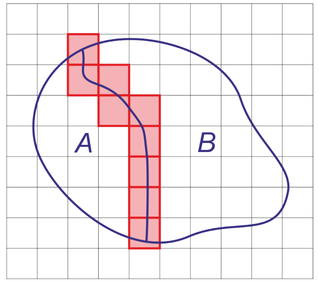
□

Věta 9

Nechť f je integrovatelná na měřitelných, omezených a disjunktních množinách $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak je f integrovatelná i na $A \cup B$ a platí

$$\iint_{A\cup B} f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \iint_A f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} + \iint_B f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}.$$

Důkaz.



Tři druhy čtverečků – pouze A, pouze B a smíšené. Míra smíšených jde k nule.

□

Věta 10

Nechť funkce f je omezená na A a $m(A) = 0$. Pak je f na A integrovatelná a platí

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = 0.$$

Důkaz.

Máme $|f(x,y)| \leq M$ na A, odtud

$$-M \cdot m(A) \leq s_n(f,A) \leq S_n(f,A) \leq M \cdot m(A).$$

□

Důsledek 1

Nechť A, B jsou měřitelné množiny a platí $m(A \cap B) = 0$. Je-li funkce f integrovatelná na A i na B, pak je integrovatelná i na $A \cup B$ a platí

$$\iint_{A\cup B} f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \iint_A f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} + \iint_B f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}.$$

Plyne ihned z Vět 9 a 10 a faktu, že

$$A \cup B = (A \smallsetminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \smallsetminus A).$$

(Jedná se o zesílení Věty 9.)

Věta 11

Nechť je funkce f spojitá a omezená na omezené měřitelné množině $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak je funkce f na množině A integrovatelná.

Důkaz.

Podobně jako u jednorozměrných integrálů je důkaz založen na tvrzení, že f je integrovatelná právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : S_n(f, A) - s_n(f, A) < \varepsilon.$$

□

Snadno pro integrál v $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^k$) dostaneme i další tvrzení známá z $\mathbb{R}^1$.

Věta 12

Nechť jsou funkce f, g integrovatelné na měřitelné množině $A \subseteq \mathbb{R}^2$ a platí $f(x, y) \leq g(x, y)$, $\forall (x, y) \in A$. Pak

$$\iint_A f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \leq \iint_A g(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Věta 13

Nechť je funkce f integrovatelné na měřitelné množině $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak je i funkce $|f|$ na množině A integrovatelná a platí

$$\left| \iint_A f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \right| \leq \iint_A |f(x, y)| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Definice 5

Řekneme, že funkce $f : A \to \mathbb{R}$ má *skoro všude* na množině A vlastnost V, jestliže existuje množina B taková, že $B \subseteq A, m(B) = 0$ a funkce f má vlastnost V ve všech bodech množiny $A \setminus B$.
(Tj. vlastnost není splněna na množině míry nula, přičemž $m(\emptyset) = 0$.)

Věta 14

Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je omezená měřitelná množina a $f, g : A \to \mathbb{R}$, kde f je na A integrovatelná a g je na A omezená. Pokud platí $f(x, y) = g(x, y)$ skoro všude na A, pak je na A funkce g integrovatelná a

$$\iint_A g(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_A f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Důkaz.

Funkce $F(x, y) = f(x, y) - g(x, y) = 0$ skoro všude na A, tedy $\exists B \subseteq A, m(B) = 0$ a $F(x, y) = 0$ na $A \setminus B$. Potom

$$\iint_A F = \iint_B F + \iint_{A \setminus B} F = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \iint_A f = \iint_A g.$$

□

Věta 15

Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je omezená a měřitelná množina a nechť $f\colon A \to \mathbb{R}$ je omezená a skoro všude spojitá na A. Pak je funkce f na A integrovatelná.

Důkaz.

Existuje množina $B \subseteq A$ taková, že $m(B) = 0$ a f je spojitá na $A \setminus B$. Pak podle Věty 11 je funkce f integrovatelná na $A \setminus B$ a podle Věty 10 je $\iint_B f = 0$, tedy $\iint_A f$ existuje a je roven $\iint_{A \setminus B} f$. □

- $\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ... dvojný integrál
- $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$ ... dvojnásobný integrál

Věta 16

Nechť $A = [a,b] \times [c,d]$ je obdélník v $\mathbb{R}^2$ a funkce $f\colon A \to \mathbb{R}$ je na množině A spojitá. Pak

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

Důkaz.

Označme $F(x) = \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$. Tato funkce je korektně definována, neboť integrand je spojitá funkce proměnné y. Síť řádu n, označme $\{D_1^n, \dots, D_m^n\}$, tvoří pokrytí $A = [a,b] \times [c,d]$ a současně vytváří dělení intervalů $[a,b]$ i $[c,d]$. Nechť $[a,b] = \bigcup_{i=1}^p K_i^n$ a $[c,d] = \bigcup_{i=1}^q J_i^n$. Dále označme

$$u_{ij}^n = \inf_{[x,y] \in K_i^n \times J_j^n} f(x,y), \qquad U_{ij}^n = \sup_{[x,y] \in K_i^n \times J_j^n} f(x,y).$$

Potom

$$S_n(f,A) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q U_{ij}^n \underbrace{m(K_i^n) m(J_j^n)}_{m(D_{ij}^n)},$$

$$s_n(f,A) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q u_{ij}^n m(K_i^n) m(J_j^n).$$

Máme tedy pro $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$ a $\xi_i \in K_i^n$ libovolné, že

$$s_n(F,[a,b]) = \sum_{i=1}^p \inf_{x \in K_i^n} F(x) m(K_i^n) \le \underbrace{\sum_{i=1}^p F(\xi_i) m(K_i^n)}_{\sum_{i=1}^p \left(\int_c^d f(\xi_i,y)\,\mathrm{d}y\right) m(K_i^n)} \le \sum_{i=1}^p \sup_{x \in K_i^n} F(x) m(K_i^n)$$

a pro $\int_c^d f(\xi_i,y)\,\mathrm{d}y$, $\eta_i \in J_i^n$ libovolné, při označení $G(y) := f(\xi_i,y)$

$$s_n(G,[c,d]) = \sum_{j=1}^q \inf_{y \in J_i^n} G(y) m(J_i^n) \le \sum_{j=1}^q G(\eta_i) m(J_i^n) \le \sum_{j=1}^q \sup_{y \in J_i^n} G(y) m(J_i^n).$$

Spojením předchozích nerovností obdržíme

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} u_{ij}^n m(K_i^n) m(J_i^n)}_{\to \underline{\iint} f \, dx \, dy} \leq \underline{\int_a^b} \underline{\int_c^d} f \, dx \, dy \leq \underline{\int_a^b} \overline{\int_c^d} f \, dx \, dy$$

$$\leq \overline{\int_a^b} \underline{\int_c^d} f \, dx \, dy \leq \overline{\int_a^b} \overline{\int_c^d} f \, dx \, dy \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} U_{ij}^n m(K_i^n) m(J_i^n)}_{\to \overline{\iint} f \, dx \, dy}.$$

Opačné pořadí integrace získáme zcela analogicky (přeznačením). □

Věta 17 (Fubiniho věta)

Nechť f je spojitá na množině

$$A = \{[x, y] : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\},$$

kde $g, h \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ jsou funkce spojité na intervalu $[a, b]$. Pak

$$\iint_A f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Podobně pro

$$A = \{[x, y] : y \in [c, d], g(y) \leq x \leq h(y)\}, \quad g, h \in C[c, d],$$

platí

$$\iint_A f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Důkaz.

Nechť $Q = [a, b] \times [c, d]$, $A \subseteq Q$ a definujme funkci $\tilde{f} \colon Q \to \mathbb{R}$ jako

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & [x, y] \in A \\ 0 & [x, y] \in Q \setminus A \end{cases}$$

$\tilde{f}$ je spojitá s výjimkou grafů g, h, tedy je skoro všude spojitá na Q, odtud

$$\iint_A f(x, y) \, dx \, dy = \iint_Q \tilde{f}(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \int_c^d \tilde{f}(x, y) \, dy \, dx$$

$$= \int_a^b \left(\underbrace{\int_c^{g(x)} \tilde{f} \, dy}_{=0} + \int_{g(x)}^{h(x)} \tilde{f} \, dy + \underbrace{\int_{h(x)}^{d} \tilde{f} \, dy}_{=0} \right) dx$$

$$= \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

□

Poznámka

Je-li ve větě o integraci přes obdélník funkce f pouze integrovatelná, platí

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\underline{\int_c^d} f(x, y) \, dy \right) dx = \int_a^b \left(\overline{\int_c^d} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Pokud označíme

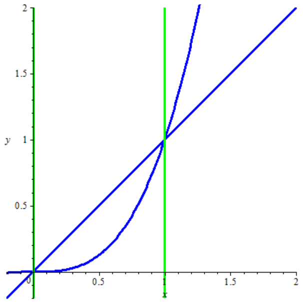
$$F(x) = \underline{\int_c^d} f(x, y) \, dy, \qquad G(x) = \overline{\int_c^d} f(x, y) \, dy,$$

může nastat případ, kdy $F(x) < G(x)$ v jistých bodech $x \in [a, b]$, ale množina těchto bodů má Jordanovu míru rovnu nule, tedy

$$\int_a^b F(x) \, dx = \int_a^b G(x) \, dx.$$

Příklad 3

Vypočtěte $\iint_A x^3y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $A=\{[x,y]:0\le x\le 1, x^3\le y\le x\}$.

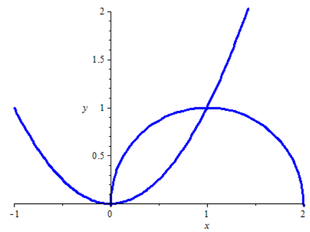


$$\iint_A x^3y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\int_{x^3}^{x}x^3y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1 x^3\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^3}^{x}\mathrm{d}x=\frac12\int_0^1 x^3(x^2-x^6)\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac12\int_0^1 x^5-x^9\,\mathrm{d}x=\frac12\left[\frac{x^6}{6}-\frac{x^{10}}{10}\right]_0^1$$
$$=\frac12\left(\frac16-\frac1{10}\right)=\frac1{30}$$

$$\iint_A x^3y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\int_y^{\sqrt[3]{y}}x^3y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1 y\left[\tfrac{x^4}{4}\right]_y^{\sqrt[3]{y}}\mathrm{d}y$$
$$=\tfrac14\int_0^1 y(y^{4/3}-y^4)\,\mathrm{d}y=\tfrac14\int_0^1 y^{7/3}-y^5\,\mathrm{d}y=\tfrac14\left[\tfrac{3}{10}y^{10/3}-\tfrac{y^6}{6}\right]_0^1$$
$$=\tfrac14\left(\tfrac{3}{10}-\tfrac16\right)=\tfrac1{30}$$

Příklad 4

Zaměňte pořadí integrace $\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.



$$y=\sqrt{2x-x^2}$$
$$y^2=2x-x^2$$
$$x^2-2x+1+y^2-1=0$$
$$(x-1)^2+y^2=1$$
$$x=1\pm\sqrt{1-y^2}$$
$$y=x^2\ \rightarrow\ x=\pm\sqrt{y}$$

Vybereme odpovídající horní, resp. dolní kousky, tedy

$$\int_0^1\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{y}}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Poznámka

Samozřejmě platí

$$\boxed{m(A)=\iint_A 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}.$$

Příklad 5

Vypočítejte míru množiny $A=\{[x,y]:-1\le x\le 1, 0\le y\le\sqrt{1-x^2}\}$.

$$I=\int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^1[y]_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=2\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$=\left|\begin{array}{l}x=\sin t,\ \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t\\ 0=\sin 0, 1=\sin\pi/2\end{array}\right|=2\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t$$
$$=2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}1+\cos 2t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}t+\underbrace{\int_0^{\pi/2}\cos 2t\,\mathrm{d}t}_{=0}=\frac{\pi}{2}$$

Věta 18

Uvažujme reálný interval $[a,b]$. Nechť

$$A=\left\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3: a\le x\le b, g(x)\le y\le h(x), G(x,y)\le z\le H(x,y)\right\},$$

kde funkce $g,h\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ jsou na $[a,b]$ spojité a funkce $G,H\colon B\to\mathbb{R}$ jsou spojité na množině

$$B=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2: a\le x\le b, g(x)\le y\le h(x)\right\}.$$

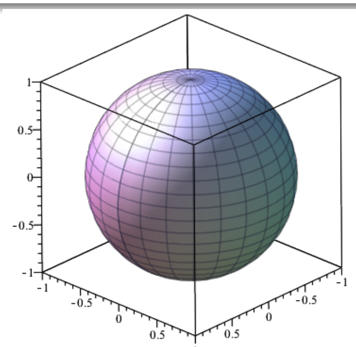
Pak, je-li $f\colon A\to\mathbb{R}$ spojitá na A, platí

$$\iiint_A f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_a^b\left(\int_{g(x)}^{h(x)}\left(\int_{G(x,y)}^{H(x,y)}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

Příklad 6

Vypočítejte $\iiint_A \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$, kde

$$A = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : -1 \le x \le 1, -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}, -\sqrt{1-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\right\}.$$



$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \mathrm{d}z\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2\sqrt{1-x^2-y^2}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$$

$$= \left| \begin{array}{l} y = \sqrt{1-x^2}\sin t,\ \mathrm{d}y = \sqrt{1-x^2}\cos t\, \mathrm{d}t \\ y = -\sqrt{1-x^2} \to t = -\pi/2, y = \sqrt{1-x^2} \to t = \pi/2 \end{array} \right|$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{(1-x^2)-(1-x^2)\sin^2 t}\,\sqrt{1-x^2}\cos t\, \mathrm{d}t\right) \mathrm{d}x$$

$$= 2\int_{-1}^{1}(1-x^2)\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x$$

$$= 2\int_{-1}^{1}(1-x^2)\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}(1-x^2)\pi\, \mathrm{d}x$$

$$= 2\pi\int_{0}^{1} 1-x^2\, \mathrm{d}x = 2\pi\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\pi\frac{2}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

Poznámka

Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $A = [a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ je n-rozměrný kvádr. Je-li f spojitá na A, pak

$$\int_A f(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\dots,x_n)\, \mathrm{d}x_n\cdots \mathrm{d}x_1.$$

Příklad 7

$\iiiint_A \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_3\, \mathrm{d}x_4$, kde $A = \{[x_1,x_2,x_3,x_4] : x_1 \in [0,1], x_2 \in [0,1-x_1], x_3 \in [0,1-x_1-x_2], x_4 \in [0,1-x_1-x_2-x_3]\}$.

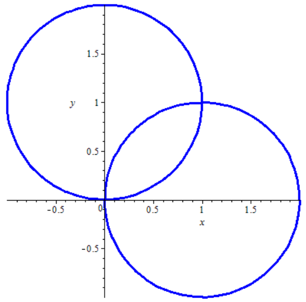
Takové množině A se říká *jednotkový simplex*, používá se k triangulaci n-rozměrných těles a v optimalizaci („n-rozměrný trojúhelník“).

$$\int_0^1\int_0^{1-x_1}\int_0^{1-x_1-x_2}\int_0^{1-x_1-x_2-x_3} \mathrm{d}x_4\, \mathrm{d}x_3\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_1$$
$$= \int_0^1\int_0^{1-x_1}\int_0^{1-x_1-x_2}(1-x_1-x_2-x_3)\, \mathrm{d}x_3\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_1$$
$$= \int_0^1\int_0^{1-x_1}\left[(1-x_1-x_2)x_3 - \tfrac{x_3^2}{2}\right]_0^{1-x_1-x_2} \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_1$$
$$= \int_0^1\int_0^{1-x_1}(1-x_1-x_2)^2 - \tfrac{1}{2}(1-x_1-x_2)^2\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_1$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_0^1\int_0^{1-x_1}(1-x_1-x_2)^2\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_1 = \tfrac{1}{2}\int_0^1\left[-\tfrac{(1-x_1-x_2)^3}{3}\right]_0^{1-x_1} \mathrm{d}x_1$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_0^1 \tfrac{1}{3}(1-x_1)^3\, \mathrm{d}x_1 = -\tfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}[(1-x_1)^4]_0^1 = \tfrac{1}{4!}$$

Příklad 8

Vypočtěte plochu obrazce daného nerovnostmi

$$x^2 - 2x + y^2 \le 0, \qquad x^2 - 2y + y^2 \le 0.$$



$$x^2 - 2x + y^2 \le 0$$
$$(x-1)^2 + y^2 \le 1$$
$$x = 1 - \sqrt{1-y^2},\ y = \sqrt{2x - x^2}$$

$$x^2 - 2y + y^2 \le 0$$
$$x^2 + (y-1)^2 \le 1$$
$$x = \sqrt{2y - y^2},\ y = 1 - \sqrt{1-x^2}$$

$$\iint_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{2x - x^2} - 1 + \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi - 2}{2}$$

$$\int_0^1 \sqrt{2x - x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = |x - 1 = t,\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t|$$
$$= \int_{-1}^0 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = |\text{ sudá funkce }| = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}\left[\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

- Střední hodnota:
$$\mathrm{av}(f) = \frac{\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{m(A)}.$$
- Uvažujme $\iint_A F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Je-li $\sigma(x,y)$ plošná hustota v bodě $[x,y]$ a $\rho(x,y)$ vzdálenost bodu $[x,y]$ od osy otáčení o, pak

funkce F	integrál z funkce F
1	Obsah množiny A (S)
$\sigma(x,y)$	hmotnost množiny A (m)
$y\sigma(x,y)$	lineární moment vzhl. k ose x (U_x)
$x\sigma(x,y)$	lineární moment vzhl. k ose y (U_y)
$y^2\sigma(x,y)$	moment setrvačnosti vzhl. k ose x (J_x)
$x^2\sigma(x,y)$	moment setrvačnosti vzhl. k ose y (J_y)
$\rho^2(x,y)\sigma(x,y)$	moment setrvačnosti vzhl. k ose o (J_o)
y^2	kvadratický moment průřezu vzhl. k ose x (I_x)
x^2	kvadratický moment průřezu vzhl. k ose y (I_y)
$\rho^2(x,y)$	kvadratický moment průřezu vzhl. k ose o (I_o)

- Souřadnice těžiště průřezu $[x_T, y_T]$ ($\sigma(x,y) = 1$):
$$x_T = \frac{\iint_A x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{S}, \qquad y_t = \frac{\iint_A y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{S}.$$

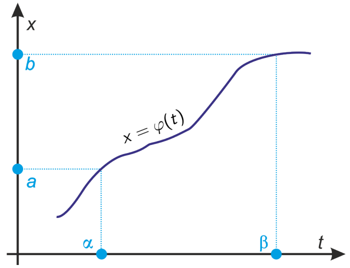
$\boxed{n=1}$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = |x=\varphi(t),\ \mathrm{d}x=\varphi'(t)\,\mathrm{d}t| = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

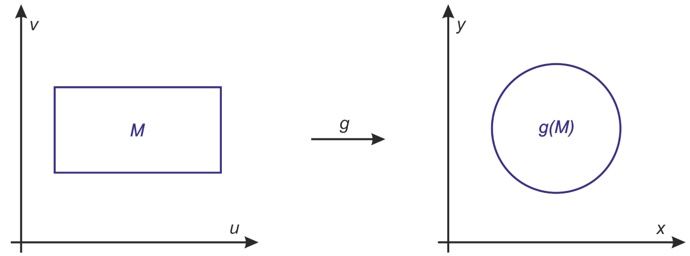
kde $a=\varphi(\alpha), b=\varphi(\beta)$. Také lze psát jako

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t,$$

kde $g'\neq 0$ (g je prostá).



$\boxed{n=2}$ zobrazení $g\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$, $x=x(u,v), y=y(u,v)$



Věta 19 (O transformaci)

Nechť $M\subseteq\mathbb{E}^2$ je otevřená množina v rovině (u,v), g je prosté zobrazení množiny M do roviny (x,y) dané funkcemi $x=x(u,v), y=y(u,v)$, které mají na M spojité parciální derivace prvního řádu. Nechť funkce

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

je různá od nuly a ohraničená na M. Nechť M a $g(M)$ jsou měřitelné množiny a funkce f je spojitá a ohraničená na $g(M)$. Pak platí

$$\iint_{g(M)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_M f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\cdot|J(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Hlavní idea důkazu.

Nechť $D_1,\dots,D_m$ je pokrytí řádu n množiny $g(M)$, pak

$$\tilde{D}_1=g^{-1}(D_1),\dots,\tilde{D}_m=g^{-1}(D_m)$$

pokrývají množinu M. Zvolme $[\xi_i,\eta_i]\in D_i$ a označme $[\tilde{\xi}_i,\tilde{\eta}_i]=g^{-1}([\xi_i,\eta_i])$. Utvořme integrální součet příslušný dvojnému integrálu přes $g(M)$

$$\sum_{i=1}^m f(\xi_i,\eta_i)m(D_i) \xrightarrow{n\to\infty} \iint_{g(M)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Jsou-li D_i malé, jsou také $\tilde{D}_i$ malé a pro $[x,y]\in D_i$ lze zobrazení g aproximovat jeho diferenciálem g' v bodě $[\tilde{\xi}_i,\tilde{\eta}_i]$, tj. lineárním zobrazením. Transformace míry při lineárním zobrazení je

$$m(D_i)=|\det g'(\xi_i,\eta_i)|m(\tilde{D}_i).$$

Dosazením dostáváme

$$\begin{array}{ccc} \sum_{i=1}^m f(\xi_i,\eta_i)m(D_i) & \approx & \sum_{i=1}^m f\big(x(\tilde{\xi}_i,\tilde{\eta}_i),y(\tilde{\xi}_i,\tilde{\eta}_i)\big)|\det g'(\xi_i,\eta_i)|m(\tilde{D}_i) \\ \downarrow n\to\infty & & \downarrow n\to\infty \\ \iint_{g(M)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y & & \iint_M f\big(x(u,v),y(u,v)\big)|\det g'|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \end{array}$$

Nejobtížnější technická záležitost je dokázat, že „≈“ mezi sumami přejde v limitě na rovnost mezi integrály. Lze to dokázat podobně jako pro jednorozměrný integrál pomocí Lagrangeovy věty o střední hodnotě. □

Transformace v $\mathbb{E}^2$ do polárních souřadnic je dána

$$x=\rho\cos\varphi,$$
$$y=\rho\sin\varphi,$$

kde $\rho\in[0,\infty)$ je vzdálenost od počátku (poloměr) a $\varphi\in[0,2\pi]$ (popř. $[-\pi,\pi]$) je odchylka od kladné poloosy x v kladném smyslu.

$$J(\rho,\varphi)=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \rho\neq 0$$

Příklad 9

Vypočítejte obsah množiny

$$M: x^2+y^2\leq 2x, y\geq 0.$$

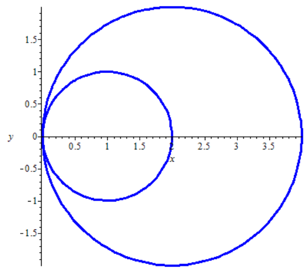
$$x^2+y^2\leq 2x \quad\Rightarrow\quad (x-1)^2+y^2\leq 1,$$

$$m(M)=\int_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\left|\begin{array}{ccc} x=\rho\cos\varphi & \rho\in(0,2\cos\varphi] & J(\rho,\varphi)=\rho\neq 0\\ y=\rho\sin\varphi & \varphi\in[0,\pi/2] & \end{array}\right|$$
$$=\iint_D \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho=\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\varphi}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi=\int_0^{\pi/2}\frac{4\cos^2\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi$$
$$=2\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi}{2}$$

Příklad 10

Vypočítejte obsah množiny

$$M=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:(x-1)^2+y^2-1\geq 0,(x-2)^2+y^2-4\leq 0\}.$$



$$\varphi\in[0,\pi/2],$$
$$\rho\in[2\cos\varphi,4\cos\varphi]$$

$$m(M)=\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint_D \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi=\int_0^{\pi/2}[\rho^2]_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi=\cdots=3\pi$$

Poznámka

Obsah obrazce v polárních souřadnicích

a) $n = 1, P = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$ (aproximace kruhovou výsečí),

b) $n = 2$, pomocí dvojného integrálu snadno odvodíme

$$P = \iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_0^{\rho(\varphi)} \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\rho(\varphi)}\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

Poznámka

Volba transformace pro $n = 1$ byla dána funkcí, pro $n = 2, 3, \dots$ je dána tvarem množiny, přes kterou integrujeme.

Věta 20 (O transformace trojného integrálu)

Nechť $M \subseteq \mathbb{E}^3$ je otevřená množina v prostoru (u, v, w), g je prosté zobrazení na M do prostoru (x, y, z) dané funkcemi $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$, které mají na M spojité parciální derivace prvního řádu. Nechť $J(u, v, w) \neq 0$ je ohraničené na M. Nechť M a $g(M)$ jsou měřitelné a funkce f je spojitá a ohraničená na $g(M)$. Pak platí

$$\iiint_{g(M)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_M f\big(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)\big)\cdot|J(u, v, w)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w.$$

Transformace v $\mathbb{E}^3$

- válcové (cylindrické) souřadnice

$$x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, z = z, \qquad J(\rho, \varphi, z) = \rho,$$

kde $\rho \in [0, \infty)$ je vzdálenost od osy z (poloměr válce) a $\varphi \in [0, 2\pi]$ (popř. $[-\pi, \pi]$) je odchylka od kladné poloosy x v kladném smyslu v rovině rovnoběžné s rovinou xy.

- sférické (kulové) souřadnice

$$x = \rho\cos\varphi\sin\vartheta, y = \rho\sin\varphi\sin\vartheta, z = \rho\cos\vartheta, \quad J(\rho, \varphi, \vartheta) = -\rho^2\sin\vartheta$$

kde $\rho \in [0, \infty)$ je vzdálenost od počátku (poloměr koule), $\varphi \in [0, 2\pi]$ (popř. $[-\pi, \pi]$) je odchylka od kladné poloosy x v projekci do roviny xy (rovina $z = 0$) a $\vartheta \in [0, \pi]$ je odchylka od kladné poloosy z.

Transformace v $\mathbb{E}^n$ do hypersférických souřadnic

$$\begin{aligned}
x_1 &= \rho\cos\varphi\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cdots\sin\vartheta_{n-3}\sin\vartheta_{n-2},\\
x_2 &= \rho\sin\varphi\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cdots\sin\vartheta_{n-3}\sin\vartheta_{n-2},\\
x_3 &= \rho\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2\cdots\sin\vartheta_{n-3}\sin\vartheta_{n-2},\\
&\vdots\\
x_{n-1} &= \rho\cos\vartheta_{n-3}\sin\vartheta_{n-2},\\
x_n &= \rho\cos\vartheta_{n-2},
\end{aligned}$$

kde $\rho \in [0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ (popř. $[-\pi, \pi]$) a $\vartheta_i \in [0, \pi], i = 1, \dots, n-2$.

$$J(\rho, \varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-2}) = (-1)^n\rho^{n-1}\sin\vartheta_1\sin^2\vartheta_2\cdots\sin^{n-2}\vartheta_{n-2}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = \rho^2$$

Poznámka

- $\rho \in [0, \infty)$ je vzdálenost od počátku,
- $\varphi \in [0, 2\pi]$ (popř. $[-\pi, \pi]$) je odchylka průvodiče projekce daného bodu do roviny $x_1 x_2 \dots x_{n-1}$ (rovina $x_n = 0$) od kladné poloosy x_1,
- $\vartheta_{n-2} \in [0, \pi]$ je odchylka průvodiče daného bodu od kladné poloosy x_n,
- $\vartheta_{n-3} \in [0, \pi]$ je odchylka průvodiče projekce daného bodu do roviny $x_n = 0$ od kladné poloosy x_{n-1},
- $\vartheta_{n-4} \in [0, \pi]$ je odchylka průvodiče projekce daného bodu do roviny $x_n = 0$ promítnuté do roviny x_{n-1} od kladné poloosy x_{n-2},
- $\dots$.

Poznámka

- Samozřejmě existuje celá řada dalších často používaných transformací (např. zobecněné sférické pro elipsoidy) a snadno lze dle tvaru množiny vytvořit transformaci „na míru“.
- Uvedené vzorce pro transformace nejsou jediné možné, (hyper)sférické souřadnice (a tedy i polární) lze použít i např. takto

$$\begin{aligned}
x_1 &= \rho \cos\varphi \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \cdots \cos\vartheta_{n-3} \cos\vartheta_{n-2},\\
x_2 &= \rho \sin\varphi \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \cdots \cos\vartheta_{n-3} \cos\vartheta_{n-2},\\
x_3 &= \rho \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \cdots \cos\vartheta_{n-3} \cos\vartheta_{n-2},\\
&\ \vdots\\
x_{n-1} &= \rho \sin\vartheta_{n-3} \cos\vartheta_{n-2},\\
x_n &= \rho \sin\vartheta_{n-2},
\end{aligned}$$

kde $J(\rho, \varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-2}) = \rho^{n-1} \cos\vartheta_1 \cos^2\vartheta_2 \cdots \cos^{n-2}\vartheta_{n-2}$.

Nevlastní integrál z neohraničené funkce

Uvažujme funkci f definovanou na neprázdné množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

Definice 6

Bod $A \in \overline{\Omega}$ se nazývá *singulární bod* funkce f, jestliže f není ohraničená na žádné množině tvaru $\Omega \cap \mathcal{O}(A)$, kde $\mathcal{O}(A)$ je libovolné kruhové okolí bodu A.

Protože bod A nemůže být izolovaným bodem množiny Ω, jsou možné dva případy. Buď je A vnitřním bodem množiny Ω, nebo je jejím hromadným hraničním bodem; v druhém případě nemusí A ležet v množině Ω.

Definice 7

Řekneme, že posloupnost omezených množin $\{M_n\}$, $M_n \subseteq \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$, se *smršťuje k bodu A*, jestliže

1. Bod A je vnitřním bodem každé z množin M_n.
2. Platí $\lim_{n\to\infty} d(M_n) = 0$.

- Číslo $d(M) = \sup\{\rho(X, Y) : X, Y \in M\}$ je průměr množiny $M \subseteq \mathbb{R}^2$, přitom ρ je eukleidovská metrika v $\mathbb{R}^2$.
- Množiny M_n nemusí být souvislé.
- Posloupnost množin M_n nemusí být monotónní vzhledem k inkluzi.

Předpoklad 1

Funkce f je integrovatelná na každé množině $\Omega \setminus M$, kde $M \subset \mathbb{R}^2$ je libovolná měřitelná množina obsahující A ve svém vnitřku. (Z tohoto předpokladu plyne, že množina Ω je měřitelná.)

Definice 8

Nechť funkce f je definovaná na omezené množině $\Omega \setminus \{A\}, \Omega \subset \mathbb{R}^2$, kde A je singulární bod funkce f splňující Předpoklad 1. Řekneme, že *nevlastní integrál* z funkce f *konverguje* na množině Ω, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{\Omega\setminus M_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = K$$

pro libovolnou posloupnost měřitelných množin $\{M_n\}$ smršťujících se k bodu A. Pak píšeme

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = K.$$

V opačném případě, tj. pokud takové číslo neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál z funkce f na množině Ω *diverguje*.

Lemma 3

Nechť funkce f je integrovatelná na měřitelné množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Nechť posloupnost měřitelných množin $\{M_n\}$ se smršťuje k bodu $A \in \overline{\Omega}$. Pak platí

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{\Omega\setminus M_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Poznámka

Pokud tedy použijeme postup pro nevlastní integrál na vlastní integrál, dostaneme správný výsledek.

Důkaz.

Podle předpokladu je funkce f integrovatelná na Ω, tedy existuje konstanta k taková, že $|f(x,y)| \le k$ pro každé $[x,y] \in \Omega$. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí rovnost $\Omega \setminus (\Omega \setminus M_n) = \Omega \cap M_n$. Jelikož $d(M_n) \to 0$ pro $n \to \infty$, bude $m(M_n) \to 0$ pro $n \to \infty$. Protože množiny $\Omega \cap M_n$ jsou měřitelné a $\Omega \cap M_n \subseteq M_n$, dostaneme

$$0 \le m(\Omega \cap M_n) \le m(M_n),$$

tedy $m(\Omega \cap M_n) \to 0$ pro $n \to \infty$. Odtud ihned

$$\left|\iint_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{\Omega\setminus M_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| = \left|\iint_{\Omega\cap M_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \le$$
$$\le \iint_{\Omega\cap M_n} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \iint_{\Omega\cap M_n} k\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = k \cdot m(\Omega\cap M_n) \to 0$$

pro $n \to \infty$, což dokazuje tvrzení. □

Věta 21

Nechť funkce f, g jsou definované na omezené množině $\Omega \setminus \{A\}, \Omega \subset \mathbb{R}^2$, a A je jejich společný singulární bod. Nechť obě funkce splňují Předpoklad 1. Jestliže nevlastní integrály

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \iint_{\Omega} g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

konvergují a α, β jsou libovolné konstanty, pak konverguje také integrál $\iint_{\Omega} [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (pokud je vůbec nevlastní) a platí

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} &[\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \alpha \iint_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \beta \iint_{\Omega} g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{3}$$

Důkaz.

Nechť $\{M_n\}$ je libovolná posloupnost měřitelných množin, která se smršťuje k bodu A. Podle předpokladů platí rovnosti

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{\Omega\smallsetminus M_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\lim_{n\to\infty}\iint_{\Omega\smallsetminus M_n} g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Omega} g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Z linearity vlastního integrálu vzhledem k integrandu plyne, že

$$\iint_{\Omega\smallsetminus M_n}\big[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)\big]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \alpha\iint_{\Omega\smallsetminus M_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\beta\iint_{\Omega\smallsetminus M_n} g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Odtud limitním přechodem pro $n\to\infty$ dostáváme

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{\Omega\smallsetminus M_n}\big[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)\big]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \alpha\iint_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\beta\iint_{\Omega} g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Pokud je $\iint_\Omega\big[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)\big]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ nevlastní, znamená to podle Definice 8, že je konvergentní, protože posloupnost $\{M_n\}$ byla libovolná, a že platí rovnost (3). Vzhledem k Lemmatu 3 je tato rovnost platná i v případě, že je zmíněný integrál vlastní. □

Věta 22

Nechť je nezáporná funkce f definovaná na omezené množině $\Omega\smallsetminus\{A\},\Omega\subset\mathbb{R}^2$, kde A je singulární bod funkce f splňující Předpoklad 1. Pak je nevlastní integrál

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

konvergentní právě tehdy, když existuje posloupnost měřitelných množin $\{M_n\}$ smršťující se k bodu A taková, že číselná posloupnost mající členy

$$\iint_{\Omega\smallsetminus M_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad n\in\mathbb{N},$$

je ohraničená.

Důkaz.

Viz skripta. □

Důsledek 2

Nechť je nezáporná funkce f definovaná na omezené množině $\Omega\smallsetminus\{A\},\Omega\subset\mathbb{R}^2$, kde A je singulární bod funkce f splňující Předpoklad 1. Buď $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost kruhů se středy v bodě A a poloměry r_n, přičemž posloupnost $\{r_n\}$ je klesající a $r_n\to 0$ pro $n\to\infty$. Pak je intergál

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

konvergentní právě tehdy, když je posloupnost

$$\iint_{\Omega\smallsetminus K_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad n\in\mathbb{N}$$

ohraničená.

Příklad 11

Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je měřitelná množina, $A = [x_0, y_0]$ je její vnitřní bod a α je reálné číslo. Označme

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Dokažte, že nevlastní integrál

$$\iint_M \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha}$$

konverguje pro $0 < \alpha < 2$ a diverguje $\alpha \geq 2$ (pro $\alpha \leq 0$ jde o vlastní integrál).

Bod A je pro $\alpha > 0$ zřejmě singulárním bodem integrandu $1/r^\alpha$, protože $1/r^\alpha \to \infty$ pro $[x, y] \to [x_0, y_0]$.

Díky aditivitě vlastního integrálu vzhledem k integračnímu oboru, lze množinu M při vyšetřování konvergence nahradit kruhem K se středem A o dostatečně malém poloměru $R > 0$. (Může se tak změnit hodnota, ale nikoli konvergence/divergence.)

Označme K_n kruh se středem v A a poloměrem $1/n, n \in \mathbb{N}$. Posloupnost $\{K_n\}$ se smršťuje k singulárnímu bodu A a pro každé $n \geq n_0$, kde $n_0 = \lfloor 1/R \rfloor + 1$, je $K_n \subset K$. Vypočítáme integrály

$$\iint_{K \setminus K_n} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha}, \quad n \geq n_0.$$

Protože množina $K \setminus K_n$ je mezikruží se středem v bodě A s poloměry $1/n$ a R, použijeme transformaci, která je složením transformace do polárních souřadnic a posunutí o vektor (x_0, y_0).

Tedy $x = x_0 + \rho\cos\varphi, y = y_0 + \rho\sin\varphi, J = \rho$. Množina $K \setminus K_n$ je obrazem obdélníku $L_n = [1/n, R] \times [0, 2\pi]$. Vyjde

$$\iint_{K \setminus K_n} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha} = \iint_{L_n} \frac{\rho\, \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi}{\rho^\alpha} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{1/n}^R \rho^{1-\alpha}\, \mathrm{d}\rho$$
$$= \begin{cases} 2\pi \left[\frac{\rho^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_{1/n}^R = \frac{2\pi}{2-\alpha}(R^{2-\alpha} - n^{\alpha-2}) & \text{pro } \alpha \neq 2, \\ 2\pi[\ln \rho]_{1/n}^R = 2\pi(\ln R + \ln n) & \text{pro } \alpha = 2. \end{cases}$$

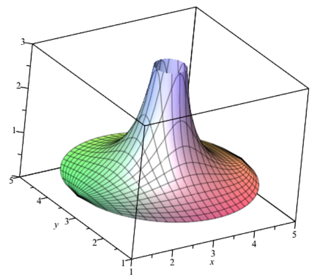
Odtud je vidět, že pro $0 < \alpha < 2$ je

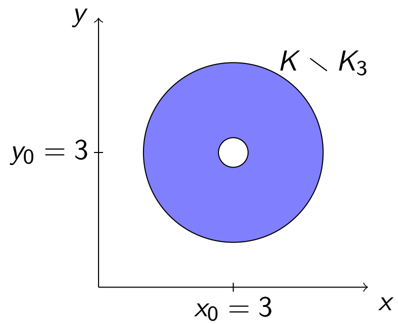
$$\lim_{n\to\infty} \iint_{K \setminus K_n} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha} = \frac{2\pi R^{2-\alpha}}{2 - \alpha}$$

a pro $\alpha \geq 2$ je

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{K \setminus K_n} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha} = \infty.$$

Protože integrand je kladná funkce, podle Důsledku 2 integrál konverguje právě pro $0 < \alpha < 2$. Na obrázcích je horní a dolní hranice tělesa omezeného shora grafem funkce $1/r^\alpha$ a zdola rovinou $z = 0$ na mezikruží $K \setminus K_3$ pro $\alpha = 1, x_0 = y_0 = 3$ a $R = 2$.





Poznámka

Analogicky lze dokázat zobecnění výsledku z předchozího příkladu.

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná množina, $A = [y_1, \dots, y_n]$ je její vnitřní bod a α je reálné číslo. Označme $r = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$. Pak nevlastní integrál $\int \cdots \int_M \frac{1}{r^\alpha}\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$ konverguje pro $0 < \alpha < n$ a diverguje pro $\alpha \geq n$ (pro $\alpha \leq 0$ jde o vlastní integrál).

Při výpočtu použijeme sférické souřadnice. Je-li speciálně $M = K$, kde K je n-rozměrná koule se středem v bodě A a poloměrem $R > 0$, vyjde pro $\alpha < n$ konvergentní integrál s hodnotou

$$\int \cdots \int_M \frac{1}{r^\alpha}\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \frac{R^{n-\alpha}}{(n-\alpha)(n-2)!!} \cdot 2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \cdot \pi^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

(Pro $n = 1$ položíme $(-1)!! = 1$.)

Vzorec platí i pro $\alpha \leq 0$, kdy jde o vlastní integrál.

Věta 23 (Srovnávací kritérium)

Nechť jsou nezáporné funkce f, g definované na omezené množině $\Omega \smallsetminus \{A\}, \Omega \subset \mathbb{R}^2$, a A je jejich společný singulární bod. Nechť obě funkce splňují Předpoklad 1. Předpokládejme, že platí $f(x, y) \leq g(x, y)$ pro každé $[x, y] \in \Omega$.

1. *Jestliže integrál $\iint_\Omega g(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ konverguje, konverguje i integrál $\iint_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.*
2. *Jestliže integrál $\iint_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ diverguje, diverguje i integrál $\iint_\Omega g(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.*

Lemma 4

Nechť je funkce f definovaná na omezené množině $\Omega \smallsetminus \{A\}, \Omega \subset \mathbb{R}^2$, kde A je singulární bod funkce f splňující Předpoklad 1. Jestliže nevlastní integrál

$$\iint_\Omega |f(x, y)|\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

konverguje, konverguje i integrál

$$\iint_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Důkaz.

Položme $g = |f| - f$. Pak platí $0 \leq g \leq 2|f|$ na Ω. Ze srovnávacího kritéria (Věta 23) a předpokladu, že integrál $\iint_\Omega |f(x, y)|\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ konverguje, plyne, že rovněž integrál $\iint_\Omega g(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ konverguje. Protože $f = |f| - g$, vyplývá z Věty 21, že integrál $\iint_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ je konvergentní. □

Věta 24

Nechť funkce f, g jsou definované na omezené množině $\Omega \smallsetminus \{A\}, \Omega \subset \mathbb{R}^2$, a A je jejich společný singulární bod a nechť obě splňují Předpoklad 1. Předpokládejme, že funkce g je nezáporná, $|f(x, y)| \leq g(x, y)$ pro každé $[x, y] \in \Omega \smallsetminus \{A\}$ a integrál $\iint_\Omega g(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ je konvergentní. Pak je konvergentní i integrál $\iint_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Důkaz.

Tvrzení plyne z Věty 23 a Lemmatu 4. □

Definice 9

Řekneme, že nevlastní integrál $\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *konverguje absolutně*, jestliže konverguje integrál $\iint_\Omega |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Věta 25

Nechť funkce f je definovaná na omezené množině $\Omega \setminus \{A\}, \Omega \subset \mathbb{R}^2$, kde A je singulární bod funkce f splňující Předpoklad 1. Jestliže nevlastní integrál $\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ konverguje, pak konverguje i integrál

$$\iint_\Omega |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Tedy všechny konvergentní integrály jsou absolutně konvergentní.

Nevlastní integrál na neomezené množině

Pro každé $r > 0$ označme $K(r)$ kruh se středem v počátku a poloměrem r.

Definice 10

Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ neomezená množina. Řekneme, že posloupnost omezených množin $\{M_n\}, M_n \subseteq \mathbb{R}^2, n \in \mathbb{N}$, *vyčerpává množinu Ω*, jestliže

1. Platí $M_n \subset \Omega$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.
2. Ke každému $r > 0$ existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geq m$ platí $\Omega \cap K(r) \subset M_n$.

- Množiny M_n nemusí být souvislé.
- Posloupnost množin M_n nemusí být monotónní vzhledem k inkluzi.

Uvažujme funkci f definovanou na neomezené množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. O funkci f učiníme následující předpoklad.

Předpoklad 2

Funkce f je integrovatelná na každé (omezené) měřitelné množině $M \subset \Omega$.

Definice 11

Nechť funkce f je definovaná na neomezené množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ a splňuje Předpoklad 2. Řekneme, že *nevlastní integrál* z funkce f *konverguje* na množině Ω, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{M_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = K$$

pro libovolnou posloupnost měřitelných množin $\{M_n\}$, která vyčerpává množinu Ω. Pak píšeme

$$\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = K.$$

V opačném případě, tj. pokud takové číslo neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál z funkce f na množině Ω *diverguje*.

Příklad 12

Ukažte, že nevlastní integrál

$$\iint_\Omega \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \Omega = \{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0, y\geq 0\},$$

diverguje.

Najdeme dvě vyčerpávající posloupnosti $\{K_n\}$ a $\{M_n\}$ takové, že

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{K_n}\sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \neq \lim_{n\to\infty}\iint_{M_n}\sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Tím bude dokázáno, že daný integrál diverguje.

Označme

$$K_R = \{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq R^2, x\geq 0, y\geq 0\},$$
$$M_a = \{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : 0\leq x\leq a, 0\leq y\leq a\}$$

pro $R>0$, $a>0$. Pak transformací do polárních souřadnic dostaneme

$$\iint_{K_R}\sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2}\int_0^R \rho\sin\rho^2\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2}\left[\frac{-\cos\rho^2}{2}\right]_0^R = \frac{\pi}{4}(1-\cos R^2),$$

tedy limita $\lim_{R\to\infty}\iint_{K_R}\sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ neexistuje.

Oproti tomu

$$\lim_{a\to\infty}\iint_{M_a}\sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{a\to\infty}\iint_{M_a}(\sin x^2\cos y^2+\cos x^2\sin y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \lim_{a\to\infty}\left(\int_0^a\sin x^2\,\mathrm{d}x\int_0^a\cos y^2\,\mathrm{d}y\right)+\lim_{a\to\infty}\left(\int_0^a\cos x^2\,\mathrm{d}x\int_0^a\sin y^2\,\mathrm{d}y\right)$$
$$= 2\int_0^\infty\sin x^2\,\mathrm{d}x\int_0^\infty\cos x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4},$$

protože pro Fresnelovy integrály platí (např. pomocí metod komplexní analýzy)

$$\int_0^\infty\sin x^2\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty\cos x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Přitom posloupnosti $\{K_n\},\{M_n\}$, kde $n\in\mathbb{N}$, jsou posloupnosti množin vyčerpávající Ω.

Nyní je možné přenést na tento typ nevlastního integrálu všechna tvrzení z předchozí sekce. Zejména platí, že každý integrál konverguje absolutně. (Důkazy jsou téměř analogické.)

Příklad 13

Nechť $M\subset\mathbb{R}^2$ je vnějšek otevřeného kruhu se středem v bodě $[x_0,y_0]$ a poloměrem $R>0$ a α je reálné číslo. Označme

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}.$$

Dokažte, že nevlastní integrál

$$\iint_M\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha}$$

konverguje pro $\alpha>2$ a diverguje pro $\alpha\leq 2$.

Výpočet bude podobný jako v příkladu 11.

Označme K_n mezikruží se středem v bodě $A = [x_0, y_0]$, vnitřním poloměrem R a vnějším poloměrem $n, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, kde $n_0 = \lfloor R \rfloor + 1$. Posloupnost $\{K_n\}$ zřejmě vyčerpává množinu M.

Vypočítáme integrály
$$\iint_{K_n} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha}, \quad n \geq n_0.$$
Protože množina K_n je mezikružím se středem v bodě A s poloměry R a n, použijeme transformaci, která je složením transformace do polárních souřadnic a posunutí o vektor (x_0, y_0). Tedy

$$x = x_0 + \rho\cos\varphi, \quad y = y_0 + \rho\sin\varphi, \quad J = \rho.$$

Množina K_n je obrazem obdélníku $L_n = [R, n] \times [0, 2\pi]$.

Dostaneme
$$\iint_{K_n} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha} = \iint_{L_n} \frac{\rho\, \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi}{\rho^\alpha} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_R^n \rho^{1-\alpha}\, \mathrm{d}\rho$$
$$= \begin{cases} 2\pi \left[\frac{\rho^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_R^n = \frac{2\pi}{2-\alpha}(n^{2-\alpha} - R^{2-\alpha}) & \text{pro } \alpha \neq 2, \\ 2\pi[\ln\rho]_R^n = 2\pi(\ln n - \ln R) & \text{pro } \alpha = 2. \end{cases}$$
Odtud je vidět, že pro $\alpha > 2$ je
$$\lim_{n\to\infty} \iint_{K_n} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha} = \frac{2\pi R^{2-\alpha}}{\alpha - 2}$$
a pro $\alpha \leq 2$ je
$$\lim_{n\to\infty} \iint_{K_n} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha} = \infty.$$
Protože integrand $1/r^\alpha$ je kladná funkce, podle analogie Důsledku 2 integrál konverguje právě pro $\alpha > 2$.

Uvažujme přirozená čísla p, q a označme jejich součet $p + q = k$. Dále uvažujme funkci k proměnných $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$

$$f(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^p$ a $B \subseteq \mathbb{R}^q$ jsou měřitelné množiny a nechť je funkce $f(\cdot, \mathbf{y})$ integrovatelná na A. Definujme funkci $g\colon B \to \mathbb{R}$ jako

$$g(\mathbf{y}) = \int_A f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Poznámka

Protože předchozí tvrzení formulovaná pro integrál v $\mathbb{R}^2$ lze analogicky dokázat i pro integrály v $\mathbb{R}^k, k \in \mathbb{N}$, budeme se na tato tvrzení odvolávat ve smyslu jejich zobecnění v $\mathbb{R}^k$.

Věta 26

Nechť je f spojitá na $A \times B$, kde A a B jsou kompaktní měřitelné množiny. Potom je funkce g spojitá na množině B, tj.

$$\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{y}_0} \int_A f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_A \left[\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{y}_0} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\right] \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Poznámka

Protože platí

- Spojitý obraz kompaktní množiny je kompaktní množina. (Spojité zobrazení mezi metrickými prostory.)
- Je-li daná množina v metrickém prostoru kompaktní, pak je uzavřená a ohraničená.

je funkce f ohraničená a vzhledem k Větě 11 je integrovatelná. Tedy funkce g je zavedena korektně.

Důkaz.

Nejprve vyřešme případ $m(A) = 0$. Potom dle Věty 10 je $g(\mathbf{y}) = 0\ \forall \mathbf{y} \in B$ a tvrzení triviálně platí.
Nyní nechť $m(A) > 0$ a $\mathbf{y}_0 \in B$ je libovolný bod a $\varepsilon > 0$ je libovolné číslo. Dále označme
$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2m(A)}.$$
Protože f je spojitá na kompaktní množině $A \times B$, je zde spojitá stejnoměrně, tj. k $\tilde{\varepsilon} > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že
$$|f(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) - f(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)| < \tilde{\varepsilon}$$
pro každé $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1), (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) \in A \times B$ splňující $\rho\big((\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1), (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)\big) < \delta$.
Tento fakt použijeme spolu s linearitou integrálu vzhledem k funkci (Věta 7), monotonii vzhledem k funkci (Věta 12) a integrálu absolutní hodnoty (Věta 13).

Pro libovolné $\mathbf{y} \in B$ splňující $\rho(\mathbf{y}, \mathbf{y}_0) < \delta$ platí
$$\begin{aligned}|g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{y}_0)| &= \left|\int_A f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{x} - \int_A f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0)\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right| \\ &= \left|\int_A f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0)\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right| \leq \int_A |f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0)|\,\mathrm{d}\mathbf{x} \\ &\leq \int_A \tilde{\varepsilon}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \tilde{\varepsilon} m(A) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,\end{aligned}$$
tedy funkce g je v $\mathbf{y}_0$ spojitá. □

Věta 27

Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^p$ je kompaktní měřitelná množina a nechť je funkce f spojitá na množině $A \times [a, b]$ a má na této množině spojitou parciální derivaci podle poslední proměnné. Pak má funkce $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$,
$$g(y) = \int_A f(\mathbf{x}, y)\,\mathrm{d}\mathbf{x},$$
na intervalu $[a, b]$ spojitou derivaci a platí
$$g'(y) = \int_A \frac{\partial f(\mathbf{x}, y)}{\partial y}\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Důkaz.

Nechť $y \in [a, b]$ je libovolné. Zaveďme funkci $\varphi\colon A \times [-\delta, \delta]$, $\delta = \min\{b - y, y - a\}$, jako
$$\varphi(\mathbf{x}, h) = \begin{cases} \frac{f(\mathbf{x}, y+h) - f(\mathbf{x}, y)}{h}, & h \neq 0 \\ \frac{\partial f(\mathbf{x}, y)}{\partial y}, & h = 0. \end{cases}$$
Tato funkce je spojitá, protože $\partial f / \partial y$ je spojitá. Dle Věty 26 je spojitá i funkce
$$\psi(h) = \int_A \varphi(\mathbf{x}, h)\,\mathrm{d}\mathbf{x}, \quad \psi\colon [-\delta, \delta] \to \mathbb{R},$$
tj.
$$\lim_{h \to 0} \psi(h) = \int_A \lim_{h \to 0} \varphi(\mathbf{x}, h)\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_A \frac{\partial f(\mathbf{x}, y)}{\partial y}\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Tedy

$$g'(y) = \lim_{h\to 0} \frac{g(y+h)-g(y)}{h} = \lim_{h\to 0} \int_A \frac{f(\mathbf{x},y+h)-f(\mathbf{x},y)}{h}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$
$$= \lim_{h\to 0} \int_A \varphi(\mathbf{x},h)\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \lim_{h\to 0} \psi(h) = \int_A \frac{\partial f(\mathbf{x},y)}{\partial y}\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Funkce g má tedy v y derivaci, jejíž spojitost na $[a,b]$ plyne z Věty 26 a ze spojitosti $\partial f/\partial y$ na $A \times [a,b]$. □

Věta 28

Nechť je f spojitá na měřitelné množině $A \times B$, kde A a B jsou měřitelné. Pak platí

$$\int_B \left[\int_A f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \right] \mathrm{d}\mathbf{y} = \int_A \left[\int_B f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} \right] \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Důkaz.

Spojitost funkce f zajišťuje integrovatelnost $f(\cdot,\mathbf{y})$ na A $\forall \mathbf{y} \in B$ a integrovatelnost $f(\mathbf{x},\cdot)$ na B $\forall \mathbf{x} \in A$. Tvrzení pak dokážeme pomocí Fubiniovy věty. □

Věta 29

Nechť je f spojitá na množině $(a,b)\times(c,d) \subseteq \mathbb{R}^2$ a má zde spojitou parciální derivaci podle druhé proměnné. Dále nechť φ, ψ jsou funkce definované na intervalu (c,d), mají na něm derivaci a splňují

$$a < \varphi(y) < b, \quad a < \psi(y) < b, \quad \forall y \in (c,d).$$

Pak má funkce

$$g(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x, \quad g\colon (c,d) \to \mathbb{R},$$

derivaci na (c,d) a platí

$$g'(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x + f(\psi(y),y)\psi'(y) - f(\varphi(y),y)\varphi'(y).$$

Důkaz.

Zavedeme funkci

$$F(y,u,v) = \int_u^v f(x,y)\,\mathrm{d}x, \quad F\colon (c,d)^3 \to \mathbb{R},$$

potom podle Věty 27

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_u^v \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x$$

a s využitím věty o derivaci integrálu jako funkce horní meze máme

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -f(u,y), \quad \frac{\partial F}{\partial v} = f(v,y).$$

Tedy funkce má spojité parciální derivace a podle věty o derivaci složené funkce dostáváme

$$\frac{\partial F}{\partial y} = F_y + F_u \frac{\partial u}{\partial y} + F_v \frac{\partial v}{\partial y} = \int_u^v \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\, \mathrm{d}x - f(u,y)u' + f(v,y)v',$$

což potvrzuje, vzhledem k $g(y) = F(y, \varphi(y), \psi(y))$, tvrzení věty. □

Příklad 14

Dokažte, že integrál

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t$$

konverguje absolutně pro každé $x > 0$.

Rozdělme integrační obor na dvě části např. číslem 1.

- Pro $x \in [1, \infty)$ integrál $\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t$ není nevlastní.
- Pro $x \in (0,1)$ použijeme limitní srovnávací kritérium pro jednoduché nevlastní integrály. Uvažujme číslo $\delta \in (0, x)$ a počítejme

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{|\, \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}|}{\frac{1}{t^{1-\delta}}} = \lim_{t\to 0^+} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-\delta} = 0 < \infty.$$

Protože nevlastní integrál $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t$ konverguje pro $\alpha < 1$ a máme $1 - \delta < 1$, konverguje i integrál $\int_0^1 |\, \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}|\, \mathrm{d}t$.

- Nyní uvažujme integrál $\int_1^\infty |\, \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}|\, \mathrm{d}t$. Opět použijeme limitní srovnávací kritérium pro jednoduché nevlastní integrály. Porovnávat budeme s $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\, \mathrm{d}t$ o kterém víme, že konverguje. Tedy

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|\, \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}|}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x+1} = \lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{e}^{\ln t^{x+1}}$$
$$= \lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{(x+1)\ln t - t} \overset{(*)}{=} 0 < \infty.$$

Tedy $\Gamma(x)$ skutečně absolutně konverguje $\forall x > 0$.

$(*)$ Protože $\lim_{u\to 0^+} u \ln u = \lim_{u\to 0^+} \frac{\ln u}{\frac{1}{u}} \overset{\text{l'Hosp.}}{=} 0$, máme

$$\lim_{t\to\infty} \left[(x+1)\ln t - t\right] = \left| t = \tfrac{1}{u}, u \to 0^+ \right| = \lim_{u\to 0^+} \left[(x+1)\ln\frac{1}{u} - \frac{1}{u}\right]$$
$$= \lim_{u\to 0^+} \frac{-(x+1)u\ln u - 1}{u} = -\infty.$$

Příklad 15

Dokažte, že pro každé $x > 0, n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\Gamma(x + n + 1) = \Gamma(x) \prod_{i=0}^{n} (x + i) \tag{4}$$

Budeme postupovat indukcí.

- Pro $n = 0$ snadno spočítáme

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^x\, \mathrm{d}t = \begin{vmatrix} u = t^x & u' = xt^{x-1} \\ v' = \mathrm{e}^{-t} & v = -\,\mathrm{e}^{-t} \end{vmatrix}$$
$$= -\left[t^x\, \mathrm{e}^{-t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty x\, \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t = x\Gamma(x).$$

- Nyní předpokládejme platnost (4) a proveďme indukční krok

$$\Gamma(x+n+2) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x+n+1}\, dt$$
$$\left| \begin{array}{ll} u = t^{x+n+1} & u' = (x+n+1)t^{x+n} \\ v' = e^{-t} & v = -e^{-t} \end{array} \right|$$
$$= -\left[t^{x+n+1} e^{-t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty (x+n+1)\, e^{-t}\, t^{x+n}\, dt = (x+n+1)\Gamma(x+n+1).$$

Poznámka

Protože

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1$$

plyne z příkladu 15 vztah

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

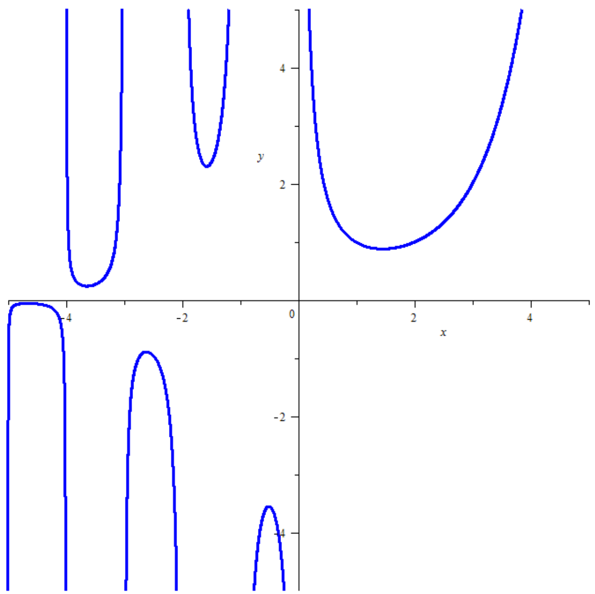
Definice 12

Eulerovu Gamma funkci definujeme jako

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt, & x > 0, \\ \frac{\Gamma(x-\lfloor x\rfloor)}{x(x+1)\dots(x-\lfloor x\rfloor-1)}, & x \in (-\infty, 0) \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Poznámka

- Tedy $D(\Gamma) = \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.
- Gamma funkci lze definovat pro libovolné komplexní číslo mimo $\{0, -1, -2, \dots\}$.



Věta 30

Pro každé $x \in D(\Gamma)$, $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\Gamma(x) = \Gamma(x-n)\prod_{i=1}^{n}(x-i). \tag{5}$$

Důkaz.

Pro $x > 0$ plyne z příkladu 15 vztah $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, který je dle definice 12 platný i pro $x \in (-1, 0)$ ($\lfloor x\rfloor = -1$). Pro $x < -1$ máme

$$\Gamma(x+1) = \frac{\Gamma(x+1-\lfloor x+1\rfloor)}{(x+1)(x+2)\dots(x+1-\lfloor x+1\rfloor-1)}$$
$$= x\frac{\Gamma(x-\lfloor x\rfloor)}{x(x+1)(x+2)\dots(x-\lfloor x\rfloor-1)} = x\Gamma(x).$$

Vztah (5) získáme indukcí. □

Poznámka

Díky Větě 30 stačí znát hodnotu $\Gamma(x)$ pro $x \in (0,1]$ a pro jakékoli jiné (reálné) $x \in D(\Gamma)$ hodnotu snadno dopočítáme.

Poznámka

Často se můžeme setkat i s Eulerovou Beta funkcí

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \qquad x>0, y>0.$$

Příklad 16

Pomocí funkce $B(x,y)$ vypočítejte

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Snadno spočítáme

$$\frac{\Gamma\left(\frac12\right)\Gamma\left(\frac12\right)}{\Gamma(1)} = B\left(\frac12,\frac12\right) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}dt$$
$$= \left|t=\sin^2 u\right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin u\cos u}{\sin u\cos u}\,\mathrm{d}u = \pi.$$

Tedy dostáváme

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \left|x^2=u\right| = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-u}}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \frac12\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}\,u^{\frac12-1}\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac12\Gamma\left(\frac12\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Příklad 17

Vypočítejte

$$I = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

bez použití funkce $B(x,y)$.

$$I^2 = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^\infty \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= |\text{polární souř.}| = \int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho$$
$$= |\rho^2=t| = \frac{\pi}{4}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}\left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{4},$$

tedy skutečně $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Další vlastnosti funkce $\Gamma(x)$

- $\lim_{x\to0^+}\Gamma(x)=\infty, \quad \lim_{x\to0^-}\Gamma(x)=-\infty.$
- $\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}\,x^{x-\frac12}\sqrt{2\pi}}{\Gamma(x)} = 1$ (Stirlingův vzorec) $\Rightarrow n! \approx \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ pro velká n.
- $\frac{\mathrm{d}^n\Gamma(x)}{\mathrm{d}x^n} = \int_0^\infty\left(\mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}\ln^n t\right)\mathrm{d}t$ pro $x>0$.
- $\Gamma\left(\frac12+n\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\Gamma\left(\frac12\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}, \quad n\in\mathbb{N}.$
- $\Gamma\left(\frac12-n\right) = \frac{(-2)^n}{(2n-1)!!}\Gamma\left(\frac12\right) = \frac{(-2)^n}{(2n-1)!!}\sqrt{\pi}, \quad n\in\mathbb{N}.$
- $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}, \quad x\notin\mathbb{Z}.$
- … a mnohem víc.

Definice 13

Nechť $\varphi(t), \psi(t)$ jsou spojité na $[\alpha, \beta]$. Pak množinu

$$C = \{[x, y] \in \mathbb{E}^2 : x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta]\}$$

nazýváme *spojitou křivkou* a rovnice $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ nazýváme *parametrické rovnice*.

Definice 14

Křivka C s parametrickým vyjádřením $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ se nazývá *hladká*, jestliže φ, ψ mají spojité derivace na $[\alpha, \beta]$ a v každém $t_0 \in [\alpha, \beta]$ je alespoň jedna z nich nenulová, tj.

$$\varphi'^2(t_0) + \psi'^2(t_0) > 0, \quad \forall t_0 \in [\alpha, \beta].$$

Křivka C se nazývá *po částech hladká*, jestliže $C = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$, kde C_i jsou hladké křivky.

Poznámka

- Křivka je spojitý obraz kompaktního intervalu do $\mathbb{R}^n(\mathbb{E}^n)$. Definující zobrazení se nazývá *parametrizace křivky*, např.

$$\Phi(t) = \big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)\big), \quad t \in [a, b].$$

- Pokud $\Phi(a) = \Phi(b)$, mluvíme o *uzavřené křivce*.
- Pokud je Φ na $[a, b]$ prosté, mluvíme o *oblouku*. (Křivka nikde neprotíná sama sebe.)
- Pokud je Φ prosté na $[a, b)$ a $\Phi(a) = \Phi(b)$, mluvíme o *Jordanově křivce*. (Spojitý a prostý obraz kružnice.)
- Oblouk a Jordanova křivka jsou *jednoduché křivky*.
- Jordanova křivka v rovině (popř. na ploše) rozděluje tuto rovinu na dvě části – *vnitřek* (omezená část) a *vnějšek* (neomezená část).
- Každá křivka má nekonečně mnoho různých parametrizací.

Příklad 18

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, x \in [-a, a]$$

parametrizace

- $x = a \cos t, y = a \sin t, t \in [0, \pi]$,
- $x = t, y = \sqrt{a^2 - t^2}, t \in [-a, a]$.

Příklad 19

$$y = f(x), x \in [a, b] \quad \longleftrightarrow \quad x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta]$$

$\rightarrow$ např. $x = t, y = f(t), t \in [a, b]$,

$\leftarrow$ $\varphi' \neq 0 \Rightarrow y = \psi(\varphi^{-1}(x)), x \in [\varphi(\alpha), \varphi(\beta)]$.

(Např. $S = \int_\alpha^\beta \psi(t)|\varphi'(t)|\, dt$ … počítá se přímo z parametrických rovnic.)

Poznámka

(i) $\int_a^b f(x)\, dx$
1. dělení intervalu $[a, b]$
2. dolní a horní součty – aproximace obdélníky
3. limitní přechod
   - V1) všechna dělení $\rightarrow$ sup a inf dolních a horních součtů
   - V2) $\{D_n\}$ nulová posl. $\rightarrow$ limita posloupnosti integrálních součtů

(ii) $\int_C f(x, y)\, d\ell$
1. dělení křivky C
2. aproximace obdélníky
3. limitní přechod (V2)

Definice 15

Nechť C je po částech hladká rovinná křivka a $f(x,y)$ je omezená funkce definovaná na C.

- *Dělením křivky* rozumíme konečnou posloupnost bodů $D = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$, oblouky (A_{i-1}, A_i) nazýváme *dělicí intervaly* dělení D, délku oblouku (A_{i-1}, A_i) označíme $\Delta\ell_i$.
- Číslo $\nu(D) = \max_{0 \le i \le n} \Delta\ell_i$ nazýváme *norma dělení*.

Na každém oblouku (A_{i-1}, A_i) zvolme bod ξ_i, $i = 1, \dots, n$, libovolně (volba reprezentantů). Utvořme *integrální součet* výběr reprezentantů K a dělení D

$$\mathcal{S}(D, f, K) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta\ell_i.$$

Nechť $\{D_n\}$ je nulová posloupnost dělení (tj. $\lim_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$). Má-li integrální součet limitu L ($L < \infty$) pro nulovou posloupnost dělení a tato limita nezávisí na výběru reprezentantů, nazývá se L *křivkový integrál prvního druhu* funkce f na křivce C a značíme jej

$$\int_C f(x,y)\,\mathrm{d}\ell = L.$$

Vztah mezi křivkovým a Riemannovým integrálem

a) $C : x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta] \Rightarrow \mathrm{d}\ell = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$

$$\boxed{\int_C f(x,y)\,\mathrm{d}\ell = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t}$$

b) $C : y = y(x), x \in [a, b] \Rightarrow \mathrm{d}\ell = \sqrt{1 + y'^2(x)}\,\mathrm{d}x$

$$\boxed{\int_C f(x,y)\,\mathrm{d}\ell = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}\,\mathrm{d}x}$$

Vlastnosti křivkového integrálu jsou analogické vlastnostem Riemannova integrálu (plyne to z konstrukce)

1. Pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí
$$\int_C \left[\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\right]\mathrm{d}\ell = \alpha \int_C f(x,y)\,\mathrm{d}\ell + \beta \int_C g(x,y)\,\mathrm{d}\ell.$$
2. Je-li křivka C určena obloukem AB, pak pro libovolné K ležící na AB platí
$$\int_{AB} f(x,y)\,\mathrm{d}\ell = \int_{AK} f(x,y)\,\mathrm{d}\ell + \int_{KB} f(x,y)\,\mathrm{d}\ell.$$

Příklad 20

Vypočtěte $\int_C (x-y)\,\mathrm{d}\ell$, kde

$$C : x^2 + y^2 = ax, \quad a > 0.$$

Máme $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$, tedy parametrizujeme jako

$$\begin{aligned} x - \frac{a}{2} &= \frac{a}{2}\cos t, & \mathrm{d}x &= -\frac{a}{2}\sin t\,\mathrm{d}t, \\ y &= \frac{a}{2}\sin t,\ t \in [0, 2\pi], & \mathrm{d}y &= \frac{a}{2}\cos t\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Tedy $\mathrm{d}\ell = \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{a^2}{4}\sin^2 t + \frac{a^2}{4}\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{a}{2}\,\mathrm{d}t$, proto

$$\begin{aligned} \int_C (x-y)\,\mathrm{d}\ell &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t - \frac{a}{2}\sin t\right) \frac{a}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{a^2}{4}\Big[t + \sin t + \cos t\Big]_0^{2\pi} = \frac{a^2}{4} 2\pi = \frac{a^2\pi}{2}. \end{aligned}$$

Příklad 21

Vypočtěte $\int_C (x+y^2)\,\mathrm{d}\ell$, kde C je úsečka mezi body $A = [2, -1]$, $B = [1, 3]$.

$$\begin{aligned} x &= 2 - t, & \mathrm{d}x &= -\,\mathrm{d}t, \\ y &= -1 + 4t,\ t \in [0, 1], & \mathrm{d}y &= 4\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Tedy $\mathrm{d}\ell = \sqrt{1+16}\,\mathrm{d}t = \sqrt{17}\,\mathrm{d}t$, proto

$$\begin{aligned} \int_C (x+y^2)\,\mathrm{d}\ell &= \int_0^1 \left(2 - t + 1 - 8t + 16t^2\right)\sqrt{17}\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{17}\left[3t - 9\frac{t^2}{2} + 16\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{23}{6}\sqrt{17}. \end{aligned}$$

Příklad 22

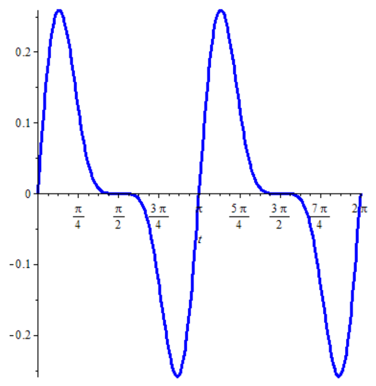
Vypočtěte (asteroida)

$$I = \int_C \left(x^{4/3} + y^{4/3}\right)\mathrm{d}\ell,\ C : x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},\ a > 0.$$

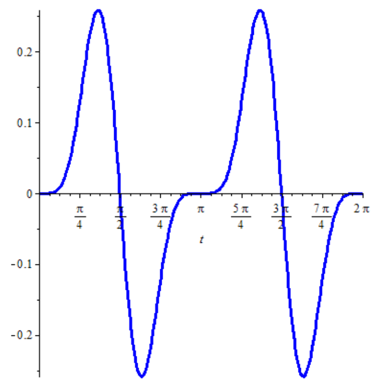
$$\begin{aligned} x &= a\cos^3 t, & \mathrm{d}x &= \left(-3a\cos^2 t \sin t\right)\mathrm{d}t, \\ y &= a\sin^3 t,\ t \in [0, 2\pi], & \mathrm{d}y &= \left(3a\sin^2 t\cos t\right)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Tedy $\mathrm{d}\ell = 3a|\cos t \sin t|\,\mathrm{d}t$, proto

$$\begin{aligned} I &= a^{4/3}\int_0^{2\pi} \left(\cos^4 t + \sin^4 t\right) 3a|\cos t \sin t|\,\mathrm{d}t \\ &= 12a^{7/3}\left(\int_0^{\pi/2} \cos^5 t \sin t\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2} \sin^5 t\cos t\,\mathrm{d}t\right) \\ &= 2a^{7/3}\left[-\cos^6 t\right]_0^{\pi/2} + 2a^{7/3}\left[\sin^6 t\right]_0^{\pi/2} = 4a^{7/3}. \end{aligned}$$



Obr.: $\cos^5 t \sin t$



Obr.: $\sin^5 t \cos t$

Mějme dvojici funkcí $P(x,y), Q(x,y)$ a zobrazení

$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad [x,y] \mapsto [P(x,y), Q(x,y)],$$

F se nazývá *vektorová funkce*.

Nechť C je po částech hladká křivka v rovině. Nechť je na této křivce definováno úplné uspořádání jejích bodů, tomuto uspořádání se říká *orientace křivky*.

Jestliže je křivka jednoduchá (sama sebe neprotíná), je orientace dána uspořádáním libovolné dvojice bodů. Je-li křivka uzavřená, je orientace dána uspořádáním trojice bodů. (Orientace = směr pohybu po křivce.)

Nechť $T_0, \dots, T_n \in C$ je dělení křivky C, $T_i = [x_i, y_i], i = 0, \dots, n$.

Dále nechť $[\xi_i, \eta_i] \in T_i T_{i+1}$ (oblouk křivky mezi body T_i, $T_{i+1}, i = 0, \dots, n-1$).

Označme $K_n = \{[\xi_i, \eta_i], i = 0, \dots, n-1\}$, $D_n = \{T_0, \dots, T_n\}$ a $\nu(D_n)$ délku nejdelšího oblouku křivky C určeného dělením D_n.

Vytvořme součet

$$\varphi(D_n, F, K_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[P(\xi_i, \eta_i)(x_{i+1} - x_i) + Q(\xi_i, \eta_i)(y_{i+1} - y_i)\right].$$

Předpokládejme, že existuje konečná limita

$$\lim_{\nu(D_n)\to 0} \varphi(D_n, F, K_n) = L$$

a tato limita nezávisí na výběru reprezentantů K_n příslušejících dělení D_n. Předpokládejme, že pořadí dělicích bodů $T_0, \dots, T_n$ je souhlasné s orientací křivky ($T_i \to T_{i+1}$). Pak definujeme

$$\int_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = L.$$

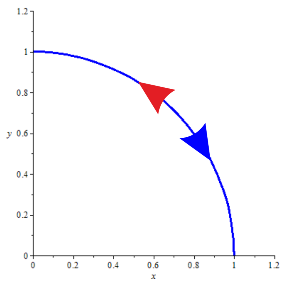
Nechť $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta]$ je parametrické vyjádření orientované křivky C a $\prec$ je uspořádání na křivce dané její orientací. Řekneme, že toto parametrické vyjádření je *souhlasné*, jestliže pro $t_1 < t_2$ je

$$[\varphi(t_1), \psi(t_1)] \prec [\varphi(t_2), \psi(t_2)].$$

Podobně nazveme toto parametrické vyjádření *nesouhlasné (opačné)*, jestliže pro $t_1 < t_2$ je

$$[\varphi(t_1), \psi(t_1)] \succ [\varphi(t_2), \psi(t_2)].$$

Příklad 23



C je část kružnice $x^2 + y^2 = 1$ v prvním kvadrantu, orientovaná ve směru hodinových ručiček. Parametrizace $x = \cos t, y = \sin t, t \in [0, \pi/2]$ je nesouhlasná, protože když zvětšujeme t, pohybujeme se proti směru hodinových ručiček.

Převod na Riemannův integrál

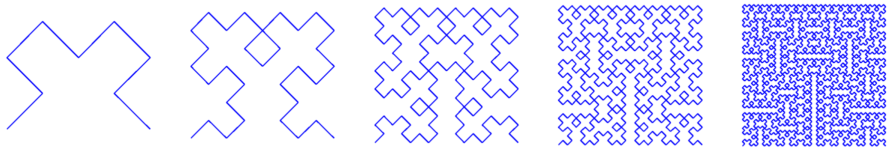
$$\int_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \pm \int_\alpha^\beta \left[P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)\right] \mathrm{d}t,$$

kde znaménko je dáno parametrizací, tj. plus je-li souhlasná s orientací křivky a minus je-li nesouhlasná.

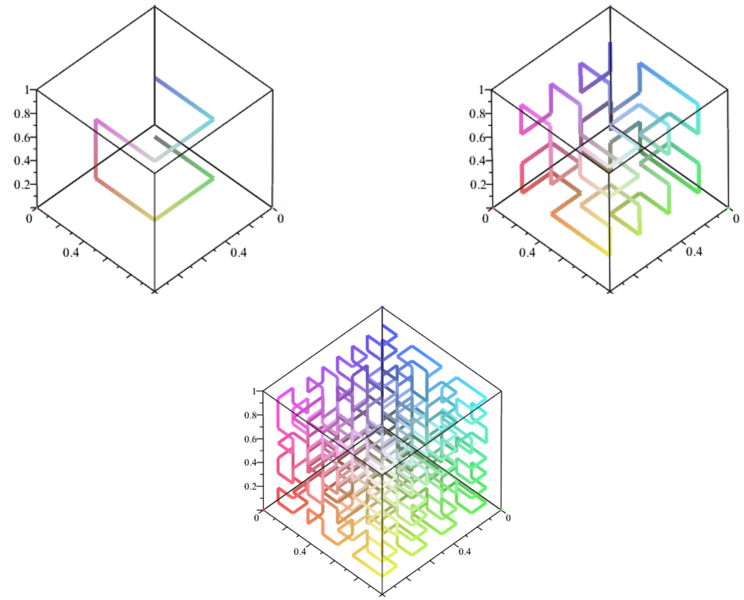
Poznámka (Spojitost vs. hladkost)

$[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}, \varphi, \psi \colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}, C = \{[x, y] : x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta]\}$, jsou-li φ, ψ spojité, pak je C spojitá křivka.

Peanova křivka (viz také Hilbertova křivka) pokryje celý jednotkový čtverec, tj. $[0, 1] \mapsto [0, 1] \times [0, 1]$.

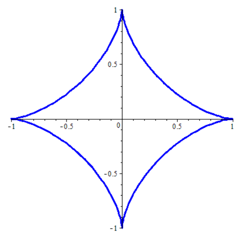


(Hladká křivka = v každém bodě lze sestrojit tečnu.)



Příklad 24

Uvažujme asteroidu s parametrizací



$$x(t) = a\cos^3 t,$$
$$y(t) = a\sin^3 t,$$
$$a > 0, \ t \in [0, 2\pi].$$

Protože

$$x'(t) = -3a\cos^2 t \sin t, \quad y'(t) = 3a\sin^2 t \cos t,$$

tedy

$$x'(t_0) = 0 \ \wedge \ y'(t_0) = 0 \ \text{ pro } \ t_0 \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi\right\},$$

je zřejmé, že asteroida není hladká (je po částech hladká, jednoduchá a uzavřená).

Příklad 25

Křivka

$$x = \varphi(t) = \begin{cases} -t^2 & t < 0 \\ t^2 & t \geq 0 \end{cases}, \quad y = \psi(t) = t^2, \quad t \in \mathbb{R}$$

má $\varphi'(0) = 0$, $\psi'(0) = 0$, tedy není hladká na žádném intervalu obsahujícím nulu. (Jde o $y = |x|$.)

Poznámka

- $\int_\alpha^\beta (P\varphi' + Q\psi')\,\mathrm{d}t$, $P\varphi' + Q\psi' = \langle \vec{F}, \vec{t} \rangle$, kde $\vec{t} = (\varphi', \psi')$.
- Jiný zápis $\int_C P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$ (skalární součin).

Vztah mezi integrálem prvního a druhého druhu

$$\int_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{l} C: x=\varphi(t), y=\psi(t) \\ t\in[\alpha,\beta],\ \text{souhlasně} \end{array} \right|$$
$$= \int_\alpha^\beta \left[P(\varphi,\psi)\varphi' + Q(\varphi,\psi)\psi'\right]\,\mathrm{d}t = |\ \text{hladká křivka}\ |$$
$$= \int_\alpha^\beta \left[P(\varphi,\psi)\frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}} + Q(\varphi,\psi)\frac{\psi'}{\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}}\right]\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_C \left[P(x,y)\cos\gamma(x,y) + Q(x,y)\sin\gamma(x,y)\right]\,\mathrm{d}\ell,$$

kde $\gamma(x,y)$ je úhel, který svírá tečna ke křivce v bodě $[x,y]$ s kladnou poloosou x.

Věta 31

Pro počítání křivkového integrálu druhého druhu platí obvyklé vztahy. Zejména

$$\int_C \left([\alpha P_1(x,y)+\beta P_2(x,y)]\,\mathrm{d}x + [\alpha Q_1(x,y)+\beta Q_2(x,y)]\,\mathrm{d}y\right)$$
$$= \alpha\int_C P_1(x,y)\,\mathrm{d}x + Q_1(x,y)\,\mathrm{d}y + \beta\int_C P_2(x,y)\,\mathrm{d}x + Q_2(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

$C = C_1\cup C_2 \Rightarrow \int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{C_1} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + \int_{C_2} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y.$

Příklad 26

Vyčíslete
$$\int_C (x^2-2xy)\,\mathrm{d}x + (2xy+y^2)\,\mathrm{d}y,$$
kde C je oblouk paraboly z bodu $[0,0]$ do bodu $[1,1]$.

Základní parametrizace $x=t, y=t^2, t\in[0,1]$, je souhlasně orientovaná, takže

$$\int_C (x^2-2xy)\,\mathrm{d}x+(2xy+y^2)\,\mathrm{d}y = +\int_0^1 (t^2-2t\cdot t^2)\cdot 1+(2t\cdot t^2+t^4)\cdot 2t\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{4}{5}+\frac{1}{3} = \frac{29}{30}.$$

Poznámka

Křivkový integrál po uzavřené křivce

$$C: x=\varphi(t), y=\psi(t), t\in[\alpha,\beta], \quad \varphi(\alpha)=\varphi(\beta), \psi(\alpha)=\psi(\beta),$$

budeme značit
$$\oint_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Definice 16

Řekneme, že množina $G \subseteq \mathbb{R}^2$ (popř. $\mathbb{R}^3$) je

- *(obloukovitě) souvislá*, jestliže libovolné dva body v ní lze spojit obloukem, který leží celý v G,
- *oblast*, jestliže je otevřená a souvislá,
- *jednoduše souvislá oblast*, jestliže je to oblast, ve které lze každou jednoduchou uzavřenou křivku stáhnout do bodu bez opuštění množiny G.

Poznámka

Množina $G \subseteq \mathbb{R}^2$ je *jednoduše souvislá oblast*, pokud je G otevřená, souvislá (libovolné dva body lze spojit lomenou čarou, která leží v G) a s každou uzavřenou křivkou leží v G i vnitřek této křivky.

(Lze definovat i vícenásobně souvislou oblast.)

Věta 32 (Greenova věta)

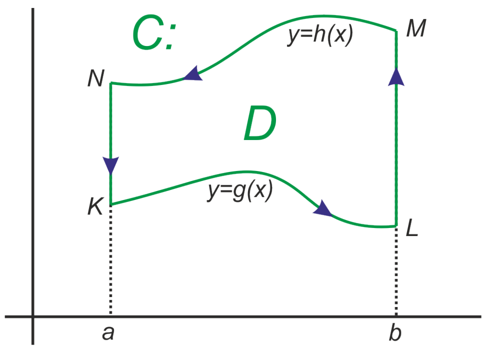
Nechť G je jednoduše souvislá oblast v rovině, C je uzavřená, kladně orientovaná (proti směru hod. ručiček) křivka v G. Dále nechť funkce $P, Q, P_y, Q_x \colon \overline{G} \to \mathbb{R}$ jsou na uzávěru množiny G spojité. Pak platí

$$\oint_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint_D [Q_x(x,y) - P_y(x,y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

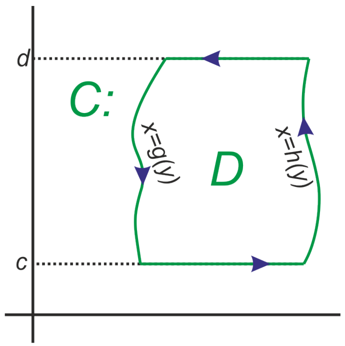
kde D je část množiny G omezená křivkou C.

Důkaz.

Nejprve uvažme případy, kdy křivka C je křivočarý obdélník popsaný na následujících obrázcích.



Obr.: Případ 1_a)



Obr.: Případ 1_b)

1_a) Dle Fubiniho věty ihned dostaneme

$$\iint_D \big[-P_y(x,y)\big]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \overset{\text{[F.V.]}}{=} -\int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} P_y(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$
$$= -\int_a^b \big[P(x,h(x)) - P(x,g(x))\big]\,\mathrm{d}x$$

a protože

$$\oint_C P(x,y)\,\mathrm{d}x = \left(\int_K^L + \int_L^M + \int_M^N + \int_N^K\right) P(x,y)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_a^b P(x,g(x))\,\mathrm{d}x - \int_a^b P(x,h(x))\,\mathrm{d}x,$$

máme

$$\iint_D \big[-P_y(x,y)\big]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_C P(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

V předchozím výpočtu jsme použili

$$\int_K^L P(x,y)\,\mathrm{d}x = \big|x = t, y = g(t)\big| = \int_a^b P(t,g(t))\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_L^M P(x,y)\,\mathrm{d}x = \big|x = b, y = t, t \in [g(b),h(b)],\ \mathrm{d}x = 0\big| = 0,$$

$$\int_M^N P(x,y)\,\mathrm{d}x = \big|x = t, y = h(t)\big| = -\int_a^b P(t,h(t))\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_N^K P(x,y)\,\mathrm{d}x = \big|x = a, y = t, t \in [g(a),h(a)],\ \mathrm{d}x = 0\big| = 0.$$

1_b) Zcela analogicky zjistíme, že

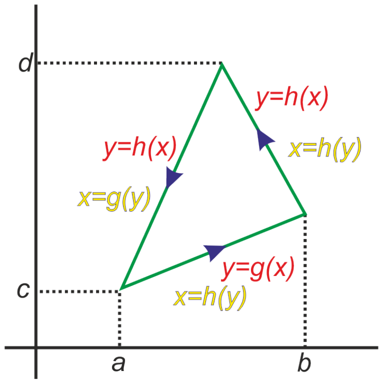
$$\iint_D Q_x(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_C Q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

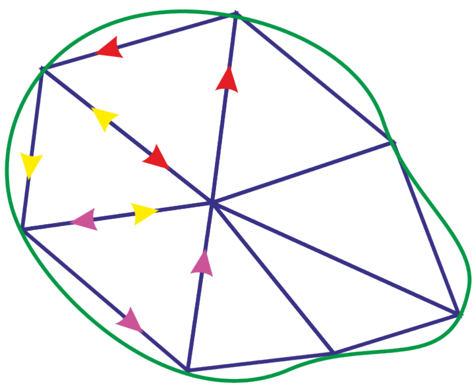
2) Je-li křivka C trojúhelník, platí oba vzorce současně, tj.

$$\oint_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D (Q_x - P_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

3) Je-li C „obecná“ křivka, pak na každý trojúhelník aplikujeme Greenovu větu. Když jdeme s počtem vrcholů mnohoúhelníku k nekonečnu, tak mnohoúhelník lépe vykrývá vnitřek křivky, tedy integrál přes mnohoúhelník se blíží integrálu přes vnitřek křivky. A obdobně (viz konstrukce křivkového integrálu) se integrál přes obvod mnohoúhelníku blíží k integrálu přes C.

□





Důsledek 3

Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je uzavřená a měřitelná množina, která je v $\mathbb{R}^2$ omezená křivkou C. Pak platí

$$m(A) = \frac{1}{2}\oint_C (-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y),$$

kde C je orientovaná v kladném smyslu.

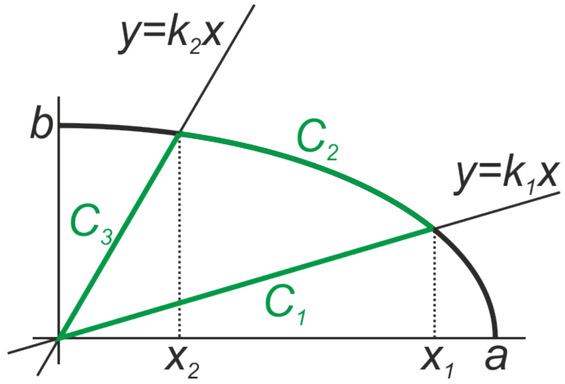
Důkaz.

$$\frac{1}{2}\oint_C (-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y) \overset{\text{[Green]}}{=} \frac{1}{2}\iint_A (1+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_A 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = m(A)$$

□

Příklad 27

Vypočtěte míru výseče z elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$ v prvním kvadrantu omezené polopřímkami $y = k_1 x$, $y = k_2 x$, $0 \le k_1 < k_2$.



Označme $t_1 = \operatorname{arctg} k_1$ a $t_2 = \operatorname{arctg} k_2$.

Počítáme postupně pro jednotlivé části, nejprve

$$\int_{C_1} -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{l} x = t,\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ y = k_1 t,\ \mathrm{d}y = k_1\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int_0^{x_1} (-k_1 t\,\mathrm{d}t + t k_1\,\mathrm{d}t) = 0,$$

podobně i $\int_{C_3} -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0$.

$$\int_{C_2} -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{ll} x = a\cos t, & \mathrm{d}x = -a\sin t\,\mathrm{d}t \\ y = b\sin t, & \mathrm{d}y = b\cos t\,\mathrm{d}t \\ t \in [t_1, t_2], & \text{souhl. orient.} \end{array} \right|$$

$$= + \int_{t_1}^{t_2} \left[-b\sin t\,(-a\sin t)\,\mathrm{d}t + a\cos t\, b\cos t\,\mathrm{d}t \right]$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} ab\sin^2 t + ab\cos^2 t\,\mathrm{d}t = ab(t_2 - t_1),$$

tedy

$$m(A) = \frac{1}{2} \oint_C -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2} ab(t_2 - t_1).$$

Definice 17

Nechť G je souvislá oblast v rovině a body $A, B \in G$.

- Řekneme, že křivkový integrál $\int_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ *nezávisí na integrační cestě mezi body A, B*, pokud

$$\int_{C_1} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{C_2} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

  pro libovolnou dvojici po částech hladkých křivek spojujících body A, B.
- Řekneme, že křivkový integrál $\int_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ *nezávisí na integrační cestě v G*, pokud nezávisí na integrační cestě mezi libovolnými dvěma body z G.

Věta 33

Nechť G je jednoduše souvislá oblast v rovině, funkce P, Q, P_y, Q_x jsou spojité na $\overline{G}$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.

(i) *Integrál $\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ nezávisí na integrační cestě v G.*

(ii) *Platí $\oint_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0$ pro libovolnou zavřenou, po částech hladkou křivku v G.*

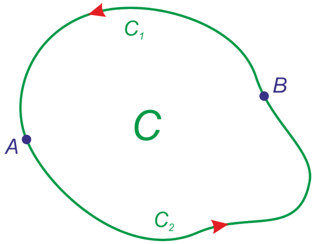
(iii) *Výraz $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ je totálním diferenciálem nějaké kmenové funkce H.*

(iv) *V G platí $P_y = Q_x$.*

Důkaz.

$\boxed{(iii) \Leftrightarrow (iv)}$ je známo z diferenciálního počtu v $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{(i) \Leftrightarrow (ii)}$



Máme $\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2}$, kde

$$\int_{A\to B} = -\int_{C_1} \quad \text{a} \quad \int_{A\to B} = \int_{C_2},$$

tedy $\int_{C_1} = -\int_{C_2} \Rightarrow \int_C = 0$.

(Opačnou implikaci např. sporem.)

$\boxed{(iii) \Rightarrow (i)}$ Nechť $A, B \in G$ a nechť $C = \{x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta]\}$ spojuje souhlasně body A, B. Pak

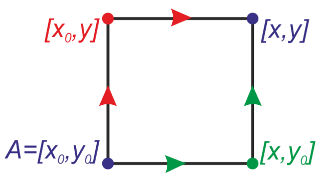
$$\begin{aligned}
\int_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_\alpha^\beta \big[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\big]\,\mathrm{d}t \\
&= \mid \text{podle předpokladu } H_x = P, H_y = Q \mid \\
&= \int_\alpha^\beta [H_x(\varphi,\psi)\varphi' + H_y(\varphi,\psi)\psi']\,\mathrm{d}t \\
&= \int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[H(\varphi(t),\psi(t))]\,\mathrm{d}t \\
&= H(\varphi(\beta),\psi(\beta)) - H(\varphi(\alpha),\psi(\alpha)) = H(B) - H(A).
\end{aligned}$$

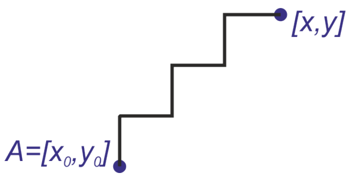
Na křivku, přes kterou jsme integrovali, jsme nekladli žádné dodatečné požadavky.

$\boxed{(i) \Rightarrow (iii)}$ Nechť $A = [x_0, y_0] \in G$ je libovolný a definujeme funkci

$$H(x,y) = \int_A^{[x,y]} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

což je křivkový integrál přes libovolnou po částech hladkou křivku začínající v A a končící v $B = [x,y]$. Díky platnosti (i) je H je definováno korektně. Ověřme, že jde o požadovanou kmenovou funkci. Jestliže to tvar G dovoluje, využijme pro ověření $H_x = P$ křivku (lomenou čáru, viz obrázek vlevo) $[x_0, y_0] \to [x_0, y] \to [x, y]$ a pro ověření $H_y = Q$ křivku $[x_0, y_0] \to [x, y_0] \to [x, y]$.





Jinak budeme postupovat dle obrázku vpravo.

Např. první výpočet je následující.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_A^{[x,y]} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_{[x_0,y_0]}^{[x_0,y]} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + \int_{[x_0,y]}^{[x,y]} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\Bigg[\underbrace{\int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)\,\mathrm{d}t}_{\frac{\partial}{\partial x}=0} + \int_{x_0}^{x} P(t,y)\,\mathrm{d}t\Bigg] = P(x,y).
\end{aligned}$$

□

Poznámka

Uvažujme

$$P(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2},\quad Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2},\quad C: x^2+y^2=1,$$

tedy máme

$$P_y=\frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2},\quad Q_x=\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}\quad\Rightarrow\quad P_y=Q_x$$

a parametrizaci křivky $x=\cos t, y=\sin t, t\in[0,2\pi]$.

$$\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x+\frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\left[\frac{-\sin t}{1}(-\sin t)+\frac{\cos t}{1}\cos t\right]\mathrm{d}t=2\pi,$$

ale integrál po uzavřené křivce by měl být roven nule – funkce P, Q nejsou spojité v bodě $[0,0]$ (příklad ukazuje, že předpoklad spojitosti funkcí P, Q, P_y, Q_x nelze vypustit).

Křivkový integrál prvního druhu

- Křivkový integrál prvního druhu $\int_C F(x,y)\mathrm{d}s$ = obsah svislé plochy mezi funkcí $F(x,y)$ a křivkou C (v rovině xy).
- Křivkový integrál prvního druhu nezávisí na orientaci křivky.
- Je-li křivka C uzavřená, píšeme

$$\oint_C F(x,y)\mathrm{d}s.$$

- Má-li křivka C parametrické vyjádření

$$C=\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t), \quad t\in[\alpha,\beta],\end{cases}$$

pak

$$\int_C F(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta F(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t.$$

- Je-li $\tau(x,y)$ lineární hustota v bodě $[x,y]$, pak

funkce F	integrál z funkce F
1	délka křivky C
$\tau(x,y)$	hmotnost křivky C (m)
$y\tau(x,y)$	lineární moment vzhl. k ose x (U_x)
$x\tau(x,y)$	lineární moment vzhl. k ose y (U_y)
$y^2\tau(x,y)$	moment setrvačnosti vzhl. k ose x (J_x)
$x^2\tau(x,y)$	moment setrvačnosti vzhl. k ose y (J_y)

- Souřadnice težiště $[x_T, y_T]$:

$$x_T=\frac{U_y}{m},\qquad y_t=\frac{U_x}{m}.$$

Křivkový integrál druhého druhu

- Na těleso působí síla $\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))=P(x,y)\vec{\imath}+Q(x,y)\vec{\jmath}$ a to se pohybuje podél křivky C dané polohovým vektorem $\vec{r}$ (práce vykonaná silou $\vec{F}$).

$$\int_C \vec{F}(x,y)\mathrm{d}\vec{r}=\int_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

- Křivkový integrál druhého druhu závisí na orientaci křivky.
- Má-li křivka C parametrické vyjádření

$$C=\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t), \quad t\in[\alpha,\beta],\end{cases}$$

pak

$$\int_C \vec{F}(x,y)\mathrm{d}\vec{r}=\pm\int_\alpha^\beta\Big[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\Big]\mathrm{d}t.$$

- Je-li křivka C uzavřená, píšeme
$$\oint_C \vec{F}(x,y)\mathrm{d}\vec{r}$$
= práce vykonaná silou $\vec{F}$ při přemístění tělesa po uzavřené křivce C
= cirkulace vektorového pole po křivce C.
- Tok vektorového pole křivkou C (použijeme normálovou složku):
$$\int_C -Q(x,y)\mathrm{d}x + P(x,y)\mathrm{d}y.$$

- Platí:

Integrál nezávisí na integrační cestě.
$\Updownarrow$
Lze zavést potenciální energii.
(Existuje kmenová funkce = − potenciál.)
$\Updownarrow$
Integrál po každé uzavřené křivce = 0.
$\Updownarrow$
Rotace vektorového pole = 0.
$\Updownarrow$
Integrál závisí jen na počátečním a koncovém bodě a je roven $\varphi(B) - \varphi(A)$, kde A je počáteční bod, B je koncový bod a φ je kmenová funkce.

Křivkový integrál 1. druhu

Uvažujme $\int_C G(x,y,z)\,\mathrm{d}\ell$, kde C je prostorová křivka s parametrizací $x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\chi(t), t\in[\alpha,\beta]$. Pak
$$\int_C G(x,y,z)\,\mathrm{d}\ell = \int_\alpha^\beta G(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2+\chi'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Příklad 28

Vypočtěte délku jednoho závitu šroubovice
$$x=\cos t,\quad y=\sin t,\quad z=t,\quad t\in[0,2\pi].$$

$$L=\int_C \mathrm{d}\ell = \int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+1^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\sqrt{2}\,\mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{2}.$$

Křivkový integrál 2. druhu

Uvažujme vektorovou funkci
$$\vec{F}(x,y,z) = (P,Q,R) = (P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)),$$
potom
$$\begin{aligned}\int_C [P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z] &= \int_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}\\ &= \left| x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\chi(t), t\in[\alpha,\beta]\right|\\ &= \pm\int_\alpha^\beta \left[P(\varphi,\psi,\chi)\varphi' + Q(\varphi,\psi,\chi)\psi' + R(\varphi,\psi,\chi)\chi'\right]\mathrm{d}t\\ &= \int_\alpha^\beta \langle\underbrace{(P,Q,R)}_{\vec{F}},\underbrace{(\varphi',\psi',\chi')}_{\vec{t}}\rangle\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$
kde $\vec{t}$ je tečný vektor ke křivce C.

Věta 34

Křivkový integrál $\int_C P\ \mathrm{d}x + Q\ \mathrm{d}y + R\ \mathrm{d}z$, *kde* $P, Q, R\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *jsou spojité a mají spojité parciální derivace* $P_y, P_z, Q_x, Q_z, R_x, R_y$ *v* $\mathbb{R}^3$, *nezávisí na integrační cestě v* $\mathbb{R}^3$ *právě tehdy, když*

(i) *Platí* $\oint_C P\ \mathrm{d}x + Q\ \mathrm{d}y + R\ \mathrm{d}z = 0$ *přes libovolnou uzavřenou křivku* C.

(ii) *Výraz* $P\ \mathrm{d}x + Q\ \mathrm{d}y + R\ \mathrm{d}z$ *je (totálním) diferenciálem nějaké kmenové funkce* H, *tj.* $H_x = P, H_y = Q, H_z = R$.

(iii) *Platí* $P_z = R_x, P_y = Q_x, Q_z = R_y$.

(Podmínky jsou ekvivalentní.)

Definice 18

Nechť
$$F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)).$$
Řekneme, že vektorové pole F je *konzervativní (potenciálové)*, pokud výraz
$$P\ \mathrm{d}x + Q\ \mathrm{d}y + R\ \mathrm{d}z$$
je (totálním) diferenciálem nějaké kmenové funkce H. Funkce $-H$ se nazývá *potenciál* konzervativního vektorového pole.

Příklad 29

Nechť
$$P(x, y, z) = \frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \qquad Q(x, y, z) = \frac{-y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$
$$R(x, y, z) = \frac{-z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$
Rozhodněte, zda je toto pole konzervativní. Pokud ano, určete jeho potenciál.

$$P_z = \frac{x \cdot \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} 2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = \frac{3xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = R_x.$$
Ověříme zbývající podmínky a najdeme kmenovou funkci
$$H(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$
(Laplaceův operátor $\Delta H = H_{xx} + H_{yy} + H_{zz} = 0$.)

Příklad 30

$$I = \int_{[1,1,1]}^{[2,2,2]} y^2 z^3\ \mathrm{d}x + 2xyz^3\ \mathrm{d}y + 3xy^2 z^2\ \mathrm{d}z = ?$$

$$P = H_x = y^2 z^3 \quad \Rightarrow \quad H = xy^2 z^3 + C(y, z),$$
$$H_y = 2xyz^3 + C_y, \qquad H_z = 3xy^2 z^2 + C_z$$
porovnáme s
$$Q = H_y = 2xyz^3, \qquad R = H_z = 3xy^2 z^2.$$
Celkem $C_y = 0, C_z = 0 \Rightarrow C(y, z) = c$, tedy
$$I = \Big[xy^2 z^3 \Big]_{[1,1,1]}^{[2,2,2]} = (2 \cdot 4 \cdot 8) - (1 \cdot 1 \cdot 1) = 63.$$

Plošný integrál prvního druhu (ze skalární funkce)

- Nechť S je plocha v prostoru a bod o souřadnicích $[x, y, z]$ na této ploše má hustotu $\rho(x, y, z)$. Pak $\iint_S \rho(x, y, z)\, dS$ je hmotnost plochy.
- Je-li $\rho(x, y, z)$ bodový elektrický náboj, pak $\iint_S \rho(x, y, z)\, dS$ je náboj plochy S.
- Je-li $\rho \equiv 1$, pak $m(S) = \iint_S dS$.

Plošný integrál z vektorové funkce

Nechť $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ a S je plocha v $\mathbb{R}^3$. Potom $\iint_S P\, dy\, dz + Q\, dx\, dz + R\, dx\, dy$ představuje tok vektoru $\vec{F}$ plochou S. Máme $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, kde $d\vec{S} = \vec{\nu} \cdot dS$ a $\vec{\nu}$ je normálový vektor k ploše S.

Plocha S je grafem funkce dvou proměnných

$$S = \{[x, y, z] : [x, y] \in M \subseteq \mathbb{R}^2, z = f(x, y)\},$$

např. $S = \{[x, y, z] : x^2 + y^2 \leq 1, z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$ je horní polokoule o poloměru $r = 1$.

Tečná rovina v bodě $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ je

$$z - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

tedy normálový vektor je $\vec{n} = \pm(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1)$.

Nechť S je plocha, která je grafem funkce

$$z = f(x, y), \quad [x, y] \in M \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Vezmeme síť řádu n v $\mathbb{R}^2$, ta vytvoří pokrytí množiny M, tj.

$$M = \bigcup_{i=1}^{m} D_i^n,$$

které přirozeným způsobem vytváří pokrytí $S = \bigcup_{i=1}^m S_i^n$, kde

$$S_i^n = \{[x, y, z] : [x, y] \in D_i^n, z = f(x, y)\},$$

neboť $[\xi_i, \eta_i] \in D_i^n \Rightarrow [\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i)] \in S_i^n$. Předpokládejme, že funkce f má spojité parciální derivace f_x, f_y (je diferencovatelná, lze sestrojit tečnou rovinu).

Nechť τ_i je tečná rovina k S v bodě $[\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i)]$.
Označme $\tilde{S}_i$ „rovnoběžník“, který je průmětem D_i^n na τ_i. Vezměme rovinu $\tilde{\tau} : z = ax + by + c$ v $\mathbb{R}^3$ (bez újmy na obecnosti a pro naše účely $c = 0$).
Nechť $\lozenge$ je rovnoběžník v $\tilde{\tau}$, jehož průmětem do podstavné roviny je čtverec $[0, 1] \times [0, 1]$. Bodu $[1, 0]$ odpovídá bod $[1, 0, a]$ a bodu $[0, 1]$ bod $[0, 1, b]$. Tedy plocha rovnoběžníku $\lozenge$ je

$$P_\lozenge = \sqrt{1 + a^2} \cdot \sqrt{1 + b^2} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \alpha},$$

kde

$$\cos \alpha = \left(\frac{\langle (1, 0, a), (0, 1, b) \rangle}{\sqrt{1 + a^2} \cdot \sqrt{1 + b^2}} \right),$$

tedy

$$\begin{aligned} P_\lozenge &= \sqrt{1 + a^2} \cdot \sqrt{1 + b^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2 b^2}{(1 + a^2)(1 + b^2)}} \\ &= \sqrt{(1 + a^2)(1 + b^2) - a^2 b^2} = \sqrt{1 + a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Rovnice tečné roviny k S v bodě $[\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i)]$ je

$$z - f(\xi_i, \eta_i) = f_x(\xi_i, \eta_i)(x - \xi_i) + f_y(\xi_i, \eta_i)(y - \eta_i).$$

Plocha na tečné rovině, jejíž průmět do podstavné roviny je D_i^n, je

$$\sqrt{1 + f_x^2(\xi_i, \eta_i) + f_y^2(\xi_i, \eta_i)} \cdot m(D_i^n).$$

Je-li síť vytvářející pokrytí množiny M dostatečně jemná, součet měr ploch na tečných rovinách je přibližně roven míře plochy S.

Zavedeme normu dělení plochy S. Pokrytí D_i^n množiny M vytváří pokrytí S_i^n plochy S, nechť $d(S_i^n)$ je průměr dílku S_i^n tak, jak byl průměr množiny definován v teorii metrických prostorů, tj.

$$(P, \rho), A \subset P : d(A) = \sup_A \rho(a_1, a_2).$$

Norma dělení $\nu = \max_{1 \le i \le m} d(S_i^n)$. Předpokládáme, že funkce f má na M spojité parciální derivace f_x, f_y, tzn. D_i^n je pokrytí M řádu n a $n \to \infty$, pak $\nu \to 0$. Vytvoříme součet $\sum_{i=1}^m m(\tilde{S}_i^n)$, kde $\tilde{S}_i^n$ jsou „rovnoběžníky" na tečných rovinách, jejichž průměty jsou D_i^n.

Definice 19

Jestliže existuje konečná limita $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^m m(\tilde{S}_i^n)$ a nezávisí na výběru reprezentantů $[\xi_i, \eta_i] \in D_i^n$, definujeme *míru plochy S* jako

$$m(S) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^m m\left(\tilde{S}_i^n\right).$$

Poznámka

$$m(S) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^m m\left(\tilde{S}_i^n\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^m \sqrt{1 + f_x^2(\xi_i, \eta_i) + f_y^2(\xi_i, \eta_i)} \cdot m\left(D_i^n\right).$$

Věta 35

Má-li funkce f spojité parciální derivace f_x, f_y na omezené a jednoduše souvislé množině M v $\mathbb{R}^2$ a

$$S = \{[x, y, z] : [x, y] \in M, z = f(x, y)\},$$

pak

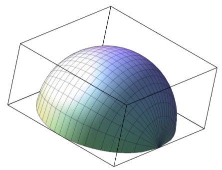
$$m(S) = \iint_M \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}\, dx\, dy = \iint_M \|\vec{n}(x, y)\|\, dx\, dy,$$

kde $\vec{n}$ je normálový vektor $\vec{n} = \pm(f_x(x, y), f_y(x, y), -1)$.

Poznámka

Délka grafu funkce je $\ell = \int \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$. Při parametrizaci $x = \varphi(t), y = \psi(t), \vec{t} = (\varphi', \psi')$ máme $\ell = \int \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}\, dt$.

Příklad 31



$$S : \begin{cases} z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \\ M : x^2 + y^2 \le 1, \end{cases} \qquad m(S) = ?$$

$$\begin{aligned} m(S) &= \iint_M \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy \\ &= \iint_M \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{1 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy \\ &= \iint_M \frac{dx\, dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \left| x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi \right| \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}}\, dr\, d\varphi = 2\pi \cdot \left[-\sqrt{1 - r^2} \right]_0^1 = 2\pi \end{aligned}$$

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je množina v rovině, která je omezená uzavřenou jednoduchou křivkou C (jednoduchá = neprotíná sebe sama). Nechť je dáno zobrazení $\Phi\colon M \to \mathbb{R}^3$ a toto zobrazení je definováno trojicí funkcí

$$x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v), z = \chi(u,v).$$

Nechť

$$S = \Phi(M) = \Big\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v), z = \chi(u,v), [u,v] \in M\Big\},$$

pak řekneme, že plocha S je *kousek plochy* parametricky zadaný trojicí funkcí φ, ψ, χ a množina

$$\Phi(C) = \Big\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v), z = \chi(u,v), [u,v] \in C\Big\}$$

se nazývá *kraj kousku plochy* S.

Poznámka

- Je-li S graf funkce jako v příkladu 31, pak máme $x = u, y = v, z = f(u,v)$, tedy S je kousek plochy.
- Válcová parametrizace horní polokoule je

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \ z = \sqrt{1-r^2},\ \ r \in [0,1],\ \ \varphi \in [0,2\pi].$$

Odvození vztahu pro normálový vektor parametricky zadaného kousku plochy

Předpokládejme, že funkce φ, ψ, χ mají na M spojité parciální derivace a hodnost matice

$$\begin{pmatrix} \varphi_u & \psi_u & \chi_u \\ \varphi_v & \psi_v & \chi_v \end{pmatrix}$$

je 2 pro každý bod $[u,v] \in M$. Označme

$$A(u,v) = \begin{vmatrix} \psi_u & \chi_u \\ \psi_v & \chi_v \end{vmatrix}, B(u,v) = \begin{vmatrix} \chi_u & \varphi_u \\ \chi_v & \varphi_v \end{vmatrix}, C(u,v) = \begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix},$$

$$H(u,v) = \sqrt{A^2(u,v) + B^2(u,v) + C^2(u,v)}.$$

Definice 20

Řekneme, že kousek plochy S je *hladký*, pokud mají funkce φ, ψ, χ spojité parciální derivace a

$$H(u,v) \neq 0 \quad \forall [u,v] \in M.$$

Poznámka

$$H(u,v) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad h\begin{pmatrix} \varphi_u & \psi_u & \chi_u \\ \varphi_v & \psi_v & \chi_v \end{pmatrix} = 2$$

Poznámka

Budeme uvažovat pouze dvoustranné plochy, tedy takové, u kterých lze určit jednoznačně jejich orientaci volbou normálového vektoru (to nelze např. u Möbiova pásu, který je jednostranný).
Plocha je neorientovatelná, pokud na ní existuje uzavřená křivka taková, že normálový vektor n přejde při spojitém pohybu po dané křivce v opačný vektor $-n$.

Věta 36

Nechť S je hladký kousek plochy a

$$x=\varphi(u,v), y=\psi(u,v), z=\chi(u,v)$$

je jeho parametrizace. Pak normálový vektor k S v bodě odpovídajícímu parametrům u, v je

$$\vec{n}=\pm\big(A(u,v),B(u,v),C(u,v)\big).$$

Důkaz.

Protože

$$h\begin{pmatrix}\varphi_u & \psi_u & \chi_u\\ \varphi_v & \psi_v & \chi_v\end{pmatrix}=2,$$

je alespoň jeden z determinantů $A(u,v), B(u,v), C(u,v)$ nenulový. Pro určitost předpokládejme, že

$$C(u,v)=\begin{vmatrix}\varphi_u & \psi_u\\ \varphi_v & \psi_v\end{vmatrix}\neq 0.$$

Potom pro $x=\varphi(u,v), y=\psi(u,v), [u,v]\xrightarrow{G}[\varphi(u,v),\psi(u,v)]$ je $C(u,v)$ Jacobián zobrazení G, tj.

$$J_G=\begin{pmatrix}\varphi_u & \psi_u\\ \varphi_v & \psi_v\end{pmatrix},\qquad C(u,v)=\det J_G(u,v)\neq 0.$$

V okolí bodu $[u,v]$ tedy existuje inverzní zobrazení k G

$$u=f(x,y),\quad v=g(x,y).$$

Zvolme v okolí bodu $[u,v]$ přeparametrizování

$$u=x,\quad v=y,\quad z=\chi(f(x,y),g(x,y))$$

s parciálními derivacemi

$$z_x=\chi_u f_x+\chi_v g_x,\quad z_y=\chi_u f_y+\chi_v g_y.$$

Protože $J_{G^{-1}}=(J_G)^{-1}$, máme

$$\begin{pmatrix}f_x & g_x\\ f_y & g_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_u & \psi_u\\ \varphi_v & \psi_v\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{C(u,v)}\begin{pmatrix}\psi_v & -\psi_u\\ -\varphi_v & \varphi_u\end{pmatrix},$$

tedy

$$z_x=\frac{1}{C(u,v)}(\chi_u\psi_v-\chi_v\psi_u)=\frac{-A(u,v)}{C(u,v)},$$
$$z_y=\frac{1}{C(u,v)}(-\chi_u\varphi_v+\chi_v\varphi_u)=\frac{-B(u,v)}{C(u,v)}$$

a

$$\vec{n}=\pm(z_x,z_y,-1)=\pm\left(\frac{-A}{C},\frac{-B}{C},-1\right)\sim\pm(A,B,C).$$

□

Poznámka

$$\Phi_u = (\varphi_u, \psi_u, \chi_u), \Phi_v = (\varphi_v, \psi_v, \chi_v) \;\Rightarrow\; \Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v) = \pm\vec{n}$$

Poznámka

$$m(S) = \lim_{\nu(D)\to 0} \sum_{i=1}^{m} m(\tilde{S}_i)$$

(Nezávisí na výběru reprezentantů.)

Definice 21

Plošný integrál prvního druhu

$$\iint_S G(x,y,z)\, \mathrm{d}S$$

definujeme jako

$$\lim_{\nu(D)\to 0} \sum_{i=1}^{m} G\big(\varphi(\xi_i,\eta_i), \psi(\xi_i,\eta_i), \chi(\xi_i,\eta_i)\big)\, m(\tilde{S}_i) = \iint_S G(x,y,z)\, \mathrm{d}S,$$

pokud limita existuje a je nezávislá na výběru ξ_i a η_i.

Definice 22

Plošný integrál druhého druhu

$$\iint_S P(x,y,z)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z + Q(x,y,z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}z + R(x,y,z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

definujeme jako

$$\lim_{\nu(D)\to 0} \sum_{i=1}^{m} \Big\langle \vec{F}\Big(\varphi(\xi_i,\eta_i), \psi(\xi_i,\eta_i), \chi(\xi_i,\eta_i)\Big),$$
$$\vec{n}\Big(\varphi(\xi_i,\eta_i), \psi(\xi_i,\eta_i), \chi(\xi_i,\eta_i)\Big)\Big\rangle\, m(\tilde{S}_i),$$

pokud limita nezávisí na výběru reprezentantů $[\xi_i, \eta_i] \in D_i$.

Nechť M je parametricky zadaný kousek plochy,

$$S : x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v), z = \chi(u,v), [u,v] \in M,$$

a $G\colon S \to \mathbb{R}$ je integrovaná funkce, pak

$$\iint_S G(x,y,z)\, \mathrm{d}S$$
$$= \iint_M G(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)) \sqrt{A^2(u,v) + B^2(u,v) + C^2(u,v)}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v.$$

Věta 37

Pro počítání plošného integrálu prvního druhu platí obvyklé vzorce, zejména

- $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $G_1, G_2 \colon S \to \mathbb{R}$ *potom*

$$\iint_S (\alpha G_1 + \beta G_2)\,\mathrm{d}S = \alpha \iint_S G_1\,\mathrm{d}S + \beta \iint_S G_2\,\mathrm{d}S,$$

- $S = S_1 \cup S_2, S_1 \cap S_2 = \emptyset$, *potom*

$$\iint_S G\,\mathrm{d}S = \iint_{S_1} G\,\mathrm{d}S + \iint_{S_2} G\,\mathrm{d}S.$$

Příklad 32

$I = \iint_S (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}S = ?$, kde S je plášť kužele $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z \in [0, 1]$.

a) kartézská parametrizace plochy $\boxed{x = u, y = v, z = \sqrt{u^2 + v^2}}$

$$I = \iint_{u^2+v^2 \le 1} (u^2 + v^2) \sqrt{\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)^2 + \left(\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$= \iint_{u^2+v^2 \le 1} (u^2 + v^2)\sqrt{2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \left| \begin{matrix} u = r\cos\varphi & \varphi \in [0, 2\pi] \\ v = r\sin\varphi & r \in [0, 1] \end{matrix} \right|$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 r^2 \cdot r\,\mathrm{d}r = 2\pi\sqrt{2} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

b) polární (válcová) parametrizace $\boxed{x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = r}$

$$\begin{pmatrix} x_r & y_r & z_r \\ x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 1 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \end{pmatrix},$$

$$A(r, \varphi) = -r\cos\varphi, \quad B(r, \varphi) = -r\sin\varphi, \quad C(r, \varphi) = r,$$

$$I = \iint_M (r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)\sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi + r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \sqrt{2} \cdot \int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

c) sférická parametrizace $\boxed{x = r\cos\varphi \frac{\sqrt{2}}{2}, y = r\sin\varphi \frac{\sqrt{2}}{2}, z = \frac{r\sqrt{2}}{2}}$

(kuželová plocha má ve sférických souřadnicích rovnici $\vartheta = \vartheta_0$)

Nechť S je orientovaný hladký kousek plochy s parametrizací

$$S : x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v), [u, v] \in M.$$

Tato parametrizace je *souhlasná*, pokud normálový vektor $(A(u, v), B(u, v), C(u, v))$ je souhlasný s parametrizací plochy S, tj. má stejný směr jako normálový vektor určený orientací.

Je-li $(A(u, v), B(u, v), C(u, v))$ opačný než normálový vektor určený orientací, pak jde o *nesouhlasnou* parametrizaci.

$$\iint_S P(x,y,z)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z + Q(x,y,z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}z + R(x,y,z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

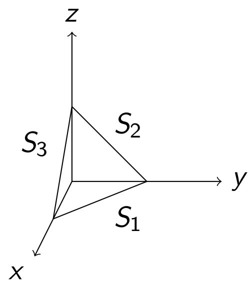
$$= \pm \iint_M \Big[P(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\ A(u,v) + Q(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\ B(u,v) + R(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\ C(u,v)\Big]\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v$$

$$= \iint_M \langle \vec{F}(\varphi,\psi,\chi),(A,B,C)\rangle\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v = \iint_M \langle \vec{F}(\varphi,\psi,\chi), \underbrace{\left(\frac{A}{H},\frac{B}{H},\frac{C}{H}\right)}_{\frac{\vec{n}}{\|n\|}}\rangle \underbrace{H\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v}_{\mathrm{d}S},$$

kde $H = H(u,v) = \sqrt{A^2+B^2+C^2}$.

Příklad 33

$\iint_S xy\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z + yz\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}z + xz\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = ?$, kde S je jednotkový simplex $x=0, y=0, z=0, z=1-x-y$ orientovaný ve směru vnější normály.



$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$

$S_1:\ x \in [0,1],\ y \in [0,1-x],\ z = 0$

parametrizace: $x = u,\ y = v,\ z = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A,B,C) = (0,0,1)$$

(nesouhlasná orientace)

$$\iint_{S_1} xy\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z + yz\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}z + xz\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = -\int_M (u\cdot v\cdot 0 + v\cdot 0\cdot 0 + u\cdot 0\cdot 1)\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v = 0$$

Analogicky $\iint_{S_2} = 0$ a $\iint_{S_3} = 0$.

$S_4 : x = u, y = v, z = 1-u-v$, tedy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A = 1, B = 1, C = 1, \quad \vec{n} = (1,1,1)$$

a orientace je tedy souhlasná.

$$\iint_{S_4} \Big(u\cdot v\cdot 1 + v(1-u-v)\cdot 1 + u(1-u-v)\cdot 1\Big)\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v = \int_0^1 \int_0^{1-u} (uv + v - uv - v^2 + u - u^2 - uv)\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}u = \frac{1}{8}$$

Příklad 34

$$\iint_S x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z + y\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}z + z\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = ?$$

kde S je kulová sféra $x^2+y^2+z^2 = 1$ orientovaná ve směru vnější normály.

Parametrizace $x = 1\cdot\cos\varphi\sin\vartheta, y = 1\cdot\sin\varphi\sin\vartheta, z = 1\cdot\cos\vartheta$ dává

$$\begin{pmatrix} -\sin\varphi\sin\vartheta & \cos\varphi\sin\vartheta & 0 \\ \cos\varphi\cos\vartheta & \sin\varphi\cos\vartheta & -\sin\vartheta \end{pmatrix},$$

tedy

$$\vec{n} = (-\cos\varphi\sin^2\vartheta, -\sin\varphi\sin^2\vartheta, -\sin^2\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta - \cos^2\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta) = (-\cos\varphi\sin^2\vartheta, -\sin\varphi\sin^2\vartheta, -\sin\vartheta\cos\vartheta)$$

$\vartheta = \frac{\pi}{4} = \varphi : \vec{n} = (<0, <0, <0)$ orientace je nesouhlasná, míří v 1. oktantu dozadu dolů, plocha je orientovaná nahoru a ven.

$$I = -\iint_S \left[\cos\varphi \sin\vartheta(-\cos\varphi \sin^2\vartheta) + \sin\varphi \sin\vartheta(-\sin\varphi \sin^2\vartheta) + \cos\vartheta(-\sin\vartheta\cos\vartheta)\right] \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\vartheta$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\cos^2\varphi \sin^3\vartheta + \sin^2\varphi \sin^3\vartheta + \sin\vartheta\cos^2\vartheta\right) \mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\vartheta$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \sin^3\vartheta + \sin\vartheta\cos^2\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta = 4\pi$$

Poznámka

$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$, kde vektorové pole $\vec{F}$ má souřadnice (x, y, z), tedy

$$\vec{n} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

a $\langle\vec{F},\vec{n}\rangle = x^2+y^2+z^2 = 1$ (na kouli), proto

$$\iint_S 1\,\mathrm{d}S = 4\pi r^2 = |r=1| = 4\pi.$$

Greenova věta říkala, že pro integrál přes křivku orientovanou kladně platí

$$\oint_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D (Q_x - P_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Definice 23

- Množinu

$$V = \{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 : [x,y]\in M, g(x,y)\le z\le h(x,y)\},$$

  nazýváme *jednoduchý (regulární, normální) obor vzhledem k ose z*.
- Analogicky definujeme jednoduché obory vzhledem k osám x a y.
- Řekneme, že množina $\tilde{V}\subseteq\mathbb{R}^3$ je jednoduchý obor v $\mathbb{R}^3$, pokud je konečným sjednocením jednoduchých oborů vzhledem ke všem osám x, y, z.

Příklad 35

Čtyřboký jehlan je jednoduchým oborem vzhledem ke všam osám (simplex).

Věta 38

Nechť V je jednoduchý obor vzhledem k ose z, S je plocha ohraničující V orientovaná ve směru vnější normály a funkce $R\colon V\to\mathbb{R}$ je spojitá spolu s parciální derivací R_z na množině $\overline{V}$ (uzávěr V). Pak platí

$$\iint_S R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iiint_V R_z(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Důkaz.
Pravá strana rovnosti je

$$\iiint_V R_z(x,y,z)\,\mathrm{dx\,dy\,dz} \overset{\text{[Fubini]}}{=} \iint_M \left[\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} R_z(x,y,z)\,\mathrm{dz}\right]\mathrm{dx\,dy}$$
$$= \iint_M [R(x,y,h(x,y)) - R(x,y(g(x,y))]\,\mathrm{dx\,dy}.$$

Levou stranu rozepíšeme jako

$$\iint_S R(x,y,z)\,\mathrm{dx\,dy}$$
$$= \underbrace{\iint_{S_1} R(x,y,z)\,\mathrm{dx\,dy}}_{\text{dno}} + \underbrace{\iint_{S_2} R(x,y,z)\,\mathrm{dx\,dy}}_{\text{plášť}} + \underbrace{\iint_{S_3} R(x,y,z)\,\mathrm{dx\,dy}}_{\text{víko}}.$$

Máme

$$\iint_{S_1} R(x,y,z)\,\mathrm{dx\,dy}$$
$$= \left|\begin{matrix} x=u, y=v, z=g(u,v) \\ (-g_x, -g_y, 1),\ \text{nesouhl. par.}\end{matrix}\right| = -\iint_M R(x,y,g(x,y))\,\mathrm{dx\,dy},$$
$$\iint_{S_3} R(x,y,z)\,\mathrm{dx\,dy} = +\iint_M R(x,y,h(x,y)\,\mathrm{dx\,dy}.$$

Dále $\iint_{S_2} R(x,y,z)\,\mathrm{dx\,dy} = 0$, protože plášť válce má stěny rovnoběžné s osou z a tok podél osy z neprochází do boku ($\vec{F} = (P,Q,R) = (0,0,R)$).
Celkem tedy

$$\iint_S R(x,y,z)\,\mathrm{dx\,dy}$$
$$= \iint_M R(x,y,h(x,y))\,\mathrm{dx\,dy} - \iint_M R(x,y,g(x,y))\,\mathrm{dx\,dy}.$$

□

Věta 39

Za předpokladů analogickým k předpokladům předchozí věty platí pro jednoduché obory vzhledem k y, resp. x vztahy

$$\iint_S Q(x,y,z)\,\mathrm{dx\,dz} = \iiint_V Q_y(x,y,z)\,\mathrm{dx\,dy\,dz},$$

resp.

$$\iint_S P(x,y,z)\,\mathrm{dy\,dz} = \iiint_V P_x(x,y,z)\,\mathrm{dx\,dy\,dz}.$$

Věta 40 (Gaussova–Ostrogradského věta)

Nechť V je jednoduchý obor v $\mathbb{R}^3$, funkce $P,Q,R\colon V\to\mathbb{R}$ jsou spojité na $\overline{V}$ spolu s parciálními derivacemi P_x, Q_y, R_z a nechť S je ohraničená plocha ohraničující V orientovaná ve směru vnější normály. Pak platí

$$\iint_S [P(x,y,z)\,\mathrm{dy\,dz} + Q(x,y,z)\,\mathrm{dx\,dz} + R(x,y,z)\,\mathrm{dx\,dy}]$$
$$= \iiint_V [P_x(x,y,z) + Q_y(x,y,z) + R_z(x,y,z)]\,\mathrm{dx\,dy\,dz}.$$

Příklad 36

$$I = \iint_S x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z + y\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}z + z\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = ?$$

kde $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$, orientovaná vně.

$$I = \iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1} 3\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = 3 \cdot \iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$$
$$= 3 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = |r = 1| = 4\pi$$

Poznámka

Nechť S ohraničuje V a je orientovaná vně.

- $S \subseteq \mathbb{R}^2 \Rightarrow m(S) = \frac{1}{2} \oint_C (-y\ \mathrm{d}x + x\ \mathrm{d}y)$.
- $m(V) = \frac{1}{3} \iint_S (x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z + y\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}z + z\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y)$.
- Pro $\vec{F} = (P, Q, R)$ je $\operatorname{div} \vec{F} = P_x + Q_y + R_z$ *divergence* vektorového pole.
- Vektorové pole je nezřídlové $\Leftrightarrow \operatorname{div} \vec{F} = 0$.
- Gaussovu–Ostrogradského větu lze zapsat jako

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\ \mathrm{d}S = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z.$$

Věta 41

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je jednoduchá oblast omezená uzavřenou křivkou L. Nechť S je plocha v prostoru, která je grafem funkce $z = f(x, y)$, f je spojitá na $\overline{M}$ spolu s parciálními derivacemi f_x, f_y. Dále nechť C je prostorová křivka ohraničující S, tj. křivka, jejíž průmět do podstavné roviny $z = 0$ je rovinná křivka L, a předpokládejme, že křivka C je souhlasně orientovaná s plochou S podle pravidla pravé ruky. Pak

$$\oint_C P(x, y, z)\ \mathrm{d}x = \iint_S \left[P_z(x, y, z)n_2 - P_y(x, y, z)n_3\right]\ \mathrm{d}S,$$
$$\left(\mathrm{d}S = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\right),$$

kde $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ je jednotkový normálový vektor k ploše S souhlasný s její orientací.

Důkaz.

$$\oint_C P\ \mathrm{d}x \xrightarrow{\text{projekce}} \oint_L \xrightarrow{\text{Greenova V.}} \iint_M \xrightarrow{\text{zpětná projekce}} \iint_S$$

$$\oint_C P(x, y, z)\ \mathrm{d}x = \left| \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\} \text{parametrizace } L \\ z = z(t) = f(x(t), y(t)) \end{array}\right\} \text{parametrizace } C \right|$$
$$= \oint_L P(x, y, f(x, y))\ \mathrm{d}x = -\iint_M \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, f(x, y))\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$
$$= -\iint_M [P_y(x, y, f(x, y)) + P_z(x, y, f(x, y)) f_y(x, y)]\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \qquad (\dots)$$

$$= -\iint_M \Bigg[P_y(x,y,f(x,y)) \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}}_{n_3} - P_z(x,y,f(x,y)) \underbrace{\frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}}_{n_2} \Bigg] \underbrace{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\ \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y}_{\mathrm{d}S}$$

$$= \iint_S [P_z(x,y,z)n_2 - P_y(x,y,z)n_3]\ \mathrm{d}S,$$

kde $\vec{n} = \pm(-f_x, -f_y, 1)$, $\|\vec{n}\| = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}$. □

Věta 42

Za předpokladů analogickým k předpokladům předchozí věty platí

$$\oint_C Q(x,y,z)\ \mathrm{d}y = \iint_S [Q_x(x,y,z)n_3 - Q_z(x,y,z)n_1]\ \mathrm{d}S,$$

$$\oint_C R(x,y,z)\ \mathrm{d}z = \iint_S [R_y(x,y,z)n_1 - R_x(x,y,z)n_2]\ \mathrm{d}S.$$

Věta 43 (Stokesova věta)

Nechť plochu S, která je omezená uzavřenou prostorovou křivkou C tvořící kraj S, lze rozložit na konečný počet částí, které jsou grafy funkcí proměnných x, y, totéž pro x, z a y, z. Nechť funkce $P, Q, R\colon S \to \mathbb{R}$ jsou na S spojité spolu se svými parciálními derivacemi prvního řádu. Dále nechť křivka C je orientována souhlasně s S. Pak platí

$$\oint_C P(x,y,z)\ \mathrm{d}x + Q(x,y,z)\ \mathrm{d}y + R(x,y,z)\ \mathrm{d}z$$

$$= \iint_S (R_y - Q_z)\ \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z + (P_z - R_x)\ \mathrm{d}x\, \mathrm{d}z + (Q_x - P_y)\ \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Důkaz.

$$\oint_C P\ \mathrm{d}x + Q\ \mathrm{d}y + R\ \mathrm{d}z$$

$$= \iint_S \Big[(P_z n_2 - P_y n_3) + (Q_x n_3 - Q_z n_1) + (R_y n_1 - R_x n_2) \Big]\ \mathrm{d}S$$

$$= \iint_S \Big[(R_y - Q_z)n_1 + (P_z - R_x)n_2 + (Q_x - P_y)n_3 \Big]\ \mathrm{d}S$$

$$= \iint_S \Big\langle (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y), \vec{n} \Big\rangle\ \mathrm{d}S$$

$$= \iint_S (R_y - Q_z)\ \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z + (P_z - R_x)\ \mathrm{d}x\, \mathrm{d}z + (Q_x - P_y)\ \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

□

Poznámka

Nechť

$$\vec{F} = (P, Q, R) \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad [x, y, z] \mapsto [P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)].$$

Rotace vektorového pole je

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y} R - \frac{\partial}{\partial z} Q, -\frac{\partial}{\partial x} R + \frac{\partial}{\partial z} P, \frac{\partial}{\partial x} Q - \frac{\partial}{\partial y} P \right)$$

$$= (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y).$$

Stokesovu větu lze přepsat do tvaru

$$\oint_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S = \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

Příklad 37

Pomocí Stokesovy věty vypočtěte integrál

$$\oint_C y \, \mathrm{d}x + z \, \mathrm{d}y + x \, \mathrm{d}z,$$

kde C je prostorová křivka, která vznikne jako průsečík kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ a roviny $x + y + z = 0$, orientovaná tak, že její průmět do podstavně roviny xy (tj. $z = 0$) je orientována kladně (proti směru hodinových ručiček).

$$\vec{F} = (y, z, x), \quad \operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = (0 - 1, 0 - 1, 0 - 1) = -(1, 1, 1)$$

$$\oint_C y \, \mathrm{d}x + z \, \mathrm{d}y + x \, \mathrm{d}z = -\iint_S 1 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z + 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

kde S je část roviny $x + y + z = 0$ uvnitř koule $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Dále

$$-\iint_S 1 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z + 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = -\iint_S \langle (1, 1, 1), \vec{n} \rangle \, \mathrm{d}S$$

$$= \left| \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1) \text{ je jednotkový norm. vektor k ploše } S \right|$$

$$= -\iint_S \left\langle (1, 1, 1), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\rangle \mathrm{d}S$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{3}} m(S) = -\sqrt{3} \pi a^2.$$

$\boxed{\text{Pokusme se příklad vyřešit bez použití Stokesovy věty.}}$

Je-li $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta]$, parametrizace průmětu křivky do roviny $z = 0$, pak (použijeme rovinu $x + y + z = 0$)

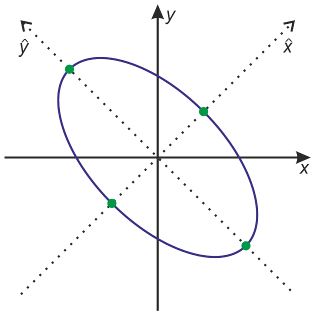
$$\int_C y \, \mathrm{d}x + z \, \mathrm{d}y + x \, \mathrm{d}z$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[\psi(t)\varphi'(t) + (-\varphi(t) - \psi(t))\psi'(t) + \varphi(t)(-\varphi'(t) - \psi'(t)) \right] \mathrm{d}t.$$

Průmět křivky C do roviny xy bude elipsa $\mathcal{E}$. Kvůli parametrizaci zjišťujeme, jak je natočená, a to pomocí Lagrangeových multiplikátorů, tj. $\mathcal{E} : x^2 + y^2 \to$ extrém.

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2)$$

$$= x^2 + y^2 + \lambda_1 (x^2 + y^2 + z^2 - a^2) + \lambda_2 (x + y + z).$$



$$
\begin{aligned}
L_x &= 2x + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0\\
L_y &= 2y + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0\\
L_z &= 2z\lambda_1 + \lambda_2 = 0\\
x^2 + y^2 + z^2 &= a^2\\
x + y + z &= 0
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ body $[x, y, z]$:

$$
\left[\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}, 0\right], \left[-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}, 0\right], \left[\frac{a}{\sqrt{6}}, \frac{a}{\sqrt{6}}, -\frac{2a}{\sqrt{6}}\right], \left[-\frac{a}{\sqrt{6}}, -\frac{a}{\sqrt{6}}, \frac{2a}{\sqrt{6}}\right]
$$

Odtud dostaneme poloosy ($a/\sqrt{3}$ pro $\hat{x}$ a a pro $\hat{y}$) a tedy parametrizaci $\hat{x} = \frac{a}{\sqrt{3}} \cos t, \hat{y} = a \sin t, t \in [0, 2\pi]$. Dále nové souřadné osy vzniknou ze starých jako (musíme zohlednit změnu měřítka a orientaci) $\hat{x} = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \hat{y} = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$. Odtud vyjádříme x a y v závislosti na t

$$
x = \frac{\sqrt{2}}{2} a \left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}} - \sin t\right), y = \frac{\sqrt{2}}{2} a \left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}} + \sin t\right)
$$

a dosazením do

$$
\int_\alpha^\beta \left[\psi(t)\varphi'(t) + (-\varphi(t) - \psi(t))\psi'(t) + \varphi(t)(-\varphi'(t) - \psi'(t))\right] \mathrm{d}t
$$

získáme výsledek.

Hamiltonův nabla formalismus pro gradient, divergenci a rotaci

Nechť $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ je vektorové pole.

- Gradient $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$
- $\operatorname{div} \vec{F} = \langle \nabla, \vec{F} \rangle = P_x + Q_y + R_z$
- Divergence udává zřídlovitost vektorového pole. (Je-li rovna nule, je pole nezřídlové.)
- $\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$
- Rotace udává lokální míru rotace v daném bodě. (Je-li nulová, je pole nevírové.)
- spojitost, tedy záměnné parciální derivace
  $\Rightarrow \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \langle \nabla, \nabla \times \vec{F} \rangle = R_{yx} - Q_{zx} + P_{zy} - R_{xy} + Q_{xz} - P_{yz} = 0$
- $\nabla \times \vec{F}$ je vektor kolmý jak k ∇, tak i k $\vec{F}$

Nechť $f(x, y, z)$ je skalární pole.

- Gradient funkce $f(x, y, z)$

$$
\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).
$$

- Gradient je kolmý k vrstevnicím a směřuje k vyšším funkčním hodnotám.
- Totální diferenciál funkce $f(x, y, z)$

$$
\mathrm{d}f = \nabla f \cdot (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z.
$$

  Funkce f je kmenová funkce daného diferenciálu.
- $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \nabla \times \nabla f = 0$
  (vektorový součin lineárně závislých vektorů)
- $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \operatorname{div}(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \langle \nabla, \nabla f \rangle = \nabla^2 f$
  (Laplaceův operátor)

- $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{\imath} + Q(x,y)\vec{\jmath}$ hladká v oblasti obsahující množinu Ω a její hranici $\partial\Omega$ (při obíhání po hranici je množina vlevo), pak (Greenova věta):
  1. Cirkulace po hranici $\partial\Omega$ je (viz třetí složku rot $\vec{F}$)
  $$\oint_{\partial\Omega} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \iint_{\Omega} Q_x(x,y) - P_y(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
  2. Tok přes hranici $\partial\Omega$ je (viz div $\vec{F}$)
  $$\oint_{\partial\Omega} -Q(x,y)\mathrm{d}x + P(x,y)\mathrm{d}y = \iint_{\Omega} P_x(x,y) + Q_y(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$