# Diferenciální rovnice

Petr Hasil

Přednáška z Matematické analýzy

# Obsah

# Obsah

## Definice 1

*Diferenciální rovnice* je rovnice, ve které se neznámá funkce vyskytuje spolu se svými derivacemi. *Řád diferenciální rovnice* je nejvyšší derivace neznámé funkce, která se v rovnici vyskytne.

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

## Poznámka

Budeme uvažovat DR $n$-tého řádu ve tvaru rozřešeném vzhledem k nejvyšší derivaci, tedy

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right).$$

Pro precizní popis teorie diferenciálních rovnic je nutná znalost diferenciálního počtu funkcí více proměnných.

### Definice 2

Řešení diferenciální rovnice je funkce $y = y(x)$ (popř. $y = y(t)$, $y = y(x, t)$,...), která splňuje danou diferenciální rovnici.

Řešení diferenciálních rovnic získáme obvykle pomocí integrování, proto budou obsahovat integrační konstanty (tolik integračních konstant, kolikrát budeme integrovat). Tedy tzv. *obecné řešení* (tj. všechna řešení) dostaneme jako množinu danou těmito konstantami.

Řešení dané počáteční podmínkou, např. $y(x_0) = y_0$ (předem zadaná hodnota v daném bodě), se nazývá *partikulární*.

## Poznámka

- Řešení diferenciálních rovnic jsou spojité funkce (existují jejich derivace).
- Rovnice $y' = f(x)$ nemá jediné řešení (primitivní funkce tvoří množinu). Pokud uvažujeme podmínku, že $F(x)$ má procházet určitým bodem, pak má rovnice jedno řešení. Podmínka $y(x_0) = y_0$ se nazývá *počáteční podmínka* a rovnice s touto podmínkou *počáteční problém* (Cauchyho úloha).
- Výpočet primitivní funkce $y = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ odpovídá řešení rovnice $y' = f(x)$.
- $y' = y$ má řešení $y = C \cdot \mathrm{e}^x$.
- $y'' + y = 0$ slouží k popisu malých kmitů matematického kyvadla. Řešení jsou $y = \sin x$, $y = \cos x$ a každá lineární kombinace těchto dvou funkcí, tedy řešení tvoří lineární prostor.

## Poznámka

- $y' = f(x, y)$ pokud $f(x, y)$ není „dostatečně pěkná", tak se nám nepodaří explicitně vyjádřit řešení rovnice.
- Pro nelineární rovnice nemusí existovat vyjáření $y = y(x, c)$ zahrnující všechna řešení.

## Příklad 1

- Rovnice $y' = y^2$ má řešení $y = \frac{1}{c-x}, x \in (-\infty, c), (c, \infty)$ a $y = 0$, které nelze dostat žádnou volbou $c$.
- Rovnice $y' = \sqrt{y+1}$ má řešení $y = \frac{(x+c)^2}{4} - 1, x \in (-c, \infty)$ a $y = -1$, které nelze dostat žádnou volbou $c$.
  (Pozn. každé nekonstantní řešení je rostoucí.)

## Příklad 2

Diferenciální rovnice $x\,y' + y = 0$ má řešení $y = \frac{c}{x}$ pro libovolné $c \in \mathbb{R}$, protože

$$y' = (cx^{-1})' = -\frac{c}{x^2} \qquad \Rightarrow \qquad x\,y' + y = x\left(-\frac{c}{x^2}\right) + \frac{c}{x} = 0.$$

Tedy tato rovnice má nekonečně mnoho řešení.

- Řešeními rovnice jsou hyperboly ($c \neq 0$) a přímka $y = 0$ ($c = 0$).
- Obecným řešením je $y = \frac{c}{x}, c \in \mathbb{R}$.
- $y = \frac{2}{x}$ je partikulární řešení (c=2).
- $y = \frac{2}{x}, x \in (0, \infty)$, je řešením počátečního problému

$$x\,y' + y = 0, \qquad y(1) = 2.$$

## Klasifikace

- Podle počtu nezávisle proměnných na obyčejné (ODR) a parciální (PDR) diferenciální rovnice.
- Podle linearity na lineární a nelineární diferenciální rovnice.
- Podle řádu (rovnice $n$-tého řádu).

## Příklad 3

- $ms'' = F$, kde $s = s(t)$ je poloha bodu na přímce, dráha (Newtonův zákon)
- $\alpha^2 u_{xx} = u_t$, kde $u = u(x,t)$ je teplota v čase $t$ v bodě $x$ na přímce (vedení tepla v tyči)
- $\alpha^2 u_{xx} = u_{tt}$, kde $u = u(x,t)$ je pozice vzhledem ke klidové poloze, vychýlení v čase $t$ v bodě $x$ na přímce (vlnová rovnice)
- $\theta'' + \alpha \sin\theta = 0$, kde $\theta = \theta(t)$ je úhel (matematické kyvadlo)
- $Q' = -kQ$, kde $Q = Q(t)$ je množství radioaktivní látky (radioaktivní rozpad)

## Rovnice prvního řádu

- Obecný tvar je $F(x, y, y') = 0$, kde $F$ je funkce tří proměnných.
- Rovnice rozřešené vzhledem k derivaci je $y' = f(x, y)$, kde $f$ je funkce dvou proměnných.

Uvažujme počáteční problém

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

Nechť je $y_1$ řešením tohoto problému na intervalu $I_1$ a $y_2$ na intervalu $I_2$. Je-li $I_1 \subseteq I_2$, pak $y_1$ je zúžením $y_2$ a naopak $y_2$ je prodloužením $y_1$.

## Poznámka

V obecné teorii diferenciálních rovnic lze ukázat, že pokud je pravá strana rovnice $y' = f(x, y)$ spojitá a navíc tzv. lipschitzovská v proměnné $y$, tj.

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$$

pro každé $x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ a pro nějaké univerzální $L \geq 0$, potom řešení počáteční úlohy s touto rovnicí a podmínkou $y(x_0) = y_0$ skutečně existuje a je jediné, ovšem pouze v dostatečně malém okolí bodu $x_0$.

Toto řešení je spojité (existuje derivace) a má spojitou derivaci (předpoklad spojitosti funkce $y' = f(x, y)$.)

## Patologie

- Nejednoznačnost řešení.
  Problém $y' = 3\sqrt[3]{y^2}, y(1) = 0$, má řešení $y = (x-1)^3$ a $y = 0$.
  (Obě funkce procházejí bodem $[1, 0]$.)
- Malý interval, kde řešení existuje.
  Problém $y' = 2xy^2, y(0) = 1/a^2$ má řešení $y = \frac{1}{a^2 - x^2}, x \in (-a, a)$.
- Výběr větve řešení.
  Rovnice $y' = y^3$ má implicitní řešení $y^2 = \frac{-1}{2(x+c)}$ a $y = 0$. Za počáteční podmínky $y(0) = 1/2$ dostáváme řešení
  $y = +\sqrt{\frac{-1}{2(x-2)}}, x < 2$.

## Geometrická interpretace rovnice $y' = f(x,y)$

Bodu $[x,y]$ je přiřazena hodnota $y'$ (směrnice tečny), tedy tzv. *lineární element* (znázorňován úsečkou) s daným sklonem. Soubor všech lineárních elementů nazýváme *směrové pole*. Křivka spojující body se stejným lineárním elementem je *izoklina*. Graf řešení (*integrální křivka*) probíhá podél lineárních elementů. Tečna k integrální křivce vždy obsahuje lineární element příslušný k danému bodu.

## Příklad 4

Integrální křivky rovnice $y' = -\frac{x}{y}$ jsou půlkružnice

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}, x \in (-r, r).$$

Izokliny jsou polopřímky vycházející z počátku. Pro $y' = 0$ máme $x = 0$ a pro $y' = k(\neq 0)$ máme $y = -\frac{x}{k}$.

## Speciální případy

- $f(x,y) = f(x)$, tj. $y' = f(x)$
  Odpovídá hledání primitivní funkce k $f(x)$, tedy $y = \int f(x)\,\mathrm{d}x$.
  Problém
  $$y' = f(x), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$
  má řešení
  $$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
- $f(x,y) = g(y)$, tj. $y' = g(y)$
  Lze převést na předchozí případ využitím inverzní funkce.
  $$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{g(y)}, \quad g(y) \neq 0,$$
  tedy máme problém (1) pro funkci $x(y)$ s řešením
  $x = x_0 + \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t$, což implicitně udává funkci $y = y(x)$.

### Věta 1

*Nechť je funkce* $f = f(x)$ *spojitá na intervalu* $I = (a, b)$ *a* $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}$. *Pak je funkce* $y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ *jediným a úplným řešením problému* (1).

### Důkaz.

Řešením rovnice jsou tvaru $y(x) = F(x) + c$, kde $F$ je nějaká primitivní funkce k $f$ na $I$, např. $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$. Uvážením podmínky $y(x_0) = y_0$, tedy volbou $x = x_0$ ihned dostáváme $c = y_0$. □

## Věta 2

*Nechť je funkce $g = g(y)$ spojitá na intervalu $J = (c, d)$ taková, že $g(y) \neq 0, \forall y \in J$. Pak $\forall x_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in J$ existuje právě jedno řešení $y(x)$ rovnice $y' = g(y)$ splňující $y(x_0) = y_0$. Toto řešení je inverzní funkce k funkci $x = x_0 + \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t$.*

**Důkaz.**

Stačí dokázat, že inverzní funkce $v(x)$ k funkci

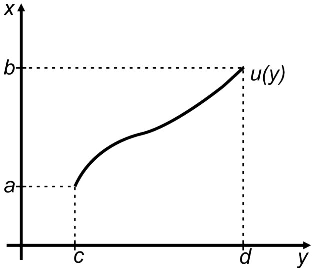
$$u(y) = x_0 + \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t$$

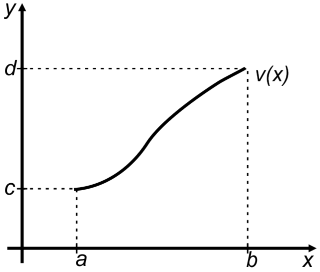
je řešením daného problému, zbytek plyne z věty 1.
Dle derivace inverze máme

$$v'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} v(x) = \frac{1}{u'(y)}\bigg|_{y=v(x)} = \frac{1}{\frac{1}{g(y)}}\bigg|_{y=v(x)} = g(v(x)).$$

Inverze k $v(x)$ existuje, neboť $u(y)$ je ryze monotónní (rostoucí pro $g(y) > 0$, klesající pro $g(y) < 0$). Řešení $v(x)$ existuje na intervalu $I = (a, b) := \mathcal{D}(v(x)) = \mathcal{H}(u(y))$, kde pro $g(y) > 0$ je

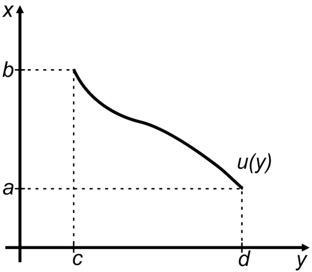
$$a = x_0 + \int_{y_0}^{c} \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t, \qquad b = x_0 + \int_{y_0}^{d} \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t$$

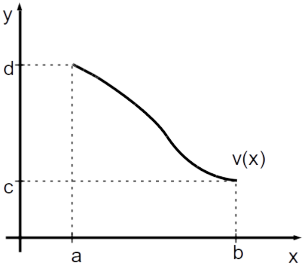


a pro $g(y) < 0$ je

$$a = x_0 + \int_{y_0}^{d} \frac{1}{g(t)}\, \mathrm{d}t, \qquad b = x_0 + \int_{y_0}^{c} \frac{1}{g(t)}\, \mathrm{d}t.$$




□

## Poznámka

Izokliny rovnice $y' = g(y)$ jsou přímky rovnoběžné s osou $x$.

## Příklad 5

Prostudujme rovnici $y' = \sqrt{1+y}$.

Rovnici $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1+y}$ upravíme na $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\sqrt{1+y}}$, tedy

$$x = x_0 + \int_{y_0}^{y} \frac{1}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t = x_0 + \left[2\sqrt{1+t}\right]_{y_0}^{y} = x_0 + 2\sqrt{1+y} - 2\sqrt{1+y_0}.$$

Funkce $g(y) = \sqrt{1+y}$ je spojitá pro $y \geq -1$, tj. $J = (c,d) = (-1,\infty)$, navíc $g(y) > 0, \forall y \in J$. Odtud

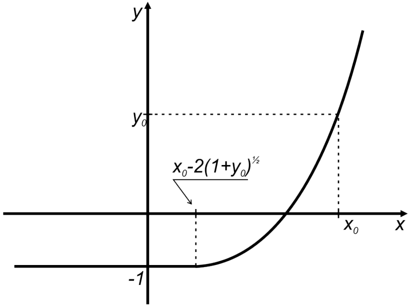
$$a = x_0 + \int_{y_0}^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t = x_0 - 2\sqrt{1+y_0}, \quad b = x_0 + \int_{y_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t = \infty.$$

- Jediné úplné řešení počáteční úlohy

$$y' = \sqrt{1+y}, \qquad y(x_0) = y_0, \qquad y_0 > -1,$$

je funkce

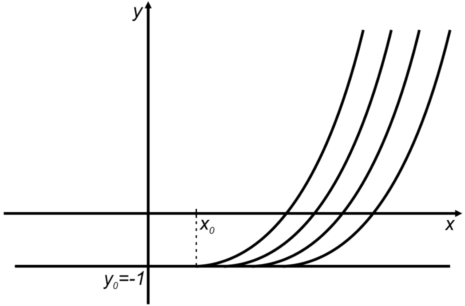
$$y(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty, x_0 - 2\sqrt{1+y_0}]; \\ \left[\frac{1}{2}(x - x_0) + \sqrt{1+y_0}\right]^2 - 1, & x \in (x_0 - 2\sqrt{1+y_0}, \infty). \end{cases}$$



- Počáteční úloha

$$y' = \sqrt{1+y}, \qquad y(x_0) = -1,$$

má nekonečně mnoho řešení.




- Pro $y_0 < -1$ nemá počáteční úloha žádné řešení.

Rovnicí se separovatelnými proměnnými budeme nazývat rovnici $y' = f(x)g(y)$.

## Věta 3

*Nechť $G$ je konvexní oblast v $\mathbb{R}^2$, $f : G \to \mathbb{R}$ funkce, která má spojité parciální derivace do druhého řádu včetně a $f(x,y) \neq 0$. Diferenciální rovnici*

$$y' = f(x,y)$$

*je možné převést na rovnici se separovanými proměnnými právě tehdy, když*

$$D(x,y) := \det \begin{pmatrix} f(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \end{pmatrix} = 0 \quad \textit{pro každé } [x,y] \in G.$$

Např. parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ funkce dvou proměnných $f(x,y)$ dle proměnné $y$ určíme tak, že předpis funkce derivujeme dle $y$ a s $x$ pracujeme jako s konstantou. (Podrobněji bude probráno v diferenciálním počtu funkcí více proměnných.)

## Věta 4

*Nechť je* $f = f(x)$ *spojitá na* $(a, b)$ *a* $g = g(y)$ *spojitá na* $(c, d)$, $g(y) \neq 0 \ \forall y \in (c, d)$. *Potom má počáteční problém*

$$y' = f(x)g(y), \qquad y(x_0) = y_0,$$

*kde* $x_0 \in (a, b), y_0 \in (c, d)$, *právě jedno řešení, které je implicitně dáno vzorcem*

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s.$$

## Důkaz.

Máme

$$
\begin{aligned}
y' &= f(x)\cdot g(y)\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f(x)\cdot g(y) \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{g(y)}\\
\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} &= f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \Big/ \text{integrace}\\
\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}t}{g(t)} + c_1 &= \int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s + c_2\\
\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}t}{g(t)} &= \int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s + c, \qquad c = c_2 - c_1.
\end{aligned}
$$

Volbou $y(x_0) = y_0$ dostaneme $0 = 0 + c$, tedy $c = 0$. □

## Poznámka

$$
\begin{aligned}
y' &= f(x) \cdot g(y) \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f(x) \cdot g(y) \quad \Big/ \cdot \frac{1}{g(y)} \\
\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} &= f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \Big/ \text{integrace} \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} + c_1 &= \int f(x)\,\mathrm{d}x + c_2 \\
G(y) &= F(x) + c \quad (c = c_2 - c_1)
\end{aligned}
$$

Explicitní řešení pak lze často zapsat ve tvaru $y(x) = G^{-1}\big[F(x) + c\big]$.

## Příklad 6

Vyřešme $y' = \frac{y^2-y}{x}$, tedy $f(x) = \frac{1}{x}, g(y) = y^2 - y$.

Máme

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{y^2 - y}{x} \\ \frac{\mathrm{d}y}{y^2 - y} &= \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pro} \quad y^2 - y \neq 0 \Rightarrow y \neq 0 \wedge y \neq 1. \end{aligned}$$

Vypočítáme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y(y-1)} = \int \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{-1}{y} + \frac{1}{y-1}\,\mathrm{d}y = -\ln|y| + \ln|y-1| + c_1,$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c_2.$$

Tedy

$$
\begin{aligned}
-\ln|y| + \ln|y-1| + c_1 &= \ln|x| + c_2 \\
\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| &= \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R} \\
\left|\frac{y-1}{y}\right| &= |x| \cdot \mathrm{e}^c \\
\frac{y-1}{y} &= \pm\, \mathrm{e}^c \cdot x = K \cdot x, \quad K \neq 0 \\
y &= \frac{1}{1-Kx}, \quad K \neq 0.
\end{aligned}
$$

Během výpočtu jsme udělali předpoklad, že $y \neq 0 \wedge y \neq 1$. Zkontrolujeme, zda nejde také o řešení rovnice:

- $y = 1$ je řešením a dostaneme jej pro $K = 0$,
- $y = 0$ je řešením, ale nijak jej nedostaneme,

tedy

$$\underbrace{y = \frac{1}{1 - Kx},}_{\text{obecné řešení}} \quad \underbrace{y = 0,}_{\text{singulární řešení}} \quad K \in \mathbb{R}$$

(Obecné řešení obsahuje tolik konstant, jako byl řád rovnice.) ■

## Příklad 7

$$y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}, \qquad y(0) = 1$$

Počáteční problém – vypočítáme obecné řešení a pak použitím počáteční podmínky určíme (vybereme) řešení, tedy

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1+y^2}{1+x^2} \\ \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} &= \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\ \operatorname{arctg} y &= \operatorname{arctg} x + c. \end{aligned}$$

Podmínka $y(0) = 1$ dává $\operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} 0 + c \Rightarrow c = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

Odtud dostáváme řešení

$$y = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{4}\right)$$

a užitím vzorce $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$ ho lze upravit na

$$y = \frac{x+1}{1-x}.$$

$\blacksquare$

Homogenní rovnice je rovnice ve tvaru

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

### Definice 3

Řekneme, že funkce $f = f(x)$ je homogenní řádu $n$, pokud

$$f(tx) = t^n f(x), \qquad \forall x \in \mathcal{D}(f), \forall t > 0.$$

### Poznámka

- Dosadíme-li do pravé strany rovnice $[tx, ty]$, máme $f\left(\frac{ty}{tx}\right) = f\left(\frac{y}{x}\right)$, tedy je homogenní řádu 0.
- Pokud je funkce $f$ identita, tj. $f(t) = t$, jedná se o rovnici se separovatelnými proměnnými.

Uvažujme rovnici $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ a použijme substituci

$$\frac{y}{x} = z \quad \Rightarrow \quad y = x \cdot z \quad \Rightarrow \quad y' = z + xz'.$$

Tím dostaneme rovnici

$$\begin{aligned} z + xz' &= f(z) \\ z' &= \frac{f(z) - z}{x} \end{aligned}$$

což je rovnice se separovatelnými proměnnými, kterou vyřešíme.

## Příklad 8

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cdot \ln \frac{y}{x}$$

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cdot \ln \frac{y}{x} \\
z + xz' &= z + z \cdot \ln z \\
z' &= \frac{z \cdot \ln z}{x} \qquad \Rightarrow z \cdot \ln z \neq 0 \Rightarrow (z \neq 0), z \neq 1 \\
\frac{\mathrm{d}z}{z \ln z} &= \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
\ln|\ln z| &= \ln|x| + c, c \in \mathbb{R} \\
|\ln z| &= |x| \cdot \mathrm{e}^c \\
\ln z &= \pm x \cdot \mathrm{e}^c \\
\ln z &= Kx, K \neq 0 \\
z &= \mathrm{e}^{Kx}
\end{aligned}$$

- $z = 0$ není řešením, ani nemůže být, protože $z = 0$ nepatří do definičního oboru logaritmu,
- $z = 1$ je řešením, získáme jej pro $K = 0$ (tedy nejde o singulární řešení).
- Celkově
$$y = x \cdot \mathrm{e}^{Kx}, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Zkouška:

$$\begin{aligned} & L = y' = \mathrm{e}^{Kx} + Kx\,\mathrm{e}^{Kx}, \\ & P = \mathrm{e}^{Kx} + \mathrm{e}^{Kx} \cdot \ln \mathrm{e}^{Kx} = \mathrm{e}^{Kx} + \mathrm{e}^{Kx} \cdot Kx, \\ \Rightarrow \quad & L = P \end{aligned}$$

■

Na homogenní rovnici (a tedy na rovnici se separovatelnými proměnnými) lze převést i rovnice ve tvaru

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{Ax + By + C}\right).$$

Při řešení rozlišujeme několik případů:

- $c = C = 0$

$$y' = f\left(\frac{ax + by}{Ax + By}\right) = f\left(\frac{a + b\frac{y}{x}}{A + B\frac{y}{x}}\right) = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

  např.

$$y' = \frac{y + x}{y - x} = \frac{\frac{y}{x} + 1}{\frac{y}{x} - 1}, \qquad \frac{y}{x} = z \Rightarrow \text{homogenní rovnice}$$

- $c \neq 0 \vee C \neq 0$ a $\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} \neq 0$

  Provedeme substituci, která odstraní absolutní členy.
  Substituce $x = u + m$ a $y = v + n$, kde $u$ je nová nezávisle proměnná a $v$ je nová závisle proměnná. Čísla $m$ a $n$ volíme tak, aby nový absolutní člen byl roven nule, tj.

  $$ax + by + c = a(u + m) + b(v + n) + c = au + bv + \underbrace{am + bn + c}_{=0},$$

  $$Ax + By + C = A(u + m) + B(v + n) + C = Au + Bv + \underbrace{Am + Bn + C}_{=0}.$$

  K určení substituce je tedy nutné vyřešit rovnice $am + bn + c = 0$, $Am + Bn + C = 0$ o neznámých $m$ a $n$.

  $$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{Ax + By + C}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v}{du} = f\left(\frac{au + bv}{Au + Bv}\right)$$

- $c \neq 0 \vee C \neq 0$ a $\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} = 0$

  Vydělíme polynomy a zavedeme substituci.

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{Ax+By+C}\right) = f\left(K_1 + K_2 \cdot \frac{1}{Ax+By+C}\right)$$

  substituce $\quad Ax + By + C = v \quad \to \quad A + By' = v'$

Příklad 9

$$y' = \frac{5y-5x-1}{2y-2x-1} = \frac{5}{2} + \frac{\frac{3}{2}}{2y-2x-1}$$

$$\text{substituce} \quad v = 2y - 2x - 1, \quad v' = 2y' - 2, \quad y' = \frac{v'+2}{2}$$

$$\frac{v'+2}{2} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2v} \Rightarrow v' + 2 = 5 + \frac{3}{v} \Rightarrow \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3v+3}\right) \mathrm{d}v = 1 \, \mathrm{d}x, \; v \neq -1$$

$$\Rightarrow v - \ln|v+1| = 3x + c_1 \Rightarrow 5x - 2y + 1 + \ln|2(y-x)| = c_2$$

$$\Rightarrow 5x - 2y + \ln|y-x| = c, c \in \mathbb{R}, \text{ a } y = x$$

Lineární diferenciální rovnice je rovnice tvaru (linearita vzhledem k $y$)

$$y' = a(x)y + b(x). \tag{LDR}$$

## Definice 4

Je-li $b(x) \equiv 0$, mluvíme o *homogenní lineární rovnici*, v opačném případě o *nehomogenní lineární rovnici*.

## Věta 5

*Jsou-li $y_1$ a $y_2$ řešením rovnice* (LDR)*, pak jejich rozdíl $u = y_1 - y_2$ je řešením homogenní lineární rovnice*

$$u' = a(x)u. \tag{hLDR}$$

## Poznámka

Z věty 5 plyne, že obecné řešení rovnice (LDR) (tj. řešení závisející na jedné integrační konstantě) je tvaru $y = y_p + u$, kde $y_p$ je nějaké řešení rovnice (LDR), tzv. *partikulární řešení*, a $u$ je *obecné řešení* rovnice (hLDR).

## Homogenní LDR

Rovnice $u' = a(x)u$ je speciálním případem rovnice se separovatelnými proměnnými, tedy za podmínky $u \neq 0$ máme

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u}{u} &= a(x)\,\mathrm{d}x \\ \ln|u| &= \int a(x)\,\mathrm{d}x + c_1 \quad (c_1 \in \mathbb{R}) \\ |u| &= \mathrm{e}^{c_1} \cdot \mathrm{e}^{\int a(x)\,\mathrm{d}x} \\ u &= c_2 \cdot \mathrm{e}^{\int a(x)\,\mathrm{d}x} \quad (c_2 \neq 0), \end{aligned}$$

přičemž $u = 0$ je řešením, které dostaneme volbou $c_2 = 0$.
Obecné řešení homogenní rovnice je tedy

$$u(x) = c \cdot \mathrm{e}^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

K vyřešení nehomogenní LDR potřebujeme získat jedno její řešení (partikulárni řešení). K tomu využijeme metodu variace konstanty, nebo metodu integračního faktoru.

## 1. Variace konstanty

Řešení homogenní rovnice (hLDR) příslušné k rovnici (LDR) je $u(x) = c \cdot \mathrm{e}^{\int a(x)\, \mathrm{d}x}$. Partikulární řešení rovnice (LDR) hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = c(x) \cdot \mathrm{e}^{\int a(x)\, \mathrm{d}x},$$

kde jsme konstantu $c$ nahradili za (neznámou) funkci $c(x)$. Dosazením do rovnice (LDR) určíme podmínku, kterou musí splňovat funkce $c(x)$, aby $y_p$ bylo řešením rovnice (LDR).

$$L = y_p' = c'(x) \cdot \mathrm{e}^{\int a(x)\, \mathrm{d}x} + c(x) \cdot \mathrm{e}^{\int a(x)\, \mathrm{d}x} \cdot a(x)$$

$$P = a(x)y + b(x) = a(x) \cdot c(x) \cdot \mathrm{e}^{\int a(x)\, \mathrm{d}x} + b(x)$$

Tedy porovnáním obou stran máme

$$c'(x) = b(x) \cdot \mathrm{e}^{-\int a(x)\, \mathrm{d}x}$$
$$c(x) = \int b(x) \cdot \mathrm{e}^{-\int a(x)\, \mathrm{d}x}\, \mathrm{d}x.$$

Tedy

$$y_p(x) = \mathrm{e}^{\int a(x)\, \mathrm{d}x} \cdot \int b(x) \cdot \mathrm{e}^{-\int a(x)\, \mathrm{d}x}\, \mathrm{d}x$$

a obecné řešení rovnice (LDR) je

$$y = y_p + u \;\Rightarrow\; y(x) = \mathrm{e}^{\int a(x)\, \mathrm{d}x} \cdot \left( c + \int b(x) \cdot \mathrm{e}^{-\int a(x)\, \mathrm{d}x}\, \mathrm{d}x \right),\; c \in \mathbb{R}.$$

## Příklad 10

Určete obecné řešení rovnice $y' = 2xy + 2x^3$.

Homogenní rovnice $u' = 2xu$ má řešení $u(x) = C\,\mathrm{e}^{\int 2x\,\mathrm{d}x} = C \cdot \mathrm{e}^{x^2}$.

Najdeme partikulární řešení nehomogenní rovnice variací konstanty, tj. do původní rovnice dosadíme $y_p(x) = C(x) \cdot \mathrm{e}^{x^2}$. Dostaneme

$$C'(x)\,\mathrm{e}^{x^2} + C(x)2x\,\mathrm{e}^{x^2} = 2xC(x)\,\mathrm{e}^{x^2} + 2x^3 \quad \Rightarrow \quad C'(x) = 2x^3\,\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Potom

$$\begin{aligned} C(x) &= \int 2x^3\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x^2 = t \\ 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = t & u' = 1 \\ v' = \mathrm{e}^{-t} & v = -\mathrm{e}^{-t} \end{array} \right| = -t\,\mathrm{e}^{-t} + \int \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\mathrm{e}^{-t}(t+1) = -\mathrm{e}^{-x^2}(x^2+1), \end{aligned}$$

$$y_p(x) = -\mathrm{e}^{-x^2}(x^2+1)\,\mathrm{e}^{x^2} = -(x^2+1) \quad \Rightarrow \quad y(x) = -(x^2+1) + C\,\mathrm{e}^{x^2}.$$

■

### 2. Integrační faktor

Integrační faktor je funkce

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{-\int a(x)\;\mathrm{d}x}.$$

Touto funkcí celou rovnici vynásobíme a následně upravujeme.

## Postup

$$y' - a(x)\,y = b(x)$$

$$\big[y' - a(x)\,y\big] \cdot \mu(x) = b(x) \cdot \mu(x)$$

$$\underbrace{y' \cdot e^{-\int a(x)\ dx} - y\,a(x) \cdot e^{-\int a(x)\ dx}}_{\left(y \cdot e^{-\int a(x)\ dx}\right)'} = b(x) \cdot e^{-\int a(x)\ dx}$$

$$\left(y \cdot e^{-\int a(x)\ dx}\right)' = b(x) \cdot e^{-\int a(x)\ dx}$$

$$y \cdot e^{-\int a(x)\ dx} = \int b(x) \cdot e^{-\int a(x)\ dx}\ dx + C$$

$$y = e^{\int a(x)\ dx}\left[\int b(x) \cdot e^{-\int a(x)\ dx}\ dx + C\right], \quad C \in \mathbb{R} \tag{2}$$

$\rightarrow$ *Vyřešte tímto způsobem příklad 10.*

Dokázali jsme větu

## Věta 6 (Řešitelnost lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu)

*Jsou-li koeficienty* $a(x)$ *a* $b(x)$ *spojité funkce na intervalu* $(a, b)$*, potom má počáteční úloha*

$$y' = a(x)\, y + b(x), \qquad y(x_0) = y_0$$

*právě jedno řešení, které je na celém intervalu* $(a, b)$ *definováno vztahem* (2)*. (Konstantu* $C$ *se určíme z počáteční podmínky* $y(x_0) = y_0$*.)*

## Poznámka

Na rozdíl od nelineárních rovnic, které mají zaručenu existenci a jednoznačnost řešení pouze na okolí bodu $x_0$ jsou lineární diferenciální rovnice jednoznačně řešitelné na celém intervalu spojitosti pravé strany rovnice.

### Příklad 11 (Radioaktivní rozpad)

Rádium–226 má poločas rozpadu 1620 let. Najděte čas potřebný k tomu, aby se dané množství Ra–226 zmenšilo na $\frac{3}{4}$ původního množství.

Radioaktivní materiál se rozpadá rychlostí, která je přímo úměrná množství přítomného materiálu.

Označme-li jako $Q(t)$ množství [většinou gramů] radioaktivního materiálu v čase $t$ [let], potom musí platit rovnice

$$Q'(t) = -r\,Q(t), \qquad \text{kde } r > 0 \text{ je konstanta úměrnosti.}$$

Všimněte si, že materiálu zřejmě ubývá, tj. $Q' < 0$.

Označme $Q_0$ původní množství Ra–226, tj. $Q_0 = Q(0)$, potom pro hledanou funkci $Q(t)$ splňující (homogenní) lineární diferenciální rovnici $Q' = -r\,Q$ máme

$$Q(t) = C\,\mathrm{e}^{-rt} \;\Rightarrow\; Q(0) = C\,\mathrm{e}^{0} = C \;\Rightarrow\; C = Q_0 \;\Rightarrow\; Q(t) = Q_0\,\mathrm{e}^{-rt}.$$

Nyní určíme konstantu $r$ [let$^{-1}$] z informace o poločasu rozpadu:

$$\frac{1}{2}\,Q_0 = Q_0\,\mathrm{e}^{-r\cdot 1620} \;\Rightarrow\; \ln\frac{1}{2} = -r\cdot 1620 \;\Rightarrow\; r = \frac{-\ln\frac{1}{2}}{1620} = \frac{\ln 2}{1620} \approx 0.000428.$$

A najdeme hodnotu $t$ [let], pro kterou je $Q(t) = \frac{3}{4}\,Q_0$:

$$\frac{3}{4}\,Q_0 = Q_0\,\mathrm{e}^{-rt} \;\Rightarrow\; \ln\frac{3}{4} = -rt \;\Rightarrow\; t = \frac{\ln\frac{3}{4}}{-r} = -\frac{1620\,\ln\frac{3}{4}}{\ln 2} \approx 672.4.$$

■

**Příklad 12 (Růst, učení,...)**

Jistý druh roste tak, že má jistou maximální délku a rychlost růstu je přímo úměrná délce, kterou ještě mají dorůst. Sestavte rovnici modelující tuto situaci.

Označíme-li délku v čase $t$ jako funkci $\ell(t)$ a maximální délku $L$, pak příslušná rovnice je

$$\ell'(t) = k[L - \ell(t)],$$

kde konstantu úměrnosti $k$ by bylo nutné určit experimentálně (měření a výpočet pro konkrétní druh/situaci).

### Příklad 13 (Výměna tepla mezi tělesem a okolím)

Je nalezena mrtvola, jejíž teplota je změřena na 26.6 °C. O 3 hodiny později je její teplota 21.1 °C, přičemž teplota okolí je 18.3 °C. Určete čas úmrtí za předpokladu, že teplota lidského těla je 37 °C.

Povrchová teplota tělesa se mění rychlostí, která je přímo úměrná rozdílu teploty tělesa a okolního prostředí (Newtonův teplotní zákon).

Označme teplotu tělesa v čase $t$ jako $\Theta(t)$ [°C] a teplotu okolního prostředí jako $T$ [°C]. Potom musí platit rovnice

$$\Theta'(t) = -k\,[\Theta(t) - T], \qquad \text{kde } k > 0 \text{ je konstanta úměrnosti.}$$

Všimněte si, že pokud bude teplota okolního prostředí *vyšší*, než je teplota tělesa (tj. pokud je $\Theta(t) < T$), potom je $\Theta' > 0$ a těleso se bude zahřívat. Zatímco pokud bude teplota okolního prostředí *nižší*, než je teplota tělesa (tj. pokud $\Theta(t) > T$), potom je $\Theta' < 0$ a těleso se bude ochlazovat.

Při použití výše uvedeného značení (pro čas $t$ v jednotkách [hodin]) máme

$$T = 18.3,\ \Theta(0) = 26.6 \text{ (teplota v čase nalezení mrtvoly)},\ \Theta(3) = 21.1,$$

přičemž funkce $\Theta(t)$ splňuje rovnici

$$\Theta' = -k\,(\Theta - T) \quad \Rightarrow \quad \Theta' = -k\,\Theta + k\,T.$$

Poslední rovnice je lineární diferenciální rovnice pro neznámou funkci $\Theta(t)$. Tuto rovnici vyřešíme např. metodou integračního faktoru $\mu(t) = \mathrm{e}^{kt}$, potom

$$\Theta = T + C\,\mathrm{e}^{-kt} = 18.3 + C\,\mathrm{e}^{-kt}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Konstanty $C$ a $k$ určíme z informací o počáteční teplotě a o teplotě v čase $t = 3$ [hodiny], tj.

$$26.6 = \Theta(0) = 18.3 + C\,\mathrm{e}^{0} = 18.3 + C \;\Rightarrow\; C = 8.3 \;\Rightarrow\; \Theta = 18.3 + 8.3\,\mathrm{e}^{-kt},$$

a dále

$$21.1 = \Theta(3) = 18.3 + 8.3\ \mathrm{e}^{-3k} \;\Rightarrow\; \mathrm{e}^{-3k} = \frac{21.1 - 18.3}{8.3} \approx 0.337$$

$$\Rightarrow\; -3k = \ln 0.337 \;\Rightarrow\; k = -\frac{\ln 0.337}{3} \approx 0.362.$$

Tedy hledané řešení je funkce

$$\Theta(t) = 18.3 + 8.3\ \mathrm{e}^{-0.362t}\,.$$

Najdeme čas úmrtí, tj. určíme čas $t$, pro který je $\Theta(t) = 37\ {}^\circ\mathrm{C}$. Tedy

$$18.3 + 8.3\ \mathrm{e}^{-0.362t} = 37 \;\Rightarrow\; \mathrm{e}^{-0.362t} = \frac{37 - 18.3}{8.3} \approx 2.253$$

$$\Rightarrow\; -0.362t = \ln 2.253 \;\Rightarrow\; t = -\frac{\ln 2.253}{0.362} \approx -2.24.$$

Mrtvola byla nalezena přibližně 2 hodiny a 15 minut po smrti. ■

## Příklad 14 (Míchání dvou látek)

Vodní nádrž o celkovém objemu $L = 1000$ [litrů] obsahuje $Q_0 = 0$ [gramů] soli v počátečním čase $t_0 = 0$ [minut]. Do nádrže přitéká roztok o koncentraci soli $c = 50$ [gramů/litr] rychlostí $v = 20$ [litrů/min] a po řádném promíchání s vodou v nádrži z ní vytéká stejnou rychlostí. Určete množství soli $Q(t)$ v nádrži v libovolném čase $t$ a limitní množství pro $t \to \infty$.

Označili jsme jako $Q(t)$ [g] množství soli v nádrži v libovolném čase $t$ [min]. Potom $Q'(t)$ udává, jak rychle se toto množství mění a přitom musí platit, že

$$Q'(t) = \left( \begin{array}{c} \text{rychlost, s jakou sůl} \\ \text{do nádrže přitéká} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{rychlost, s jakou sůl} \\ \text{z nádrže vytéká} \end{array} \right).$$

Sůl do nádrže *přitéká* rychlostí

$$c \cdot v = 50 \;\; [\mathrm{g/l}] \;\cdot\; 20 \;\; [\mathrm{l/min}] \; = 1000 \;\; [\mathrm{g/min}].$$

A protože v nádrži je vždy koncentrace soli rovna $\frac{Q(t)}{L} = \frac{Q(t)}{1000}$ [g/l], sůl z nádrže *vytéká* rychlostí

$$\frac{Q(t)}{L} \cdot v = \frac{Q(t)}{1000} \;\; [\mathrm{g/l}] \;\cdot\; 20 \;\; [\mathrm{l/min}] \; = \frac{Q(t)}{50} \;\; [\mathrm{g/min}].$$

Tedy hledaná funkce $Q(t)$ splňuje rovnici

$$Q'(t) = c \cdot v - \frac{Q(t)}{L} \cdot v \qquad \Rightarrow \qquad Q' = 1000 - \frac{Q}{50},$$

což je lineární diferenciální rovnice 1. řádu, a dále splňuje počáteční podmínku

$$Q(t_0) = Q_0 \qquad \Rightarrow \qquad Q(0) = 0. \tag{3}$$

Uvedenou rovnici vyřešíme metodou integračního faktoru

$$\mu(t) = \mathrm{e}^{\int \frac{v}{L}\,dt} = \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t} \qquad \Rightarrow \qquad \mu(t) = \mathrm{e}^{\int \frac{1}{50}\,dt} = \mathrm{e}^{0.02\,t}$$

a potom máme (obecně)

$$\begin{aligned}
Q' + \frac{v}{L}\,Q &= c\,v \\
Q'\ \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t} + \frac{v}{L}\ \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t}\ Q &= c\,v\ \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t} \\
\left(Q\ \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t}\right)' &= c\,v\ \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t} \\
Q\ \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t} &= \int c\,v\ \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t}\ dt = c\,v\,\frac{\mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t}}{\frac{v}{L}} + C \\
Q &= c\,L + C\ \mathrm{e}^{-\frac{v}{L}\,t}, \quad C \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

a pro náš konkrétní příklad

$$\begin{aligned} Q' + 0.02\, Q &= 1000, \\ Q'\ \mathrm{e}^{0.02\,t} + 0.02\ \mathrm{e}^{0.02\,t}\ Q &= 1000\ \mathrm{e}^{0.02\,t}, \\ \left(Q\ \mathrm{e}^{0.02\,t}\right)' &= 1000\ \mathrm{e}^{0.02\,t}, \\ Q\ \mathrm{e}^{0.02\,t} = \int 1000\ \mathrm{e}^{0.02\,t}\ dt &= 1000\,\frac{\mathrm{e}^{0.02\,t}}{0.02} + C, \\ Q &= 50000 + C\ \mathrm{e}^{-0.02\,t}, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

A protože je počáteční množství známo v (3), pro integrační konstantu $C$ platí

$$Q_0 = Q(t_0) = c\,L + C\,\mathrm{e}^{-\frac{v}{L}\,t_0} \qquad \Rightarrow \qquad 0 = Q(0) = 50000 + C\,\mathrm{e}^{0},$$
$$C = (Q_0 - c\,L)\,\mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t_0} \qquad \Rightarrow \qquad C = -50000,$$

a tedy výsledné partikulární řešení (udávající kolik gramů soli bude v nádrži v okamžiku $t$ minut) je tvaru

$$Q = c\,L + (Q_0 - c\,L)\,\mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t_0}\,\mathrm{e}^{-\frac{v}{L}\,t} \qquad \Rightarrow \qquad Q = 50000 - 50000\,\mathrm{e}^{-0.02\,t},$$
$$Q = c\,L + (Q_0 - c\,L)\,\mathrm{e}^{-\frac{v}{L}\,(t-t_0)} \qquad \Rightarrow \qquad Q = 50000\left(1 - \mathrm{e}^{-0.02\,t}\right).$$

Tedy v závislosti na tom, jestli je $Q_0 > c\,L$ nebo $Q_0 < c\,L$, množství soli v nádrži (záporně exponenciálně) klesá nebo roste, a při $Q_0 = c\,L$ zůstává stále stejné.

Pro $t \to \infty$ je potom

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = \lim_{t\to\infty} \left\{ c\,L + (Q_0 - c\,L)\, \underbrace{\mathrm{e}^{-\frac{v}{L}(t-t_0)}}_{\to 0} \right\}$$

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = c\,L \quad [\mathrm{g}]\ ,$$

tedy

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = \lim_{t\to\infty} 50000\,\big(1 - \underbrace{\mathrm{e}^{-0.02\,t}}_{\to 0}\big)$$

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = 50000 \quad [\mathrm{g}]\ .$$

Po dostatečně dlouhé době bude tedy koncentrace soli v nádrži rovna

$$Q_\infty = \frac{c\,L}{L} = c \quad [\mathrm{g/l}], \text{neboli} Q_\infty = \frac{50000}{1000} = 50 \quad [\mathrm{g/l}],$$

což je přesně koncentrace přitékajícího roztoku (samozřejmě, po „nekonečně dlouhé době“ přitékající roztok „nahradí“ původní roztok v nádrži, přičemž vůbec nezáleží na původním množství $Q_0$, tj. na tom, kolik soli bylo v nádrži na počátku). ■

## Příklad 15 (Míchání dvou látek II)

Jak se změní model v Příkladu 14, pokud bude roztok po řádném promíchání s vodou v nádrži vytékat rychlostí pouze $w = 19$ [litrů/min]? Předpokládáme-li, že nádrž má celkový objem 1600 litrů, jaká bude koncentrace roztoku v nádrži v okamžiku jejího naplnění?

Všimněte si, že se nyní *objem* roztoku *v nádrži mění* (roste) a to rychlostí $v - w = 1$ [litr/min]. To znamená, že nyní sůl z nádrže *vytéká* rychlostí

$$\frac{Q(t)}{L + (v-w)\,(t-t_0)} \cdot w = \frac{Q(t)}{1000+t} \;\; [\mathrm{g/l}] \cdot 19 \;\; [\mathrm{l/min}] \;\; = \frac{19\,Q(t)}{1000+t} \;\; [\mathrm{g/min}].$$

Výsledná diferenciální rovnice má tedy tvar

$$Q'(t) = c \cdot v - \frac{Q(t)}{L + (v-w)\,(t-t_0)} \cdot w \qquad \Rightarrow \qquad Q' = 1000 - \frac{19\,Q(t)}{1000+t},$$

což je opět lineární diferenciální rovnice 1. řádu, přičemž řešení $Q(t)$ splňuje počáteční podmínku (3).

Příslušný integrační faktor je

$$\mu(t) = \mathrm{e}^{\int \frac{19}{1000+t}\,dt} = \mathrm{e}^{19\,\ln(1000+t)} = \mathrm{e}^{\ln(1000+t)^{19}} = (1000+t)^{19}.$$

Tedy platí

$$\begin{aligned}
Q' + \frac{19\,Q(t)}{1000+t} &= 1000\\
Q'\,(1000+t)^{19} + 19\,Q(t)\,(1000+t)^{18} &= 1000\,(1000+t)^{19}\\
\left[Q\,(1000+t)^{19}\right]' &= 1000\,(1000+t)^{19}\\
Q\,(1000+t)^{19} &= 1000\,\frac{(1000+t)^{20}}{20} + C\\
Q = \frac{50\,(1000+t)^{20} + C}{(1000+t)^{19}} &= 50\,(1000+t) + \frac{C}{(1000+t)^{19}}.
\end{aligned}$$

Z počáteční podmínky (3) pak určíme hodnotu $C$, tj.

$$0 = Q(0) = 50\cdot 1000 + \frac{C}{1000^{19}} \;\Rightarrow\; C = -50000\cdot 1000^{19} = -5\cdot 10^{61}.$$

Tedy výsledné partikulární řešení je tvaru

$$Q = 50\,(1000 + t) - \frac{5 \cdot 10^{61}}{(1000 + t)^{19}}.$$

Protože v nádrži bylo původně 1000 litrů vody a nádrž se nyní naplňuje rychlostí 1 litr/min, bude nádrž naplněna za 600 minut (tj. za 10 hodin). Tedy v okamžiku $t = 600$ bude v nádrži

$$Q(600) = 50\,(1600) - \frac{5 \cdot 10^{61}}{(1600)^{19}} \approx 79993.4 \quad [\mathrm{g}] \text{ soli},$$

tj. koncentrace soli bude

$$\frac{Q(600)}{1600} \approx \frac{79993.4}{1600} \approx 49.996 \quad [\mathrm{g/l}],$$

tedy tato koncentrace bude téměř stejná jako u přitékajícího roztoku. ■

Bernoulliho rovnice má tvar

$$y' = a(x)y + b(x)y^r, \qquad r \in \mathbb{R}.$$

Pro $r = 0$ jde o nehomogenní a pro $r = 1$ o homogenní LDR.

## Postup řešení

- Předpokládejme, že $y \neq 0$.
- Obě strany rovnice vydělíme $y^r$ a dostaneme

$$\frac{y'}{y^r} = a(x)y^{1-r} + b(x).$$

- Substitucí $y^{1-r} = z$ zavedeme novou závisle proměnnou, kde

$$z' = (1-r)y^{-r}y', \qquad \frac{y'}{y^r} = \frac{z'}{1-r}$$

  a rovnice přejde na tvar

$$z' = (1-r)a(x)z + (1-r)b(x),$$

  což už je nehomogenní LDR pro funkci $z(x)$.
- Je-li $r > 0$ je $y = 0$ také řešení Bernoulliho rovnice.

## Příklad 16

K rovnici $y' = -2y + y^2 \mathrm{e}^x$ určete obecné řešení a řešení procházející bodem $[0,1]$.

$$y' = -2y + y^2 \mathrm{e}^x \quad / : y^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{y'}{y^2} = \frac{-2}{y} + \mathrm{e}^x$$

Substituce $z = \frac{1}{y}, z' = \frac{-y'}{y^2}$ vede na LDR $z' = 2z - \mathrm{e}^x$ s homogenní rovnicí $u' = 2u$, tedy $u = C\,\mathrm{e}^{\int 2\,\mathrm{d}x} = C\,\mathrm{e}^{2x}$.

Partikulární řešení je potom $z_p(x) = C(x)\,\mathrm{e}^{2x}$

$$C'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \Rightarrow C(x) = \mathrm{e}^{-x} \Rightarrow z_p(x) = \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^x .$$

Tedy $z = \mathrm{e}^x + C\,\mathrm{e}^{2x} \Rightarrow y = \frac{1}{\mathrm{e}^x + C\,\mathrm{e}^{2x}}, y = 0$.

$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{\mathrm{e}^0 + C\,\mathrm{e}^0} \Rightarrow 1 + C = 1 \Rightarrow C = 0$, tedy $y(x) = \mathrm{e}^{-x}$. ■

Uvažujeme rovnici

$$F(x, y, y') = 0$$

a budeme se zabývat případem, kdy se z obecného předpisu nepodaří vyjádřit $y'$, ale lze vyjádřit $y$ jako funkci $x, y'$.

Řešení nejdeme pomocí zavedení parametru $p = y' = \frac{dy}{dx}$.

Clairautova rovnice má tvar

$$y = x \cdot y' + f(y'),$$

řeší se metodou parametru a výsledkem je řešení v parametrickém tvaru

$$x = x(p), \qquad y = y(p).$$

## Postup řešení

- V rovnici položíme $y' = p$ (tedy $p$ je opět funkce proměnné $x$).
- Dostaneme $y = xp + f(p)$.
- Derivujeme podle $x$ a za $y'$ dosazujeme $p$

$$y' = p + xp' + f'(p)p' \;\Rightarrow\; p = p + p'[x + f'(p)] \;\Rightarrow\; p'[x + f'(p)] = 0.$$

- Odtud máme dvě možnosti

  (i) $x = -f'(p)$, dosadíme do první rovnice, kde se vyskytlo $p$

  $$y = -pf'(p) + f(p) \qquad \textit{singulární řešení Clairautovy rovnice}.$$

  (ii) $p' = 0 \Rightarrow p = C$, opět dosadíme do rovnice

  $$y = Cx + f(C) \qquad \textit{obecné řešení Clairautovy rovnice},$$

  které tvoří jednoparametrický systém přímek.

## Příklad 17

$$y = xy' + y'^2$$

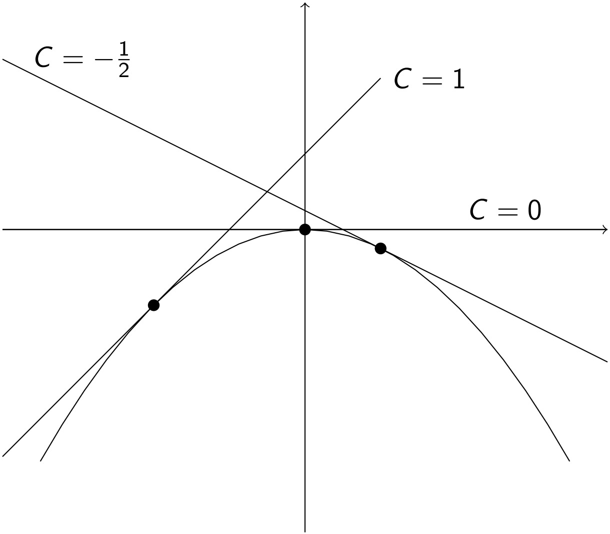
$$\begin{aligned} y &= xp + p^2 \quad \Big/ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \\ y' &= p + xp' + 2pp' \\ p &= p + xp' + 2pp' \\ 0 &= p'(x + 2p) \end{aligned}$$

Tedy

(i) $x = -2p \Rightarrow y = -2p \cdot p + p^2 = -p^2 \Rightarrow y = -\frac{x^2}{4}$ (singulární řešení)

(ii) $p' = 0 \Rightarrow p = C \Rightarrow y = Cx + C^2$ (obecné řešení)

Každá z přímek obecného řešení je tečnou křivky singulárního řešení.



## Věta 7

*Každá z přímek obecného řešení $y = Cx + f(C)$ je tečnou křivky singulárního řešení $x = -f'(p), y = -pf'(p) + f(p)$. Naopak každým bodem křivky singulárního řešení prochází právě jedna přímka obecného řešení, která je tečnou k této křivce.*

## Důkaz.

Nechť $[x_0, y_0] = [-f'(p_0), -p_0 f'(p_0) + f(p_0)]$ je bod na křivce singulárního řešení odpovídající hodnotě parametru $p = p_0$. Uvažujme přímku $y = p_0 x + f(p_0)$, tj. přímku obecného řešení s $C = p_0$.

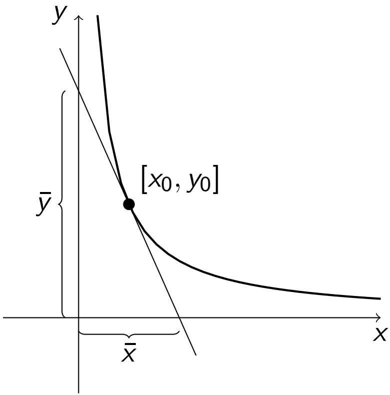
Položme na přímce $x = -f'(p_0) \quad \Rightarrow \quad y = -p_0 f'(p_0) + f(p_0) = y_0$

$$\Rightarrow \quad y_0 = p_0 x + f(p_0) \text{ prochází bodem } [x_0, y_0].$$

Směrnice tečny parametricky dané křivky je $\frac{y'(p)}{x'(p)} = \frac{-f'(p) - pf''(p) + f'(p)}{-f''(p)} = p$ a směrnice přímky $y = px + f(p)$ je také rovna $p$. Odtud plyne, že přímka $y = p_0 x + f(p_0)$ je tečnou v bodě $[-f'(p_0), -p_0 f'(p_0) + f(p_0)]$. □

## Příklad 18

Určete rovnici křivky ležící v prvním kvadrantu s vlastností, že trojúhelník tvořený osami a tečnou v libovolném bodě křivky má konstantní obsah $p = 1/2$.




$$t : y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$$

Máme $\bar{x}$ : $y = 0 \;\Rightarrow\; -y_0 = y'(x_0)(\bar{x} - x_0)$

$$\Rightarrow \quad \bar{x} = -\frac{y_0}{y'(x_0)} + x_0 = \frac{-y_0 + x_0 y'(x_0)}{y'(x_0)},$$

$\bar{y}$ : $x = 0 \;\Rightarrow\; \bar{y} = y_0 - x_0 y'(x_0)$.

Potom

$$P = \frac{1}{2}\bar{x}\bar{y} = \frac{1}{2}\frac{-y_0 + x_0 y'(x_0)}{y'(x_0)}\left(y_0 - x_0 y'(x_0)\right) = \frac{-(y_0 - x_0 y'(x_0))^2}{2y'(x_0)} = \frac{1}{2}.$$

Tedy diferenciální rovnice je

$$-(y - xy')^2 = y' \;\Rightarrow\; y - xy' = \pm\sqrt{-y'} \;\Rightarrow\; y = xy' \pm \sqrt{-y'}$$

($+$ je pro první kvadrant a $-$ pro třetí) $\Rightarrow$ Clairautova rovnice

$$y = xy' + \sqrt{-y'}.$$

- obecný systém přímek $\quad y = Cx + \sqrt{-C} \quad$ (pro $C \leq 0$)
- singulární řešení $\quad y = \frac{1}{4x} \quad$ (hyperbola)

■

Lagrangeova rovnice má tvar

$$y = x \cdot g(y') + f(y'), \quad g(y') \not\equiv y', \quad f, g \in C^1(a, b)$$

V pricipu lze Clairautovu rovnici chápat jako speciální případ Lagrangeovy rovnice, ale řešení vypadá jinak $\rightarrow$ řeší se zvlášť.

Řešíme metodou parametru, položíme $y' = p$ a

$$\begin{aligned} y &= xg(p) + f(p) \\ y' &= g(p) + xg'(p)p' + f'(p)p' \\ p &= g(p) + p'\big(xg'(p) + f'(p)\big) \\ p - g(p) &= \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\big[xg'(p) + f'(p)\big]. \end{aligned}$$

Z této rovnice chceme vypočítat $x$ jako funkci proměnné $p$ (při $p \neq g(p)$)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = \frac{1}{p - g(p)}\big(xg'(p) + f'(p)\big) = \frac{g'(p)}{p - g(p)} \cdot x + \frac{f'(p)}{p - g(p)}.$$

Tím máme nehomogenní LDR pro funkci $x = x(p)$.

Nechť $x = x(p, C)$ je řešení této rovnice. Pak do první rovnice, kde se vyskytlo $p$, dosadíme $x = x(p, C)$. Tak vypočítáme

$$y = x(p, C) \cdot g(p) + f(p)$$

a dostaneme obecné řešení Lagrangeovy rovnice v parametrickém tvaru.

Jestliže hledáme singulární řešení použijeme podmínku $p \neq g(p)$.

Nyní tedy nechť $p_0 \in \mathbb{R}$ takové, že $g(p_0) = p_0$, a uvažujeme přímku danou rovnicí $y = xg(p_0) + f(p_0)$, do první rovnice, kde se vyskytlo $p$, dosadíme $p_0$ a dostaneme singulární řešení Lagrangeovy rovnice.

Ověříme, zda je to řešení

$$
\begin{aligned}
&L = xg(p_0) + f(p_0), y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(p_0)\\
&P = xg\big(\underbrace{g(p_0)}_{=p_0}\big) + f\big(\underbrace{g(p_0)}_{=p_0}\big) = xg(p_0) + f(p_0)\\
&L = P.
\end{aligned}
$$

## Příklad 19

$$y = 2xy' - y'^2$$

Máme rovnici s $g(y') = 2y', f(y') = -y'^2$. Zavedeme $y' = p$.

$$\begin{aligned} y &= 2xp - p^2 \quad \Big/ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \\ p &= 2p + 2xp' - 2pp' \\ -p &= \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(2x - 2p) \quad (p \neq 0) \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} &= -\frac{2}{p}x + 2 \end{aligned}$$

A řešíme tuto nehomogenní rovnici.

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}p} = -\frac{2u}{p}$$

$$u = C\,\mathrm{e}^{-\int \frac{2}{p}\,\mathrm{d}p} = C\,\mathrm{e}^{-2\ln p} = \frac{C}{p^2}$$

$$x_0 = \frac{C(p)}{p^2} \Rightarrow \frac{C'(p)}{p^2} - \frac{2C(p)}{p^3} = -\frac{2}{p}\cdot\frac{C(p)}{p^2} + 2$$

$$C'(p) = 2p^2 \Rightarrow C(p) = \frac{2}{3}p^3$$

$$x_0(p) = \frac{2p}{3}$$

Tedy obecné řešení je

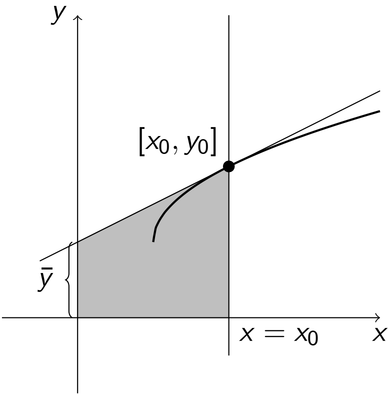
$$x(p) = \frac{2p}{3} + \frac{C}{p^2}$$

$$y(p) = 2p\left(\frac{2p}{3} + \frac{C}{p^2}\right) - p^2 = \frac{4}{3}p^2 - p^2 + \frac{2C}{p} = \frac{1}{3}p^2 + \frac{2C}{p}$$

a singulární řešení je $p = 0 \Rightarrow y = 0$ (přímka singulárního řešení). ■

## Příklad 20

Určete rovnici křivky, pro níž plocha lichoběžníku tvořeného tečnou v libovolném bodě $[x_0, y_0]$ křivky a osami $x, y$ a přímkou $x = x_0 > 0$, je rovna $1/2$ kvadrátu $x$-ové souřadnice bodu, v němž byla tečna sestrojena.




$$t: y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$$

$$x = 0 \Rightarrow \bar{y} = y_0 - x_0 y'(x_0)$$

$$P = (y_0 + \bar{y})\frac{x_0}{2} = \frac{1}{2}x_0^2$$

$$\Rightarrow \left(y_0 + y_0 - x_0 y'(x_0)\right)\frac{x_0}{2} = \frac{1}{2}x_0^2$$

Chceme, aby to platilo pro libovolný bod křivky.

$$
\begin{aligned}
2y - xy' &= x \\
y' &= \frac{2y}{x} - 1 \\
u' &= \frac{2u}{x} \Rightarrow u = Cx^2 \\
y_0 &= C(x)x^2 \Rightarrow C'(x)x^2 + 2C(x)x = \frac{2}{x}C(x)x^2 - 1 \\
C'(x) &= \frac{-1}{x^2} \Rightarrow C(x) = \frac{1}{x} \\
y &= x + Cx^2
\end{aligned}
$$

Pokud by vyšlo singulární řešení, museli bychom ověřit, jestli vyhovuje podmínkám zadání. ■

Lineární diferenciální rovnice $n$-tého řádu je tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \tag{4}$$

kde pro $f(x) = 0$ je rovnice homogenní, pro $f(x) \neq 0$ je rovnice nehomogenní.

**Poznámka**

- Rovnice $y'' + y = 0$ má řešení $\sin x, \cos x$ a jejich lineární kombinace

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

- Rovnice $y'' = 0$ má řešení $1, x$ a jejich lineární kombinace

$$y = c_1 + c_2 x.$$

### Věta 8

*Jsou-li $y_1, y_2$ řešení homogenní rovnice* (4)*, pak pro každé $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) platí, že*

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

*je řešením homogenní rovnice* (4)*.*

### Důkaz.

Přímo (derivace lineární kombinace). $\square$

## Věta 9

*Jsou-li* $y_1, y_2$ *řešení nehomogenní rovnice* (4), *pak* $y = y_1 - y_2$ *je řešením příslušné homogenní rovnice.*

## Důkaz.

Přímo. □

## Poznámka

Předchozí věta říká, že řešení nehomogenní rovnice (4) je $y = y_p + u$, kde $y_p$ je jedno partikulární řešení nehomogenní rovnice a $u$ je obecné řešení homogenní rovnice.

## Poznámka

Řešení homogenní DR $n$-tého řádu tvoří vektorový prostor.

Budeme se zabývat rovnicemi typu

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = \begin{cases} 0, \\ f(x), \end{cases}$$

kde $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ (popř. $\mathbb{C}$).

**Poznámka**

Pokud není koeficient $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ u $y^{(n)}$ roven jedné, rovnici tímto koeficientem vydělíme. Tím se na pravé straně objeví funkce $\frac{f(x)}{a_n}$.

U homogenní rovnice ($f(x) \equiv 0$) hledáme řešení ve tvaru $y = \mathrm{e}^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{C}$ (inspirace prvním řádem $y' + ay = 0 \Rightarrow y = \mathrm{e}^{-ax}$).

Když $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ dosadíme do rovnice, získáme

$$\lambda^n \mathrm{e}^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1} \mathrm{e}^{\lambda x} + \cdots + a_1\lambda \mathrm{e}^{\lambda x} + a_0 \mathrm{e}^{\lambda x} = 0 \quad \Big/ : \mathrm{e}^{\lambda x}$$
$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

*charakteristický polynom rovnice n-tého řádu*.

### Věta 10

*Množina řešení rovnice*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

*tvoří vektorový prostor (nad* $\mathbb{R}$ *i* $\mathbb{C}$*), jehož dimenze je řád rovnice* $n$*.*

### Důkaz.

Viz dále. $\square$

## Věta 11

*Jsou-li* $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *navzájem různé reálné kořeny charakteristického polynomu rovnice, pak funkce*

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$$

*tvoří bázi prostoru řešení, tj. obecné řešení je tvaru*

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}.$$

## Důkaz.

Dosazení (a linearita). □

### Věta 12

*Jsou-li* $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ *dvojice komplexně sdružených kořenů charakteristického polynomu, pak*

$$y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x, \qquad y_2 = \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x$$

*jsou řešením příslušné rovnice.*

## Důkaz.

Víme, že $\bar{y} = \mathrm{e}^{(\alpha+\beta i)x}$, $\tilde{y} = \mathrm{e}^{(\alpha-\beta i)x}$ jsou řešení. Jejich lineární kombinace jsou také řešeními, tedy

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{\bar{y}+\tilde{y}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\alpha x+\beta i x}+\mathrm{e}^{\alpha x-\beta i x}\right) \\ &= \mathrm{e}^{\alpha x}\left(\frac{\mathrm{e}^{\beta i x}+\mathrm{e}^{-\beta i x}}{2}\right) \\ &= \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x, \end{aligned}$$

přičemž v poslední rovnosti jsme využili Eulerovu identitu, Moivreovu větu a parity funkcí sinus a kosinus. Tvrzení pro $y_2 = \frac{\bar{y}-\tilde{y}}{2i}$ se dokáže analogicky. □

## Věta 13

*Je-li $\lambda = \lambda_0$ m-násobným kořenem charakteristického polynomu ($m \leq n$), pak m-tice funkcí*

$$y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_0 x}, y_2 = x\,\mathrm{e}^{\lambda_0 x}, \dots, y_m = x^{m-1}\,\mathrm{e}^{\lambda_0 x}$$

*je řešením dané rovnice.*

## Poznámka

- Číslo je $k$-násobný kořen polynomu právě tehdy, když je kořenem polynomu a jeho derivací až do řádu $k-1$ včetně (a není kořenem derivace řádu $k$).
- Vzorec pro $n$-tou derivaci součinu $(uv)^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} u^{(i)} v^{(n-i)}$.

## Důkaz.

Nechť $m = 2$, tj. $\lambda_0$ je dvojnásobným kořenem. (Pro $m > 2$ podobně.)

$$\begin{aligned}
y &= x\,\mathrm{e}^{\lambda_0 x},\\
y' &= \mathrm{e}^{\lambda_0 x} + \lambda_0 x\,\mathrm{e}^{\lambda_0 x} = (\lambda_0 x + 1)\,\mathrm{e}^{\lambda_0 x},\\
y'' &= \lambda_0\,\mathrm{e}^{\lambda_0 x} + \lambda_0\,\mathrm{e}^{\lambda_0 x} + \lambda_0^2 x\,\mathrm{e}^{\lambda_0 x} = \mathrm{e}^{\lambda_0 x}(2\lambda_0 + \lambda_0^2 x),\\
&\ \ \vdots\\
y^{(n)} &= \mathrm{e}^{\lambda_0 x}(n\lambda_0^{n-1} + \lambda_0^n x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{\lambda_0 x}[n\lambda_0^{n-1} + \lambda_0^n x] + a_{n-1}\,\mathrm{e}^{\lambda_0 x}[(n-1)\lambda_0^{n-2} + \lambda_0^{n-1}x] + \cdots\\
&\qquad\qquad \ldots + a_1\,\mathrm{e}^{\lambda_0 x}[1 + \lambda_0 x] + a_0 x\,\mathrm{e}^{\lambda_0 x} =\\
&= x\,\mathrm{e}^{\lambda_0 x}\left[\lambda_0^n + a_{n-1}\lambda_0^{n-1} + \cdots + a_0\right]\\
&\qquad + \mathrm{e}^{\lambda_0 x}\left[n\lambda_0^{n-1} + (n-1)a_{n-1}\lambda_0^{n-2} + \cdots + a_1\right] = 0.
\end{aligned}$$

Tedy jedná se o řešení. □

## Věta 14

*Jsou-li $\alpha \pm \beta i$ dvojice m-násobných kořenů charakteristického polynomu, pak $2m$ funkcí*

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \tilde{y}_1 = e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots$$
$$\dots, y_m = x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, \tilde{y}_m = x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

*je také řešením rovnice.*

## Důkaz.

Kombinace předchozího. Pro $k \in \{0, \dots, m-1\}$ máme řešení $x^k e^{(\alpha+\beta i)x}, x^k e^{(\alpha-\beta i)x}$, která sečteme a vydělíme dvěma, resp. odečteme a vydělíme dvěma $i$, čímž dostaneme funkce $x^k e^{\alpha x} \cos \beta x$, resp. $x^k e^{\alpha x} \sin \beta x$. □

### Poznámka

Vždy (tj. bez ohledu na situaci s kořeny charakteristického polynomu) se nám podaří najít $n$-tici navzájem různých řešení homogenní rovnice $n$-tého řádu.

## Definice 5

Determinant

$$W(f_1,\dots,f_n)=\begin{vmatrix} f_1(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

nazýváme wronskián (Wronského determinant, determinant Wronského matice).

## Věta 15

*Uvažujme n-tici funkcí $f_1,\dots,f_n$ majících na intervalu $I\subseteq\mathbb{R}$ derivace nejméně do řádu $(n-1)$. Tyto funkce jsou lineárně nezávislé, jestliže jimi určený wronskián je různý od nuly pro všechna $x\in I$.*

## Důkaz.

Pro libovolné $x \in I$ je

$$\begin{aligned} \alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x) &= 0 \\ \alpha_1 f_1'(x) + \cdots + \alpha_n f_n'(x) &= 0 \\ &\vdots \\ \alpha_1 f_1^{(n-1)}(x) + \cdots + \alpha_n f_n^{(n-1)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

systém lineárních rovnic v proměnných $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, tj.

$$\begin{pmatrix} f_1(x) & \cdots & f_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

a tato soustava má právě jedno řešení právě tehdy, když je matice soustavy regulární, tj. její determinant je různý od nuly. □

## Věta 16

*Uvažujme n-tici řešení $y_1, \dots, y_n$ homogenní rovnice n-tého řádu (sestrojenou podle výše uvedených pravidel). Tato n-tice je lineárně nezávislá a tvoří bázi prostoru řešení příslušné rovnice, tj. obecné řešení dané rovnice je tvaru*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x).$$

## Důkaz.

Předpokládejme, že $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ je $n$-tice navzájem různých kořenů charakteristického polynomu, tj. $y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \dots, y_n(x) = \mathrm{e}^{\lambda_n x}$ je $n$-tice řešení diferenciální rovnice. Pak $W(y_1, \dots, y_n) =$

$$= \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 x} & \cdots & \mathrm{e}^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} & \cdots & \lambda_n \mathrm{e}^{\lambda_n x} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} \mathrm{e}^{\lambda_1 x} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \mathrm{e}^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = \underbrace{\mathrm{e}^{\lambda_1 x} \cdots \mathrm{e}^{\lambda_n x}}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}}_{\text{Vandermondův determinant}}$$

$$= \mathrm{e}^{\lambda_1 x} \cdots \mathrm{e}^{\lambda_n x} \cdot \underbrace{\prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j)}_{\neq 0} \neq 0.$$

Tedy funkce $y_1, \dots, y_n$ jsou lineárně nezávislé.
Podobným způsobem dokážeme nezávislost v ostatních případech. □

## Definice 6

Lineárně nezávislá řešení homogenní rovnice nazýváme *fundamentální systém* řešení rovnice.

## Příklad 21

$$\boxed{y'' + y = 0}$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = \pm i \;\Rightarrow\; \bar{y}_1 = \mathrm{e}^{ix}, \tilde{y}_2 = \mathrm{e}^{-ix} \;\Rightarrow$$

$$y_1 = \frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2} = \frac{(\cos x + i \sin x) + (\cos x - i \sin x)}{2} = \cos x$$

$$y_2 = \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i} = \frac{(\cos x + i \sin x) - (\cos x - i \sin x)}{2i} = \sin x$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

## Příklad 22

$$\boxed{y'' = 0}$$

$$\lambda^2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = 0 \;\Rightarrow\; y_1(x) = \mathrm{e}^{0\cdot x} = 1, y_2(x) = x \cdot \mathrm{e}^{0\cdot x} = x$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = c_1 + c_2 x.$$

## Příklad 23

$$\boxed{y''' - y'' + y' - y = 0}$$

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \;\Rightarrow\; (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \pm i$$

$$\Rightarrow\; y_1(x) = \mathrm{e}^x, y_2(x) = \cos x, y_3 = \sin x$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x.$$

## Věta 17

*Nechť* $A_0, \dots, A_{n-1} \in \mathbb{R}$ *jsou libovolná, pak existuje právě jedno řešení rovnice n-tého řádu splňující tzv. počáteční podmínku* $y(x_0) = A_0, y'(x_0) = A_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = A_{n-1}$ *pro každé* $x_0 \in \mathbb{R}$.

## Důkaz.

Nechť $y_1, \dots, y_n$ je fundamentální systém řešení, pak každé řešení je tvaru $y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$. Dosadíme $x_0$

$$\begin{aligned} A_0 &= c_1 y_1(x_0) + \cdots + c_n y_n(x_0) \\ A_1 &= c_1 y_1'(x_0) + \cdots + c_n y_n'(x_0) \\ &\vdots \\ A_{n-1} &= c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0). \end{aligned}$$

Máme soustavu rovnic s neznámými $c_i$ jejíž determinant je wronskián, který je nenulový, tedy ať jsou pravé strany $(A_1, \dots, A_n)$ jakékoliv, má soustava právě jedno řešení (např. důsledek Frobeniovy věty). □

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x), \tag{5}$$

$$y(x) = \underbrace{y_p(x)}_{\text{part. řeš.}} + \underbrace{c_1y_1(x) + \cdots + c_ny_n(x)}_{\text{obecné řeš. hom. rovnice}}$$

K nalezení partikulárního řešení nehomogenní rovnice použijeme

*metodu variace konstant*.

Řešení tedy hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + \cdots + C_n(x)y_n(x)$$

a potřebujeme určit neznámé funkce $C_i(x), i \in \{1 \ldots, n\}$.

Funkce $C_i(x), i \in \{1\dots,n\}$, najdeme jako řešení systému

$$\begin{aligned} C_1'(x)y_1(x) + \dots + C_n'(x)y_n(x) &= 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + \dots + C_n'(x)y_n'(x) &= 0 \\ &\vdots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) &= 0 \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) &= f(x). \end{aligned}$$

Odtud (při označení Wronského matice $\widetilde{W}$)

$$\widetilde{W}\left(y_1(x),\dots,y_n(x)\right) \cdot \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ \vdots \\ C_{n-1}'(x) \\ C_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix},$$

tedy $C_1'(x),\dots,C_n'(x)$ jsou jednoznačně určeny a integrováním získáme jednotlivé funkce $C_i(x) = \int C_i'(x)\,\mathrm{d}x, i \in \{1\dots,n\}$.

### Poznámka

Předchozí postup dává plné řešení nehomogenní rovnice. Aditivní integrační konstanty při určování funkcí $C_i(x)$ pak „vytvoří" obecné řešení homogenní rovnice, zatímco primitivní funkce s volbou nulových aditivních konstant vytvoří příslušné partikulární řešení.

### Věta 18

*Je-li funkce $f : I \to \mathbb{R}$ v rovnici* (5) *spojitá, pak má počáteční problém daný rovnicí* (5) *a podmínkami*

$$y(x_0) = A_0, y'(x_0) = A_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = A_{n-1},$$

*kde $x_0 \in I$ a $A_0, \dots, A_{n-1} \in \mathbb{R}$, jediné (úplné) řešení, které je definované na celém $I$.*

## Systém rovnic v metodě variace konstant

Uvažujme rovnici druhého řádu $y'' + ay' + by = f(x), a, b \in \mathbb{R}$, a nechť $y_h = cy_1(x) + dy_2(x), c, d \in \mathbb{R}$ je řešením příslušné homogenní rovnice. Hledejme řešení nehomogenní rovnice ve tvaru

$$y = c(x)y_1(x) + d(x)y_2(x).$$

Potom $y' = c'y_1 + cy_1' + d'y_2 + dy_2'$ a položme $c'y_1 + d'y_2 = 0$. Pak je $y' = cy_1' + dy_2'$ a tedy $y'' = c'y_1' + cy_1'' + d'y_2' + dy_2''$.

Dosadíme do rovnice

$$f(x) = y'' + ay' + by = c'y_1' + cy_1'' + d'y_2' + dy_2'' + a(cy_1' + dy_2') + b(cy_1 + dy_2)$$
$$= c(x)\big[\underbrace{y_1'' + ay_1' + by_1}_{=0}\big] + d(x)\big[\underbrace{y_2'' + ay_2' + by_2}_{=0}\big] + \big[c'y_1' + d'y_2'\big].$$

Tím jsme dostali příslušný systém rovnic. Pro rovnice vyššího řádu podobně (rovnice s nulou vpravo „pokládáme“, poslední rovnice je vynucená, aby systém fungoval).

## Příklad 24

Určete obecné řešení rovnice $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

$$y(x) = y_p(x) + c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad y_p(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$$

$$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{tg} x \end{pmatrix}$$

Cramerovo pravidlo dává

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \operatorname{tg} x & \cos x \end{vmatrix}}{\underbrace{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}}_{=1}}, \qquad C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \operatorname{tg} x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}}$$

tedy

$$C_1'(x) = \frac{-\sin^2 x}{\cos x}, \qquad C_2'(x) = \sin x.$$

$$C_1(x) = \int \frac{-\sin^2 x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{-t^2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{-t^2+1-1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1-t^2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t - \int \frac{1}{(1-t)(1+t)}\,\mathrm{d}t$$

$$= t - \left( \int \frac{1/2}{1-t}\,\mathrm{d}t + \int \frac{1/2}{1+t}\,\mathrm{d}t \right) = t - \frac{1}{2} \left( \int \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t + \int \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \right)$$

$$= t - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| = \sin x - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + \hat{c}_1$$

$$C_2(x) = \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + \hat{c}_2$$

$$y_p(x) = \left( \sin x - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| \right) \cdot \cos x - \cos x \cdot \sin x = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| \cdot \cos x$$

$$y(x) = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| \cdot \cos x + c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

■

*Nehomogenní rovnice se speciální pravou stranou*

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\right],$$

kde $P(x), Q(x)$ jsou polynomy, lze řešit metodou neurčitých koeficientů.

Partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = x^r \cdot e^{\alpha x}\left[A(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x\right],$$

kde $A, B$ jsou polynomy (s neurčitými koeficienty) stupně rovnému $\max\{\mathrm{st}\, P, \mathrm{st}\, Q\}$ a $r$ je násobnost kořene $\alpha + \beta i$ charakteristického polynomu příslušné homogenní rovnice.

Neurčité koeficienty najdeme dosazením do původní nehomogenní rovnice.

## Příklad 25

Určete obecné řešení rovnice $y'' + y = x \cdot \sin x$.

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad P(x) = 0, \quad Q(x) = x, \quad \operatorname{st} Q = 1,$$

$\alpha + \beta i = i$ a charakteristický polynom je $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \Rightarrow r = 1$
Partikulární řešení proto hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = x^1 \cdot [(ax + b)\cos x + (cx + d)\sin x] = (ax^2 + bx)\cos x + (cx^2 + dx)\sin x.$$

Spočítáme derivace, které se vyskytují v zadání

$$\begin{aligned}
y_p &= (ax^2 + bx)\cos x + (cx^2 + dx)\sin x,\\
y_p' &= (2ax + b)\cos x - (ax^2 + bx)\sin x + (2cx + d)\sin x + (cx^2 + dx)\cos x,\\
y_p'' &= 2a\cos x - 2(2ax + b)\sin x - (ax^2 + bx)\cos x\\
&\qquad + 2c\sin x + 2(2cx + d)\cos x - (cx^2 + dx)\sin x.
\end{aligned}$$

Dosadíme do rovnice

$$
\begin{aligned}
y_p'' + y_p = 2a\cos x - 2(2ax+b)\sin x - (ax^2+bx)\cos x \\
+ 2c\sin x + 2(2cx+d)\cos x - (cx^2+dx)\sin x \\
+ (ax^2+bx)\cos x + (cx^2+dx)\sin x = x\sin x.
\end{aligned}
$$

Odtud

$$
\begin{aligned}
\sin x :&\quad -2b + 2c = 0 \\
\cos x :&\quad 2a + 2d = 0 \\
x\sin x :&\quad -4a = 1 \\
x\cos x :&\quad 4c = 0
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ $a = -\frac{1}{4},\ b = 0,\ c = 0,\ d = \frac{1}{4}$, a tedy

$$y_p(x) = -\frac{1}{4}x^2\cos x + \frac{1}{4}x\sin x$$

$$y = -\frac{x^2}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x + c_1\cos x + c_2\sin x$$

## Poznámka

Je-li pravá strana nehomogenní rovnice ve tvaru lineární kombinace $f_1(x) + f_2(x)$, pak lze určit partikulární řešení samostatně k $f_1$ a k $f_2$, dostaneme $\bar{y}$ a $\tilde{y}$, pak $y_p = \bar{y} + \tilde{y}$.

To může usnadnit (zpřehlednit) výpočet zejména jde-li o součet dvou speciálních pravých stran, nebo o součet funkce a speciální pravé strany.

Eulerova rovnice má tvar

$$y^{(n)} + \frac{a_{n-1}}{x} y^{(n-1)} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} y' + \frac{a_0}{x^n} y = \begin{cases} 0 & \text{homogenní,} \\ f(x) & \text{nehomogenní,} \end{cases}$$

kde $a_i \in \mathbb{R}, i \in \{0, \dots, n-1\}$.

*Homogenní Eulerovu rovnici* lze převést na rovnici s konstantními koeficienty. Řešení hledáme ve tvaru $y(x) = x^\lambda$, tedy máme

$$\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)x^{\lambda-n} + \frac{a_{n-1}}{x}\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+2)x^{\lambda-n+1} + \cdots \\ \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}}\lambda x^{\lambda-1} + \frac{a_0}{x^n}x^\lambda = 0$$

a po vytknutí $x^{\lambda-n}$ dostaneme tzv. *indexovou rovnici* $P(\lambda) = 0$

$$\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1) + a_{n-1}\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+2) + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Dále postupujeme podle kořenů indexové rovnice.

1. Má-li navzájem různé reálné kořeny $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, pak $n$-tice řešení, která tvoří bázi prostoru řešení (fundamentální systém) je

$$y_1(x) = x^{\lambda_1}, \dots, y_n(x) = x^{\lambda_n}.$$

2. Má-li $m$-násobný kořen $\lambda_0$ ($m \leq n$), pak lineárně nezávislá řešení jsou

$$y_1(x) = x^{\lambda_0}, y_2(x) = x^{\lambda_0} \ln x, \dots, y_m(x) = x^{\lambda_0} (\ln x)^{m-1}$$

(lze ověřit dosazením do rovnice a využitím násobnosti kořene $\lambda_0$).

3. Má-li dvojici komplexně sdružených kořenů $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$), pak postupujeme podobně jako u LDR vyššího řádu, tj.

$$\begin{aligned} x^{\alpha \pm \beta i} &= \left(e^{\ln x}\right)^{\alpha \pm \beta i} = e^{\alpha \ln x \pm i \beta \ln x} = e^{\alpha \ln x} \cdot e^{\pm i \beta \ln x} \\ &= \left(e^{\ln x}\right)^{\alpha} \cdot [\cos(\beta \ln x) \pm i \sin(\beta \ln x)] \\ &= x^{\alpha} \cdot [\cos(\beta \ln x) \pm i \sin(\beta \ln x)], \end{aligned}$$

sečtením a vydělením dvěma, resp. odečtením a vydělením dvěma $i$, dostaneme

$$y_1 = x^{\alpha} \cos(\beta \ln x), y_2 = x^{\alpha} \sin(\beta \ln x).$$

## Příklad 26

Určete obecné řešení rovnice $y'' + \frac{1}{4x^2}y = 0$.

Dosazením $y = x^\lambda$ dostaneme

$$\begin{aligned}
\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} + \frac{1}{4x^2}x^\lambda &= 0\\
x^{\lambda-2}\left(\lambda(\lambda-1) + \frac{1}{4}\right) &= 0\\
\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} &= 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\ \Rightarrow\ y_1 = x^{1/2} = \sqrt{x}, y_2 = \sqrt{x}\ln x,$$

tedy řešení je

$$y(x) = c_1\sqrt{x} + c_2\sqrt{x}\ln x.$$

■

*Nehomogenní Eulerovu rovnici* řešíme stejně jako předchozí rovnice. Obecné řešení je součtem partikulárního řešení a obecného řešení (příslušné homogenní rovnice). Partikulární řešení hledáme metodou variace konstant, tj.

$$y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + \cdots + C_n(x)y_n(x),$$

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ \vdots \\ C_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

## Poznámka

Zavedením nové nezávisle proměnné $t$, která je s původní proměnnou $x$ vázána vztahem

$$x = \mathrm{e}^t \qquad (\Leftrightarrow t = \ln x),$$

lze převést Eulerovu rovnici na rovnici s konstantními koeficienty pro funkci $z(t) = y(\mathrm{e}^t)$.

Značme derivace tečkou podle $t$ a čárkou podle $x$, potom

$$\begin{aligned}
\dot{z}(t) &= y'(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{e}^t, \\
\ddot{z}(t) &= y''(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{e}^{2t} + y'(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{e}^t = y''(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{e}^{2t} + \dot{z}(t), \\
y'(x) &= \frac{\dot{z}(t)}{\mathrm{e}^t} = \frac{\dot{z}(t)}{x}, \\
y''(x) &= \frac{\ddot{z}(t) - \dot{z}(t)}{e^{2t}} = \frac{\ddot{z}(t) - \dot{z}(t)}{x^2}.
\end{aligned}$$

## Příklad 27

$$y'' + \frac{a_1}{x} y' + \frac{a_2}{x^2} y = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{z} - \dot{z}}{x^2} + \frac{\dot{z} a_1}{x^2} + \frac{a_0}{x^2} z &= 0 \quad \Big/ \cdot x^2 \\ \ddot{z} - \dot{z} + \dot{z} a_1 + a_0 z &= 0 \\ \ddot{z} + (a_1 - 1)\dot{z} + a_0 z &= 0, \end{aligned}$$

což je rovnice s konstantními koeficienty, tedy řešení hledáme ve tvaru

$$z(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \;\Rightarrow\; \lambda^2 + (a_1 - 1)\lambda + a_0 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda(\lambda - 1) + a_1 \lambda + a_0 = 0,$$

což je indexová rovnice. (Je vidět svázání substitucí $x = \mathrm{e}^t$.) ■

Uvažujme rovnici

$$y'' + ay' + by = 0, \qquad a, b \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

### Věta 19 (Abelova)

*Pro libovolná řešení $y_1, y_2$ rovnice (6) platí*

$$W(y_1, y_2) = c\,\mathrm{e}^{-ax}$$

*pro nějaké $c \in \mathbb{R}$.*

### Poznámka

Pro rovnici s nekonstantními koeficienty $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ dostaneme $W(y_1, y_2) = c\,\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}$.

## Důkaz.

$$\begin{aligned}[W(y_1, y_2)]' &= (y_1 y_2' - y_2 y_1')' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' \\ &= y_1(-a y_2' - b y_2) - y_2(-a y_1' - b y_1) \\ &= -a(y_1 y_2' - y_2 y_1') + b(y_1 y_2 - y_1 y_2) \\ &= -a W(y_1, y_2),\end{aligned}$$

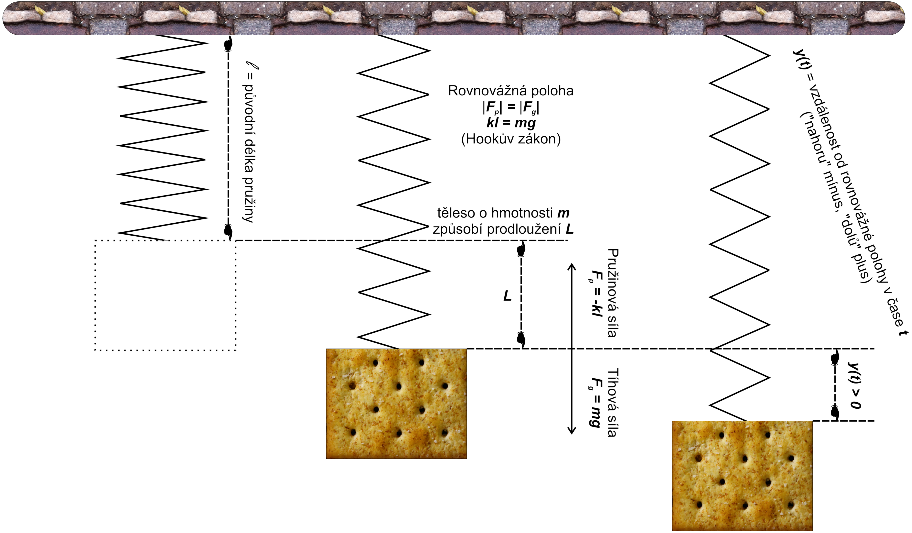
tedy $W(y_1, y_2)$ je řešením rovnice prvního řádu $W' = -aW$. Odtud $W(y_1, y_2) = c\,\mathrm{e}^{-ax}$. □

## Důsledek

Pro libovolná řešení $y_1, y_2$ rovnice (6) platí

- $W(y_1, y_2) = 0$ pro nějaké $x_0 \in I \Leftrightarrow W(y_1, y_2) = 0\ \forall x_0 \in I$,
- $W(y_1, y_2) \neq 0$ pro nějaké $x_0 \in I \Leftrightarrow W(y_1, y_2) \neq 0\ \forall x_0 \in I$.

# Harmonické kmitání



Newtonův zákon

$$\text{(hmotnost)} \cdot \text{(zrychlení)} = \text{síla působící na těleso}$$

$$m \cdot y'' = \sum_{i=1}^{n} F_i(t)$$

Síly působící na těleso

1. Tíhová síla $\vec{F}_g = m \cdot g$, dolů, $m > 0$
2. Pružinová síla $\vec{F}_p = -k(L + y(t))$, vždy tak, aby obnovila původní délku pružiny, $k > 0$, (je-li vychýlení $y(t)$ velké nahoru $(y(t) < -L)$, pružina je stlačená, tedy $F_p > 0$ působí dolů)
3. Třecí síla $\vec{F}_t = -\gamma \cdot y'(t)$, vždy proti směru pohybu, pro malé vychýlení je přímo úměrná rychlosti, $\gamma > 0$
4. Vnější síla $\vec{F}(t)$, působí přímo na těleso

$$
\begin{aligned}
my'' &= F_g + F_p + F_t + F(t) \\
my'' &= mg - k(L+y) - \gamma y' + F(t) \\
my'' &= \underbrace{mg - kL}_{=0} - ky - \gamma y' + F(t)
\end{aligned}
$$

Lineární DR 2. řádu s konstantními koeficienty

$$my'' + \gamma y' + ky = F(t)$$

- $y(0) = y_0$ počáteční pozice (směr dolů znamená kladné vychýlení)
- $y'(0) = y_0'$ počáteční rychlost (ve směru počátečního vychýlení je kladná, proti směru počátečního vychýlení záporná)

- $F(t) \equiv 0$ vlastní kmitání
- $F(t) \not\equiv 0$ vynucené kmitání
- $\gamma = 0$ netlumené kmitání
- $\gamma \neq 0 (\gamma > 0)$ tlumené kmitání

… a kombinace předchozích.

## Vlastní netlumené kmitání

$$my'' + ky = 0$$

charkateristická rovnice $m\lambda^2 + k = 0$ označíme-li $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, pak

$$\lambda^2 = -\frac{k}{m} = -\omega_0^2 \Rightarrow \lambda = \pm i\omega_0,$$

kde $\omega_0$ je vlastní frekvence, potom

$$y = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$$

a pomocí součtových vzorců

$$y = C \sin\left(\omega_0 t + \varphi\right),$$

kde $C$ je amplituda a $\varphi$ je fáze

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{C_1}{C_2}, \quad C_1 = C \sin \varphi, \quad C_2 = C \cos \varphi.$$

## Vynucené netlumené kmitání

$$my'' + ky = F_0 \sin \omega t,$$

$F_0 \sin \omega t$ je periodicky působící síla o frekvenci $\omega$.
Řešení homogenní rovnice

$$y = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Odhad partikulárního řešení nehomogenní rovnice závisí na vztahu $\omega$ a $\omega_0$.

- $\boxed{\omega_0 \neq \omega}$

$$Y_p = A \cos \omega t + B \sin \omega t \;\Rightarrow\; A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)},\; B = 0,$$

$$y = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t$$

$$y = C \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t$$

řešení je ohraničené

- $\boxed{\omega_0 = \omega}$ (rezonance)

$$Y_p = At\cos\omega_0 t + Bt\sin\omega_0 t \;\Rightarrow\; A = 0,\; B = -\frac{F_0}{2m\omega_0}$$

$$y = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t - \frac{F_0}{2m\omega_0} t\sin\omega_0 t$$

$$y = C\sin(\omega_0 t + \varphi) - \frac{F_0}{2m\omega_0} t\sin t$$

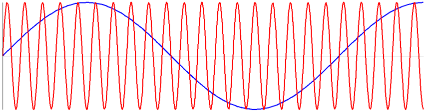
řešení uteče do $\pm\infty$

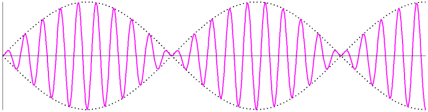
## Poznámka

Jsou-li pro $\omega_0 \neq \omega$ počáteční podmínky $y(0) = 0$ a $y'(0) = 0$, pak

$$y = \underbrace{\left[\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \frac{\omega_0 - \omega}{2} t\right]}_{(n)} \cdot \underbrace{\sin \frac{\omega_0 + \omega}{2} t}_{(v)}.$$

Je-li pak $\omega$ blízko $\omega_0$, je $(n)$ vlna nízké frekvence a $(v)$ vlna vysoké frekvence $\Rightarrow$ amplitudová modulace (elektrických signálů).





## Vlastní tlumené kmitání

$$my'' + \gamma y' + ky = 0$$

řešení vždy konverguje k nule exponenciálně (neosciluje/osciluje)

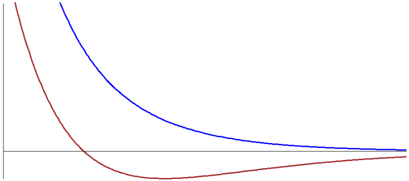
$$m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0 \quad (m > 0, \gamma > 0, k > 0)$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m}$$

Řešení závisí na kořenech charakteristického polynomu $m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0$, ale s rostoucím $t$ jde do nuly.

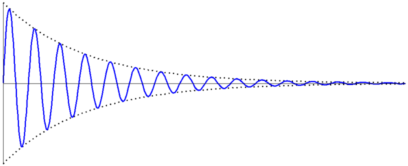
(a) $\gamma^2 - 4mk > 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}, \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0 \Rightarrow y = C\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + D\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t} \to 0$

(b) $\gamma^2 = 4mk \Rightarrow y = C\,\mathrm{e}^{\lambda t} + Dt\,\mathrm{e}^{\lambda t} \to 0$

(c) $\gamma^2 < 4mk \Rightarrow \lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \alpha = -\frac{\gamma}{2m}, \beta = \frac{1}{2m}\sqrt{4mk - \gamma^2}$, $\beta$ je vlastní (přirozená) frekvence; je-li $\gamma = 0$, je $\beta = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.



Obr.: Modře (a), hnědě (b)



Obr.: Možnost (c)

## Vynucené tlumené kmitání

$$my'' + \gamma y' + ky = F_0 \sin \omega t$$

řešení homogenní rovnice $y_h = \mathrm{e}^{\alpha t}\,(C\cos\beta t + D\sin\beta t)$
partikulární řešení $y_p = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ (žádný člen není řešením homogenní rovnice)

$$\Rightarrow \qquad y = \mathrm{e}^{\alpha t}\,(C\cos\beta t + D\sin\beta t) + y_p$$

obecné řešení je ohraničené.
Pokud by byla vynucující síla tvaru $F_0\,\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\omega t$, kde $\alpha = -\frac{\gamma}{2m}$, pak by partikulární řešení záviselo na vztahu $\omega$ a $\beta$

- $\omega \neq \beta \Rightarrow y_p = \mathrm{e}^{\alpha t}\,(A\cos\omega t + \sin\omega t)$
- $\omega = \beta \Rightarrow y_p = t\,\mathrm{e}^{\alpha t}\,(A\cos\omega t + \sin\omega t)$

V obou případech je ale $y_p \to 0$, neboť $\alpha < 0$, a tedy i $y \to 0$.

### Příklad 28

Těleso o hmotnosti 0,5 kg natáhne pružinu o 10 cm. Jestliže potáhneme těleso dolů další 2 cm a pak pustíme (a pokud zanedbáme odpor vzduchu), jaká bude jeho poloha v čase $t$?

$$m = 0{,}5\ kg, \quad \gamma = 0, \quad g = 10\ m/s^2 = 1000\ cm/s^2,$$

$$mg = kL \ \Rightarrow\ k = \frac{mg}{L} = \frac{0{,}5 \cdot 1000}{10}\ \frac{kg \cdot cm \cdot s^{-2}}{cm} = 50\ kg/s^2$$

$$0{,}5y'' + 50y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 0 \text{ bez počátečního impulzu}$$

$$0{,}5\lambda^2 + 50 = 0$$
$$\lambda^2 + 100 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \pm 10i$$

$$\begin{aligned}
y &= C_1 \cos 10t + C_2 \sin 10t \\
y(0) &= C_1 = -2 \\
y' &= -10C_1 \sin 10t + 10C_2 \cos 10t \\
y'(0) &= 10C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\
y &= -2 \cos 10t \\
y &= \underbrace{2}_{C} \sin\left(10t \underbrace{-\frac{\pi}{2}}_{\varphi}\right)
\end{aligned}$$

■

## Příklad 29

Je-li systém z předchozího příkladu v (viskózním) prostředí, které způsobuje odpor 0,16 N, když má těleso rychlost 2 cm/s. Určete jeho pozici v čase $t$.

Třecí síla $|\vec{F}_t| = \gamma \cdot y' \Rightarrow 16\ \frac{kg \cdot cm}{s^2} = \gamma \cdot 2\ \frac{cm}{s} \Rightarrow \gamma = 8\ kg/s$

$$\begin{aligned} 0{,}5y'' + 8y' + 50y &= 0 \\ 0{,}5\lambda^2 + 8\lambda + 50 &= 0 \\ \lambda^2 + 16\lambda + 100 &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 400}}{2} = \frac{-16 \pm \sqrt{-144}}{2} = \frac{-16 \pm 12i}{2} = -8 \pm 6i$$

$$
\begin{aligned}
y &= C_1 \,\mathrm{e}^{-8t} \cos 6t + C_2 \,\mathrm{e}^{-8t} \sin 6t \\
y(0) &= C_1 = -2 \\
y' &= C_1 \left(-8 \,\mathrm{e}^{-8t} \cos 6t - 6 \,\mathrm{e}^{-8t} \sin 6t\right) \\
&\qquad\qquad + C_2 \left(-8 \,\mathrm{e}^{-8t} \sin 6t + 6 \,\mathrm{e}^{-8t} \cos 6t\right) \\
y'(0) &= C_1 \cdot (-8) + C_2 \cdot 6 = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{8}{3} \\
y &= -2 \,\mathrm{e}^{-8t} \cos 6t - \frac{8}{3} \,\mathrm{e}^{-8t} \sin 6t \\
y &= \frac{10}{3} \,\mathrm{e}^{-8t} \sin \left(6t + \operatorname{arctg} \frac{3}{4}\right) \approx \frac{10}{3} \,\mathrm{e}^{-8t} \sin (6t + 3{,}785)
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

*Systémem lineárních diferenciálních rovnic* rozumíme systém tvaru

$$\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t),\\
x_2' &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t),\\
&\vdots\\
x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t),
\end{aligned}$$

kde $a_{ij}$ a $b_i$ ($i, j = 1, \dots, n$) jsou buď reálné nebo komplexní funkce definované na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$.

Zavedeme-li maticovou funkci

$$A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^{n}$$

a vektorovou funkci

$$b(t) = (b_1(t), \dots, b_n(t)),$$

lze lineární systém psát ve vektorovém tvaru

$$x' = A(t)x + b(t). \tag{7}$$

kde $x = (x_1, \dots, x_n)$. Při tomto způsobu zápisu je vhodné chápat vektor $x$ jako matici $(x_1, \dots, x_n)^T$ typu $n \times 1$ a vektorovou funkci $b(t)$ jako maticovou funkci $(b_1(t), \dots, b_n(t))^T$. Součin maticové funkce $A(t)$ a vektoru $x$ lze pak chápat jako součin dvou matic a systém máme v tzv. maticovém tvaru (7).

Je-li speciálně $b(t) \equiv 0$, nazývá se rovnice (7) *homogenní*. V opačném případě *nehomogenní* a rovnice $x' = A(t)x$ se nazývá homogenní rovnice *přidružená* k rovnici $x' = A(t)x + b(t)$.
Počáteční podmínka pro rovnici (7) je tvaru

$$x(t_0) = \xi, \tag{8}$$

kde $\xi$ je konstantní matice typu $n \times 1$.

### Věta 20

*Jsou-li $A(t), b(t)$ spojité na intervalu $I$, pak maticová funkce $\varphi(t)$ typu $n \times 1$ je řešením počáteční úlohy (7),(8) právě tehdy, když je řešením integrální rovnice*

$$\varphi(t) = \xi + \int_{t_0}^{t} [A(s)\varphi(s) + b(s)]\,\mathrm{d}s$$

### Důkaz.

Viz skripta. $\square$

## Lemma 1 (Gronwall)

*Nechť $u(t), v(t)$ jsou spojité nezáporné funkce na intervalu $J$, nechť $C \geq 0$ je konstanta a nechť $t_0 \in J$. Jestliže pro všechna $t \in J$ platí*

$$u(t) \leq C + \left| \int_{t_0}^{t} v(s)u(s)\ \mathrm{d}s \right|,$$

*pak pro všechna $t \in J$ platí*

$$u(t) \leq C \cdot \mathrm{e}^{\left| \int_{t_0}^{t} v(s)\ \mathrm{d}s \right|}.$$

**Důkaz.**

Provedeme pro $t \geq t_0$ (tedy vše bez absolutních hodnot):

$$u(t) \leq \underbrace{C + \int_{t_0}^{t} v(s)u(s)\,\mathrm{d}s}_{w(t)}$$

$$\begin{aligned}
w'(t) &= v(t)u(t) \leq v(t)w(t) \\
w'(t) - v(t)w(t) &\leq 0 \quad / \cdot \exp\left\{-\int_{t_0}^{t} v(s)\,\mathrm{d}s\right\} \\
w'(t)\,\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} v(s)\,\mathrm{d}s} - v(t)w(t)\,\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} v(s)\,\mathrm{d}s} &\leq 0 \\
\left[w(t)\,\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} v(s)\,\mathrm{d}s}\right]' &\leq 0 \\
w(t)\,\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} v(s)\,\mathrm{d}s} - \underbrace{w(t_0)}_{=C} &\leq 0
\end{aligned}$$

Odtud dostaneme

$$w(t) \leq C\,\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} v(s)\,\mathrm{d}s}$$

a užitím nerovnosti $u(t) \leq w(t)$ máme

$$u(t) \leq C\,\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} v(s)\,\mathrm{d}s}\,.$$

$\square$

## Věta 21 (O existenci a jednoznačnosti řešení)

*Nechť maticové funkce* $A(t), b(t)$ *jsou spojité na intervalu* $I$*. Pak počáteční úloha* (7),(8) ($t_0 \in I$) *má jediné úplné řešení. Toto řešení je definováno na celém intervalu* $I$ *a lze ho získat jako limitu tzv. Picardovy posloupnosti postupných aproximací* $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$*, kde*

$$\varphi_0(t) \equiv 0, \qquad \varphi_{k+1}(t) = \xi + \int_{t_0}^{t} [A(s)\varphi_k(s) + b(s)] \,\mathrm{d}s \tag{9}$$

*pro* $k = 0, \dots, \infty$.

## Důkaz.

Funkce posloupnosti $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ jsou definované na celém intervalu $I$. Ukážeme-li, že existuje maticová funkce $\varphi(t)$ typu $n \times 1$ taková, že $\varphi_k(t) \to \varphi(t)$ na intervalu $I$ a

$$\int_{t_0}^{t} [A(s)\varphi_k(s) + b(s)] \, \mathrm{d}s \to \int_{t_0}^{t} [A(s)\varphi(s) + b(s)] \, \mathrm{d}s \tag{10}$$

na intervalu $I$ pro $k \to \infty$, bude existence řešení počáteční úlohy (7),(8) na $I$ dokázána, neboť z (9) plyne $\varphi(t) = \xi + \int_{t_0}^{t} [A(s)\varphi(s) + b(s)] \, \mathrm{d}s$, což je integrální tvar rovnice ekvivalentní počáteční úloze (7),(8).

Zaveďme nejprve následující označení $\alpha(t) = \left| \int_{t_0}^{t} |A(s)| \, \mathrm{d}s \right|$, $\beta(t) = \max_{\tau \in [\min(t_0,t), \max(t_0,t)]} \left| \xi + \int_{t_0}^{\tau} b(s) \, \mathrm{d}s \right|$, $\Delta_k(t) = \varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t)$.
Funkce $\alpha(t), \beta(t)$ jsou spojité na intervalu $I$, funkce $\beta(t)$ je pro $t \geq t_0$ neklesající.

Dokážeme nejprve, že platí

$$|\Delta_k(t)| \leq \beta(t) \cdot \frac{\alpha^k(t)}{k!} \quad \text{pro} \quad k = 0, 1, \dots \tag{11}$$

Úplnou indukcí: Pro

$k = 0 : |\Delta_0(t)| = |\varphi_1(t) - \underbrace{\varphi_0(t)}_{=0}| = |\varphi_1(t)| = \left|\xi + \int_{t_0}^{t} b(s)\, \mathrm{d}s\right| \leq \beta(t).$

Předpokládejme nyní platnost tvrzení pro $k = j$ a dokažme platnost pro $k = j + 1$ :

$$\begin{aligned}
&|\Delta_{j+1}(t)| = |\varphi_{j+2}(t) - \varphi_{j+1}(t)| \\
&= \left|\xi + \int_{t_0}^{t} [A(s)\varphi_{j+1}(s) + b(s)]\, \mathrm{d}s - \left(\xi + \int_{t_0}^{t} [A(s)\varphi_j(s) + b(s)]\, \mathrm{d}s\right)\right| \\
&= \left|\int_{t_0}^{t} A(s)\varphi_{j+1}(s)\, \mathrm{d}s - \int_{t_0}^{t} A(s)\varphi_j(s)\, \mathrm{d}s\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \int_{t_0}^{t} A(s)[\varphi_{j+1}(t) - \varphi_j(t)]\, \mathrm{d}s \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} |A(s)[\varphi_{j+1}(t) - \varphi_j(t)]|\, \mathrm{d}s \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} |A(s)| \beta(s) \frac{\alpha^j(s)}{j!}\, \mathrm{d}s \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} |A(s)| \beta(t) \frac{\alpha^j(s)}{j!}\, \mathrm{d}s \right| \\
&= \beta(t) \left| \int_{t_0}^{t} |A(s)| \frac{\alpha^j(s)}{j!}\, \mathrm{d}s \right| \\
&= \beta(t) \operatorname{sgn}(t - t_0) \int_{t_0}^{t} \underbrace{\alpha'(s) \operatorname{sgn}(s - t_0)}_{|A(s)|} \frac{\alpha^j(s)}{j!}\, \mathrm{d}s \\
&= \beta(t) \int_{t_0}^{t} \frac{\alpha^j(s)}{j!} \alpha'(s)\, \mathrm{d}s = \beta(t) \left[ \frac{\alpha^{j+1}(s)}{(j+1)!} \right]_{t_0}^{t} = \beta(t) \frac{\alpha^{j+1}(t)}{(j+1)!}
\end{aligned}
$$

Z (11) plyne, že řada $\sum_{k=0}^{\infty}|\Delta_k(t)|$ konverguje a platí

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\Delta_k(t)| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\beta(t)\frac{\alpha^k(t)}{k!} = \beta(t)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k(t)}{k!} = \beta(t)\,\mathrm{e}^{\alpha(t)}$$

pro $t \in I$.
Platí $\sum_{k=0}^{m-1}\Delta_k(t) = \varphi_1(t) - \varphi_0(t) + \varphi_2(t) - \varphi_1(t) + \cdots + \varphi_m(t) - \varphi_{m-1}(t) = \varphi_m(t)$. Pro $p > m$ přirozená tedy máme $|\varphi_p(t) - \varphi_m(t)| = \left|\sum_{k=0}^{p-1}\Delta_k(t) - \sum_{k=0}^{m-1}\Delta_k(t)\right| = \left|\sum_{k=m}^{p-1}\Delta_k(t)\right| \leq \sum_{k=m}^{p-1}|\Delta_k(t)| \leq \sum_{k=m}^{p}|\Delta_k(t)|$. Odtud plyne, že posloupnost $\{\varphi_k(t)\}$ je cauchyovská v každém $t \in I$. Protože $\mathbb{R}^n$ je úplný metrický prostor, je posloupnost $\{\varphi_k(t)\}$ konvergentní v každém $t \in I$.

Položme $\varphi(t) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(t)$, $t \in I$. Platí

$$
\begin{aligned}
|\varphi(t) - \varphi_m(t)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \Delta_k(t) \right| = \left| \sum_{k=m}^{\infty} \Delta_k(t) \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta_k(t)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \beta(t) \frac{\alpha^k(t)}{k!} = \beta(t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k(t)}{k!} \\
&= \beta(t) \frac{\alpha^m(t)}{m!} \left( 1 + \frac{\alpha(t)}{m+1} + \frac{\alpha^2(t)}{(m+2)(m+1)} + \cdots \right) \\
&\leq \beta(t) \frac{\alpha^m(t)}{m!} \left( 1 + \frac{\alpha(t)}{1} + \frac{\alpha^2(t)}{2 \cdot 1} + \cdots \right) \\
&= \beta(t) \frac{\alpha^m(t)}{m!} \, \mathrm{e}^{\alpha(t)}, \; t \in I.
\end{aligned}
$$

Máme dokázat, že $\int_{t_0}^{t} [A(s)\varphi_k(s) + b(s)]\, \mathrm{d}s \to \int_{t_0}^{t} [A(s)\varphi(s) + b(s)]\, \mathrm{d}s$ na intervalu $I$. Důkaz stačí provést na libovolném kompaktním intervalu $J \subseteq I$. Protože funkce $\alpha(t), \beta(t)$ jsou spojité na $J$, nabývají na něm své největší a nejmenší hodnoty, řekněme $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$.
Pak $|\varphi_m(t) - \varphi(t)| \leq \tilde{\beta}\, \mathrm{e}^{\tilde{\alpha}}\, \frac{\tilde{\alpha}^m}{m!} \xrightarrow{m\to\infty} 0$ (nutná podm. konvergence $a_n \to 0$) na $J$. Odtud $\varphi_m(t) \rightrightarrows \varphi(t)$ na $J$ pro $m \to \infty$. Na $J$ nyní máme

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_{t_0}^{t} [A(s)\varphi_k(s) + b(s)]\, \mathrm{d}s - \int_{t_0}^{t} [A(s)\varphi(s) + b(s)]\, \mathrm{d}s \right| \\
&= \left| \int_{t_0}^{t} A(s)(\varphi_k(s) - \varphi(t))\, \mathrm{d}s \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} |A(s)(\varphi_k(s) - \varphi(t))|\, \mathrm{d}s \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} |A(s)| \cdot |\varphi_k(s) - \varphi(t)|\, \mathrm{d}s \right| \leq \max_{s\in J} |\varphi_k(s) - \varphi(s)| \cdot \left| \int_{t_0}^{t} |A(s)|\, \mathrm{d}s \right| \\
&\leq \tilde{\alpha} \cdot \max_{s\in J} |\varphi_k(s) - \varphi(s)| \xrightarrow{k\to\infty} 0,
\end{aligned}
$$

neboť $\varphi_m(t) \rightrightarrows \varphi(t)$ na $J$.

Tím je dokázáno (10), tedy existence řešení na $I$. Zbývá dokázat jednoznačnost.
Předpokládejme, že $x(t), y(t)$ jsou řešením (7),(8). Položme $u(t) = |x(t) - y(t)|$ na libovolném intervalu, kde jsou obě řešení $x(t), y(t)$ definována. Pak platí

$$\begin{aligned}
u(t) &= |x(t) - y(t)| \\
&= \left| \xi + \int_{t_0}^{t} [A(s)x(s) + b(s)]\,\mathrm{d}s - \left( \xi + \int_{t_0}^{t} [A(s)y(s) + b(s)]\,\mathrm{d}s \right) \right| \\
&= \left| \int_{t_0}^{t} A(s)\,(x(s) - y(s))\,\mathrm{d}s \right| \le \left| \int_{t_0}^{t} |A(s)\,(x(s) - y(s))|\,\mathrm{d}s \right| \\
&\le \left| \int_{t_0}^{t} |A(s)| \cdot \underbrace{|x(s) - y(s)|}_{u(s)}\,\mathrm{d}s \right| = \left| \int_{t_0}^{t} |A(s)|u(s)\,\mathrm{d}s \right|.
\end{aligned}$$

Podle Gronwallova lemmatu je $u(t) \leq 0 \cdot \mathrm{e}^{\left|\int_{t_0}^{t} |A(s)|\, \mathrm{d}s\right|} = 0$. Poněvadž $u(t) \geq 0$, máme $u(t) \equiv 0$, tedy $x(t) = y(t)$ na každém intervalu, kde jsou řešení $x(t), y(t)$ definována. $\square$

### Poznámka

Picardova metoda postupných aproximací použitá v důkazu předchozí věty umožňuje hledat řešení jako limitu posloupnosti $\{\varphi_k(t)\}$. Použijeme-li funkcí $\Delta_k(t)$, zavedených v důkazu, lze řešení $\varphi(t)$ vyjádřit ve tvaru nekonečné řady $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k(t)$. Přitom lze vektorové funkce $\Delta_k(t)$ definovat následujícím způsobem

$$\Delta_0(t) = \xi + \int_{t_0}^{t} b(s)\, \mathrm{d}s, \quad \Delta_{k+1}(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)\Delta_k(s)\, \mathrm{d}s.$$

## Poznámka

Je-li speciálně $A(t) = A$ nezávislá na $t$ a $b(t) = 0$, máme počáteční problém ve tvaru

$$x' = Ax, \quad x(t_0) = \xi$$

a jeho řešení ve tvaru

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \xi + A\xi \cdot (t - t_0) + A^2\xi\frac{(t-t_0)^2}{2} + A^3\xi\frac{(t-t_0)^3}{3!} + \cdots \\ &= \left(I + \frac{1}{1!}A(t-t_0) + \frac{1}{2!}[A(t-t_0)]^2 + \cdots + \frac{1}{k!}[A(t-t_0)]^k + \cdots\right)\xi.\end{aligned}$$

Definujeme-li maticovou exponenciální funkci $e^A$ vztahem

$$e^A = I + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k,$$

kde $A^0 = I$, pak řešení $\varphi(t)$ lze psát ve tvaru $\varphi(t) = e^{A(t-t_0)}\,\xi$. Snadno se ověří, že pro maticovou exponenciální funkci platí $\left[e^{A(t-t_0)}\right]' = A \cdot e^{A(t-t_0)}$, $\left|e^A\right| \leq e^{|A|}$ a pro zaměnitelné (tj. $A \cdot B = B \cdot A$) matice typu $n \times n$ platí $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.

## Příklad 30

Řešte počáteční problém $x' = Ax, x(0) = (0,1)^T, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{4k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{4k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^{4k+2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^{4k+3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$
\mathrm{e}^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{t^2}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{t^2}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{t^3}{3!} \\ \frac{t^3}{3!} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{t^4}{4!} & 0 \\ 0 & \frac{t^4}{4!} \end{pmatrix} + \cdots
$$

$$
= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}
$$

$$
\boxed{\varphi(t) = \mathrm{e}^{At}(0,1)^T = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}
$$

■

**Věta 22 (Princip superpozice)**

*Jsou-li $x_1(t), x_2(t)$ řešením rovnice $x' = A(t)x + b_1(t)$, resp. $x' = A(t)x + b_2(t)$, pak lineární kombinace $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ je řešením rovnice $x' = A(t)x + c_1b_1(t) + c_2b_2(t)$.*

**Důkaz.**

$$
\begin{aligned}
[c_1x_1(t) + c_2x_2(t)]' &= c_1x_1'(t) + c_2x_2'(t) \\
&= c_1\left(A(t)x_1(t) + b_1(t)\right) + c_2\left(A(t)x_2(t) + b_2(t)\right) \\
&= A(t)\left(c_1x_1(t) + c_2x_2(t)\right) + c_1b_1(t) + c_2b_2(t).
\end{aligned}
$$

□

## Důsledek

1. Jsou-li $y_1(t), y_2(t)$ řešení homogenní lineární rovnice
$$y' = A(t) \cdot y, \tag{12}$$
pak také jejich lineární kombinace $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ je řešením rovnice (12). Množina všech řešení rovnice (12) tedy tvoří vektorový prostor. Později ukážeme, že tento prostor je dimenze $n$ ($=$ řád matice $A$).
2. Je-li $x(t)$ řešením rovnice (7), pak $z(t)$ je řešením rovnice (7) právě tehdy, když $x(t) - z(t)$ je řešením rovnice (12). Všechna řešení rovnice (7) jsou tedy tvaru $x(t) + y(t)$, kde $y(t)$ je řešením rovnice (12) a $x(t)$ je jedno řešení rovnice (7).

## Poznámka

Ve zbytku tohoto odstavce budeme předpokládat, že $A(t), b(t)$ jsou spojité na intervalu $I$.
Z věty o existenci a jednoznačnosti řešení plyne, že počáteční problém $y' = A(t)y, y(t_0) = 0$ má jediné řešení $y(t) \equiv 0$.

## Definice 7

Řekneme, že řešení $y_1(t), \dots, y_k(t)$, $t \in I$ jsou *lineárně závislá*, jestliže existují konstanty $c_1, \dots, c_k$, z nichž aspoň jedna je různá od nuly, takové, že $c_1 y_1(t) + \cdots + c_k y_k(t) \equiv 0$ na $I$. V opačném případě říkáme, že řešení $y_1(t), \dots, y_k(t)$ jsou *lineárně nezávislá*.

Jsou-li řešení $y_1(t), \dots, y_k(t)$ lineárně závislá a je-li $t_0 \in I$, pak také vektory $y_1(t_0), \dots, y_k(t_0)$ jsou lineárně závislé. Ukažme, že toto tvrzení platí i naopak.

Nechť vektory $y_1(t_0), \dots, y_k(t_0)$ jsou při $t_0 \in I$ lineárně závislé, tj. existují konstanty $c_1, \dots, c_k$ ne všechny rovny nule tak, že $c_1 y_1(t_0) + \cdots + c_k y_k(t_0) = 0$. Protože $y_1(t), \dots, y_k(t)$ jsou řešení, je i jejich lineární kombinace $y(t) = c_1 y_1(t) + \cdots + c_k y_k(t)$ řešením rovnice (12). Přitom platí, že $y(t_0) = 0$. Podle poslední poznámky je $y(t) \equiv 0$, takže $y_1(t), \dots, y_k(t)$ jsou lineárně závislá. Platí také, že řešení $y_1(t), \dots, y_k(t)$ jsou lineárně nezávislá právě tehdy, když vektory $y_1(t_0), \dots, y_k(t_0)$ jsou lineárně nezávislé. Odtud plyne, že dimenze vektorového prostoru všech řešení rovnice (12) je rovna $n$.

Libovolnou bázi prostoru všech řešení rovnice (12) nazýváme *fundamentální systém řešení* rovnice (12).

Zároveň s rovnicí (12) budeme uvažovat rovnici

$$Y' = A(t) \cdot Y, \tag{13}$$

kde $Y$ je čtvercová matice řádu $n$. Označíme-li sloupce matice $Y$ jako $y^{[1]}, \dots, y^{[n]}$, lze systém (13) psát jako systém $n$ lineárních rovnic $(y^{[j]})' = A(t) \cdot y^{[j]}, j = 1, \dots, n$, nebo ve tvaru jedné vektorové rovnice

$$\begin{pmatrix} y^{[1]} \\ y^{[2]} \\ \vdots \\ y^{[n]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} A(t) & O & \cdots & O \\ O & A(t) & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y^{[1]} \\ y^{[2]} \\ \vdots \\ y^{[n]} \end{pmatrix}.$$

Odtud plyne, že počáteční úloha

$$Y' = A(t) \cdot Y, \quad Y(t_0) = Y_0, \tag{14}$$

kde $t_0 \in I$, $Y_0$ je konstantní čtvercová matice řádu $n$, má jediné úplné řešení $Y(t)$ definované na celém intervalu $I$. Maticová funkce $Y(t)$ je řešením rovnice (13) právě tehdy, když každý sloupec $y^{[j]}$ maticové funkce $Y(t)$ je řešením rovnice (12). Je-li $\xi$ konstantní $n$-rozměrný sloupcový vektor, pak $Y(t) \cdot \xi$ je řešením rovnice (12). Jestliže každé řešení (12) lze získat ve tvaru $Y(t) \cdot \xi$, nazývá se maticová funkce $Y(t)$ *fundamentální maticí* rovnice (12).

Zřejmě $Y(t)$ je fundamentální maticí rovnice (12) právě tehdy, když sloupce $y^{[1]}(t), \dots, y^{[n]}(t)$ maticové funkce $Y(t)$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (12).

- $\Leftrightarrow$ $y^{[1]}(t), \dots, y^{[n]}(t)$ jsou řešení (12) a $\det\big(y^{[1]}(t), \dots, y^{[n]}(t)\big) \neq 0$ pro $t \in I$
- $\Leftrightarrow$ $y^{[1]}(t), \dots, y^{[n]}(t)$ jsou řešení (12) a $\det\big(y^{[1]}(t_0), \dots, y^{[n]}(t_0)\big) \neq 0$ pro $t \in I$
- $\Leftrightarrow$ $Y(t)$ je řešením (13) a $\det Y(t) \neq 0$ na $I$
- $\Leftrightarrow$ $Y(t)$ je řešením (13) a $\det Y(t_0) \neq 0$ na $I$

Je-li $C$ čtvercová konstantní matice řádu $n$ a je-li $Y(t)$ řešením (13), pak $Y(t) \cdot C$ je rovněž řešením (13).

$$(Y(t) \cdot C)' = Y'(t) \cdot C = (A(t) \cdot Y(t)) \cdot C = A(t) \cdot (Y(t) \cdot C)$$

Je-li $C$ regulární čtvercová konstantní matice řádu $n$ a je-li $Y(t)$ fundamentální matice rovnice (12), pak $Y(t) \cdot C$ je opět fundamentální matice rovnice (12). Je-li $\tilde{Y}(t)$ fundamentální matice rovnice (12), pak libovolná fundamentální matice $Y(t)$ rovnice (12) je tvaru $Y(t) = \tilde{Y}(t) \cdot C$, kde $C$ je vhodná regulární čtvercová konstantní matice řádu $n$. Je-li $\tilde{Y}(t)$ fundamentální matice rovnice (12), pak počáteční úloha (14) má řešení $Y(t) = \tilde{Y}(t) \cdot C$, kde $C = \tilde{Y}^{-1}(t_0) \cdot Y_0$.

### Věta 23 (Jacobiho formule)

*Buď* $Y(t)$ *řešením rovnice* (13), $t_0 \in I$. *Pak platí*

$$\det Y(t) = \det Y(t_0)\, \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\, \mathrm{d}s}.$$

## Důkaz.

Označme $y_{ij}(t), (i, j = 1, \dots, n)$ prvky maticové funkce $Y(t)$ a položme $u(t) = \det Y(t)$. Protože $Y'(t) = A(t) \cdot Y(t)$, platí $y_{ij}(t)' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t) y_{kj}(t)$, kde $a_{ij}(t)$ jsou prvky maticové funkce $A(t)$.

$$u'(t) = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} y_{11}(t) & \cdots & y_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y'_{i1}(t) & \cdots & y'_{in}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n1}(t) & \cdots & y_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} y_{11}(t) & \cdots & y_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t) y_{k1}(t) & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t) y_{kn}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n1}(t) & \cdots & y_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} y_{11}(t) & \cdots & y_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{ii}(t) y_{i1}(t) & \cdots & a_{ii}(t) y_{in}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n1}(t) & \cdots & y_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \underbrace{\det Y(t)}_{u(t)} = \left( \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t) \right) \cdot u(t) = \operatorname{tr} A(t) u(t).$$

Dále $u(t_0) = \det Y(t_0)$. Funkce $u(t)$ je tedy řešením počáteční úlohy

$$u' = \operatorname{tr} A(t) \cdot u, \qquad u(t_0) = \det Y(t_0).$$

Řešením dostáváme $u(t) = C \cdot \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\, \mathrm{d}s}$, přičemž z počáteční podmínky plyne $C = \det Y(t_0)$, a tedy

$$\det Y(t) = \det Y(t_0) \cdot \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\, \mathrm{d}s}.$$

□

### Věta 24

*Je-li* $Y(t)$ *fundamentální matice rovnice* (12), *pak řešení počáteční úlohy* (7),(8) *je*

$$x(t) = Y(t) \cdot Y^{-1}(t_0) \cdot \xi + Y(t) \cdot \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s) b(s) \, \mathrm{d}s.$$

## Důkaz.

Protože $Y(t)$ je regulární a spojitá na intervalu $I$, je na $I$ spojitá i $Y^{-1}(t)$. Existuje proto derivace $\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s$ a platí

$$\begin{aligned}
x'(t) &= Y'(t)\cdot Y^{-1}(t_0)\cdot\xi \\
&\qquad + Y'(t)\cdot\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s + Y(t)\cdot Y^{-1}(t)\cdot b(t) \\
&= A(t)Y(t)Y^{-1}(t_0)\xi + A(t)Y(t)\cdot\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s + b(t) \\
&= A(t)\left[Y(t)Y^{-1}(t_0)\xi + Y(t)\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s\right] + b(t) \\
&= A(t)\cdot x(t) + b(t),
\end{aligned}$$

tedy $x(t)$ je řešením (7).
$x(t_0) = Y(t_0)\cdot Y^{-1}(t_0)\cdot\xi + \int_{t_0}^{t_0} Y^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s = \xi.$ □

## Poznámka

Při praktickém určování řešení počáteční úlohy (7),(8) se obvykle postupuje takto (tzv. metoda variace konstant)

- Řešení předpokládáme ve tvaru $Y(t) \cdot c(t)$, kde $c(t)$ je $n$-vektorová funkce (sloupcový vektor)
- dosadíme do rovnice (7):
  $Y'(t) \cdot c(t) + Y(t) \cdot c'(t) = A(t) \cdot Y(t) \cdot c(t) + b(t)$
- využijeme vztahu $Y'(t) = A(t) \cdot Y(t)$ a dostaneme
  $\underbrace{A(t) \cdot Y(t) \cdot c(t)} + Y(t) \cdot c'(t) = \underbrace{A(t) \cdot Y(t) \cdot c(t)} + b(t)$, tudíž
  $c'(t) = Y^{-1}(t) \cdot b(t)$
- integrací dostaneme $c(t) = \eta + \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s) b(s) \, \mathrm{d}s$, a tedy
  $x(t) = Y(t) \cdot \eta + Y(t) \cdot \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s) b(s) \, \mathrm{d}s$
- z počáteční podmínky určíme $\eta$: $\xi = Y(t_0)\eta + 0 \Rightarrow \eta = Y^{-1}(t_0)\xi$, a tedy $x(t) = Y(t) \cdot Y^{-1}(t_0)\xi + Y(t) \cdot \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s) b(s) \, \mathrm{d}s$

## Poznámka

Je-li speciálně $A(t) = A$, kde $A$ je konstantní čtvercová matice řádu $n$, tj. uvažujeme-li počáteční úlohu $x' = Ax + b(t), x(t_0) = \xi$, je řešení této úlohy tvaru $x(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)}\,\xi + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{A(t-s)}\, b(s)\,\mathrm{d}s$.

Uvažujme rovnici

$$y' = Ay, \tag{15}$$

kde $A$ je konstantní čtvercová matice řádu $n$. Maticová funkce $e^{At}$ je fundamentální maticí rovnice (15).

$(e^{At})' = A\,e^{At}$, $\det e^{At}$ stačí v jednom bodě: $\det e^{At}\big|_{t=0} = \det I = 1 \neq 0$

Naším cílem je popsat strukturu matice $e^{At}$, popř. jiné fundamentální matice $e^{At} \cdot C$.

Z lineární algebry je známo, že existuje regulární čtvercová matice řádu $n$, označme ji $P$, taková, že $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$, kde $J$ je takzvaný jordanův kanonický tvar matice $A$. Tento je blokově diagonální maticí tvaru

$$J = \begin{pmatrix} J_{01} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & J_{0q} & & & \\ & & & J_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & J_s \end{pmatrix},$$

kde $J_{01}, \dots, J_{0q}$ jsou jednoprvkové matice a $J_1, \dots, J_s$ jsou matice typu

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & \\ 0 & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

$J_{01}, \dots, J_{0q}$ a $J_1, \dots, J_s$ jsou tzv. Jordanovy bloky a čísla $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_s$ jsou vlastní čísla matice $A$ (tj. řešení charakteristické rovnice $\det(A - \lambda I) = 0$, která nemusí být navzájem různá). Označme

$$J_0 = \begin{pmatrix} J_{01} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{0q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_q \end{pmatrix}.$$

Nechť $n_j$ značí řád matice $J_j$ pro $j = 0, \dots, s$ $(n_0 = q)$.

## Definice 8

- *Řetězcem* příslušným k vlastnímu číslu $\lambda_j$, kde $q < j \leq q + s$, rozumíme konečnou posloupnost sloupcových vektorů tvořenou $\left(\sum_{k=0}^{j-q-1} n_k + 1\right)$-tým sloupcem matice $P$ až $\left(\sum_{k=0}^{j-q} n_k\right)$-tým sloupcem matice $P$.
- Řetězcem příslušným vlastnímu číslu $\lambda_j$, $1 \leq j \leq q$, rozumíme posloupnost tvořenou jediným, a to $j$-tým sloupcem matice $P$.
- *Délkou řetězce* rozumíme počet sloupcových vektorů, jimiž je tento řetězec tvořen.

Ke každému vlastnímu číslu $\lambda$ matice $A$ existuje aspoň jeden řetězec příslušný číslu $\lambda$ (může jich být více než jeden). Součet délek všech řetězců příslušných k vlastnímu číslu $\lambda$ matice $A$ je zřejmě roven násobnosti vlastního čísla $\lambda$.

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= e^{PJP^{-1}t} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(PJP^{-1}\right)^{j} \cdot t^{j} \\
&= \left| PJ\, \underbrace{P^{-1} \cdot P}\, J\, \underbrace{P^{-1}} \cdots \underbrace{\cdot P}\, JP^{-1} \right| \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} PJ^{j}P^{-1} \cdot t^{j} = P \cdot \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} J^{j} t^{j} \right) \cdot P^{-1} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1}
\end{aligned}
$$

Budeme zkoumat nejprve strukturu matice $e^{Jt}$ (je jednodušší)

$$e^{Jt} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} J^j t^j = \begin{pmatrix} e^{J_0 t} & & & \\ & e^{J_1 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{J_s t} \end{pmatrix},$$

$$J^j t^j = \begin{pmatrix} J_0^j t^j & & & \\ & J_1^j t^j & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s^j t^j \end{pmatrix}$$

$$e^{J_0 t} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} J_0^j t^j = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_q t} \end{pmatrix}, J_0^j t^j = \begin{pmatrix} \lambda_1^j t^j & & & \\ & \lambda_2^j t^j & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_q^j t^j \end{pmatrix}$$

$e^{J_j t}$: $j \in \{1, \dots, s\}$, $J_j = \lambda_{q+j} I_j + M_j$, $I_j, M_j$ jsou matice řádu $n_j$, $I$ je jednotková matice a $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$

$e^{J_j t} = e^{(\lambda_{q+j} I_j + M_j)t} = e^{\lambda_{q+j} I_j t} \cdot e^{M_j t} = e^{\lambda_{q+j} t} \cdot I \cdot e^{M_j t} = e^{\lambda_{q+j} t} \cdot e^{M_j t}$
$e^{M_j t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} M_j^k t^k$

$$M_j^0 t^0 = I,\, M_j^1 t^1 = \begin{pmatrix} 0 & t & & & \\ & 0 & t & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & t \\ & & & & 0 \end{pmatrix},\, M_j^2 t^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t^2 & & \\ & 0 & 0 & t^2 & \\ & & \ddots & \ddots & t^2 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$\dots, M_j^{n_j-1} t^{n_j-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & t^{n_j-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$M_j^k t^k = O$ pro $k = n_j, n_j + 1, \dots$

$$\mathrm{e}^{M_j t} = \sum_{k=0}^{n_j-1} \frac{1}{k!} M_j^k t^k = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \cdots & \frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & & \\ 0 & 0 & 1 & t & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & t \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Protože matice $P$ je regulární, je matice $\mathrm{e}^{At} \cdot P = P \cdot \mathrm{e}^{Jt}$ fundamentální matice rovnice (15). Označme $y^{[1]}, \dots, y^{[n]}$ sloupce maticové funkce $\mathrm{e}^{At} \cdot P$ a $h^{[1]}, \dots, h^{[n]}$ sloupce matice $P$. Potom

$$
\begin{aligned}
y^{[1]} &= \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\, h^{[1]} \\
y^{[2]} &= \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\, h^{[2]} \\
&\vdots \\
y^{[q]} &= \mathrm{e}^{\lambda_q t}\, h^{[q]} \\
y^{[q+1]} &= \mathrm{e}^{\lambda_{q+1} t}\, h^{[q+1]} \\
y^{[q+2]} &= \mathrm{e}^{\lambda_{q+1} t} \left( h^{[q+1]} \frac{t}{1!} + h^{[q+2]} \right) \\
&\vdots \\
y^{[q+n_1]} &= \mathrm{e}^{\lambda_{q+1} t} \left( h^{[q+1]} \frac{t^{n_1-1}}{(n_1-1)!} + \cdots + h^{[q+n_1-1]} \frac{t}{1!} + h^{[q+n_1]} \right) \\
y^{[q+n_1+\cdots+n_{s-1}+1]} &= \mathrm{e}^{\lambda_{q+s} t}\, h^{[q+n_1+\cdots+n_{s-1}+1]} \\
y^{[q+n_1+\cdots+n_{s-1}+2]} &= \mathrm{e}^{\lambda_{q+s} t} \left( h^{[q+n_1+\cdots+n_{s-1}+1]} \frac{t}{1!} + h^{[q+n_1+\cdots+n_{s-1}+2]} \right) \\
y^{[n]} &= \mathrm{e}^{\lambda_{q+s} t} \left( h^{[q+n_1+\cdots+n_{s-1}+1]} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + h^{[n-1]} \frac{t}{1!} + h^{[n]} \right)
\end{aligned}
$$

Matice $e^{At}P$ nemusí být reálná, přestože matice $A$ je reálná (vlastní čísla matice nejsou nutně reálná). Výše uvedený systém je fundamentální systém řešení rovnice (15).

## Poznámka

Je-li $A$ reálná konstantní matice, pak s každým blokem $J_m$ příslušným nereálnému vlastnímu číslu $\lambda_j$ obsahuje matice $J$ blok téhož typu příslušný vlastnímu číslu $\overline{\lambda_j}$. Navíc je z algebry známo, že o matici $P$ lze předpokládat, že řetězce příslušné vlastním číslům jsou reálné a že s každým řetězcem příslušným nereálnému vlastnímu číslu $\lambda_j$ obsahuje matice $P$ i řetězec komplexně sdružený příslušný k vlastnímu číslu $\overline{\lambda_j}$.
S každým nereálným řešením $y$, pak výše uvedená soustava obsahuje i řešení komplexně sdružené $\overline{y}$.
$h^{[1]}$ je řetězec příslušný k $\lambda_1$, ..., $h^{[q]}$ je řetězec příslušný k $\lambda_q$;
$h^{[q+1]}, \dots, h^{[q+n_1]}$ jsou řetězce příslušné k vlastnímu číslu $\lambda_{q+1}$, ...,
$h^{[q+n_1+\cdots+n_{s-1}+1]}, \dots, h^{[n]}$ jsou řetězce příslušné k vlastnímu číslu $\lambda_{q+s}$ .

## Poznámka

- Buď $(*)$ libovolný fundamentální systém řešení rovnice (15), který s každým nereálným řešením obsahuje i řešení komplexně sdružené. Nahradíme-li každou dvojici nereálných komplexně sdružených řešení $y$ a $\overline{y}$ v $(*)$ dvojicí $\frac{1}{2}(y+\overline{y})$ a $\frac{1}{2i}(y-\overline{y})$, bude tato nová soustava tvořit systém reálných řešení.
- Prvky libovolné fundamentální matice $Y(t)$ rovnice (15) jsou tvaru $y(t)=\sum_{k=1}^{m} p_k(t)\,\mathrm{e}^{\lambda_k t}$, kde $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ jsou všechna navzájem různá vlastní čísla matice $A$ a $p_k(t)$ jsou polynomy stupně menšího než je násobnost $\lambda_k$.

## Poznámka

V případě reálné matice $A$ jsou prvky libovolné reálné fundamentální matice $Y(t)$ tvaru
$y(t) = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\lambda_k t} \left(P_k(t) \cos(\mathrm{Im}\lambda_k t) + Q_k(t) \sin(\mathrm{Im}\lambda_k t)\right)$, kde
$P_k(t), Q_k(t)$ jsou reálné polynomy stupně menšího než je násobnost vlastního čísla $\lambda_k$.

$$y^{[1]} = \mathrm{e}^{(\mathrm{Re}\lambda_1 + i\mathrm{Im}\lambda_1)t} \cdot (h_1 + h_2) = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\lambda_1 t} \cdot \mathrm{e}^{i\mathrm{Im}\lambda_1 t} \cdot (h_1 + h_2) =$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{Re}\lambda_1 t} (\cos(\mathrm{Im}\lambda_1 t) + i \sin(\mathrm{Im}\lambda_1 t)) \cdot (h_1 + h_2) =$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{Re}\lambda_1 t} [h_1 \cos(\mathrm{Im}\lambda_1 t) - h_2 \sin(\mathrm{Im}\lambda_1 t) + h_1 \sin(\mathrm{Im}\lambda_1 t) - h_2 \cos(\mathrm{Im}\lambda_1 t)]$$