Diferenciální počet funkcí více proměnných

Petr Hasil

Přednáška z Matematické analýzy

Obsah

Definice 1

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$, kde $n \in \mathbb{N}$, $M \neq \emptyset$. Zobrazení $f\colon M \to \mathbb{R}$ se nazývá (reálná) *funkce n* (reálných) *proměnných* a množina M je její definiční obor.

Příklad 1

- $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
- $f(x,y) = \ln(1-x^2-y^2)$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$, $f\colon M \to \mathbb{R}$
- $f(x,y,z) = x \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{z}$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : z \neq 0\}$, $f\colon M \to \mathbb{R}$
- $f(x_1,\dots,x_n) = x_1 \cdot x_2^2 \cdots x_n^n$, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Poznámka

- $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n} = \{x = [x_1,\dots,x_n]; x_i \in \mathbb{R}, i = 1,\dots,n\}$
- $x_n \xrightarrow{\rho_1} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\rho_2} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\rho_\infty} x \Leftrightarrow x_n$ konverguje k x po souřadnicích

Definice 2

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n, f\colon M \to \mathbb{R}$, pak se množina

$$Gr(f) = \{[x_1,\dots,x_n,y] \in \mathbb{R}^{n+1}; [x_1,\dots,x_n] \in M, y = f(x_1,\dots,x_n)\}$$

nazývá *graf* funkce f.

Definice 3

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n, f\colon M \to \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$, pak se množina

$$f_c = \{[x_1,\dots,x_n] \in M; f(x_1\dots,x_n) = c\}$$

nazývá *vrstevnice* funkce f (na úrovni c).

Definice 4

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2$, $f\colon M \to \mathbb{R}$, pak

- řez funkce f (souřadnou) rovinou $\rho_{xy} = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$ je množina
$$f_{\rho_{xy}} = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; f(x,y) = 0\right\},$$
- řez funkce f (souřadnou) rovinou $\rho_{xz} = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; y = 0\}$ je množina
$$f_{\rho_{xz}} = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; f(x,0) = z\right\},$$
- řez funkce f (souřadnou) rovinou $\rho_{yz} = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x = 0\}$ je množina
$$f_{\rho_{yz}} = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; f(0,y) = z\right\}.$$

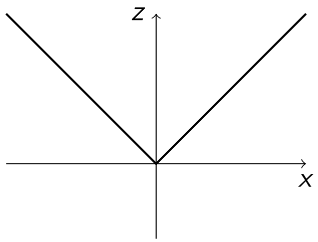
Poznámka

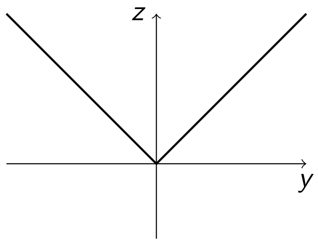
- Nechť $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, pak $f_{\rho_{xy}} = f_0$ (řez rovniou ρ_{xy} je shodný s vrstevnicí na úrovni 0).
- Samozřejmě lze stejným způsobem definovat řez libovolnou rovinou.
- Pro funkce více než dvou proměnných lze podobně zavést definici řezu (souřadnými) nadrovinami apod.

Příklad 2

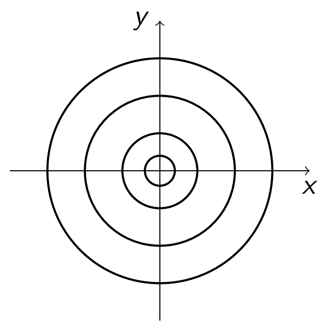
Načrtněte graf funkce
$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Nejprve si načrtneme řezy souřadnými rovinami a vrstevnice. Dostáváme $f_{\rho_{xz}} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = \sqrt{x^2} = |x|$ a $f_{\rho_{yz}} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow z = \sqrt{y^2} = |y|$, tedy řezy jsou

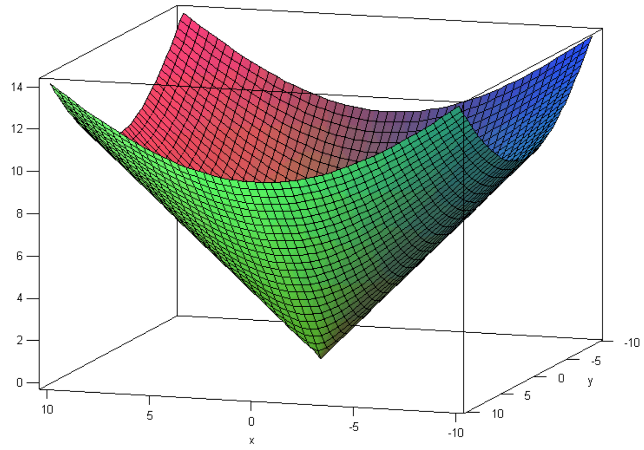




Vrstevnice jsou množiny $f_c = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; f(x,y) = c\}$ tedy pokládáme $z = c \Rightarrow c = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow x^2+y^2 = c^2$, tj. pro $c < 0$ je $f_c = \emptyset$ a pro $c \geq 0$ se jedná o kružnice se středem v počátku a poloměrem c,



Celkem jsme zjistili, že grafem funkce $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ je rotační kužel postavený na špičce v počátku.



$\blacksquare$

Definice 5

Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $x^* \in (\mathbb{R}^*)^n$ je hromadný bod definičního oboru f. Řekneme, že funkce f má v bodě $x^* \in (\mathbb{R}^*)^n$ *limitu* $L \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x^*,\delta) \setminus \{x^*\}$ platí $|f(x)-L| < \varepsilon$.

Tj. pro $x^* = [x_1^*,\dots,x_n^*]$ máme $\lim_{x\to x^*} f(x) = L \iff$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x = [x_1,\dots,x_n] \neq x^* :$$
$$|x_i - x_i^*| < \delta\ (i = 1,\dots,n) \ \Rightarrow\ f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon).$$

Definice 6

Nevlastní limitu definujeme jako

$$\lim_{x\to x^*} f(x) = \infty[-\infty] \iff$$
$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists\delta > 0\ \forall x \in \mathcal{O}(x^*,\delta) \setminus \{x^*\} : f(x) > A\ [f(x) < A].$$

Příklad 3

- $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[1,2]} (x^2+y^3) = 1+8 = 9$
- $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{(x^2+y^2)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{x^2+y^2+1-1}$
  $\displaystyle = \lim_{[x,y]\to[0,0]} \sqrt{x^2+y^2+1}+1 = 2$
- $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{1}{x^2+y^2} = \infty$

Poznámka

Značení se různí

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y).$$

Příklad 4

- $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{xy}{x^2+y^2} = |y = kx| = \lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2(1+k^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{k}{1+k^2}$
  limita neexistuje, protože závisí na směrnici přímky, po níž se blížíme k bodu $[0,0]$.
- $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = |y = kx| = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot kx}{x^4+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx}{x^2+k^2} = 0,$
  ale pro paraboly máme
  $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = |y = kx^2| = \lim_{x\to 0} \frac{kx^4}{x^4+k^2x^4} = \frac{k}{1+k}$
  a limita proto neexistuje.

Dvojná a dvojnásobna limita

Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných. Pak limita ve smyslu Definice 5 se nazývá *dvojná*. Limitní proces také můžeme aplikovat postupně. Limity

$$L_{xy} = \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right) \quad \text{a} \quad L_{yx} = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right)$$

se nazývají *dvojnásobné* (popř. postupné). Potom pro L_{xy}, L_{yx} a $L := \lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y)$ platí:

(i) existují-li limity L_{xy} a L_{yx} takové, že $L_{xy} = L_{yx}$, pak limita L *nemusí* existovat;

(ii) existuje-li limita L (i nevlastní), pak L_{xy} a L_{yx} *nemusí* existovat;

(iii) existuje-li L a některá z limit L_{xy} nebo L_{yx}, pak se obě *rovnají*;

(iv) existují-li limity L_{xy}, L_{yx} a L, pak $L_{xy} = L_{yx} = L$;

(v) existují-li limity L_{xy} a L_{yx} takové, že $L_{xy} \neq L_{yx}$, pak limita L neexistuje.

Výpočet limity L pomocí postupných limit L_{xy}, L_{yx} je výhodné zejména tehdy, je-li předem známa existence L. Na druhou stranu část (v) udává další nutnou podmínku pro existenci limity L (pro neexistenci limity L stačí ukázat $L_{xy} \neq L_{yx}$).

Poznámka

Pro funkce více proměnných nemáme k dispozici l'Hospitalovo pravidlo.

Věta 1 (Transformace do polárních souřadnic)

Limita $\lim\limits_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y)$ *je rovna* L*, jestliže existuje funkce* $g\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ *jedné proměnné s vlastností* $\lim_{r\to 0^+} g(r) = 0$ *tak, že existuje* $r_0 > 0$ *takové, že pro každé* $r \in (0, r_0)$ *platí*

$$|f(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi) - L| < g(r) \qquad \forall\varphi \in [0, 2\pi).$$

Příklad 5

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\varphi)^3 + (r\sin\varphi)^3}{(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2}$$
$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}{r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = \lim_{r\to 0} r\,\underbrace{(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}_{\text{ohraničená funkce}} = 0$$

Důkaz.

Přímo z definice limity $\lim_{r\to 0^+} g(r) = 0$ znamená, že $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : r \in (0,\delta) \ \Rightarrow\ g(r) < \varepsilon$, tedy

$$|f(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi) - L| < g(r) < \varepsilon.$$

Proto body $[x, y]$ z ryzího kruhového δ-okolí bodu $[x_0, y_0]$ platí

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon, \quad \text{tj. dle definice} \quad \lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = L.$$

□

Poznámka

Podobně můžeme při výpočtu limity funkce tří proměnných v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ využít transformaci do *sférických souřadnic*, tj.

$$x = x_0 + \rho \cos\varphi \sin\vartheta, \quad y = y_0 + \rho \sin\varphi \sin\vartheta, \quad z = z_0 + \rho \cos\vartheta,$$

kde

- $\rho \geq 0$ je vzdálenost bodů $[x_0, y_0, z_0]$ a $[x, y, z]$ (tzv. *sférický poloměr*),
- $\varphi \in [0, 2\pi)$ je úhel, který svírá průmět průvodiče (spojnice bodů) do podstavné roviny xy s kladným směrem osy x (tzv. *azimutální úhel*),
- $\vartheta \in [0, \pi]$ je úhel, který svírá průvodič s kladným směrem osy z (tzv. *sférický úhel*).

Pokud je hodnota limity závislá na hodnotě úhlu φ nebo ϑ, tak limita funkce neexistuje. Opačné tvrzení lze opět naformulovat jako větu.

Věta 2

Je-li $L \in \mathbb{R}$ a existuje-li nezáporná funkce g taková, že $\lim_{\rho\to 0^+} g(\rho) = 0$ a

$$|f(x_0 + \rho\cos\varphi\sin\vartheta, y_0 + \rho\sin\varphi\sin\vartheta, z_0 + \rho\cos\vartheta) - L| \leq g(\rho)$$

pro každé ρ z nějakého pravého ryzího okolí bodu 0 a každé $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\vartheta \in [0, \pi]$, pak platí

$$\lim_{[x,y,z]\to[x_0,y_0,z_0]} f(x, y) = L.$$

Poznámka

- $\lim\limits_{[x,y]\to[x_0,\infty]} f(x, y) = L \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow$

$$\forall \mathcal{O}(L, \varepsilon)\ \exists \delta > 0, A \in \mathbb{R} :\ \forall [x, y] \in \mathbb{R}^2, |x - x_0| < \delta, y > A :$$
$$f(x, y) \in \mathcal{O}(L, \varepsilon) \quad (\Leftrightarrow |f(x, y) - L| < \varepsilon)$$

- $\lim\limits_{[x,y]\to[-\infty,\infty]} f(x, y) = \infty \quad \Leftrightarrow$

$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists B, C \in \mathbb{R} :\ \forall x < B,\ \forall y > C :\ f(x, y) > A$$

- apod.

Definice 7

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, M \subseteq \mathbb{R}^n, x^* \in \overline{M}$. Potom $\lim_{\substack{x\to x^* \\ x\in M}} f(x) = L$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in (\mathcal{O}(x^*, \delta) \setminus \{x^*\}) \cap M :\ f(x) \in \mathcal{O}(L, \varepsilon).$$

Příklad 6

Z teorie funkcí jedné proměnné známe jednostranné limity

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in[x_0,\infty)}} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

Definice 8

Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x^* \in \mathbb{R}^n$.

- Řekneme, že funkce f je *spojitá v bodě x^**, jestliže
$$\lim_{x\to x^*} f(x) = f(x^*).$$
- Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Řekneme, že funkce f je *spojitá na M*, je-li spojitá v každém bodě množiny M.
- Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ není otevřená, pak řekneme, že funkce f je spojitá v bodě x^*, jestliže $\lim_{\substack{x\to x^*\\ x\in M}} f(x) = f(x^*)$.

Poznámka

Vzhledem k rovnosti $\lim_{\substack{x\to x^*\\ x\in M}} f(x) = \lim_{x\to x^*} f(x)$ pro vnitřní body x^* množiny M, tedy můžeme definovat, že funkce f je spojitá na $M \subseteq \mathbb{R}^n$, jestliže pro každé $x^* \in M$ platí $\lim_{\substack{x\to x^*\\ x\in M}} f(x) = f(x^*)$.

Pro funkce více proměnných platí analogie většiny základních vět o limitách (spojitosti) jako u funkce jedné proměnné, které lze odvodit (dokázat) přímo z definic.

Věta 3

Nechť $\lim_{x\to x^*} f(x) = L_1, \lim_{x\to x^*} g(x) = L_2, L_1, L_2 \in \mathbb{R}$, potom

- $\lim_{x\to x^*}(f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$,
- $\lim_{x\to x^*}(f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2$,
- $\lim_{x\to x^*} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, *pokud* $L_2 \neq 0$.

Věta 4

$\lim_{x\to x^*} f(x) = 0$ *a existuje* $\mathcal{O}(x^*, \delta) \setminus \{x^*\}$, *v němž je funkce* g *ohraničená, pak* $\lim_{x\to x^*}(f(x) \cdot g(x)) = 0$.

Věta 5 (Věta o třech limitách)

Nechť pro funkce $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ platí $h(x) \le f(x) \le g(x)$ v nějakém ryzím okolí bodu $x^* \in \mathbb{R}^n$ a současně
$$\lim_{x\to x^*} h(x) = \lim_{x\to x^*} g(x) = L.$$
Potom také
$$\lim_{x\to x^*} f(x) = L.$$

Věta 6 (O limitě složeného zobrazení I)

Nechť pro funkci $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ platí $\lim_{x\to x^*} g(x) = L$ a nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě L. Potom
$$\lim_{x\to x^*} f(g(x)) = f(L).$$

Věta 7 (O limitě složeného zobrazení II)

Nechť funkce $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je definována v nějakém ryzím okolí bodu x^*, přičemž $\lim_{x\to x^*} g(x) = L$ a $g(x) \neq L$ pro x z nějakého ryzího okolí bodu x^*. Jestliže funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována v nějakém ryzím okolí bodu L a platí $\lim_{x\to L} f(x) = M$, potom
$$\lim_{x\to x^*} f(g(x)) = M.$$

Věta 8 (Weierstrass)

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktní (tj. uzavřená a ohraničená) množina a $f: M \to \mathbb{R}$ je spojitá na M. Pak

a) *f je na M ohraničená, tedy $f(M) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x), x \in M\}$ je ohraničená množina v $\mathbb{R}$, tj. $\exists K > 0 : |f(x)| < K\ \forall x \in M$.*

b) *Je-li*

$$m_1 = \sup_{x \in M} f(x), \qquad m_2 = \inf_{x \in M} f(x),$$

pak existují $x_1, x_2 \in M$ takové, že $f(x_1) = m_1, f(x_2) = m_2$, tj. f nabývá na M své největší a nejmenší hodnoty.

Důkaz.

Stejný jako pro $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ v diferenciálním počtu funkcí jedné proměnné.

a) Sporem předpokládejme, že f není shora ohraničená (zdola analogicky), tj. $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in M : f(x_n) \geq n$. Množina M je kompaktní, tedy existuje vybraná podposloupnost $x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} x \in M$. Ze spojitosti f na M plyne $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x) < \infty$. Současně však $f(x_{n_k}) \geq n_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$, což je spor, a tedy f je shora ohraničená na M.

b) Podobnou modifikací využitím kompaktnosti M.

□

Definice 9

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina (v libovolné metrice). Řekneme, že tato množina je *souvislá*, pokud pro všechna $x, y \in M$ existuje konečná posloupnost bodů $x = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = y, x_i \in M$, taková, že lomená čára s vrcholy v bodech $x_0, \dots, x_n$ je celá v M.

Věta 9 (Bolzano)

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená, souvislá množina a $f: M \to \mathbb{R}$ je spojitá na M,

a) *jsou-li $x_1, x_2 \in M$ takové, že $f(x_1) \cdot f(x_2) \leq 0$, pak existuje $c \in M : f(c) = 0$,*

b) *jsou-li $x_1, x_2 \in M$ libovolné a $f(x_1) < f(x_2)$, pak pro libovolné $d \in (f(x_1), f(x_2))$ existuje $c \in M : f(c) = d$.*

Idea důkazu

a) Existují body $y_1, \dots, y_n \in M$ takové, že lomená čára s vrcholy $y_1, \dots, y_n$ spojuje body x_1 a x_2 a leží v M. Pro alespoň jednu úsečku platí, že v jejích krajních bodech nabývá funkce f hodnot s opačnými znaménky. Pokračujeme metodou půlení intervalů, pokud jsme se už některým y_i netrefili do nuly.

b) $g(x) := f(x) - d, g(x_1) > 0, g(x_2) < 0, \exists c \in M: g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = d$

Definice 10

Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*]$. Jestliže existuje limita

$$\lim_{x_i \to x_i^*} \frac{f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) - f(x_1^*, \dots, x_n^*)}{x_i - x_i^*}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^* + h, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) - f(x_1^*, \dots, x_n^*)}{h}$$

řekneme, že funkce f má v bodě x^* *parciální derivaci* podle i-té proměnné x_i s hodnotou této limity.
Tuto derivaci značíme

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*) = \frac{\partial f(x_1^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_i} = f'_{x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*) = f_{x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*).$$

Poznámka

Derivace vyšších řádů zavádíme tak, že uvažujeme o parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ jako o funkci, kterou derivujeme. Samozřejmě tato funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ musí existovat.

U funkce dvou proměnných $f(x, y)$ pak mluvíme např. o parciálních derivacích druhého řádu podle x

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (f_x)_x = f_{xx},$$

nebo o smíšených derivacích $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} = (f_x)_y$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx} = (f_y)_x$.

Poznámka

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = f_x(x, y) = f'_x(x, y)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} = f_y(x, y) = f'_y(x, y)$

Příklad 7

$$f(x, y) = \mathrm{e}^x \cdot y^2 \cdot \sin(xy)$$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y^2(\mathrm{e}^x \sin xy + \mathrm{e}^x \cos xy \cdot y) = y^2\, \mathrm{e}^x(\sin xy + y \cos xy)$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \mathrm{e}^x(2y \cdot \sin xy + y^2 \cdot \cos xy \cdot x) = \mathrm{e}^x\, y(2 \sin xy + xy \cos xy)$

Příklad 8

Vypočtěte parciální derivace druhého řádu funkce

$$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

$$f'_x = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad f''_{xx} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f''_{xy} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$
$$f'_y = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad f''_{yy} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f''_{yx} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Poznámka (Geometrický význam parciální derivace)

Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ je směrnice křivky, která vznikne řezem grafu funkce rovinou $y = y^*$. V n-rozměrném prostoru„řežeme“ nadrovinou.

Poznámka

Pro funkce jedné proměnné plyne z existence derivace řada pěkných vlastností, např. spojitost, diferencovatelnost (lze sestrojit tečnu). Pro funkce více proměnných z existence parciálních derivací téměř nic pěkného neplyne, zejména z existence parciální derivace neplyne spojitost.

Příklad 9

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} 1 & x = 0 \vee y = 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

(Vytrhneme osový kříž a posuneme ho o jedna nad rovinu xy.)

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, ale funkce f není spojitá v bodě $[0,0]$.

Parciální derivace popisují vlastnosti pouze ve směrech os x a y.

Definice 11

Uvažujme funkci $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, bod $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*]$ a nenulový vektor $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ o velikosti $\|v\|$.
Řekneme, že funkce f má v bodě x^* *směrovou derivaci* ve směru vektoru v, jestliže existuje limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_1^* + v_1 h, \dots, x_n^* + v_n h) - f(x_1^*, \dots, x_n^*)}{h\|v\|} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x^* + vh) - f(x^*)}{h\|v\|} =: \frac{\partial f}{\partial v}(x^*) = f'(x^*, v).$$

Poznámka

Parciální derivace je speciálním případem směrové derivace s vektory $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f'([x,y], e_1), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f'([x,y], e_2).$$

Poznámka

Abychom zjistili rychlost růstu ve směru daném vektorem v, je nutné uvažovat pouze jeho směr a zbavit se ovlivnění jeho velikostí, proto v definici dělíme $\|v\|$. Samozřejmě je možné vektor v nejprve normovat, tedy nahradit vektorem $\tilde{v} = \frac{v}{\|v\|}$.

Poznámka

Z existence směrových derivací $f'(x^*, v)$ v bodě x^* ve směru libovolného vektoru $v \in \mathbb{R}^n$ neplyne spojitost v bodě x^*. Stále se k bodu x^* blížíme jen po přímkách, což nemusí stačit. Např. pro funkci

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 y^2}{x^8 + y^4} & [x,y] \neq [0,0] \\ 0 & [x,y] = [0,0] \end{cases}$$

lze přímým výpočtem ukázat, že $f'([0,0], v) = 0 \; \forall v \in \mathbb{R}^2$, ale limita $\lim_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y)$ neexistuje, tedy f není spojitá v bodě $[0,0]$.

Věta 10 (Schwarzova věta)

Nechť funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_0, y_0]$ spojité smíšené parciální derivace f_{xy}, f_{yx}. Pak platí

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Důkaz.

Je spíše technický, viz skripta. □

Dalším použitím Schwarzovi věty (tedy indukcí) lze vidět, že za příslušných podmínek platí např.

$$f_{xyzxyzx}(x, y, z) = f_{xxxyyzz}(x, y, z) = f_{zzyyxxx}(x, y, z).$$

(Nezáleží na pořadí, jen na počtu.)

Poznámka

- Pro $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ platí $f_{x_i x_j}(x^*) = f_{x_j x_i}(x^*)$ za předpokladu spojitosti příslušných derivací.
- Indukcí, za předpokladu spojitosti příslušných derivací, lze ukázat, že pro $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ platí $f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$, $f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$ atd.

Poznámka

Lagrangeova věta pro funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitou na $[a, b]$ a mající derivaci na (a, b) zaručovala existenci $c \in (a, b)$ takového, že

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Lze uvažovat obdobu pro $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ např. použitím vektoru $u = (u_1, u_2) = [x_1, y_1] - [x_0, y_0]$?

$$f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = \cdots ?$$

Věta 11

Nechť má funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v každém bodě úsečky spojující body $[x_0, y_0]$ a $[x_1, y_1]$ směrovou derivaci ve směru vektoru

$$u = (u_1, u_2) = [x_1, y_1] - [x_0, y_0].$$

Pak existuje $\theta \in (0, 1)$ takové, že

$$f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = f'([x_0 + \theta u_1, y_0 + \theta u_2], u).$$

Důkaz.

Zavedeme $F(t) = f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2)$, tedy
$F(1) = f(x_0 + u_1, y_0 + u_2) = f(x_1, y_1)$, $F(0) = f(x_0, y_0)$.
Podle Lagrangeovy věty pro funkci jedné proměnné dostáváme
$F(1) - F(0) = F'(\theta) \cdot (1 - 0)$, kde $\theta \in (0, 1)$ a
$F'(\theta) = f'([x_0 + \theta u_1, y_0 + \theta u_2], u)$. □

Použitím (jednorozměrné) Lagrangeovy věty o střední hodnotě na funkce $F(y) = f(x_1, y)$ a $G(x) = f(x, y_0)$ dostaneme

$$f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = \underbrace{f(x_1, y_1) - f(x_1, y_0)} + \underbrace{f(x_1, y_0) - f(x_0, y_0)}$$
$$= \underbrace{f_y(x_1, y_0 + \theta_1(y_1 - y_0)) \cdot (y_1 - y_0)} + \underbrace{f_x(x_0 + \theta_2(x_1 - x_0), y_0) \cdot (x_1 - x_0)}.$$

Věta 12

Nechť $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má parciální derivace f_x, f_y v nějakém obdélníku $M \subseteq \mathbb{R}^2$ a nechť $[x_0, y_0], [x_1, y_1] \in M$. Pak existují čísla $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$ taková, že

$$f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) =$$
$$= f_x(x_0 + \theta_1(x_1 - x_0), y_0) \cdot (x_1 - x_0) + f_y(x_1, y_0 + \theta_2(y_1 - y_0)) \cdot (y_1 - y_0).$$

Analogicky pro $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Věta 13 (Lagrangeova věta o střední hodnotě)

Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má parciální derivace f_{x_i}, $i = 1, \dots, n$, v nějakém n-rozměrném kvádru $M \subseteq \mathbb{R}^n$ a nechť $\mathrm{x} = [x_1, \dots, x_n], \mathrm{y} = [y_1, \dots, y_n] \in M$. Pak existují body $\mathrm{z}^{[1]}, \dots, \mathrm{z}^{[n]}$ ležící na hranách n-rozměrného kvádru daného body x, y takové, že

$$f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{y}) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathrm{z}^{[i]}) \cdot (x_i - y_i).$$

Poznámka

Diferenciál pro $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je člen $A \cdot h$ ze vztahu $f(x_0 + h) - f(x_0) = A \cdot h + \tau(h)$, kde $A \in \mathbb{R}$, $\lim_{h\to 0} \frac{\tau(h)}{h} = 0$. Pro diferencovatelné funkce máme $A = f'(x_0)$.
Podmínku diferencovatelnosti lze psát jako (existenci $A \in \mathbb{R}$ splňujícího)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{h} = 0.$$

Definice 12

Řekneme, že funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definovaná na nějakém okolí bodu $[x_0, y_0]$, je *diferencovatelná* v bodě $[x_0, y_0]$, jestliže existují $A, B \in \mathbb{R}$ taková, že platí

$$\lim_{[h_1,h_2]\to[0,0]} \frac{f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) - (Ah_1 + Bh_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0,$$

což je ekvivalentní existenci funkce $\tau\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takové, že

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) = (Ah_1 + Bh_2) + \tau(h_1, h_2),$$

přičemž

$$\lim_{[h_1,h_2]\to[0,0]} \frac{\tau(h_1, h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0.$$

Poznámka (Geometrický význam diferencovatelnosti – tečná rovina)

Rovnice roviny procházející bodem $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ je

$$z = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0).$$

Označme $[x, y] := [x_0 + h_1, y_0 + h_2] \;\Rightarrow\; h_1 = x - x_0, h_2 = y - y_0$.
Pak místo $f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) = Ah_1 + Bh_2 + \tau(h_1, h_2)$ píšeme

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + \tau(x - x_0, y - y_0),$$

tedy

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + \tau(x - x_0, y - y_0),$$

což je rovnice roviny procházející bodem $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ plus „chyba“ τ (τ je rozdíl mezi přírůstkem na tečné rovině a přírůstkem funkce).
Jedná se o lineární aproximaci tečnou rovinou.

Definice 13

Je-li funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$, výraz $Ah_1 + Bh_2$ se nazývá *diferenciál* funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ a značí se $\mathrm{d}f(x_0, y_0)(h_1, h_2)$, tedy $\mathrm{d}f(x_0, y_0)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a je lineární.

Věta 14

Je-li funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v bodě $[x_0, y_0]$ diferencovatelná, pak je v tomto bodě spojitá.

Důkaz.

$\lim\limits_{[x,y]\to[x_0,y_0]} [f(x,y) - f(x_0,y_0)] = L$ a potřebujeme dokázat, že $L = 0$.
Z definice diferencovatelnosti plyne

$$L = \lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} [A(x - x_0) + B(y - y_0) + \tau(x - x_0, y - y_0)] = 0.$$

Tedy f je spojitá v bodě $[x_0, y_0]$. □

Věta 15

Je-li f diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$, pak v tomto bodě existují obě parciální derivace a platí $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = A$ a $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = B$.

Důkaz.

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h_1, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \left| \begin{array}{l} h_1 = h \\ h_2 = 0 \end{array} \right|$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{A\cdot h + B\cdot 0 + \tau(h,0)}{h} = A + \lim_{h\to 0} \frac{\tau(h,0)}{h} = A$$

Podobně $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = B$ (pro $h_1 = 0, h_2 = h$). □

Věta 16 (Postačující podmínka diferencovatelnosti)

Má-li funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v bodě $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace f_x, f_y, pak je funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ diferencovatelná.

Důkaz.

Je založen na Lagrangeově větě (použijeme i větu 4 a samozřejmě spojitost derivací). Počítejme přímo limitu z definice diferenciálu

$$\lim_{[h_1,h_2]\to[0,0]} \frac{f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) - [f_x(x_0,y_0)h_1 + f_y(x_0,y_0)h_2]}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

$$= \lim_{[h_1,h_2]\to[0,0]} \frac{f_x(x_0 + \theta_1 h_1, y_0)\cdot h_1 + f_y(x_0 + h_1, y_0 + \theta_2 h_2)\cdot h_2 - f_x(x_0,y_0)h_1 - f_y(x_0,y_0)h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

$$= \lim_{[h_1,h_2]\to[0,0]} \left\{ \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} [f_x(x_0 + \theta_1 h_1, y_0) - f_x(x_0,y_0)] + \frac{h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} [f_y(x_0 + h_1, y_0 + \theta_2 h_2) - f_y(x_0,y_0)] \right\} = 0.$$

□

Poznámka

Rovina $z = Ax + By + C$ splňující

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} \frac{f(x,y) - Ax - By - C}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

je tečnou rovinou grafu funkce f v bodě $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$.

Rovina daná rovnicí

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

v případě diferencovatelnosti funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ tento požadavek splňuje, jedná se tedy o *tečnou rovinu* grafu funkce f v bodě $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$.

Věta 17

Nechť f je diferencovatelná v $[x_0, y_0]$ a $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ je libovolný jednotkový vektor. Pak má funkce f v $[x_0, y_0]$ směrovou derivaci ve směru vektoru u a platí $f'([x_0, y_0], u) = f_x(x_0, y_0) \cdot u_1 + f_y(x_0, y_0) \cdot u_2$.

Důkaz.

$f'([x_0, y_0], u) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} [f(x_0 + hu_1, y_0 + hu_2) - f(x_0, y_0)] =$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[\underbrace{f_x(x_0, y_0)}_{A} hu_1 + \underbrace{f_y(x_0, y_0)}_{B} hu_2 + \tau(hu_1, hu_2) \right] = f_x(x_0, y_0)u_1 +$$

$$f_y(x_0, y_0)u_2 + \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\tau(hu_1, hu_2)}{h}}_{\to 0} = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2.$$

□

Poznámka

Vektor prvních derivací nazýváme *gradient*. Je to vektor kolmý na vrstevnice, směřující k větším funkčním hodnotám. Např. pro funkci $f = f(x, y, z)$ je $\operatorname{grad} f = \nabla f = (f_x, f_y, f_z)$. Směrová derivace funkce f ve směru jednotkového vektoru $v = (v_1, v_2, v_3)$ je tedy

$$f'([x, y, z], v) = \langle \nabla f, v \rangle = f_x v_1 + f_y v_2 + f_z v_3.$$

V případě, že vektor jednotkový není, nejprve ho normujeme $\tilde{v} = \frac{v}{\|v\|}$, potom

$$f'([x, y, z], v) = \langle \nabla f, \tilde{v} \rangle = \frac{f_x v_1 + f_y v_2 + f_z v_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}.$$

Poznámka

Funkce $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $x^* \in \mathbb{R}^n$, pokud existuje $a \in \mathbb{R}^n$ takové, že

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{f(x^* + h) - f(x^*) - \langle a, h \rangle}{\|h\|} = 0 \Leftrightarrow f(x^* + h) = f(x^*) + \langle a, h \rangle + \tau(h)$$

a $\lim_{h\to 0} \frac{\tau(h)}{\|h\|} = 0$. Pak $\mathrm{d}f(x^*)(h) = \langle a, h \rangle$, kde $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $a_i = \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i}$. Pro $u \in \mathbb{R}^n$ je $f'(x^*, u) = \langle \nabla f(x^*), u \rangle$.

$f'(x^*, u) = \langle \nabla f(x^*), u \rangle$ lze chápat jako lineární zobrazení $u \mapsto f'(x^*, u)$. Může se stát, že funkce není diferencovatelná a že výše uvedené platí a je lineární (v každém směru existuje směrová derivace a je lineární), tomu se říká *slabý (Gâteauxův) diferenciál*.

Diferenciál zavedený v definicích 12 a 13 se potom nazývá totální (Fréchetův) diferenciál.

Příklad 10

Pomocí diferenciálu vypočtěte přibližně $\sqrt{2{,}98^2+4{,}05^2}$.

$$f(x^*+h)\approx f(x^*)+\mathrm{d}f(x^*)(h)$$

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2},\ [x_0,y_0]=[3,4],\ h_1=-0{,}02,\ h_2=0{,}05$$

$$f_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ f_x(3,4)=\frac{3}{5},\quad f_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ f_y(3,4)=\frac{4}{5}$$

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0)(h_1,h_2)=\frac{3}{5}\cdot(-0{,}02)+\frac{4}{5}\cdot(0{,}05)=\frac{0{,}14}{5}$$

$$\sqrt{2{,}98^2+4{,}05^2}\approx\sqrt{9+16}+\frac{0{,}14}{5}=5+\frac{0{,}28}{10}=5{,}028$$

■

Příklad 11

Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x,y)=x^3+y^3$ v bodě $[1,1,2]$.

$$z-z_0=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2=|\text{pro } [x,y]=[1,1]|=3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=3y^2=|\text{pro } [x,y]=[1,1]|=3$$

tedy $z-2=3(x-1)+3(y-1)\Rightarrow z=3x+3y-4$ ■

Pro $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ máme

$\mathrm{d}f(x_0)(h)=f'(x_0)\cdot h, \mathrm{d}^2f(x_0)(h)=f''(x_0)\cdot h^2,\dots,\mathrm{d}^nf(x_0)(h)=f^{(n)}(x_0)\cdot h^n.$

Taylorův polynom pak lze psát jako

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\mathrm{d}f(x_0)(h)+\frac{\mathrm{d}^2f(x_0)(h)}{2}+\dots+\frac{\mathrm{d}^nf(x_0)(h)}{n!}+\text{ zbytek.}$$

Pro $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, h=(h_1,h_2)$ máme

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0)(h_1,h_2)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)h_2.$$

Diferenciál druhého řádu by tedy mohl vypadat takto

$$Ah_1^2+Bh_1h_2+Ch_2^2.$$

Definice 14

Nechť funkce $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ má v bodě $[x_0,y_0]$ spojité parciální derivace druhého řádu, pak definujeme *druhý diferenciál* (diferenciál druhého řádu) jako

$$\mathrm{d}^2f(x_0,y_0)(h_1,h_2)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\cdot h_1^2+2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\cdot h_1h_2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\cdot h_2^2.$$

Poznámka

$$(h_1,h_2)\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix}}_{f''}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} h_1\\ h_2\end{pmatrix}}_{h}=f_{xx}h_1^2+f_{xy}h_1h_2+f_{yx}h_1h_2+f_{yy}h_2^2$$

$$=f_{xx}h_1^2+2f_{xy}h_1h_2+f_{yy}h_2^2$$

Lze také psát $\mathrm{d}^2f(h_1,h_2)=\langle h,f''h\rangle$.

Definice 15

Nechť funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace do řádu n včetně, pak definujeme *n-tý diferenciál* (diferenciál n-tého řádu) jako

$$\mathrm{d}^n f(x_0, y_0)(h_1, h_2) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}}(x_0, y_0) h_1^i h_2^{n-i}.$$

Poznámka

Protože

$$\mathrm{d}^n f(x_0, y_0)(th_1, th_2) = t^n \,\mathrm{d}^n f(x_0, y_0)(h_1, h_2),$$

je $\mathrm{d}^n f(x_0, y_0)(h_1, h_2)$ homogenní funkce řádu n.

Definice 16

Nechť funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $x^* \in \mathbb{R}^n$ spojité parciální derivace druhého řádu, pak definujeme *druhý diferenciál* (diferenciál druhého řádu) jako $\mathrm{d}^2 f(x^*)(h) = \langle h, f''(x^*)h \rangle$, kde

$$f''(x^*) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(x^*) & \cdots & f_{x_1x_n}(x^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(x^*) & \cdots & f_{x_nx_n}(x^*) \end{pmatrix}.$$

Poznámka

Uvažujme $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, potom

$$\mathrm{d}^3 f(x_0, y_0)(h_1, h_2) =$$
$$= f_{xxx}(x_0, y_0)h_1^3 + 3f_{xxy}(x_0, y_0)h_1^2 h_2 + 3f_{xyy}(x_0, y_0)h_1 h_2^2 + f_{yyy}(x_0, y_0)h_2^3$$

pro spojité parciální derivace.

Diferenciál 1. řádu je vektor, 2. řádu je (symetrická) matice, 3. řádu je „krychlička“ v prostoru, …(tzv. tenzor n-tého řádu).

Poznámka

Nechť exponent v kolečku znamená binomickou větu, kde se místo mocnin f dělají další derivace a h se běžně umocňuje, např. pro $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je
$\mathrm{d}^3 f(x_0, y_0)(h_1, h_2) = (f_x h_1 + f_y h_2)^{③}$ nebo
$\mathrm{d}^n f(x_0, y_0)(h_1, h_2) = (f_x h_1 + f_y h_2)^{ⓝ}$.
Pak také pro $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bude $\mathrm{d}^m f(x^*)(h) = (f_{x_1} h_1 + \cdots + f_{x_n} h_n)^{ⓜ}$.

Připomeňme si koncept primitivní funkce pro funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, což je funkce F taková, že $F' = f$.

Uvažujme funkce $P, Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Existuje funkce $H = H(x, y)$ taková, že

$$H_x = P, \qquad H_y = Q,$$

neboli $\mathrm{d}H = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$?

Věta 18

Nechť $P, Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *mají spojité parciální derivace* P_y, Q_x *a platí*

$$P_y = Q_x.$$

Pak existuje funkce $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *taková, že* $H_x = P, H_y = Q$*, tj.*

$$\mathrm{d}H(x,y) = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Definice 17

Funkce H z věty 18 se nazývá *kmenová funkce* funkcí P a Q.

Důkaz.

Položme

$$H(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)\,\mathrm{d}t.$$

Pak $H_x(x,y) = P(x,y)$ a

$$H_y(x,y) = Q(x_0,y) + \int_{x_0}^{x} P_y(t,y)\,\mathrm{d}t$$

$$= Q(x_0,y) + \int_{x_0}^{x} Q_x(t,y)\,\mathrm{d}t = Q(x_0,y) + Q(x,y) - Q(x_0,y) = Q(x,y).$$

□

Příklad 12

Rozhodněte, zda ke dvojici funkcí

$$P(x,y) = x^2 - y^2, \qquad Q(x,y) = 5 - 2xy$$

existuje kmenová funkce. Pokud existuje, tak ji určete.

Kmenová funkce H existuje, neboť $P_y = -2y = Q_x$.
Protože $H_x = P$, máme

$$H(x,y) = \int P(x,y)\,\mathrm{d}x = \int (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - xy^2 + C(y).$$

Nyní využijeme znalosti $H_y = Q$ k určení $C(y)$, tj.

$$H_y = -2xy + C_y'(y) = Q = 5 - 2xy \;\Rightarrow\; C_y'(y) = 5 \;\Rightarrow\; C(y) = 5y + c,\; c \in \mathbb{R}.$$

Tedy $H(x,y) = \frac{x^3}{3} - xy^2 + 5y + c,\; c \in \mathbb{R}$.
Samozřejmě lze nejdříve využít Q a poté P, tj. $H(x,y) = \int Q(x,y)\,\mathrm{d}y$, kde potom $C = C(x)$. ■

Exaktní diferenciální rovnice

Uvažujme diferenciální rovnici

$$y' = \frac{a(x,y)}{b(x,y)}.$$

Přepsáním na

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a(x,y)}{b(x,y)}, \quad a(x,y)\,\mathrm{d}x - b(x,y)\,\mathrm{d}y = 0, \quad \mathrm{d}H(x,y) = 0$$

vidíme, že pokud platí $a_y(x,y) = -b_x(x,y)$, pak rovnici vyřešíme nalezením příslušné kmenové funkce H. Její řešení je pak dáno implicitně vztahem $H(x,y) = c$ a říkáme, že jde o *exaktní diferenciální rovnici*.

Kmenová funkce tří a více proměnných

Kmenovou funkci zavádíme analogicky i pro funkce více než dvou proměnných. Uvažujme např. $P, Q, R\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a hledejme funkci $H = H(x,y,z)$ splňující

$$\mathrm{d}H = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z, \quad \text{tj.} \quad H_x = P, H_y = Q, H_z = R.$$

Protože $H_{xy} = P_y, H_{yx} = Q_x, H_{zx} = R_x, H_{xz} = P_z, H_{yz} = Q_z, H_{zy} = R_y$, ověříme podmínky ve tvaru

$$P_y = Q_x, P_z = R_x, Q_z = R_y$$

a postupujeme analogicky jako u funkcí dvou proměnných, pouze ve třech krocích místo dvou. První krok např.

$$H(x,y,z) = \int R(x,y,z)\,\mathrm{d}z, \quad \text{kde potom} \quad C = C(x,y).$$

Připomeňme situaci pro $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Věta 19

Nechť funkce f má derivaci v bodě x_0 a funkce g má derivaci v bodě $y_0 = f(x_0)$. Pak složená funkce

$$F(x) = g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x)$$

má derivaci v bodě x_0 a platí, že

$$F'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

Věta 20

Nechť $u, v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mají parciální derivace prvního řádu v $[x_0, y_0]$ a $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $[u_0, v_0] = [u(x_0,y_0), v(x_0,y_0)]$. Pak má funkce $F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ parciální derivace prvního řádu v bodě $[x_0, y_0]$ a platí

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) &= \frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0),\\
\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) &= \frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0).
\end{aligned}$$

Poznámka

Pro $z = z(u,v), u = u(x,y), v = v(x,y)$ lze zkráceně psát např. $z_x = z_u \cdot u_x + z_v \cdot v_x$, nebo $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$.

Důkaz

Důkaz provedeme přímo pomocí definice. Ihned dostaneme

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0} \frac{F(x_0+t, y_0) - F(x_0,y_0)}{t} = \\
&\qquad = \lim_{t\to 0} \frac{f(u(x_0+t,y_0), v(x_0+t,y_0)) - f(u(x_0,y_0), v(x_0,y_0))}{t},
\end{aligned}$$

kde diferencovatelnost f zajistí, že

$$f(u_0+h, v_0+k) - f(u_0,v_0) = Ah + Bk + \tau(h,k), \quad A, B \in \mathbb{R},$$

přitom $A = f_u(u_0,v_0), B = f_v(u_0,v_0)$,

$$\lim_{[h,k]\to[0,0]} \frac{\tau(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}},$$

a $\quad h = u(x_0+t,y_0) - u(x_0,y_0), \quad k = v(x_0+t,y_0) - v(x_0,y_0),$
kde $h, k \to 0 \Leftrightarrow t \to 0$.

V limitě tedy máme

$$\begin{aligned} f(u(x_0+t,y_0),v(x_0+t,y_0)) - f(u_0,v_0) &= \\ = f_u(u_0,v_0)\,[u(x_0+t,y_0)-u_0] &+ f_v(u_0,v_0)\,[v(x_0+t,y_0)-v_0] \\ &+ \tau(u(x_0+t,y_0)-u_0, v(x_0+t,y_0)-v_0) =: G(t). \end{aligned}$$

Dosadíme tedy do limity

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0}\frac{G(t)}{t} &= f_u(u_0,v_0)\cdot u_x(x_0,y_0) + f_v(u_0,v_0)\cdot v_x(x_0,y_0) \\ &\quad + \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\tau\left(u(x_0+t,y_0)-u_0, v(x_0+t,y_0)-v_0\right) \\ &= f_u(u_0,v_0)\cdot u_x(x_0,y_0) + f_v(u_0,v_0)\cdot v_x(x_0,y_0), \end{aligned}$$

kde jsme využili výpočet

$$\lim_{t\to 0}\frac{\tau\left(u(x_0+t,y_0)-u_0, v(x_0+t,y_0)-v_0\right)}{\sqrt{t^2}}\times$$
$$\times\frac{\sqrt{(u(x_0+t,y_0)-u_0)^2+(v(x_0+t,y_0)-v_0)^2}}{\sqrt{(u(x_0+t,y_0)-u_0)^2+(v(x_0+t,y_0)-v_0)^2}}$$

$$= \lim_{t\to 0}\underbrace{\frac{\tau\left(u(x_0+t,y_0)-u_0, v(x_0+t,y_0)-v_0\right)}{\sqrt{(u(x_0+t,y_0)-u_0)^2+(v(x_0+t,y_0)-v_0)^2}}}_{\to 0}\times$$
$$\times\underbrace{\sqrt{\Bigg(\underbrace{\frac{u(x_0+t,y_0)-u_0}{t}}_{\to u_x(x_0,y_0)}\Bigg)^2+\Bigg(\underbrace{\frac{v(x_0+t,y_0)-v_0}{t}}_{\to v_x(x_0,y_0)}\Bigg)^2}}_{\to\text{konečné číslo}} = 0.$$

$\square$

Příklad 13

Určete parciální derivace z_x a z_y funkce

$$z = \mathrm{e}^u\cdot\sin v,\qquad \text{kde}\qquad u = xy,\quad v = x-y.$$

$$\begin{aligned} z_x &= z_u\cdot u_x + z_v\cdot v_x \\ &= \mathrm{e}^u\cdot\sin v\cdot y + \mathrm{e}^u\cdot\cos v\cdot 1 = \mathrm{e}^{xy}[y\sin(x-y)+\cos(x-y)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_y &= z_u\cdot u_y + z_v\cdot v_y \\ &= \mathrm{e}^u\cdot\sin v\cdot x + \mathrm{e}^u\cdot\cos v\cdot(-1) = \mathrm{e}^{xy}[x\sin(x-y)-\cos(x-y)] \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Příklad 14

Zavedením nových proměnných $u = x+y$, $v = x-y$ najděte všechny diferencovatelné funkce $f(x,y)$, splňující vztah

$$f_x(x,y) + f_y(x,y) = 0.$$

Hledáme funkci $f(x,y) = z = z(u(x,y),v(x,y))$, kde

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= z_x = z_u\cdot u_x + z_v\cdot v_x = z_u + z_v, \\ f_y(x,y) &= z_y = z_u\cdot u_y + z_v\cdot v_y = z_u - z_v \end{aligned}$$

splňují $0 = z_x + z_y = 2\,z_u$, tedy $z_u = 0$ a z je funkcí proměnné v (nezávisí na u). Můžeme tedy psát $z = g(v)$. Řešením je

$$f(x,y) = g(x-y),$$

kde g je libovolná diferencovatelná funkce. $\blacksquare$

Poznámka

Připomeňme, že pro funkce jedné proměnné máme

$$\left[f'(g(x)) \cdot g'(x)\right]' = f''(g(x)) \cdot g'^2(x) + f'(g(x)) \cdot g''(x).$$

Věta 21

Nechť $u, v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mají druhé parciální derivace v bodě $[x_0, y_0]$ a $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má spojité druhé parciální derivace v bodě $[u_0, v_0] = [u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)]$.

Pak $z = F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ má druhé parciální derivace v bodě $[x_0, y_0]$ a platí

$$\begin{aligned} z_{xx} &= z_{uu}u_x^2 + 2z_{uv}u_xv_x + z_{vv}v_x^2 + z_uu_{xx} + z_vv_{xx}, \\ z_{xy} &= z_{uu}u_xu_y + z_{uv}u_xv_y + z_{vu}u_yv_x + z_{vv}v_xv_y + z_uu_{xy} + z_vv_{xy} = z_{yx}, \\ z_{yy} &= z_{uu}u_y^2 + 2z_{uv}u_yv_y + z_{vv}v_y^2 + z_uu_{yy} + z_vv_{yy}. \end{aligned}$$

Poznámka

- Ve vzorcích je $z = z(u_0, v_0)$, $u = u(x_0, y_0)$ a $v = v(x_0, y_0)$, totéž pro parciální derivace.
- Pro zapamatování vzorců lze využít formální mocňování popsané na slidu 62.

Důkaz.

Nejprve si uvědomíme, že

$$\frac{\partial z_u}{\partial x} = \frac{\partial z_u}{\partial u}u_x + \frac{\partial z_u}{\partial v}v_x = z_{uu}u_x + z_{uv}v_x, \qquad \frac{\partial z_v}{\partial x} = z_{vu}u_x + z_{vv}v_x.$$

Odtud ihned dostaneme první vzorec

$$\begin{aligned} z_{xx} = \frac{\partial z_x}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(z_uu_x + z_vv_x) = \frac{\partial z_u}{\partial x}u_x + z_uu_{xx} + \frac{\partial z_v}{\partial x}v_x + z_vv_{xx} \\ &= z_{uu}u_x^2 + z_{uv}u_xv_x + z_uu_{xx} + z_{vu}u_xv_x + z_{vv}v_x^2 + z_vv_{xx} \\ &= z_{uu}u_x^2 + 2z_{uv}u_xv_x + z_{vv}v_x^2 + z_xu_{xx} + z_vv_{xx}. \end{aligned}$$

Ostatní podobně. □

Příklad 15

Substitucí $u = x + ay$, $v = x - ay$ najděte řešení rovnice $a^2z_{xx} - z_{yy} = 0$.

Protože

$$z_x = z_uu_x + z_vv_x = z_u + z_v, \quad z_y = z_uu_y + z_vv_y = az_u - az_v,$$

$$z_{xx} = z_{uu}u_x + z_{uv}v_x + z_{vu}u_x + z_{vv}v_x = z_{uu} + 2z_{uv} + z_{vv},$$

$$\begin{aligned} z_{yy} &= a(z_{uu}u_y + z_{uv}v_y - z_{vu}u_y - z_{vv}v_y) \\ &= a(az_{uu} - az_{uv} - az_{vu} + az_{vv}) = a^2(z_{uu} - 2z_{uv} + z_{vv}) \end{aligned}$$

dostáváme

$$0 = a^2z_{xx} - z_{yy} = a^2(z_{uu} + 2z_{uv} + z_{vv}) - a^2(z_{uu} - 2z_{uv} + z_{vv}) = 4a^2z_{uv},$$

tedy $z_{uv} = 0$.

Proto $z_u(u,v) = g(u)$ a máme

$$z(u,v) = \underbrace{\int g(u)\,\mathrm{d}u}_{:=h(u)} + f(v) \;\Rightarrow\; z(u,v) = h(u) + f(v),$$

tedy $z(x,y) = z(u(x,y), v(x,y)) = h(x+ay) + f(x-ay)$, kde h, f jsou libovolné funkce jedné proměnné, které mají druhou derivaci. ■

Poznámka

- V příkladu 15 se jedná o tzv. vlnovou rovnici, která popisuje např. chvění struny na hudebním nástroji, kde $z(x,y)$ je velikost výchylky struny, x je vzdálenost od jednoho z bodů upevnění struny a y je čas.
- Je-li zadaná počáteční poloha a rychlost chvějící se struny (je daná dvojice funkcí φ, ψ jedné proměnné popisující počáteční stav struny), pak počáteční podmínky $z(x,0) = \varphi(x), z_y(x,0) = \psi(x)$ určují funkci $z(x,y)$ jednoznačně.

Věta 22

Nechť $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ a $g_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i = 1,\dots,m)$ mají spojité parciální derivace druhého řádu. Označme $x^* = [x_1,\dots,x_n]$, $u = [u_1,\dots,u_m]$, kde $u_i = g_i(x^*)$ $(i = 1,\dots,m)$.
Pak existují parciální derivace druhého řádu funkce

$$F(x_1,\dots,x_n) = f\left(g_1(x_1,\dots,x_n),\dots,g_m(x_1,\dots,x_n)\right)$$

v bodě x^* a platí

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x^*) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_k}(u)\cdot\frac{\partial g_k}{\partial x_i}(x^*),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(x^*) = \sum_{k,\ell=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial u_k \partial u_\ell}(u)\cdot\frac{\partial g_k}{\partial x_i}(x^*)\cdot\frac{\partial g_\ell}{\partial x_j}(x^*) + \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial u_k}(u)\cdot\frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(x^*),$$

kde $i,j = 1,\dots,n$.

Poznámka

Připomeňme, že Taylorův polynom n-tého řádu funkce jedné proměnné f se středem x_0 je tvaru

$$T_n(f,x_0) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n,$$

kde

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0,1,\dots,n,$$

a zbytek lze pro jisté ξ mezi x a x_0 zapsat jako

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Věta 23

Nechť $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $x^* = [x_0, y_0]$ a jeho okolí $\mathcal{O}(x^*)$ spojité parciální derivace až do řádu $n+1$ včetně.
Pak pro $[x,y] \in \mathcal{O}(x^*)$ platí $f(x,y) = T_n(f,x^*)(x,y) + R_{n+1}(f,x^*)(\theta)$, kde pro $\theta \in (0,1)$, $h = x - x_0$, $k = y - y_0$ je

$$\begin{aligned} T_m(f,x^*)(x,y) &= f(x^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*)\cdot k \\ &+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*)\cdot h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^*)\cdot h\cdot k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^*)\cdot k^2\right] + \cdots \\ &\cdots + \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i}\partial y^i}(x^*)\cdot h^{n-i}\cdot k^i, \end{aligned}$$

$$R_{n+1}(f,x^*)(\theta) = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-i}\partial y^i}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)\cdot h^{n+1-i}\cdot k^i.$$

Důkaz.

- Zavedeme funkci $F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$ tak, že $F(0) = f(x_0, y_0)$, $F(1) = f(x, y)$.
- Pro F použijeme Taylorův rozvoj pro funkci jedné proměnné, tj. $F(1) =$ $F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + \cdots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta), \theta \in (0, 1)$.
- Zderivujeme F
$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(\underbrace{x_0 + th}_{x(t)}, \underbrace{y_0 + tk}_{y(t)}) = |\text{derivace složené funkce}| =$
$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + th, y_0 + tk) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + th, y_0 + tk) \cdot k$.
- Indukcí lze ukázat, že
$\frac{\mathrm{d}^n F}{\mathrm{d}t^n}(t) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i} \partial y^i}(x_0 + th, y_0 + tk) \cdot h^{n-i} \cdot k^i$.
- Nakonec dosadíme za $F(t)$ funkci $f(x, y)$.

$\square$

Poznámka

Užitím značení pro diferenciály máme

$$T_n(f, x^*)(x, y) =$$
$$= f(x^*) + \mathrm{d}f(x^*)(h, k) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(x^*)(h, k) + \cdots + \frac{1}{n!}\mathrm{d}^n f(x^*)(h, k),$$

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\mathrm{d}^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)(h, k).$$

Příklad 16

Určete Taylorův rozvoj druhého řádu funkce $f(x, y) = \frac{x}{y}$ v bodě $x^* = [x_0, y_0] = [1, 1]$.

f_x	f_{xx}	f_y	f_{yy}	f_{xy}
$\frac{1}{y}$	0	$-\frac{x}{y^2}$	$\frac{2x}{y^3}$	$-\frac{1}{y^2}$
1	0	-1	2	-1

$$T_2(f, x^*)(x, y) = \frac{x_0}{y_0} + \frac{1}{y_0}(x - x_0) + \left(-\frac{x_0}{y_0^2}\right)(y - y_0)$$
$$+ \frac{1}{2}\left[0 \cdot (x - x_0)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{y_0^2}\right)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{2x_0}{y_0^3}(y - y_0)^2\right]$$

$$T_2(f, [1, 1])(x, y) = 1 + 1 \cdot (x - 1) + (-1)(y - 1)$$
$$+ \frac{1}{2}\left[0 \cdot (x - 1)^2 + 2 \cdot (-1)(x - 1)(y - 1) + 2 \cdot (y - 1)^2\right]$$
$$= 1 + x - y - xy + x + y + y^2 - 2y = y^2 - xy + 2x - 2y + 1. \blacksquare$$

Příklad 17

Spočítejte $1{,}04^{2{,}02}$ pomocí Taylorova rozvoje druhého řádu.

$$f(x, y) = x^y, \quad [x_0, y_0] = [1, 2], \quad h = 0{,}04, \quad k = 0{,}02,$$
$$f_x = y \cdot x^{y-1} = 2, \quad f_y = x^y \cdot \ln x = 0,$$
$$f_{xx} = y \cdot (y-1) \cdot x^{y-2} = 2, \; f_{xy} = y \cdot x^{y-1} \cdot \ln x + x^{y-1} = 1, \; f_{yy} = x^y \cdot (\ln x)^2 = 0,$$

$$T_2 = 1^2 + 2 \cdot 0{,}04 + 0 \cdot 0{,}02 + \frac{1}{2}(2 \cdot 0{,}04^2 + 2 \cdot 1 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}02 + 0 \cdot 0{,}02^2)$$
$$= 1 + 0{,}08 + 0{,}0016 + 0{,}0008 = 1{,}0824.$$

$\blacksquare$

Věta 24

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *má v bodě* $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*]$ *a v jeho okolí* $\mathcal{O}(x^*)$ *spojité parciální derivace až do řádu* $n+1$ *včetně.*
Pak pro $h = [h_1, \dots, h_n], x^* + h \in \mathcal{O}(x^*)$ *platí*

$$f(x^* + h) = T_n(f, x^*)(x) + R_{n+1}(x^* + \theta h), \quad \theta \in (0,1),$$

$$T_n(f, x^*)(x) = f(x^*) + \mathrm{d}f(x^*)(h) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(x^*)(h) + \cdots + \frac{1}{n!}\mathrm{d}^n f(x^*)(h),$$

$$R_{n+1}(x^* + \theta h) = \frac{1}{(n+1)!}\mathrm{d}^{n+1} f(x^* + \theta h)(h), \quad \theta \in (0,1).$$

Použili jsme k-tý diferenciál funkce f v bodě x^*

$$\mathrm{d}^k f(x^*)(h) = \sum_{i_1 + \cdots + i_n = k} \frac{k!}{i_1! \cdot i_2! \cdots i_n!} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}(x^*) \cdot h_1^{i_1} \cdots h_n^{i_n}.$$

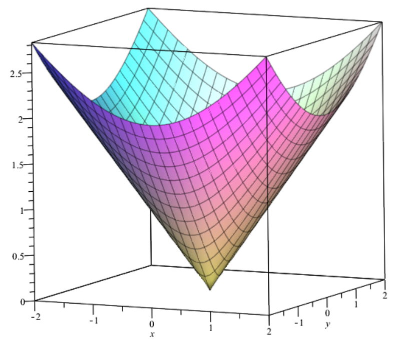
Definice 18

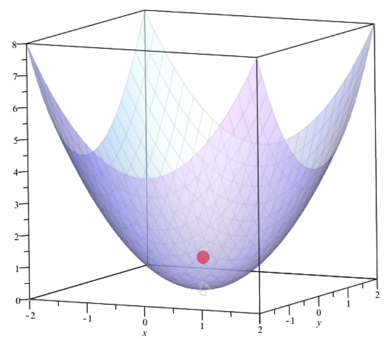
Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^n$.

- Funkce f má v bodě x_0 *lokální maximum* právě tehdy, když existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že $f(x) \le f(x_0)$ pro všechna $x \in \mathcal{O}(x_0)$.
- Funkce f má v bodě x_0 *lokální minimum* právě tehdy, když existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že $f(x) \ge f(x_0)$ pro všechna $x \in \mathcal{O}(x_0)$.
- Funkce f má v bodě x_0 *lokální extrém*, jestliže má v tomto bodě lokální maximum nebo minimum.
- Jsou-li nerovnosti ostré, mluvíme o *ostrých* lokálních extrémech.

Příklad 18

- $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
  má v $[0,0]$ lokální minimum, ale nemá tam parciální derivace
- $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & [x,y] \ne [0,0] \\ 1 & [x,y] = [0,0] \end{cases}$
  má v $[0,0]$ lokální maximum, ale není tam spojitá





Definice 19

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Bod x_0 je *stacionárním bodem* funkce f, jestliže existují parciální derivace v x_0 a platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0 \quad \text{pro} \quad i = 1, \dots, n.$$

Věta 25 (Fermatova věta, nutná podmínka existence lokálního extrému)

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Jestliže má funkce f v bodě x_0 lokální extrém a existují v x_0 všechny její parciální derivace prvního řádu, pak je x_0 stacionární bod.

Důkaz.

Sporem nechť jsou splněny předpoklady věty a $\exists i : \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \neq 0$. Zavedeme funkci $\varphi(t) = f(x_0 + t \cdot e_i)$, její derivace $\varphi'(t) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(x_0 + te_i)$ je v $t = 0$ nenulová a funkce φ tedy nemá v $t = 0$ stacionární bod. V každém okolí $\mathcal{O}(x_0, \varepsilon)$ proto existují t_1, t_2 taková, že

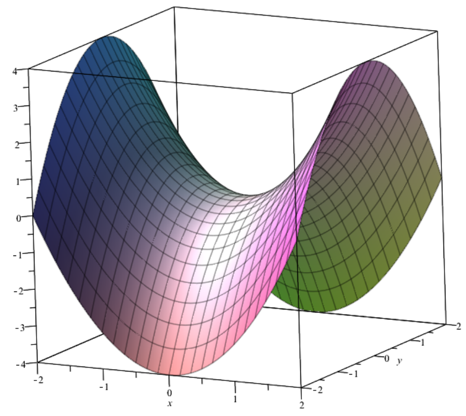
$$\varphi(t_1) < \varphi(0) < \varphi(t_2) \Leftrightarrow f(x_0 + t_1 e_i) < f(x_0) < f(x_0 + t_2 e_i),$$

což je spor. □

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \ldots, e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

Poznámka

Extrém může nastat pouze ve stacionárním bodě, nebo v bodě, kde neexistuje aspoň jedna parciální derivace. Ve stacionárním bodě extrém být ale nemusí.



$f(x, y) = x^2 - y^2$ má v $[0, 0]$ typický sedlový bod

Věta 26

Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_0, y_0]$ a v jeho okolí spojité parciální derivace druhého řádu a $[x_0, y_0]$ je stacionární bod.

- *Jestliže*

  $$D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0,$$

  pak má funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ lokální extrém, a to minimum, když $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, nebo maximum, je-li $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$.
- *Jestliže $D(x_0, y_0) < 0$, pak f nemá v $[x_0, y_0]$ lokální extrém.*

Poznámka

Připomeňme si situaci v jednorozměrném případě. Mějme funkci $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pak

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} g''(\xi)(x - x_0)^2, \text{ kde } \xi \in \mathcal{O}(x_0).$$

Je-li x_0 stacionárním bodem, je $g'(x_0) = 0$, tedy

$$g(x) = g(x_0) + \frac{1}{2} g''(\xi)(x - x_0)^2.$$

Předpoklad $g''(x_0) \neq 0$ nám zaručí, že $\operatorname{sgn} g''(x_0) = \operatorname{sgn} g''(\xi)$. Pak

- $g''(x_0) > 0 \Rightarrow g''(\xi) > 0 \Rightarrow g(x) \geq g(x_0) \Rightarrow$ lok. minimum,
- $g''(x_0) < 0 \Rightarrow g''(\xi) < 0 \Rightarrow g(x) \leq g(x_0) \Rightarrow$ lok. maximum.

Důkaz

Uvažujme funkci $D(x,y) = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y)$ a předpokládejme, že $D(x_0,y_0) \neq 0$. Ze spojitosti derivací plyne spojitost $D(x,y)$, tedy $\operatorname{sgn} D(x,y) = \operatorname{sgn} D(x_0,y_0)$ *pro* $[x,y] \in \mathcal{O}([x_0,y_0],\varepsilon)$.
Použijeme Taylorův rozvoj

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \underbrace{f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}_{=0} + \frac{1}{2}\left[f_{xx}(c_1,c_2)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(c_1,c_2)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(c_1,c_2)(y-y_0)^2\right],$$

kde c_1, c_2 leží na úsečce spojující body $[x,y]$ a $[x_0,y_0]$. Označíme-li $f_{xx}(c_1,c_2) = A, f_{xy}(c_1,c_2) = B, f_{yy}(c_1,c_2) = C, x - x_0 = h, y - y_0 = k$, pak $f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{2}(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2)$. Dále označme $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = P(h,k)$. Vše tedy záleží na znaménku $P(h,k)$.

Případ $\quad D(x_0,y_0) > 0$

- Jestliže $k = 0$, pak $P(h,k) = Ah^2, h \neq 0$ (kdyby $h = 0$, pak $[x,y] = [x_0,y_0]$, ale my chceme bod z okolí). Protože $AC - B^2 > 0$, je jistě $A \neq 0$, takže $P(h,k) > 0 \Leftrightarrow A > 0$ a $P(h,k) < 0 \Leftrightarrow A < 0$.
- Jestliže $k \neq 0$, pak
  $$P(h,k) = k^2\left[A\left(\frac{h}{k}\right)^2 + 2B\frac{h}{k} + C\right] = \left|\frac{h}{k} = t\right| = k^2(At^2 + 2Bt + C)$$
  a označme $Q(t) = At^2 + 2Bt + C$, tedy $\operatorname{sgn} P = \operatorname{sgn} Q$ a diskriminant $Q(t)$ je $4(B^2 - AC) = -4(AC - B^2) < 0$, tedy
  $Q(t) < 0 \Leftrightarrow P(h,k) < 0 \Leftrightarrow A < 0$ nebo
  $Q(t) > 0 \Leftrightarrow P(h,k) > 0 \Leftrightarrow A > 0$.

Celkem, protože $\operatorname{sgn} f_{xx}(x_0,y_0) = \operatorname{sgn} f_{xx}(c_1,c_2)$ pro nějaké $\mathcal{O}([x_0,y_0],\varepsilon)$, máme

$f(x,y) > f(x_0,y_0) \Leftrightarrow P(h,k) > 0 \Leftrightarrow A > 0 \Leftrightarrow f_{xx}(c_1,c_2) > 0$,
$f(x,y) < f(x_0,y_0) \Leftrightarrow P(h,k) < 0 \Leftrightarrow A < 0 \Leftrightarrow f_{xx}(c_1,c_2) < 0$.

Případ $\quad D(x_0,y_0) < 0$

Opět použijme $\operatorname{sgn} D(x_0,y_0) = \operatorname{sgn} D(c_1,c_2)$, takže nyní

$$D(x_0,y_0) < 0 \Rightarrow D(c_1,c_2) < 0 \Rightarrow AC - B^2 < 0.$$

Diskriminant $Q(t) = At^2 + 2Bt + C$ je tedy $-4(AC - B^2) > 0$, proto $\exists t_1, t_2 : Q(t_1) > 0 \wedge Q(t_2) < 0$. Označme $[h_1,k_1] = [\alpha t_1, \alpha]$ a $[h_2,k_2] = [\alpha t_2, \alpha]$ pro libovolné $\alpha \neq 0$. Pak

$P(h_1,k_1) = A(\alpha t_1)^2 + 2B\alpha^2 t_1 + C\alpha^2 = \alpha^2 Q(t_1) > 0$,
$P(h_2,k_2) = A(\alpha t_2)^2 + 2B\alpha^2 t_2 + C\alpha^2 = \alpha^2 Q(t_2) < 0$.

Neboť $h = x - x_0, k = y - y_0$ a α je libovolné, lze se dostat libovolně blízko k $[x_0,y_0]$. Odtud plyne, že v libovolně malém okolí $[x_0,y_0]$ najdeme $[h_1,k_1]$ a $[h_2,k_2]$ s výše uvedenými vlastnostmi.

Tedy $\forall \mathcal{O}([x_0,y_0],\varepsilon)\ \exists [x_0 + h_1, y_0 + k_1], [x_0 + h_2, y_0 + k_2]$ takové, že

$$f(x_0 + h_1, y_0 + k_1) > f(x_0,y_0) \quad \wedge \quad f(x_0 + h_2, y_0 + k_2) < f(x_0,y_0)$$

a extrém tedy nenastává. $\square$

Příklad 19

Určete lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

1. Určíme stacionární body.
   $f_x(x,y) = 3x^2 - 3y = 3(x^2 - y) = 0 \Leftrightarrow y = x^2$,
   $f_y(x,y) = 3y^2 - 3x = 3(y^2 - x) = 0 \Leftrightarrow x = y^2$.
   Odtud $x^4 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0\ (\rightarrow y = 0)$, $x_2 = 1\ (\rightarrow y = 1), x_{3,4} \in \mathbb{C} \Rightarrow P_1 = [0,0], P_2 = [1,1]$.
2. Spočítáme druhé derivace.
   $f_{xx} = 6x, \quad f_{yy} = 6y, \quad f_{xy} = -3$.
3. Vyhodnotíme pomocí $D(x,y)$.
   $D(x,y) = 6x \cdot 6y - (-3)^2 = 36xy - 9$, takže
   $D(0,0) = -9 < 0 \ \Rightarrow\ [0,0]$ není extrém,
   $D(1,1) = 27 > 0 \ \Rightarrow\ [1,1]$ je extrém a vzhledem k $f_{xx}(1,1) = 6 > 0$ jde o minimum.

$\blacksquare$

Samozřejmě může nastat případ $D(x, y) = 0 \ldots$

Příklad 20

Určete extrémy funkce $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.

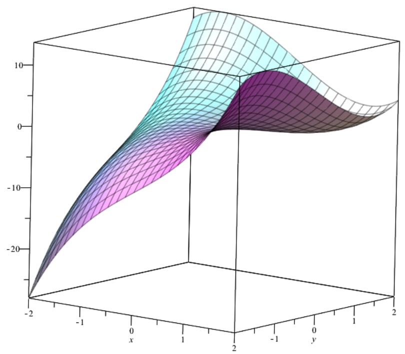
1. $f_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0, \quad f_y = 4y^3 - 2x - 2y = 0 \Rightarrow$
$$x^3 - y^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 = y^3 \Leftrightarrow x = y, \text{ pak}$$
$$4x^3 - 2x - 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow$$
$$P = [0, 0], Q = [1, 1], R = [-1, -1].$$
2. $f_{xx} = 12x^2 - 2, \quad f_{yy} = 12y^2 - 2, \quad f_{xy} = -2.$
3. $D(x, y) = (12x^2 - 2)(12y^2 - 2) - (-2)^2$, tedy
$R : D(-1, -1) = 96 > 0,\ f_{xx}(-1, -1) = 10 > 0 \Rightarrow$ ostré lok. min.,
$Q : D(1, 1) = 96 > 0, f_{xx}(1, 1) = 10 > 0 \Rightarrow$ ostré lok. min.,
$P : D(0, 0) = 0 \Rightarrow$ nelze použít větu 26.

Rozhodneme přímo podle chování funkce v okolí bodu $[0, 0]$.

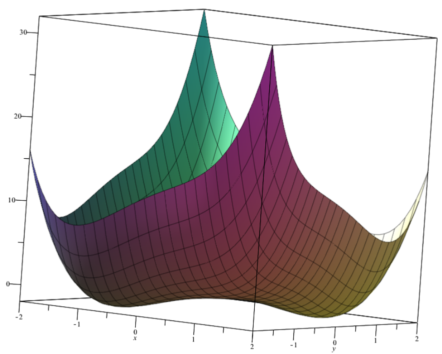
- Hodnota v bodě P je $f(0, 0) = 0$.
- Jestliže $y = -x$, pak
$$f(x, y) = x^4 + x^4 - x^2 + 2x^2 - x^2 = 2x^4 > 0 \text{ pro } x \neq 0.$$
- Jestliže $y = 0$, pak
$$f(x, y) = x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) < 0 \text{ pro } x \in (-1, 0) \cup (0, 1).$$

V každém okolí $\mathcal{O}([x_0, y_0])$ tedy existují body $[x_1, y_1], [x_2, y_2]$ takové, že
$$f(x_1, y_1) < f(0, 0) < f(x_2, y_2).$$

V bodě P tedy není extrém. ■



$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$



$f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

Definice 20

Nechť $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ je symetrická, $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ je vektor a uvažujme kvadratickou formu
$$P(h) = \langle Ah, h\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j.$$
Pak $P(h)$ je

- *pozitivně (negativně) semidefinitní*, je-li
$$P(h) \geq 0\ (P(h) \leq 0) \quad \forall h \in \mathbb{R}^n,$$
- *pozitivně (negativně) definitní*, je-li
$$P(h) > 0\ (P(h) < 0) \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$
- *indefinitní*, jestliže
$$\exists h, k \in \mathbb{R}^n : P(h) > 0 \wedge P(k) < 0.$$

Věta 27

Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je funkce se spojitými parciálními derivacemi druhého řádu v bodě $x^* = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ a nějakém jeho okolí. Nechť je navíc x^* stacionárním bodem (tj. parciální derivace prvního řádu jsou v něm rovny nule). Pak

1. *v x^* je ostré lokální minimum (maximum), jestliže $P(h) = \langle Ah, h\rangle$ je pozitivně (negativně) definitní, kde*
$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x^*) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x^*) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x^*) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^*)\right)_{i,j=1}^n =: f''(x^*);$$
2. *v x^* není extrém, jestliže $P(h) = \langle Ah, h\rangle$ je indefinitní;*
3. *jestliže v x^* je extrém, pak $P(h)$ je pozitivně (negativně) semidefinitní.*

Matice A se nazývá *Hessova matice* (a značí se $\nabla^2 f$).

Důkaz.

Uvažme Taylorův rozvoj pro funkce více proměnných ($x, \xi \in \mathbb{R}^n$)
$$f(x) = f(x^*) + \mathrm{d}f(x^*)(h) + \underbrace{\frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f(\xi)(h)}_{\text{zbytek}}.$$

Označme
$$f'(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)^T = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)_{i=1}^n,$$
pak
$$f(x) = f(x^*) + \underbrace{\langle f'(x_0), h\rangle}_{=0} + \frac{1}{2}\underbrace{\langle f''(\xi)\cdot h, h\rangle}_{\text{rozhoduje o znaménku}}.$$

□

Věta 28 (Sylvesterovo kritérium, připomenutí)

Uvažujme kvadratickou formu $P(h) = \langle Ah, h\rangle$ danou symetrickou maticí A.

- *P je pozitivně (negativně) definitní právě tehdy, když jsou všechna vlastní čísla matice A kladná (záporná).*
- *P je pozitivně (negativně) semidefinitní právě tehdy, když jsou všechna vlastní čísla matice A nezáporná (nekladná).*
- *P je pozitivně definitní právě tehdy, když jsou všechny vedoucí hlavní minory matice A kladné.*
- *P je negativně definitní právě tehdy, když vedoucí hlavní minory matice A střídají znaménka počínaje záporným.*

Pro $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ jsou vedoucí hlavní minory determinanty
$$|a_{11}|, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \det A.$$

Často se místo o definitnosti formy P mluví o definitnosti matice A.

Definice 21

Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $M \subseteq \mathcal{D}(f)$ Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *absolutní minimum (maximum)* v M, jestliže
$$f(x_0) \le f(x) \quad (f(x_0) \ge f(x)) \quad \forall x \in M.$$

Jestliže platí ostré nerovnosti, mluvíme o ostrých absolutních extrémech pro $\forall x \in M, x \neq x_0$. Také se používá název globální extrémy.

Věta 29

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá na kompaktní podmnožině M svého definičního oboru. Pak f nabývá svého absolutního minima i maxima na M buď v bodech lokálních extrémů v M nebo na hranici M.

Důkaz.

Plyne přímo z Weierstrassovy věty. □

Příklad 21

Najděte absolutní extrémy funkce $f(x,y) = xy - x^2 - y^2 + x + y$ na množině $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, y \leq 4 - x\}$.

Lokální extrémy

$$f_x = y - 2x + 1 = 0, \quad f_y = x - 2y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow\ y = 2x - 1\ \Rightarrow\ x - 2(2x-1) + 1 = 0\ \Rightarrow\ x = 1\ \Rightarrow\ y = 1\ \Rightarrow\ [1,1]$$

$$D(x,y) = (-2)(-2) - 1^2 = 3 > 0, \quad f_{xx} = -2 < 0$$

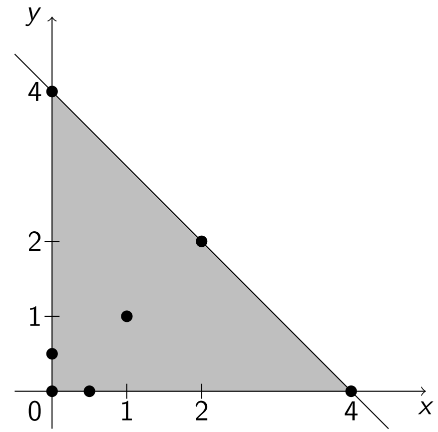
$\Rightarrow$ V bodě $A = [1,1]$ je lokální maximum s hodnotou $f(1,1) = 1$.

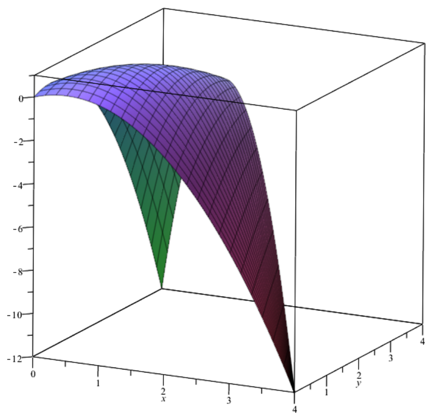
Hranice

1. $x = 0, y \in [0,4]\ \Rightarrow\ f(x,y) = f(0,y) = -y^2 + y = u(y)$, hledáme tedy extrémy funkce jedné proměnné $u(y), y \in [0,4]$.
   $u'(y) = -2y + 1 = 0\ \Rightarrow\ y = \frac{1}{2}, u''(y) = -2 < 0\ \Rightarrow$ lok. max. s hodnotou $u(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ a krajní body $u(0) = 0, u(4) = -12$.
   Máme tedy body $B = [0, \frac{1}{2}], C = [0,0], D = [0,4]$.
2. $y = 0, x \in [0,4]\ \Rightarrow\ f(x,y) = f(x,0) = -x^2 + x = v(x)$,
   $v'(x) = -2x + 1 = 0\ \Rightarrow\ x = \frac{1}{2}, u''(x) = -2 < 0\ \Rightarrow$ lok. max. s hodnotou $v(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ a krajní body $v(0) = 0, v(4) = -12$. Máme tedy body $E = [\frac{1}{2}, 0], F = C = [0,0], G = [4,0]$.
3. $y = 4-x, x \in [0,4] \Rightarrow f(x,y) = f(x, 4-x) = -3x^2 + 12x - 12 = \varphi(x)$,
   $\varphi'(x) = -6x + 12 = 0\ \Rightarrow\ x = 2, \varphi''(x) = -6 < 0\ \Rightarrow$ lok. max. s hodnotou $\varphi(2) = 0$ a krajní body $\varphi(0) = -12, \varphi(4) = -12$. Máme tedy body $H = [2,2], I = D = [0,4], J = G = [4,0]$.

Porovnání hodnot v jednotlivých bodech

↪ Absolutní minimum $f(x,y) = -12$ v bodech $[0,4], [4,0]$.
↪ Absolutní maximum $f(x,y) = 1$ v bodě $[1,1]$.





■

Definice 22

Uvažujme funkce $f_1, f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Předpis

$$[x, y] \xrightarrow{F} [f_1(x, y), f_2(x, y)]$$

definuje zobrazení $F\colon \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Funkce f_1, f_2 jsou složkami zobrazení $F = (f_1, f_2)$

Poznámka

- Vlastnosti zavádíme podobně jako u funkcí $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Zejména zpravidla řekneme, že F má vlastnost $\mathcal{V}$, jestliže všechny jeho složky mají vlastnost $\mathcal{V}$.
- Zobrazení F je tzv. vektorové pole.

Definice 23

Uvažujme zobrazení $F = (f_1, f_2)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

- F je *spojité* v bodě $[x_0, y_0]$, jestliže jsou v bodě $[x_0, y_0]$ spojité jeho složky f_1, f_2.
- F je *diferencovatelné* v bodě $[x_0, y_0]$, jestliže jsou v bodě $[x_0, y_0]$ diferencovatelné jeho složky f_1, f_2.

Definice 24

Nechť $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je diferencovatelné v bodě $[x_0, y_0]$, pak zobrazení $\mathrm{d}F(x_0, y_0)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané předpisem

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F(x_0, y_0)(h, k) &= [\mathrm{d}f_1(x_0, y_0)(h, k), \mathrm{d}f_2(x_0, y_0)(h, k)] \\ &= \left[\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot h + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot k, \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot h + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot k,\right] \end{aligned}$$

nazýváme *diferenciál* zobrazení F.

Definice 25

Nechť $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je diferencovatelné v bodě $[x_0, y_0]$. Pak se matice

$$F'(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

nazývá *Jacobiho matice*. Determinant $\det F'(x_0, y_0)$ se nazývá *Jacobián* zobrazení F v bodě $[x_0, y_0]$.

Věta 30

Nechť $F = (f_1, f_2), G = (g_1, g_2)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a $\mathcal{D}(F) \supseteq \mathcal{H}(G)$. Dále nechť jsou F, G jsou diferencovatelné v $[x_0, y_0]$. Pak je zobrazení

$$H(x, y) = (F \circ G)(x, y)$$

diferencovatelné v $[x_0, y_0]$ a platí

$$H'(x_0, y_0) = F'(u_0, v_0)\cdot G'(x_0, y_0),$$

kde $u_0 = g_1(x_0, y_0), v_0 = g_2(x_0, y_0)$.

Navíc platí

$$\det H'(x_0, y_0) = \det F'(u_0, v_0)\cdot \det G'(x_0, y_0).$$

Důkaz.

Z diferencovatelnosti F a G plyne diferencovatelnost

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} h_1(x,y) \\ h_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(g_1(x,y), g_2(x,y)) \\ f_2(g_1(x,y), g_2(x,y)) \end{pmatrix}.$$

Např. prvek matice

$$H'(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x}(x_0,y_0) & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

je $\frac{\partial h_1}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f_1}{\partial u}(u_0,v_0) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x}(x_0,y_0) + \frac{\partial f_1}{\partial v}(u_0,v_0) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x}(x_0,y_0)$. Dosazením do Jacobiánu obdržíme matici, kterou lze rozložit na součin dvou matic, které jsou $F'(u_0,v_0)$ a $G'(x_0,y_0)$.

Závěrečné tvrzení pro Jacobiány plyne z faktu, že determinant součinu se rovná součinu determinantů. □

Věta 31

Nechť mají složky zobrazení $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spojité parciální derivace v bodě $[x_0,y_0]$. Pokud je

$$\det F'(x_0,y_0) \neq 0,$$

pak existuje okolí $\mathcal{O}(x_0,y_0)$, v němž je zobrazení F prosté. Zde potom existuje inverzní zobrazení a platí

$$(F^{-1})'(u_0,v_0) = [F'(x_0,y_0)]^{-1},$$

kde $[u_0,v_0] = F(x_0,y_0)$.

Důkaz.

Máme $(F^{-1} \circ F)(x_0,y_0) = \mathrm{id}(x_0,y_0)$ a protože Jacobiho matice identity je jednotková matice, tak

$$[(F^{-1} \circ F)(x_0,y_0)]' = [F^{-1}(u_0,v_0)]' \cdot F'(x_0,y_0)$$
$$\Rightarrow [F^{-1}(u_0,v_0)]' = [F'(x_0,y_0)]^{-1}.$$

Příklad 22

Zjistěte, zda je zobrazení $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané složkami $f_1(x,y) = xy, f_2(x,y) = \frac{x}{y}$ prosté v okolí bodu $[2,1]$. Pokud ano, určete Jacobiho matici inverzního zobrazení v okolí bodu $[u_0,v_0] = F(2,1)$.

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix}, \qquad F'(2,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$\det F'(2,1) = -2 - 2 = -4 \neq 0$, tedy existuje F^{-1} a

$$F^{-1}(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

Poznámka

V integrálním počtu funkcí dvou proměnných (při výpočtu dvojných integrálů) se používají tzv. polární souřadnice. Jedná se o zobrazení

$$F\colon [0,\infty) \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}^2, \qquad F(\rho,\varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$$

s Jacobiho maticí

$$F'(\rho,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Jeho Jacobián

$$\det F'(\rho,\varphi) = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho$$

je tedy mimo počátek nenulový.

Definice 26

Pro $F = (f_1, \dots, f_m) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se složkami $f_1, \dots, f_m \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zavádíme analogicky jako v definici 25 Jacobiho matici F' a v případě $m = n$ Jacobián v bodě $x^* = [x_1, \dots, x_n]$ jako

$$\det F'(x^*) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^*) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x^*) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x^*) \end{vmatrix}.$$

Diferenciál $\mathrm{d}F(x^*) \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ definujeme jako

$$\mathrm{d}F(x^*)(h) = [\mathrm{d}f_1(x^*)(h), \dots, \mathrm{d}f_m(x^*)(h)],$$

kde $\mathrm{d}f_k(x^*)(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x^*) \cdot h_i$, $k = 1, \dots, m$, tedy

$$\mathrm{d}F(x^*)(h) = F'(x^*) \cdot h, \quad h = (h_1, \dots, h_n).$$

Věta 32

Nechť $F \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, $G \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a $\mathcal{D}(F) \supseteq \mathcal{H}(G)$. Dále nechť je G diferencovatelné v bodě $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*]$ a F je diferencovatelné v bodě $y^* = G(x^*)$.

Pak je zobrazení $H = F \circ G$, $H \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, diferencovatelné v bodě x^* a platí

$$H'(x^*) = F'(y^*) \cdot G'(x^*) = F'\left(G(x^*)\right) \cdot G'(x^*).$$

Důkaz.

U násobení matic musíme zohledňovat pořadí. Matice se rovnají, jestliže se rovnají jejich prvky, tedy na jednotlivé složky použijeme větu pro složené zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$. □

Poznámka

Jestliže $m = n = k$, potom

$$\det H'(x^*) = \det F'(y^*) \cdot \det G'(x^*).$$

Věta 33

Nechť $F \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, F je diferencovatelná v $x^* \in \mathbb{R}^n$ a $\det F'(x^*) \neq 0$. Pak existuje okolí $\mathcal{O}(x^*)$, v němž je F prosté, a tedy existuje F^{-1} na $\mathcal{O}(F(x^*))$. Navíc platí

$$(F^{-1})'(y^*) = [F'(x^*)]^{-1},$$

kde $y^* = F(x^*)$.

Poznámka (Cylindrické (válcové) souřadnice)

$$F \colon [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

$$F'(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det F'(\rho, \varphi, z) = \rho$$

Poznámka (Sférické souřadnice)

$$F\colon [0,\infty)\times[0,2\pi)\times[0,\pi]\to\mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi\sin\theta\\ y &= \rho\sin\varphi\sin\theta\\ z &= \rho\cos\theta \end{aligned}$$

$$F'(\rho,\varphi,\theta)=\begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$\det F'(\rho,\varphi,z)=-\rho^2\sin\theta$$

- *gradient* skalární funkce $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

$$\operatorname{grad} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

- *vektorové pole* $F\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

$$F(x)=\Big(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\Big)$$

- *divergence* vektorové pole F

$$\operatorname{div} F=P_x(x,y,z)+Q_y(x,y,z)+R_z(x,y,z)$$

- *rotace* vektorové pole F

$$\operatorname{rot} F=\Big(R_y-Q_z,P_z-R_x,Q_x-P_y\Big)$$

- *Hamiltonův nabla operátor*

$$\nabla:=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Pak lze psát

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f&=\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\\ \operatorname{div} F&=\langle\nabla,F\rangle=\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right),(P,Q,R)\right\rangle=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\\ \operatorname{rot} F&=\nabla\times F=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(P,Q,R)\\ &=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},-\frac{\partial R}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial z},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

- *Laplaceův operátor*

$$\Delta:=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$\Delta f=0$ je parciální diferenciální rovnice (Laplaceova rovnice)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0.$$

Řešení této rovnice se nazývají harmonické funkce.

$$\Delta f=\operatorname{div}\operatorname{grad} f=\langle\nabla,\nabla u\rangle$$

Poznámka

Nechť f a F jsou dostatečně hladká funkce a vektorové pole.

- Vektorový součin lineárně závislých vektorů je nula, tedy
$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \nabla \times \nabla f = 0.$$
- Vektorový součin je kolmý na každý z násobených vektorů, tedy
$$\operatorname{div}\operatorname{rot} F = \langle \nabla, \nabla \times F \rangle = 0.$$

Příklad 23

Určete divergenci a rotaci gravitačního pole vytvořeného hmotným bodem o jednotkové hmotnosti, který se nachází v počátku soustavy souřadnic.

Hmotné body o hmotnostech m_1, m_2 [kg] vzdáleny d metrů se přitahují silou o velikosti (κ je Newtonova gravitační konstanta)
$$|F| = \frac{\kappa m_1 m_2}{d^2}, \qquad \kappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2.$$
Bod $[x, y, z]$ s jednotkovou hmotností bude přitahován do počátku silou, jejíž směr je opačný než směr vektoru s počátkem v $[0, 0, 0]$ a koncem v $[x, y, z]$ a jehož velikost $|F|$ je rovna $\kappa(x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$. Máme $F(x, y, z) = -\alpha[x, y, z]$. Skalár α najdeme porovnáním velikosti F
$$\alpha\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \kappa(x^2 + y^2 + z^2)^{-1} \ \Rightarrow\ \alpha = \kappa(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}.$$
Tedy
$$F(x, y, z) = \big[P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\big] = \kappa\left[-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3}\right],$$
kde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Parciální derivace složek P, Q, R vektorového pole F jsou
$$P_x = \kappa\left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}\right), Q_y = \kappa\left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}\right), R_z = \kappa\left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}\right),$$
$$P_y = Q_x = \kappa\frac{3xy}{r^5}, \quad P_z = R_x = \kappa\frac{3xz}{r^5}, \quad Q_z = R_y = \kappa\frac{3yz}{r^5}.$$
Tedy pro $[x, y, z] \neq [0, 0, 0]$ je vektorové pole F nezřídlové, protože
$$\operatorname{div} F = P_x + Q_y + R_z = 0,$$
a také nevírové, neboť
$$\operatorname{rot} F = \Big(R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y\Big) = 0.$$
■

Koncept stejnoměrné (a bodové) konvergence posloupnosti funkcí jedné proměnné má rozsáhlé použití (mj.) v teorii nekonečných řad, proto je důkladně probírán společně s nimi.

Vzhledem k využití v následující sekci tento koncept zavedeme, dokážeme jedno základní kritérium stejnoměrné konvergence a fakt, že „stejnoměrná limita“ spojitých funkcí je spojitá funkce.

Příklad 24 (Motivace)

Uvažujme funkce ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) $f_n(x) = x^n$ pro $x \in [0,1]$ a $n \in \mathbb{N}$. Všechny tyto funkce jsou spojité na intervalu $[0,1]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Přitom

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \xrightarrow{n\to\infty} 0 & x \in [0,1), \\ 1^n \xrightarrow{n\to\infty} 1 & x = 1 \end{cases}.$$

Tedy posloupnost $f_n(x)$ konverguje pro každé $x \in [0,1]$ k funkci

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x \in [0,1), \\ 1, & \text{pro } x = 1, \end{cases}$$

přičemž tato funkce $f(x)$ je nespojitá (konverguje pouze bodově).

Definice 27

Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}, x \in I$, *konverguje bodově* na tomto intervalu k funkci $f(x)$, jestliže $\forall \tilde{x} \in I$ číselná posloupnost $\{f_n(\tilde{x})\}$ konverguje k číslu $f(\tilde{x})$, píšeme $f_n \to f$, tj.

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in I, \exists n_0 = n_0(\varepsilon, x)\ \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Definice 28

Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}, x \in I$, *konverguje na intervalu I stejnoměrně* k funkci $f(x)$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : \forall x \in I, \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

píšeme $f_n \rightrightarrows f$.

Poznámka

- Konvergence posloupnosti $f_n(x) = x^n, x \in [0,1]$ není na $[0,1]$ stejnoměrná.
- $P = C[a,b]$, $\rho_C(f,g) = \max_{x\in[a,b]}|f(x) - g(x)| \to$ metrika stejnoměrné konvergence.
- Ze stejnoměrné konvergence plyne bodová konvergence. Naopak to neplatí.

Věta 34

Nechť posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje na intervalu I k funkci f, označme

$$r_n = \sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)|.$$

Pak posloupnost f_n konverguje na I k funkci f stejnoměrně právě tehdy, když $r_n \to 0$.

Důkaz.

($\Leftarrow$) $\lim r_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : |r_n| < \varepsilon \Rightarrow$ $\sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \forall x \in I : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

($\Rightarrow$) triviální modifikace předchozí implikace

$\square$

Příklad 25

Rozhodněte, zda posloupnost $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$ konverguje na $I = [0,1]$ stejnoměrně.

Vyřešíme bodovou konvergenci a pak podle věty 34 rozhodneme, je-li stejnoměrná nebo ne. Protože $\lim_{n\to\infty} \frac{2nx}{1+n^2x^2} = 0$, konverguje posloupnost bodově na I k funkci $f(x) \equiv 0$. Dále

$$r_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{2nx}{1+n^2x^2} - 0 \right| = \max_{x\in[0,1]} \frac{2nx}{1+n^2x^2} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Posloupnost nekonverguje stejnoměrně k nule na intervalu $[0,1]$.

$\left(\frac{2nx}{1+n^2x^2}\right)' = \frac{2n(1+n^2x^2)-2nx(n^22x)}{(1+n^2x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow 2n(1+n^2x^2) = 2nx(n^22x) \Leftrightarrow 1+n^2x^2 = 2n^2x^2 \Leftrightarrow 1 = n^2x^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{n}$, $f_n(0) = 0, f_n(1) = \frac{2n}{1+n^2}, f_n(\frac{1}{n}) = 1$

Příklad 26

$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}, I = \mathbb{R}$

$$f_n \to 0, r_n = \frac{1}{n} \Rightarrow f_n(x) \rightrightarrows 0 \text{ na } \mathbb{R}$$

Věta 35

Nechť funkce f_n jsou na intervalu I spojité a $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ na intervalu I. Pak je na intervalu I spojitá i limitní funkce f.

Důkaz.

Potřebujeme dokázat, že $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\ \forall x_0 \in I$.

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \le \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + |f_n(x) - f_n(x_0)| + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}}.$$

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné, protože $f_n(x) \to f(x)$ na I, k $\frac{\varepsilon}{3}$ $\exists n_0, \forall n \ge n_0$, $\forall x \in I : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Protože f_n jsou spojité, pak k $\frac{\varepsilon}{3}$ $\exists \delta > 0$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.
Tedy $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ a funkce f je spojitá v bodě x_0. □

Poznámka

Předchozí Věta 35 v podstatě dokazuje, že prostor spojitých funkcí s metrikou stejnoměrné konvergence je úplný metrický prostor, a tedy lze aplikovat (na kontraktivní zobrazení) Banachovu větu o pevném bodě.

Definice 29

Nechť $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a uvažujme množinu (křivku)

$$M = \{[x, y] \in \mathcal{D}(F) : F(x, y) = 0\}.$$

Dále nechť $F(x_0, y_0) = 0$. Pokud existuje okolí

$$\mathcal{O}([x_0, y_0]) = \{[x, y] \in \mathcal{D}(F) : |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \varepsilon\}$$

takové, že množina $M \cap \mathcal{O}$ je totožná s grafem funkce

$$y = f(x), \quad |x - x_0| < \delta,$$

říkáme, že funkce f je v okolí bodu $[x_0, y_0]$ daná *implicitně* rovnicí $F(x, y) = 0$.

Příklad 27

- $F(x, y) = x^2 + y^2 + 1, \quad M = \emptyset$
- $F(x, y) = x^2 + y^2, \quad M = \{[0, 0]\}$
- $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, M je jednotková kružnice se středem v počátku
- $F(x, y) = x^2 - x - y + 1, \quad M$ je graf funkce $y = x^2 - x + 1$
- $F(x, y) = \sin(x^2 + y^2), \quad M = \{[x, y] : x^2 + y^2 = k \cdot \pi, k \in \mathbb{N}\}$, je to systém soustředných kružnic o poloměru $r = \sqrt{k \cdot \pi}$ se středem v počátku
- $F(x, y) = |xy| - xy, \quad M$ je první a třetí kvadrant (včetně os)

Poznámka

- $F(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; y = f(x)$ (tj. platí pro každé $x \in \mathbb{R}$ a odpovídající y)
- $F(x, f(x)) = 0$ je funkce daná implicitně
- geometricky jde o průnik (grafů) funkcí $z = F(x, y)$ a $z = 0$

Přirozená otázka

Za jakých podmínek existuje f taková, že platí

$$F(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x) \quad ?$$

Věta 36 (Věta o existenci implicitní funkce I)

Nechť $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathcal{D}(F)$ je otevřená množina a $[x_0, y_0] \in A$. Dále nechť jsou F a $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ spojité na A,

$$F(x_0, y_0) = 0 \quad a \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Pak existují $h, k > 0$ ($h, k \in \mathbb{R}$) takové, že na množině

$$[x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - k, y_0 + k]$$

platí

$$F(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; y = f(x),$$

kde $f\colon [x_0 - h, x_0 + h] \to [y_0 - k, y_0 + k]$ je spojitá a jediná.

Důkaz

Principem je využití Banachovy věty o pevném bodě.

Označme $d = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ a $H(x,y) := y - \frac{F(x,y)}{d}$, pak

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = H(x,y).$$

Pro pevné x splňuje zobrazení $H(x,\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ podmínky Lagrangeovy věty o střední hodnotě, tedy máme

$$H(x,y_1) - H(x,y_2) = \frac{\partial H}{\partial y}(x,\xi)\cdot(y_1 - y_2), \quad \xi \in (y_1, y_2).$$

Pro $y_1, y_2 \in [y_0 - k, y_0 + k]$ platí $|H(x,y_1) - H(x,y_2)| \leq q(k)\cdot|y_1 - y_2|$, kde

$$q(k) = \max\left\{\left|\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)\right| : y \in [y_0 - k, y_0 + k]\right\}.$$

Máme $\frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = 1 - \frac{1}{d}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ a z předpokladu spojitosti parciální derivace F podle y plyne spojitost parciální derivace H podle y, tedy lze zvolit h, k tak, že pro $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ je $q(k) \leq q < 1$, tedy pro $\forall x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ platí, že zobrazení

$$H(x,\cdot)\colon [y_0 - k, y_0 + k] \to [y_0 - k, y_0 + k]$$

je kontrakce, neboť splňuje

$$|H(x,y_1) - H(x,y_2)| \leq q|y_1 - y_2|.$$

Jde o úplný metrický prostor, tedy lze použít Banachovu větu o pevném bodě, odkud plyne (existence a jednoznačnost)

$$H(x,y) = y = f(x) \qquad \forall x \in [x_0 - h, x_0 + h],$$

$$f\colon [x_0 - h, x_0 + h] \to [y_0 - k, y_0 + k].$$

Ještě ověřme, že f je spojitá. Zavedeme posloupnost funkcí $\{f_n\}$ jako $f_0(x) = y_0$ (je konstantní, tedy spojitá), dále

$$f_1(x) = y_1 = H(x,y_0) = H(x,f_0(x)), \dots$$
$$\dots, f_n(x) = y_n = H(x,y_{n-1}) = H(x,f_{n-1}(x))$$

jsou spojité a chceme ukázat, že i f je spojitá. Jejich rozdíl je

$$|f_n(x) - f(x)| = |y_n - y| = |H(x,y_{n-1}) - H(x,y)| \leq q|y_{n-1} - y|$$
$$= q|H(x,y_{n-2}) - H(x,y)| \leq q^2|y_{n-2} - y| = \dots \leq q^n|y_0 - y| \leq q^n k =: r_n,$$

$$\sup_{x\in[x_0-h,x_0+h]}\{|f_n(x) - f(x)|\} \leq r_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \;\Rightarrow\; f_n \rightrightarrows f,$$

kde $|y_0 - y| \leq k$, protože $y \in [y_0 - k, y_0 + k]$, tedy f je spojitá. $\square$

Poznámka

Tvrzení věty zaručuje existenci právě jedné spojité funkce f dané implicitně vztahem $F(x,y) = 0$ v okolí bodu $[x_0, y_0]$. Mohou zde ale existovat další funkce, které nejsou spojité.

Např. $F(x,y) = y^2 - y = 0$ implicitně zadává v okolí bodu $[0,0]$ spojitou funkci $f(x) \equiv 0$ a také Dirichletovu funkci

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Poznámka

Podmínka ve větě $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ je pouze dostačující (není nutná), např. funkce $F(x,y) = y^3 - x$ má v bodě $[0,0]$ derivaci nulovou, ale přesto v jeho okolí implicitně zadává funkci $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Věta 37

Nechť $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathcal{D}(F)$ je otevřená množina a $[x_0, y_0] \in A$. Dále nechť jsou F a $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ spojité na A,

$$F(x_0, y_0) = 0 \quad a \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Jestliže navíc existuje na nějakém okolí bodu $[x_0, y_0]$ $\mathcal{O}([x_0, y_0]) = [x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - k, y_0 + k]$ parciální derivace $\frac{\partial F}{\partial x}$ a je na něm spojitá, pak existuje derivace implicitně dané funkce f v x_0, $f\colon [x_0 - h, x_0 + h] \to [y_0 - k, y_0 + k]$, a platí

$$f'(x_0) = \frac{-F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}.$$

Důkaz.

Existence funkce f je zajištěna větou 36, jejíž předpoklady jsou splněny. Proto $\exists h > 0$ takové, že

$$F(x, f(x)) = 0, \qquad \forall x \in (x_0 - h\, x_0 + h).$$

Přímým derivováním (podle x) dostaneme

$$F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x)) f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{-F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}.$$

Dosazením $x = x_0, f(x_0) = y_0$ je důkaz hotov. $\square$

Příklad 28

Určete rovnici tečny a normály ke křivce $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ v bodě $[1, 1]$.

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy, \quad F_x = 3x^2 - 2y, \quad F_y = 3y^2 - 2x\big|_{[1,1]} = 1 \neq 0,$$

tedy lze použít věty 36 a 37, tj. $y = f(x)$ v $\mathcal{O}(1)$ a $f'(1) = \frac{-1}{1} = -1$. Odtud ihned

$$\begin{aligned} y - y_0 &= f'(x_0)(x - x_0) \\ y - 1 &= (-1)(x - 1) \\ t: y &= -x + 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y - y_0 &= \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) \\ y - 1 &= \frac{-1}{-1}(x - 1) \\ n: y &= x \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Příklad 29

Najděte body, ve kterých je tečna ke křivce $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$ rovnoběžná s některou ze souřadných os x a y.

$F(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 1$ a $F_y = 2y - x$ je nulová pro $x = 2y$. Dosazením do rovnice křivky dostaneme

$$4y^2 + y^2 - 2y \cdot y - 1 = 0 \Rightarrow 3y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Mimo tyto body definuje křivka implicitně nějakou funkci $f(x) = y$ a vzhledem ke spojitosti $F_x = 2x - y$ máme $f'(x) = \frac{-F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$.

Pro které body $[x, y]$ je $f'(x) = 0$, tj. $F_x(x, y) = 2x - y = 0$? Dosazením $y = 2x$ dostaneme

$$x^2 + 4x^2 - 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

V bodech $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ a $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ je derivace rovna nule, tedy tečna je rovnoběžná s osou x.

Pro druhou část budeme hledat implicitně danou funkci $g(y) = x$, tedy zopakujeme postup s $F(y,x) = x^2 + y^2 - xy - 1$, $F_x = 2x - y$ je nulová pro $y = 2x$. Odtud, opakováním/použitím předchozích výpočtů, vidíme, že mimo body $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ a $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ definuje křivka implicitně nějakou funkci $g(y) = x$ a vzhledem ke spojitosti $F_y = 2y - x$ máme

$$g'(y) = \frac{-F_y(y,x)}{F_x(y,x)}.$$

Pro které body $[x,y]$ je $g'(y) = 0$, tj. $F_y(y,x) = 0$?
Opět opakováním/použitím předchozích výpočtů vidíme, že je to v bodech $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ a $\left[-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, kde je tečna rovnoběžná s osou y. ■

Poznámka

Nechť $F(x,y) = 0$ implicitně určuje funkce $y = f(x)$.
Jestliže $F \in C^m(\mathcal{O}([x_0, y_0]))$, pak $f \in C^m(\mathcal{O}(x_0))$.

0. $f(x, g(x)) = 0$
1. $f_x(x, g(x)) + f_y(x, g(x)) \cdot g'(x) = 0$
2. $f_{xx}(x, g(x)) + f_{xy}(x, g(x)) \cdot g'(x) +$
   $[f_{yx}(x, g(x)) + f_{yy}(x, g(x)) \cdot g'(x)] \cdot g'(x) + f_y(x, g(x)) \cdot g''(x) = 0$
3. . . . atd.

Naznačený postup se často využíva pro výpočty, kdy postupně počítáme derivace a ty do následujících kroků dosazujeme pro zisk derivací vyššího řádu.

Příklad 30

Určete, zda graf křivky $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ leží v okolí bodu $[1,1]$ nad nebo pod tečnou.

$$F(x,y) = x^3 + y^3 - 2xy, \qquad F_y = 3y^2 - 2x\big|_{[1,1]} = 1 \neq 0$$

$$(x^3 + y^3 - 2xy)'_x = 3x^2 + 3y^2 \cdot y' - 2y - 2xy' = 0$$
$$\Rightarrow y' = \frac{2y - 3x^2}{3y^2 - 2x}\Big|_{[1,1]} = \frac{2-3}{3-2} = -1$$

$$(x^3 + y^3 - 2xy)''_{xx} = 6x + 6y \cdot y' \cdot y' + 3y^2 \cdot y'' - 2y' - 2y' - 2xy'' = 0$$
$$\Rightarrow\ 6 + 6 \cdot 1 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot 1 \cdot y'' - 2(-1) - 2(-1) - 2 \cdot 1 \cdot y'' = 0$$
$$\Rightarrow\ 16 + y'' = 0\ \Rightarrow\ y'' = -16 < 0$$

Tedy graf křivky leží pod tečnou. ■

Příklad 31

Člověk výšky 180 cm jde rychlostí 1.5 m/s k pouliční lampě, jejíž zdroj světla je 4.8 metrů nad zemí.

(i) Jakou rychlostí se pohybuje špička jeho stínu?
(ii) Jakou rychlostí se mění délka jeho stínu, když je daný člověk 3 metry od stojanu lampy?

- $x(t)$ = pozice člověka [m],
- $y(t)$ = pozice špičky jeho stínu [m],
- t = čas [s].

Potom víme, že $x'(t) = -1.5$ m/s (vzdálenost od lampy se zmenšuje, proto je tato derivace záporná). Hledáme

(i) $y'(t)$,
(ii) $[y(t) - x(t)]'$ pro $x = 3$ m.

(i) Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků vyplývá, že

$$\frac{4.8}{y(t)} = \frac{1.8}{y(t)-x(t)} \quad \Rightarrow \quad y(t) = 1.6\,x(t).$$

Derivováním podle t obdržíme

$$y'(t) = 1.6\,x'(t) \quad \Rightarrow \quad y'(t) = 1.6\cdot(-1.5) = -2.4 \text{ m/s}.$$

Špička stínu se pohybuje rychlostí 2.4 m/s (přibližuje se k lampě).

(ii) Máme

$$y(t)-x(t) = \frac{1.8}{4.8}\,y(t) = 0.375\,y(t),$$

tj. po derivování a dosazení

$$[y(t)-x(t)]' = 0.375\,y'(t) = 0.375\cdot(-2.4) = -0.9 \text{ m/s}.$$

Stín se zkracuje a to rychlostí 0.9 m/s (rychlost nezávisí na vzdálenosti člověka od lampy). ■

Příklad 32

Policejní vrtulník letí 3 km nad rovnou cestou v obci rychlostí 120 km/h. Pilot vidí protijedoucí auto a radarem zjistí, že když je auto od něj 5 km daleko, jejich vzdálenost se zmenšuje rychlostí 160 km/h. Určete rychlost auta v tomto okamžiku.

- $x(t)$ = auta (vodorovná) [km],
- $y(t)$ = vrtulníku (vodorovná) [km],
- t = čas [h],
- $s(t)$ = vzdušná vzdálenost vrtulníku a auta [km].

Tedy $y'(t) = 120$ km/h a $s'(t) = -160$ km/h pro $s = 5$ km (jejich vzdušná vzdálenost se zmenšuje, proto je derivace záporná).

Hledáme $x'(t)$ v tomto okamžiku.

Z rovnice

$$[x(t)-y(t)]^2 + 3^2 = s^2(t)$$

dostaneme derivováním podle t

$$2\,[x(t)-y(t)]\,[x'(t)-y'(t)] = 2\,s(t)\,s'(t),$$

tedy

$$x'(t) = y'(t) + \frac{s(t)\,s'(t)}{x(t)-y(t)}.$$

Pro $s = 5$ km je $x-y = \sqrt{5^2-3^2} = 4$ km, tedy dosazením do výše uvedeného vztahu dostaneme pro daný okamžik, že

$$x'(t) = 120 + \frac{5\cdot(-160)}{4} = -80 \text{ km/h}.$$

Auto jede (přibližuje se z pohledu pilota vrtulníku) v obci rychlostí 80 km/h. ■

Příklad 33

Určete lokální extrémy funkce dané implicitně vztahem

$$\ln\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

$$F(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x},$$

$$F_y = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{y-x}{x^2+y^2},$$

tedy pro $x \neq y$ zadává $F(x,y)$ implicitně funkci f. Pro ni nastává extrém ve stacionárních bodech.

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2x+2y\cdot y'}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{y'x-y}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x+yy'}{x^2+y^2} = \frac{y'x-y}{x^2+y^2} \Rightarrow x+yy' = xy'-y \Rightarrow y' = \frac{x+y}{x-y}$$

Odtud $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -y$, tedy

$$\ln\sqrt{2x^2} = \operatorname{arctg}\frac{-x}{x} \Rightarrow \ln\sqrt{2x^2} = -\frac{\pi}{4}$$
$$\Rightarrow \sqrt{2}|x| = \mathrm{e}^{-\pi/4} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{-\pi/4}$$

a dostáváme body $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{-\pi/4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{-\pi/4}\right], \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{-\pi/4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{-\pi/4}\right]$.

Pro určení extrému využijeme hodnotu druhé derivace v těchto bodech.

$$x + yy' = xy' - y \Rightarrow 1 + yy'' + y'y' = xy'' + y' - y' \Rightarrow y'' = \frac{1 + (y')^2}{x - y}$$

a dosazením příslušných hodnot máme $y''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{-\pi/4}\right) > 0$, je zde lokální minimum, a $y''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{-\pi/4}\right) < 0$, je zde lokální maximum. ■

Pro přehlednost následujícího zavedeme označení

$$F\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m, \qquad F = (f_1, \dots, f_m),$$
$$\mathrm{i} = (1, \dots, n), \quad \mathrm{j} = (n+1, \dots, n+m),$$
$$[\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{x}, \underbrace{y_1, \dots, y_m}_{y}] \in \mathbb{R}^{n+m},$$

tedy $[x, y] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ a $F \in C^1(A)$ vzhledem k i-tým, resp. j-tým proměnným právě tehdy, když F má spojité parciální derivace prvního řádu podle prvních n, resp. posledních m proměnných.

V metrickém prostoru (P, ρ) označme

$$\Omega[x_0, \delta] = \{x \in P : \rho(x, x_0) \le \delta\}, \qquad \Omega(x_0, \delta) = \{x \in P : \rho(x, x_0) < \delta\}.$$

Věta 38 (Věta o existenci implicitní funkce II)

Nechť $F\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathcal{D}(F)$ je otevřená množina a F je spojitá na A. Nechť navíc $F \in C^1(A)$ vzhledem k (posledním) j proměnným a existuje bod $[x_0, y_0] \in A$ tak, že $F(x_0, y_0) = 0$ a $F'_{\mathrm{j}}(x_0, y_0)$ je regulární (tj. $\det F'_{\mathrm{j}}(x_0, y_0) \neq 0$).

Pak existují $h > 0, k > 0$ a jediné spojité zobrazení $G\colon \Omega[x_0, h] \to \Omega[y_0, k]$ takové, že na $\Omega[x_0, h] \times \Omega[y_0, k]$ je rovnost $F(x, y) = 0$ ekvivalentní s $y = G(x)$.

Poznámka

- $G\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
- $F'_{\mathrm{j}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$

Poznámka

1. Pro $n = 1, m = 1$ je $\mathrm{i} = (1), \mathrm{j} = (2)$ a $F'_{\mathrm{j}}(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$. Stejně tak $\Omega[x_0, h] = [x_0 - h, x_0 + h]$ a $\Omega[y_0, k] = [y_0 - k, y_0 + k]$.
2. Pro $m = 1$ a n libovolné máme $F\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, tedy $\mathrm{i} = (1, \dots, n), \mathrm{j} = (n+1)$, $F'_{\mathrm{j}}(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_1^0, \dots, x_n^0, y^0)$, kde $(x_0, y_0) = (x_1^0, \dots, x_n^0, y^0)$, $F = F(x_1, \dots, x_n, y)$.

Věta 39

Nechť $F\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathcal{D}(F)$ *je otevřená množina,* $F \in C^1(A)$, *existuje bod* $[x_0, y_0] \in A$ *takový, že* $F(x_0, y_0) = 0$ *a* $\det F'_{\mathrm{j}}(x_0, y_0) \neq 0$.

Pak existují $h, k \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $k > 0$ *taková, že* $\Omega[x_0, h] \times \Omega[y_0, k] \subseteq A$, *a existuje jediné zobrazení* $G\colon \Omega[x_0, h] \to \Omega[y_0, k]$ *třídy* C^1 *na* $\Omega[x_0, h]$ *takové, že rovnost* $F(x, y) = 0$ *je ekvivalentní s* $y = G(x)$ *na* $\Omega[x_0, k] \times \Omega[y_0, k]$, *přičemž*

$$G'(x) = -\left[F'_{\mathrm{j}}(x, G(x))\right]^{-1} \cdot F'_{\mathrm{i}}(x, G(x))$$

pro $x \in \Omega(x_0, h)$.

Důkaz.

Důkazy vět 38 a 39 jsou analogické důkazům pro věty o jedné (dvou) proměnných, jen místo skalárů pracujeme s vektory a maticemi. □

Pozn.: Je-li $F \in C^k(A)$, pak $G \in C^k(\Omega(x_0, h))$.

Příklad 34

Uvažujme $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ danou jako

$$F(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1, x + y + z).$$

Tedy $\mathrm{i} = (1)$, $\mathrm{j} = (2, 3)$ a máme

$$F'_{\mathrm{j}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2z \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\det F'_{\mathrm{j}}(x, y, z) = 2y - 2z = 0 \Leftrightarrow y = z.$$

Značení

- Lin … lineární kombinace
- $A^\perp$ … ortogonální doplněk k A
- $\operatorname{rank} B = \mathrm{h}(B)$ … hodnost matice B

Definice 30

Nechť

- $F\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$, $F = (f_1, \dots, f_m)$,
- $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^{n+m} : F(x, y) = 0\}$, $[x_0, y_0] \in M$,
- $F \in C^1(\mathcal{O}(x_0, y_0))$, $\operatorname{rank}(F'(x_0, y_0)) = m$.

Normálovým prostorem k M v bodě $[x_0, y_0]$ nazýváme

$$\mathcal{N}_M(x_0, y_0) = \operatorname{Lin}\{f'_1(x_0, y_0), \dots, f'_m(x_0, y_0)\},$$

kde $f'_k(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_k}{\partial y_m}\right)^T$.

Tečným prostorem k M v bodě $[x_0, y_0]$ nazýváme

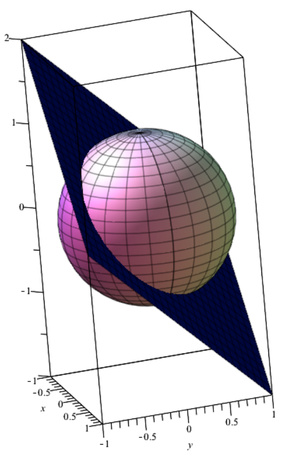
$$\mathcal{T}_M(x_0, y_0) = [\mathcal{N}_M(x_0, y_0)]^\perp.$$

Příklad 35 (Navazuje na příklad 34)

Máme
$F = (f_1, f_2) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1, x + y + z)$.
Množina M je množina řešení systému rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= 0, \\ x + y + z &= 0. \end{aligned}$$

Pak tečný prostor k M v bodě $[x, y, z] \in M$ je jednorozměrný prostor daný směrovým vektorem tečny ke kružnici M a normálový prostor je jeho dvourozměrný ortogonální doplněk (generovaný normálovými vektory ke sféře a rovině.



Poznámka

- V definici 30 nelze vypustit předpoklad na hodnost Jacobiho matice. Např.
$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 0, y \geq 0\}$$
jsou dvě polopřímky $0 \leq y = \pm x$ (graf $f(x) = |x|$). V počátku, kde jsou parciální derivace nulové, je hrot.
- Pro $f \colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R},\ f \in C^1(\mathcal{O}(x_0)),\ f(x_0) = 0, x_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ je
$$\mathcal{T}_M(x_0) = \langle f'(x_0), (x - x_0)\rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot (x - x_i^0),$$
kde $x = (x_1, \dots, x_{n+1}), x_0 = (x_1^0, \dots, x_{n+1}^0)$.

Definice 31

Nechť $f, g_1, \dots, g_m \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a uvažujme množinu $M \subset \mathcal{D}(f)$ danou jako

$$M = \{x = [x_1, \dots, x_n] : g_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, g_m(x_1, \dots, x_n) = 0\}.$$

Řekneme, že bod $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*] \in M$ je *lokálním minimem (maximem) funkce f vzhledem k množině M*, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x^*)$ takové, že

$$f(x) \geq f(x^*) \quad (f(x) \leq f(x^*)) \quad \text{pro} \quad x \in \mathcal{O}(x^*) \cap M.$$

Platí-li nerovnosti ostře, mluvíme o ostrých lokálních extrémech.

Poznámka

V případě, kdy je množina M zadána výše popsaným způsobem (systém rovností = vazebné podmínky), používá se terminologie *(ostré) vázané extrémy* (vázané podmínkami $g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0$).

Poznámka

Je-li naším cílem např. vepsat do koule $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ hranol tak, aby měl maximální objem, potom je studovanou („extremalizovanou") funkcí objem hranolu $V = 8xyz$ a vazebnou podmínkou je rovnice koule, resp. kulové plochy (sféry) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Úvaha

Uvažujme případ $n = 2, m = 1$, tj. $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a řešíme úlohu

$$f(x, y) \to \max / \min, \qquad M\colon g(x, y) = 0.$$

Vektor $(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$ je kolmý na vrstevnice f na úrovni $f(x_0, y_0) = c$ a vektor $(g_x(x_0, y_0), g_y(x_0, y_0))$ je normálový vektor křivky $g(x, y) = 0$ v bodě $[x_0, y_0]$. Aby byl v bodě $[x_0, y_0]$ extrém, musejí mít křivky $f(x, y) = c, g(x, y) = 0$ v tomto bodě společnou tečnu, tedy

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}: \quad (f_x, f_y) = \lambda \cdot (g_x, g_y).$$

(Viz také př. 21 a vyšetřování na hranici.)

Pro $n = 3, m = 2$, tj. $f, g_1, g_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) \to \max / \min$, $M\colon g_1(x, y, z) = 0 \wedge g_2(x, y, z) = 0$ obdržíme podobně, že

$$\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : (f_x, f_y, f_z) = \lambda_1 \cdot \left(\frac{\partial g_1}{\partial x}, \frac{\partial g_1}{\partial y}, \frac{\partial g_1}{\partial z}\right) + \lambda_2 \cdot \left(\frac{\partial g_2}{\partial x}, \frac{\partial g_2}{\partial y}, \frac{\partial g_2}{\partial z}\right).$$

Věta 40

Nechť $f, g_1, \dots, g_m\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mají spojité parciální derivace, $1 \leq m < n$,

$$M = \{x = [x_1, \dots, x_n] : g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0\}$$

je množina určená vazebnými podmínkami ($g_i(x) = 0, i = 1, \dots, m$) a předpokládejme, že v každém bodě množiny M má Jacobiho matice zobrazení $G = (g_1, \dots, g_m)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ hodnost m, tj. $\operatorname{rank}(G'(x)) = m$.

Je-li x^* lokálním extrémem funkce f na množině M, pak její derivace patří do normálového prostoru k M v bodě x^*, tj. $f'(x^*) \in \mathcal{N}_M(x^*)$, tedy existují konstanty $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, tzv. Lagrangeovy multiplikátory, takové, že platí

$$f'(x^*) - \left[\lambda_1 g_1'(x^*) + \dots + \lambda_m g_m'(x^*)\right] = 0. \tag{L}$$

Pro jednoduchost zápisu je v zápisu (L) použito značení $f' = (f_{x_1}, \dots, f_{x_n})^T$ a podobně pro g_i'. Tj. jedná se o systém rovnic, kde v každé rovnici derivujeme podle jiné proměnné.

Důkaz

Pro jednoduchost předpokládejme, že funkce $g_1, \dots, g_m$ jsou tvaru

$$g_i(x) = \langle a_i, x\rangle + \alpha_i, \qquad a_i \in \mathbb{R}^n, \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$$

(jinak nahradíme plochu $g_i(x) = 0$ tečnou nadrovinou v bodě $[x^*, g_i(x^*)]$).

Sporem předpokládejme, že $f'(x^*) \notin \mathcal{N}_M(x^*) = \operatorname{Lin}\{g_1'(x^*), \dots, g_m'(x^*)\}$, tedy existuje vektor

$$h \in \mathcal{T}_M(x^*) = \operatorname{Lin}\{g_1'(x^*), \dots, g_m'(x^*)\}^\perp = \operatorname{Lin}\{a_1, \dots, a_m\}^\perp$$

takový, že $\langle f'(x^*), h\rangle \neq 0$.

Nechť $x = x^* + \alpha h$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ (dostatečně malé),

$$g_i(x) = g_i(x^* + \alpha h) = \langle a_i, x^* + \alpha h\rangle + \alpha_i = \underbrace{\langle a_i, x^*\rangle + \alpha_i}_{=0, x^* \in M} + \underbrace{\alpha\langle a_i, h\rangle}_{=0, h \in \mathcal{T}_M(x^*)},$$

tedy $x = x^* + \alpha h \in M$ a dále

$$f(x) = f(x^* + \alpha h) = |\text{diferenciál}| = f(x^*) + \alpha \underbrace{\langle f'(x^*), h\rangle}_{\beta} + \underbrace{\tau(\alpha h)}_{\to 0}$$

pro $\alpha \to 0$, $f(x) - f(x^*) = \alpha \cdot \beta + \boxed{\to 0}$ a podle znaménka α může být rozdíl jak kladný, tak i záporný, a tedy extrém nenastává.

□

Poznámka

- Použité $g_i(x) = \langle a_i, x\rangle + \alpha_i$ je afinní zobrazení.
- Afinní zobrazení zobrazí trojici bodů ležících na jedné přímce buď do jednoho bodu, nebo na trojici bodů ležících na jedné přímce při zachování dělícího poměru. Zejména tedy převádí přímky na přímky (nebo bod). Obecně převádí afinní podprostor na afinní podprostor.
- Afinní zobrazení lze vyjádřit jako složení lineárního zobrazení s posunutím (tj. zahrnuje otáčení, zrcadlení, zkosení, změnu měřítka,...).
- Afinní podprostor vektorového prostoru $\mathcal{V}$ je množina $\{u + v : u \in \mathcal{V}, v \in \tilde{\mathcal{V}}\}$, kde $\tilde{\mathcal{V}}$ je vektorový podpostor prostoru $\mathcal{V}$.
- Vektorový prostor je afinní, ale naopak to neplatí. Např. přímka v $\mathbb{R}^n$ procházející počátkem je afinní i vektorový podprostor, ale přímka posunutá mimo počátek je pouze afinní. (To je jedna ze základních motivací pro zavedení tohoto pojmu – umožňuje lépe studovat geometrii prostoru $\mathbb{R}^n$.)

Definice 32

Bodu x^*, pro který platí $f'(x^*) \in \mathcal{N}_M$ (tj. existují Lagrangeovy multiplikátory) říkáme *stacionární bod* funkce f na množině M dané

$$g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0, \quad x = [x_1, \dots, x_n].$$

Funkce $L(x, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$ se nazývá *Lagrangeova funkce*.

$$f'(x^*) \in \mathcal{N}_M(x^*) \quad \Leftrightarrow \quad L_x(x^*, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = 0 \text{ na } M$$

Principem metody je „zabudování“ podmínek do Lagrangeovy funkce, kterou pak vyšetřujeme bez omezení.

Najít stacionární body znamená najít řešení systému $(n + m)$ rovnic

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_1}(x) &= 0\\
&\vdots\\
\frac{\partial f}{\partial x_n}(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_n}(x) &= 0\\
g_1(x) &= 0\\
&\vdots\\
g_m(x) &= 0
\end{aligned}$$

pro neznámé $x = [x_1, \dots, x_n]$ a $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Věta 41

Nechť $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*]$ je stacionární bod funkce f na množině M, funkce $f, g_1, \dots, g_m$ mají v x^* spojité parciální derivace druhého řádu, $m < n$, Jacobiho matice zobrazení $G = (g_1, \dots, g_m) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ má v x^* hodnost m a nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ jsou příslušné Lagrangeovy multiplikátory.

Jestliže $\langle L_{xx}(x^*, \lambda_1, \dots, \lambda_m)h, h\rangle$ je kladný (záporný) pro všechna $h \neq 0, h \in \mathcal{T}_M(x^*)$, pak v bodě x^* nastává lokální minimum (maximum).

Jestliže existují $h_1, h_2 \in \mathcal{T}_M(x^*)$ taková, že $\langle L_{xx}(x^*, \lambda_1, \dots, \lambda_m)h_1, h_1\rangle > 0$ a současně $\langle L_{xx}(x^*, \lambda_1, \dots, \lambda_m)h_2, h_2\rangle < 0$, pak ve stacionárním bodě x^* extrém nenastává.

$\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, $L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$,

$$L_{xx}(x, \lambda) = f_{xx}(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i)_{xx}(x)$$

Důkaz.

Důkaz lze provést stejně jako pro nevázané extrémy přes Taylorův rozvoj druhého řádu. První derivace jsou nulové a podle kvadratické části rozhodujeme o extrému. □

Poznámka

Je jedno, zda máme v Lagrangeově funkci před částí s multiplikátory plus, nebo minus. Jejich hodnoty v těchto případech jednoduše vyjdou s opačnými znaménky.

Příklad 36

Najděte extrémy funkce $f(x,y) = 2x^2 + 4y^2$ na množině $x^2 + y^2 = 9$.

Sestavíme Lagrangeovu funkci

$$L(x,y,\lambda) = 2x^2 + 4y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 9)$$

a derivujeme ji podle všech proměnných. Tyto parciální derivace položíme rovny nule a řešíme soustavu tří rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned} x(4-2\lambda) &= 0 \\ y(8-2\lambda) &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 9. \end{aligned}$$

Dostaneme 4 stacionární body $[0,\pm 3], [\pm 3, 0]$ a k nim příslušné hodnoty λ (postupně $4, 2$). Zda v nich nastává extrém zjistíme z definitnosti formy dané

$$\begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix}.$$

Tj., pokud je výraz

$$(\mathrm{d}x \quad \mathrm{d}y) \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}$$

kladný pro všechna $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) \neq (0,0)$, pak je pozitivně definitní, pokud záporný, pak je negativně definitní a pokud najdeme dva vektory takové, že je daný výraz pro jeden kladný a pro druhý záporný, pak je indefinitní. $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ ovšem bereme jen z tečného prostoru dané množiny, tedy takové, jež splňují podmínku

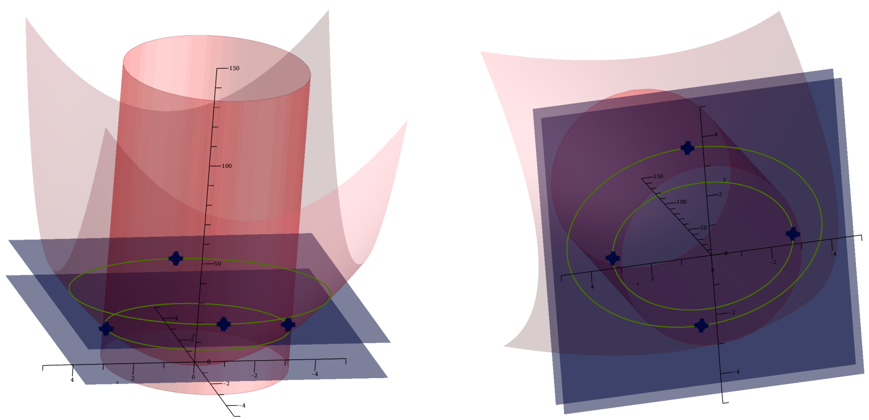
$$2x\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y = 0.$$

Dosazením bodu $[0,3]$ do této podmínky dostaneme, že $\mathrm{d}y = 0$, tedy $\mathrm{d}x$ musí být od nuly různé. Vyšetřovaný výraz je tedy (pro tento bod $\lambda = 4$)

$$-4(\mathrm{d}x)^2,$$

který je pro každé $\mathrm{d}x \neq 0$ záporný. Vyšetřovaná forma je tedy negativně definitní a v bodě $[0,3]$ je ostré lokální maximum.

Podobně zjistíme, že maximum nastává i v bodě $[0,-3]$ a v bodech $[\pm 3, 0]$ má funkce minima. Na obrázku jsou tyto body označeny růžovými puntíky.



■

Příklad 37

Najděte lokální extrémy funkce $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25}$ na $M\colon x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Sestrojíme Lagrangeovu funkci dané úlohy

$$L(x, y, z, \lambda) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Spočítáme parciální derivace

$$\begin{aligned} L_x &= \frac{x}{2} + 2\lambda x = 0, \\ L_y &= \frac{2y}{9} + 2\lambda y = 0, \\ L_z &= \frac{2z}{25} + 2\lambda z = 0, \\ g(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{aligned}$$

Pak máme systém rovnic

$$\begin{aligned} x\left(\frac{1}{2} + 2\lambda\right) &= 0 \\ y\left(\frac{2}{9} + 2\lambda\right) &= 0 \\ z\left(\frac{2}{25} + 2\lambda\right) &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \end{aligned}$$

a odtud získáme multiplikátory a stacionární body

$$\begin{aligned} \lambda = -\frac{1}{4} &\Rightarrow y = 0, z = 0, x = \pm 1 \Rightarrow [1, 0, 0], [-1, 0, 0], \\ \lambda = -\frac{1}{9} &\Rightarrow x = 0, z = 0, y = \pm 1 \Rightarrow [0, 1, 0], [0, -1, 0], \\ \lambda = -\frac{1}{25} &\Rightarrow x = 0, y = 0, z = \pm 1 \Rightarrow [0, 0, 1], [0, 0, -1]. \end{aligned}$$

Určíme matici druhých derivací (Hessovu matici), tedy

$$L_{xx} = \frac{1}{2} + 2\lambda, \quad L_{yy} = \frac{2}{9} + 2\lambda, \quad L_{zz} = \frac{2}{25} + 2\lambda$$

a smíšené derivace jsou rovny nule. Pak

$$\mathrm{d}^2 L = \left(\frac{1}{2} + 2\lambda\right) h_1^2 + \left(\frac{2}{9} + 2\lambda\right) h_2^2 + \left(\frac{2}{25} + 2\lambda\right) h_3^2.$$

Vyšetříme chování kvadratické formy $\langle L_{xx} h, h\rangle$ vzhledem k $h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathcal{T}_M(x^*)$.

Poznamenejme, že $\mathcal{N}_M$: Lin$\{[x, y, z]\}$, $xh_1 + yh_2 + zh_3 = 0$ (diferenciál vazebné podmínky) a

$$\langle [x, y, z], (h_1, h_2, h_3)\rangle = 0 \Leftrightarrow (h_1, h_2, h_3) \in \mathcal{T}_M.$$

- Pro $\lambda = -\frac{1}{4}$ je
$$\mathrm{d}^2 L = \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{2}\right) h_2^2 + \left(\frac{2}{25} - \frac{1}{2}\right) h_3^2$$
negativně definitní, tedy v bodech $[\pm 1, 0, 0]$ nastává lokální maximum.
- Pro $\lambda = -\frac{1}{25}$ je
$$\mathrm{d}^2 L = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{25}\right) h_1^2 + \left(\frac{2}{9} - \frac{2}{25}\right) h_2^2$$
pozitivně definitní, tedy v bodech $[0, 0, \pm 1]$ nastává lokální minimum.
- Pro $\lambda = -\frac{1}{9}$ je
$$\mathrm{d}^2 L = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{9}\right) h_1^2 + \left(\frac{2}{25} - \frac{2}{9}\right) h_3^2$$
na celém prostoru indefinitní, ale my potřebujeme znát chování na tečném prostoru, tedy $0 \cdot h_1 \pm 1 \cdot h_2 + 0 \cdot h_3 \Leftrightarrow h_2 = 0$, tedy i pro $h_2 = 0$ je forma indefinitní, a tedy extrém v bodech $[0, \pm 1, 0]$ nenastává.

$\blacksquare$

Příklad 38

Do elipsoidu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ vepište hranol s maximálním objemem.

Objem hranolu je $V=8xyz$ za podmínky $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, tj.

$$L=8xyz-\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right).$$

$$\begin{aligned}
L_x&=8yz-\frac{2\lambda x}{a^2}=0\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}=\frac{1}{\lambda}4xyz,\\
L_y&=8xz-\frac{2\lambda y}{b^2}=0\Rightarrow\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{\lambda}4xyz,\\
L_z&=8xy-\frac{2\lambda z}{a^2}=0\Rightarrow\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{\lambda}4xyz,\\
&\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.
\end{aligned}$$

Odtud $\lambda=12xyz$ a

$$\begin{aligned}
\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)&=0\\
\lambda\left(\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)&=0\\
\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)&=0.
\end{aligned}$$

Případ $\lambda=0$ dává stacionární bod, ale jde o minimum, což nechceme. Po úpravě dostaneme $\frac{3z^2}{c^2}=1$, $\frac{3y^2}{b^2}=1$, $\frac{3x^2}{a^2}=1$, pak $x=\frac{a}{\sqrt{3}}, y=\frac{b}{\sqrt{3}}, z=\frac{c}{\sqrt{3}}$. Záporné hodnoty můžeme vynechat, protože hledáme objem, což je kladná veličina. Z podmínky úlohy můžeme říct, že v $\left[\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right]$ nastává maximum s hodnotou $V=\frac{8}{3\sqrt{3}}abc$. ■

Příklad 39

Odvoďte vzorec pro vzdálenost bodu $x^*\in\mathbb{R}^n$ od nadroviny ρ: $\langle a,x\rangle=\alpha$.

Chceme $d(x^*-x)\to\min$, ale hledat minimum funkce $\sqrt{f}$ je totéž jako hledat minimum funkce f, tedy

$$[d(x^*-x)]^2=\langle x^*-x,x^*-x\rangle\to\min\ \text{ za podmínky } \langle a,x\rangle=\alpha,$$

$$L(x,\lambda)=\langle x^*-x,x^*-x\rangle-\lambda(\langle a,x\rangle-\alpha).$$

Potom

$$\begin{aligned}
L_x=2(x^*-x)-\lambda a=0\ &\Rightarrow\ 2\langle x^*-x,a\rangle=\lambda\|a\|^2\\
&\Rightarrow\ 2\langle x^*,a\rangle-2\underbrace{\langle a,x\rangle}_{=\alpha}=\lambda\|a\|^2\\
&\Rightarrow\ 2\langle x^*,a\rangle-2\alpha=\lambda\|a\|^2\ \Rightarrow\ \lambda=\frac{2\langle x^*,a\rangle-2\alpha}{\|a\|^2}.
\end{aligned}$$

Dosadíme do L_x

$$2x^*-2x=\frac{2\langle x^*,a\rangle-2\alpha}{\|a\|^2}\cdot a\ \Rightarrow\ x^*-x=\frac{\langle x^*,a\rangle-\alpha}{\|a\|}$$

a dosazením do původní rovnice pro vzdálenost dostaneme

$$\langle x^*-x,x^*-x\rangle=\frac{(\langle x^*,a\rangle-\alpha)^2}{\|a\|^2},$$

tedy

$$d(x^*,\rho)=\frac{|\langle x^*,a\rangle-\alpha|}{\|a\|}.$$

■