Derivace funkce

Petr Hasil

Přednáška z Matematické analýzy

Obsah

Obsah

Definice 1 (Derivace funkce f v bodě)

Nechť x_0 je vnitřním bodem $\mathcal{D}(f)$. Jestliže existuje limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

nazýváme tuto limitu *derivací funkce f v bodě x_0*, píšeme $f'(x_0)$.

Poznámka

- Je-li limita $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$ řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *vlastní derivaci*.
- Je-li limita $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *nevlastní derivaci* $+\infty$ nebo $-\infty$.

Definice 2 (Derivace funkce)

Má-li funkce f derivaci v každém bodě intervalu $I \subseteq \mathcal{D}(f)$, pak se funkce $x \mapsto f'(x)$ nazývá *derivace funkce f* a značí se f'.

Definice 3 (Derivace zprava / zleva)

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Poznámka

Zavedením h jako $x = x_0 + h$ získáme

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Následující tvrzení jsou přímým důsledkem tvrzení o limitách funkcí.

1. Funkce f má v bodě x_0 nejvýše jednu derivaci.
2. Derivace v bodě existuje právě tehdy, když existují jednostranné derivace a $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.
3. Nechť funkce f, g mají derivace v bodě x_0, pak v x_0 mají derivace i funkce: $f \pm g$, $f \cdot g$ a je-li $g(x_0) \neq 0$ i f/g.

Poznámka

Pozor, tvrzení 3 se týká pouze existence derivace, nikoli její hodnoty.

Definice 4

Nechť funkce f má v bodě x_0 derivaci $f'(x_0)$, pak se přímka

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

nazývá *tečna* ke grafu funkce f v bodě $[x_0, y_0]$.Přímka procházející bodem $[x_0, y_0]$,která je kolmá k tečně v tomto bodě se nazývá *normála* ke grafu funkce f v bodě $[x_0, y_0]$.

Poznámka

Protože součin směrnic dvou vzájemně kolmých přímek je roven -1, je rovnice normály ke grafu funkce f v bodě x_0

(i) pro $f'(x_0) \neq 0$

$$y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

(ii) pro $f'(x_0) = 0$

$$x = x_0.$$

Poznámka

Má-li funkce f v bodě x_0 nevlastní derivace a je v tomto bodě spojitá, potom má v x_0 tečnu

$$t : x = x_0$$

a normálu

$$n : y = f(x_0).$$

(Např. funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v bodě $x_0 = 0$.)

Příklad 1

Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $y = \sqrt{1-x^2}$ v bodě $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, tedy jedná se o bod grafu funkce.

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}} = -1$$

$$t : y - \frac{1}{\sqrt{2}} = -1\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\boxed{t : y = -x + \sqrt{2}}$$

$$n : y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0)$$

$$n : y - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\boxed{n : y = x}$$

Geometrický význam derivace

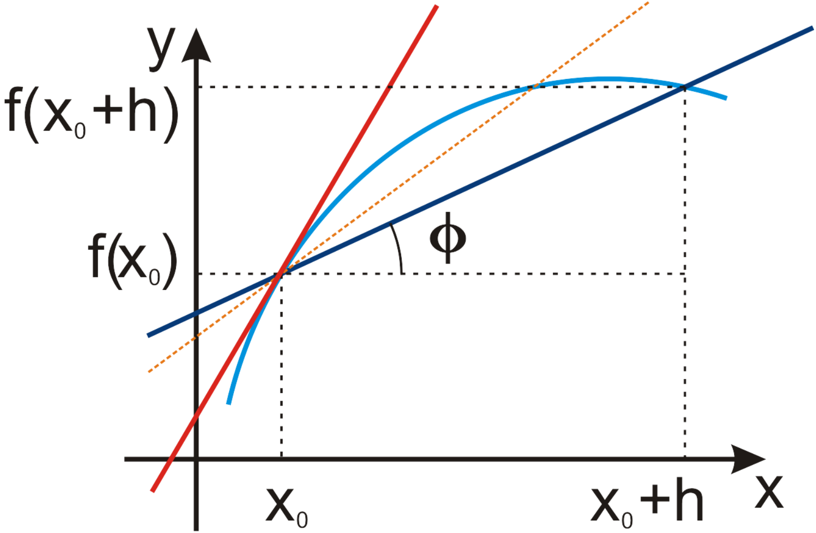
Sečna grafu funkce f procházející body $[x_0, f(x_0)]$ a $[x_0 + h, f(x_0 + h)]$ má směrnici

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Jestliže se s bodem $x_0 + h$ blížíme k bodu x_0 (tj. provádíme limitní přechod $h \to 0$), přejde tato sečna v tečnu v bodě $[x_0, f(x_0)]$. Směrnice tečny ke grafu funkce f v bodě x_0 je tedy

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

což je přesně derivace funkce f v bodě x_0.


y
f(x0+h)
f(x0)
ϕ
x0
x0+h
x

Věta 1

Nechť funkce f a g mají v bodě x_0 derivaci a nechť $c \in \mathbb{R}$ je libovolné. Pak platí

(i)
$$(cf)' = cf',$$

(ii)
$$(f \pm g)' = f' \pm g',$$

(iii)
$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g',$$

(iv)
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \quad \textit{pro} \quad g \neq 0.$$

Důkaz (iii).

$$
\begin{aligned}
\big(f(x)\cdot g(x)\big)'_{x=x_0} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} g(x+h)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= \underbrace{\lim_{h\to 0} g(x+h)}_{g(x)}\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{f'(x)} + f(x)\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{g'(x)} \\
&= f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).
\end{aligned}
$$

(Pro $h\to 0$ máme $x\to x_0$.) □

Věta 2

Má-li funkce v bodě x_0 derivaci (vlastní), pak je v tomto bodě spojitá.

Důkaz.

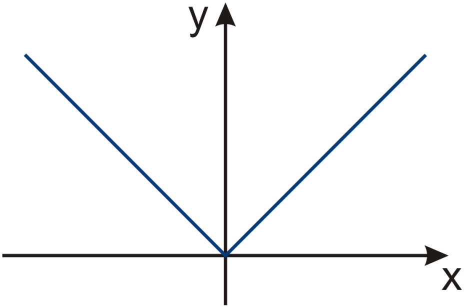
$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\underbrace{\lim_{x \to x_0} (x - x_0)}_{0} \cdot \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\text{číslo} \in \mathbb{R}} = 0.$$

$\square$

Poznámka

Opačné tvrzení neplatí – ze spojitosti neplyne existence derivace.
Např. funkce $f(x) = |x|$ je spojitá na celém $\mathbb{R}$, ale v $x_0 = 0$ nemá derivaci.

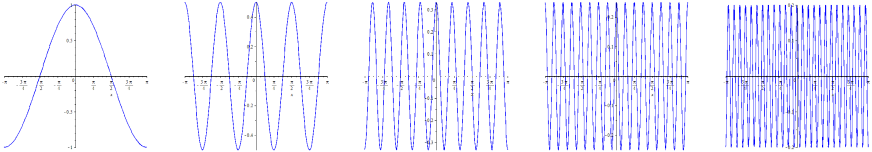


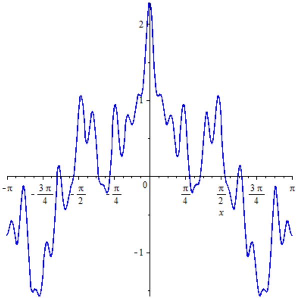
Poznámka

Bolzano a Weierstrass sestrojili funkci, která je spojitá v každém bodě, ale v žádném nemá derivaci.

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\cos\left(n^2 x\right), \quad g_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x)$$

Pro $n \to \infty$ je g_n spojitá („hustá, roztřesená čára“).





$$g_5(x) = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{i} \cos\left(i^2 x\right)$$

Věta 3

Nechť funkce f *má derivaci v bodě* x_0 *a funkce* g *má derivaci v bodě* $y_0 = f(x_0)$. *Pak složená funkce*

$$F(x) = g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x)$$

má derivaci v bodě x_0 *a platí, že*

$$F'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

Důkaz.

Předpokládejme nejprve, že existuje $\mathcal{P}(x_0)$ takové, že $f(x) \neq f(x_0)$ pro $\forall x \in \mathcal{P}(x_0)$.

$$
\begin{aligned}
F'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \cdot f'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0).
\end{aligned}
$$

Jestliže neexistuje $\mathcal{P}(x_0)$ takové, že $f(x) \neq f(x_0)$ pro $\forall x \in P(x_0)$, pak existuje posloupnost $x_n \to x_0$ taková, že $f(x_n) = f(x_0)$, tedy

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = 0,$$

pak

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{n \to \infty} \frac{F(x_n) - F(x_0)}{x_n - x_0}$$
$$= \lim_{n \to \infty} \frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{x_n - x_0} = 0.$$

Tedy i v tomto případě vzorec platí, neboť

$$F'(x_0) = 0 = \underbrace{g'(y_0)}_{\text{konečné číslo}} \cdot \underbrace{0}_{=f'(x_0)} .$$

$\square$

Věta 4

Nechť funkce f má pro každé $x \in I$ derivaci a $f'(x) \neq 0$. Pak na intervalu $J = f(I) = \{y : \exists x \in I, f(x) = y\}$ existuje funkce inverzní a pro její derivaci platí

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Důkaz (odvození).

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \overset{\text{derivujeme}}{\longrightarrow} \quad f'(f^{-1}(x)) \cdot [f^{-1}(x)]' = 1$$

$$\Downarrow$$

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

□

Věta 5 (O derivaci elementárních funkcí)

Nechť $n \in \mathbb{Z}$, $a, b, c, \alpha \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $b \neq 1$.

- $(c)' = 0$,
- $(x^n)' = nx^{n-1}$,
- $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$,
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$,
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,
- $(\log_b x)' = \frac{1}{x \cdot \ln b}$,
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$,
- $(\sin x)' = \cos x$,
- $(\cos x)' = -\sin x$.
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$,
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$,
- $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Důkaz.

- $(c)' = 0, c \in \mathbb{R}$:

$$(c)' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

- $(x^n)' = nx^{n-1}, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}(x^n)' &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}h^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left[nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\right] = nx^{n-1}.\end{aligned}$$

- $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}, n \in \mathbb{N}$:

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{0\cdot x^n - 1\cdot (x^n)'}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

- $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$:

$$(\mathrm{e}^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^h - 1)}{h}$$

$$= \mathrm{e}^x \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \mathrm{e}^x \cdot 1 = \mathrm{e}^x .$$

- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $a \in \mathbb{R}^+$:

$$(a^x)' = \left(\mathrm{e}^{\ln a^x}\right)' = \left(\mathrm{e}^{x \ln a}\right)' = \mathrm{e}^{x \ln a}(1 \cdot \ln a + x \cdot 0) = a^x \ln a.$$

- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$$(\ln x)' = \left| f^{-1}(x) = \ln x, f(x) = \mathrm{e}^x \Rightarrow \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \right| = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

- $(\log_b x)' = \frac{1}{x \cdot \ln b}$, $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$:

$$(\log_b x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln b}\right)' = \frac{1}{\ln b}(\ln x)' = \frac{1}{x \cdot \ln b}.$$

- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{R}$:

$$(x^\alpha)' = \left(\mathrm{e}^{\alpha \ln x}\right)' = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}\,\frac{\alpha}{x} = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

- $(\sin x)' = \cos x$:

$$\begin{aligned}
(\sin x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\cos x\frac{\sin h}{h} + \lim_{h\to 0}\sin x\frac{\cos h-1}{h}\\
&= \cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} + \sin x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}\\
&= \cos x - 2\sin x\lim_{h\to 0}\frac{\sin^2(h/2)}{h}\\
&= \cos x - 2\sin x\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h/2)}{h}}_{=1/2}\lim_{h\to 0}\sin(h/2)\\
&= \cos x - 0 = \cos x.
\end{aligned}$$

- $\cos x$ podobně, $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ jako derivaci podílu.

- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

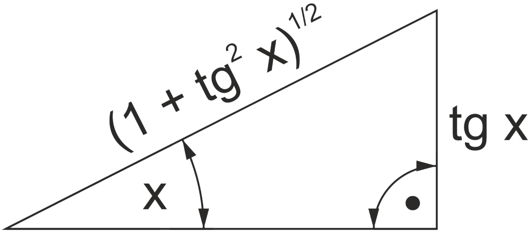
$$(\arcsin x)' = \left| f^{-1}(x) = \arcsin x, f(x) = \sin x \Rightarrow \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \right|$$
$$= \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$(\arccos x)' = \left| \arccos x = \pi/2 - \arcsin x \right| = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$:

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{arctg} x)' &= \left| f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x,\, f(x) = \operatorname{tg} x \Rightarrow \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \right| \\
&= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(arctgx)}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}
$$



Obr. 1: $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$

- $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$:

$$(\operatorname{arccotg} x)' = \left| \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \pi/2 \right| = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Věta 6 (Logaritmická derivace)

$$\left[f(x)^{g(x)}\right]' = f(x)^{g(x)} \left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

Důkaz.

$$\left[f(x)^{g(x)}\right]' = \left[e^{\ln(f(x))^{g(x)}}\right]' = \left[e^{g(x) \ln f(x)}\right]'$$
$$= e^{g(x) \ln f(x)} \left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{1}{f(x)} f'(x)\right]$$
$$= f(x)^{g(x)} \left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

$\square$

Příklad 2

Derivujte a upravte funkci

$$y = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

$y' = \frac{1}{x^3+1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Definice 5 (Derivace vyšších řádů)

$$f'' := (f')', \dots, f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

Příklad 3

Odvoďte vzorec pro výpočet n-té derivace funkce $\frac{1}{x}$.

$$f' = -\frac{1}{x^2},\ f'' = \frac{2}{x^3},\ f''' = -\frac{2\cdot 3}{x^4},\ \dots,\ f^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

Indukční krok:

$$f^{(n+1)} = \left[(-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}\right]' = -(-1)^n \frac{n!(n+1)}{x^{n+2}} = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}.$$

Věta 7 (Leibnitzovo pravidlo)

Pro n-tou derivaci součinu platí vzorec

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(n-i)}.$$

Důkaz.

Použijeme indukci.

$\boxed{n=1}$ $\quad (fg)' = f'g + fg' = \binom{1}{0} f'g + \binom{1}{1} fg' \quad \checkmark$

$\boxed{n \to n+1}$

$$\begin{aligned}
[(fg)^{(n)}]' &= [\tbinom{n}{0} f^{(n)} g + \tbinom{n}{1} f^{(n-1)} g' + \cdots + \tbinom{n}{n-1} f' g^{(n-1)} + \tbinom{n}{n} f g^{(n)}]' \\
&= \tbinom{n}{0} [f^{(n+1)} g + f^{(n)} g'] + \tbinom{n}{1} [f^{(n)} g' + f^{(n-1)} g''] + \cdots \\
&\qquad \cdots + \tbinom{n}{n-1} [f'' g^{(n-1)} + f' g^{(n)}] + \tbinom{n}{n} [f' g^{(n)} + f g^{(n+1)}] \\
&= \tbinom{n+1}{0} f^{(n+1)} g + \underbrace{[\tbinom{n}{0} + \tbinom{n}{1}]}_{=\binom{n+1}{1}} f^{(n)} g' + \cdots \\
&\qquad \cdots + \underbrace{[\tbinom{n}{n-1} + \tbinom{n}{n}]}_{=\binom{n+1}{n}} f' g^{(n)} + \tbinom{n+1}{n+1} f g^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n+1} \tbinom{n+1}{i} f^{(n+1-i)} g^{(i)}
\end{aligned}$$

$\square$

Příklad 4

Vypočtěte třetí derivaci funkce $f(x) = \mathrm{e}^x \sin 2x$.

$$f''' = \mathrm{e}^x \sin 2x + 3 \cdot 2\,\mathrm{e}^x \cos 2x - 3 \cdot 4\,\mathrm{e}^x \sin 2x - 8\,\mathrm{e}^x \cos 2x$$
$$= \mathrm{e}^x(\sin 2x + 6 \cos 2x - 12 \sin 2x - 8 \cos 2x) = \mathrm{e}^x(-11 \sin 2x - 2 \cos 2x).$$

Věta 8 (Rolleova věta o střední hodnotě)

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a na otevřeném intervalu (a, b) existuje její derivace f'.
Jestliže $f(a) = f(b)$, pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f'(c) = 0$.

Důkaz.

Je-li f konstantní funkce, je tvrzení triviální ($f' \equiv 0$).
Nechť f není konstantní funkce. Pak podle 2. Weierstrassovy věty $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$ takové, že

$$f(x_1) = \sup\{f(x), x \in [a, b]\}, \; f(x_2) = \inf\{f(x), x \in [a, b]\}.$$

Alespoň jeden z bodů x_1, x_2 je v (a, b). Předpokládejme, že je to x_1 (pro x_2 podobně). Podle předpokladu existuje $f'(x_1)$.

Je-li $f'(x_1) > 0$ z definice derivace plyne, že $f(x) > f(x_1)$ v nějakém prstencovém okolí $P^+(x_1)$, což je spor s maximalitou $f(x_1)$.

Podobně pro $f'(x_1) < 0 \Rightarrow \exists P^-(x_1)$: $f(x) > f(x_1)$, opět spor.

Tedy $f'(x_1) = 0$, čili $x_1 = c$. □

Věta 9 (Lagrangeova)

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a na intervalu (a, b) existuje derivace f'.
Pak existuje $c \in (a, b)$takové, že $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$, tj.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Důkaz.

Uvažujme přímku procházející body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

a funkci

$$F(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right],$$

tedy $F(a) = 0$, $F(b) = 0$.

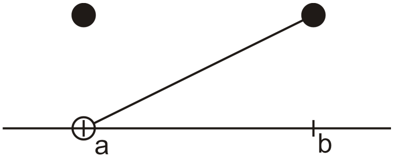
Podle věty 8 existuje $c \in (a, b)$ takové, že $F'(c) = 0$.
Zároveň $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.Pro $x = c$ tedy máme

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \Leftrightarrow \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

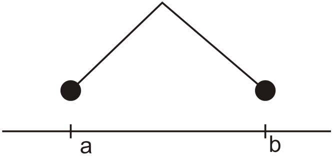
□

Poznámka

Předpoklady vět 8 a 9 nelze zeslabit. Např. předpoklad spojitosti na $[a, b]$ nelze nahradit spojitostí na (a, b) (obr. 2). Nelze ani vypustit předpoklad existence derivace (obr. 3).



Obr. 2: Interval $(a, b]$



Obr. 3: Existence derivace

Věta 10 (Cauchyova)

Nechť funkce f a g jsou spojité na $[a, b]$ a na (a, b) existují jejich derivace a $g'(x) \neq 0, x \in (a, b)$. Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Důkaz.

Uvažujeme funkci

$$F(x) = [g(b) - g(a)][f(x) - f(b)] - [f(b) - f(a)][g(x) - g(b)]$$

a aplikujeme Rolleovu větu (Věta 8). □

Poznámka

- Lagrangeova věta je speciálním případem Cauchyovy věty pro $g(x) = x$.
- Rolleova věta je speciálním typem Lagrangeovy věty pro $f(a) = f(b)$.

Věta 11 (L'Hospitalovo pravidlo)

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$*, na ryzím okolí* x_0 *jsou funkce* f, g *diferencovatelné a* $g'(x) \neq 0$*. Dále nechť je splněna jedna z podmínek*

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$,

(ii) $\lim_{x \to x_0} |g(x)| = \infty$.

Existuje-li (vlastní nebo nevlastní)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

pak existuje také

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

a obě limity jsou stejné. Tvrzení platí i pro jednostranné limity.

Požadavek $g'(x) \neq 0$ na ryzím okolí x_0 lze nahradit např. požadavkem, aby tam byly definované podíly funkcí i derivací, nebo rozšířením požadavku diferencovatelnosti obou funkcí i na bod x_0.

Odvození.

Detailní rozbor (existence apod.) viz skriptum.

Nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ a $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. Změňme (pokud je to nutné) funkce f, g tak, aby $f(x_0) = 0$, $g(x_0) = 0$. Pak limita

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = *$$

Z Cauchyovy věty o střední hodnotě víme, že $\exists c \in (x_0, x)$ nebo $c \in (x, x_0)$ takové, že

$$* = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c\to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = |\text{pokud existuje}| = L.$$

Pokud $|\lim_{x\to x_0} f(x)| = \infty = |\lim_{x\to x_0} g(x)|$, potom

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{x\to x_0} \frac{-\frac{g'(x)}{g^2(x)}}{-\frac{f'(x)}{f^2(x)}}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f^2(x)}{g^2(x)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)} = \left(\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}\right)^2 \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)}.$$

Tedy

$$\frac{1}{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}} = \lim_{x\to x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}},$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

■

Poznámka

Jestliže neexistuje limita derivací, neznamená to, že neexistuje původní limita. Pouze nejde použít L'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x+\cos x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\cos x}{1-\sin x}.$$

Tato limita neexistuje, tedy L'Hospitalovo pravidlo nelze použít. Původní limitu ale snadno spočítáme.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x+\cos x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}} = 1.$$

Poznámka

L'Hospitalovo pravidlo lze používat opakovaně, tj.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \cdots$$

Pozor na splnění předpokladů!

Příklad 5

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2$$

Neurčité výrazy

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0, 1^\infty,\ \infty^0.$$

- $0\cdot\infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{\infty}{\frac{1}{0}}$
- $\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)}$

$$0^0 \to e^{0\cdot(-\infty)},\quad 1^\infty \to e^{\infty\cdot 0},\quad \infty^0 \to e^{0\cdot\infty}$$

- $\infty - \infty$

$$f-g = \frac{1}{\frac{1}{f}} - \frac{1}{\frac{1}{g}} = \frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}} = \left|\tfrac{0}{0}\right| = \dots$$

(tento obrat se téměř nepoužívá - většinou to jde mnohem jednodušeji úpravami)

- „$0 \cdot \infty$"

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln x = \left|0 \cdot (-\infty)\right| = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left|\tfrac{-\infty}{\infty}\right|$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

- „$\infty - \infty$"

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x\right) = \left|(\infty - \infty)^+, (-\infty + \infty)^-\right|$$
$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x - x\cos x}{x \sin x}\right) = \left|\tfrac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{\sin x + x\cos x}\right) = \left|\tfrac{0}{0}\right|$$
$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x + x\cos x}{\cos x + \cos x - x \sin x}\right) = \frac{0}{2} = 0$$

- „$\infty - \infty$“

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x\right) = |\infty-\infty|$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x\right)\frac{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2}+x^2}{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2}+x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2}+x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(1+\frac{1}{x})^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{3}$$

- „0^0“

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = |0^0| = e^{\lim_{x\to 0^+} \sin x \ln x} = *$$

$$\lim_{x\to 0^+} \sin x \ln x = |0\cdot(-\infty)| = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \left|\tfrac{-\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x\cos x} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos x} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x} = \left|\tfrac{0}{0}\right|$$

$$= -1 \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin x \cos x}{1} = 0$$

$$* = e^0 = 1$$

- „1^{∞} “

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = |1^{\infty}| = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}} = *$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x} &= |\infty\cdot 0| = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2} = \left|\tfrac{0}{0}\right| \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}\,\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3} = \left|\tfrac{0}{0}\right| \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x-\cos x}{6x^2} = \left|\tfrac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x - x\cos x}{12x} = \left|\tfrac{0}{0}\right| \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x-\cos x+x\sin x}{12} = \frac{-1}{6}
\end{aligned}$$

$$* = e^{-1/6}$$

Věta 12

Nechť $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ *pro všechna* $x \in I = (a, b)$. *Pak je funkce* f *na* I *rostoucí (klesající). Je-li* $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ *na* I, *pak je* f *neklesající (nerostoucí).*

Důkaz ($f'(x) > 0$).

Nechť $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, jsou libovolné. Potřebujeme dokázat, že $f(x_1) < f(x_2)$. Protože

$$0 < f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

existuje δ_1 takové, že $f(x) - f(x_1) > 0$, $x \in (x_1, x_1 + \delta_1)$.
Označme $y_1 = x_1 + \delta_1$. Pak platí $f'(y_1) > 0$, $\exists \delta_2 > 0$: $f(x) > f(y_1)$ pro $x \in (y_1, y_1 + \delta_2)$. Označíme $y_2 = y_1 + \delta_2, \ldots$.
Postupujeme tak dlouho, dokud „nedoskáčeme" k bodu x_2, tj.

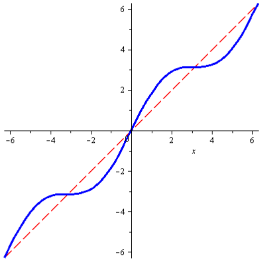
$$\exists y_n : \; f(y_n) > f(y_{n-1}) > \cdots > f(y_1) > f(x_1),$$

$$\exists \delta_n > 0 : \; f(x) > f(y_n), \; x \in (y_n, y_n + \delta_n)$$

a $x_2 \in (y_n, y_n + \delta_n) \Rightarrow f(x_2) > f(y_n) > \cdots > f(x_1)$. □

Poznámka

Opačná implikace „f je rostoucí $\Rightarrow f'(x) > 0$“ obecně neplatí, např. funkce $f(x) = x + \sin x$ je rostoucí $\mathbb{R}$, ale $f'(x) = 0$ pro $x = (2k+1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.



Platí: f je rostoucí $\Rightarrow f'(x) \geq 0$ a rovnost nule nenastane na žádném podintervalu intervalu I, kde je funkce rostoucí (tj. na žádném intervalu větším než jeden bod). Kdyby $f'(x) = 0$ na (x_1, x_2), $x_1 < x_2$, tak podle Lagrangeovy věty $\exists c \in (x_1, x_2):\ f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(c)}_{=0}(x_2 - x_1) \Rightarrow$

$f(x_1) = f(x_2)$, což je spor s tím, že je funkce rostoucí.

Definice 6 (Lokální extrémy)

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *lokální maximum (minimum)*, jestliže existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že $f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$ pro $\forall x \in \mathcal{O}(x_0)$.

Jsou-li nerovnosti pro $x \neq x_0$ ostré, mluvíme o *ostrém* lokálním maximu, resp. minimu.

Věta 13 (Nutná podmínka pro lokální extrém funkce mající derivaci)

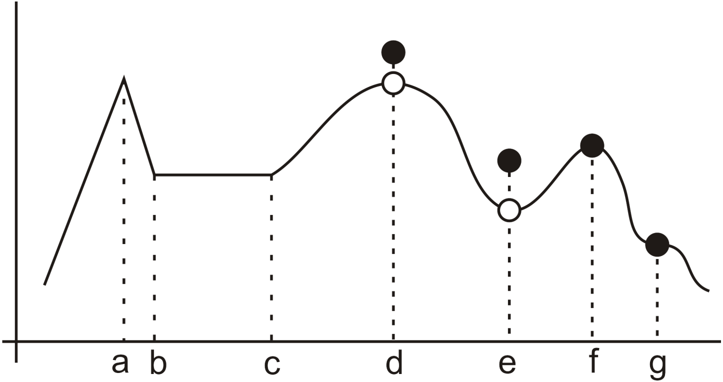
Nechť funkce f má v bodě x_0 lokální extrém a existuje $f'(x_0)$.
Pak $f'(x_0) = 0$.

Důkaz.

Případy $f'(x_0) > 0$ a $f'(x_0) < 0$ vedou ke sporu s faktem, že funkce f má v bodě x_0 lokální extrém. $\square$

Definice 7

Body, kde $f'(x) = 0$, se nazývají *stacionární body* funkce f.

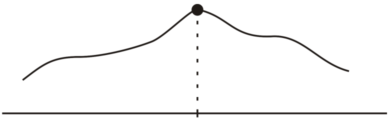


Věta 14

Nechť funkce f je spojitá v bodě x_0. Jestliže existuje okolí $\mathcal{P}^-(x_0)$, v němž je funkce f rostoucí (klesající), a $\mathcal{P}^+(x_0)$, v němž je funkce klesající (rostoucí), pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum (minimum).

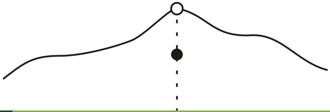
Důkaz.

- $f(x_0) > f(x)$ v levém i pravém okolí bodu x_0 (minimum podobně)



□

- pozor na spojitost



Věta 15

Nechť je funkce f spojitá v bodě x_0. Jestliže existuje okolí $\mathcal{P}^-(x_0)$, kde $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), a $\mathcal{P}^+(x_0)$, kde $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$), pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum (minimum).

Důkaz.

Plyne z vět 12 a 14. □

Věta 16

Nechť bod x_0 je stacionárním bodem funkce f (tj. $f'(x_0) = 0$), a platí, že $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$). Pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum (maximum).

Důkaz.

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f'$ je v x_0 rostoucí, tedy

$$\exists \mathcal{P}^-(x_0): \; f'(x) < f'(x_0) = 0,$$

$$\exists \mathcal{P}^+(x_0): \; f'(x) > f'(x_0) = 0.$$

$f'(x_0)$ existuje $\Rightarrow f$ je spojitá v x_0. V $P^-(x_0)$ je f klesající, v $P^+(x_0)$ je f rostoucí, tedy x_0 je ostré lokální minimum. (Pro maximum podobně.) $\square$

Definice 8 (Absolutní (globální) extrémy)

Buď $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in [a,b]$ *absolutní maximum (minimum) na intervalu* $[a,b]$, jestliže pro všechna $x \in [a,b]$ platí, že

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)).$$

Jsou-li nerovnosti pro $x \neq x_0$ ostré, mluvíme o *ostrých* absolutních extrémech funkce na $[a,b]$.

Věta 17

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$. Pak funkce f nabývá svého absolutního maxima i minima na intervalu $[a, b]$ a to buď v bodě lokálního extrému ležícího v (a, b) nebo v jednom z krajních bodů $x = a$, $x = b$.

Důkaz.

Podle 2. Weierstrassovy věty existují $x_1, x_2 \in [a, b]$ takové, že

$$f(x_1) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}, \quad f(x_2) = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Pro $x = x_1$ máme možnosti: Buď $x_1 = a$, nebo $x_1 = b$, nebo $x_1 \in (a, b)$, pak je x_1 bodem lokálního maxima. Analogicky pro x_2. $\square$

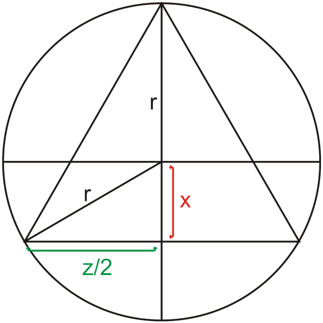
Poznámka

Globální extrémy spojité funkce f na intervalu $[a, b]$ hledáme takto:

Určíme stacionární body a body uvnitř intervalu $[a, b]$, v nichž neexistuje derivace, pak porovnáme funkční hodnoty v těchto bodech s hodnotami $f(a)$ a $f(b)$.

Příklad 6

Do kružnice s poloměrem r vepište rovnoramenný trojúhelník s maximálním obsahem. Tento maximální obsah určete.



$$P = \frac{1}{2}zv = \frac{1}{2}2\sqrt{r^2 - x^2}(x + r)$$
$$= (r + x)\sqrt{r^2 - x^2}$$
$$\to \text{max}, \; x \in [-r, r]$$

$$P = P(x), \quad P(-r) = 0 = P(r)$$

$$P'(x) = \sqrt{r^2 - x^2} + (r + x)\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-2x^2 - rx + r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0$$

$\Rightarrow x_1 = -r \notin (-r, r), \; x_2 = r/2$ (max. např. z P'')

$$P(r/2) = (r + r/2)\sqrt{r^2 - r^2/4} = \frac{3}{4}\sqrt{3}r^2$$

Definice 9 (Konvexní a konkávní funkce)

Řekneme, že funkce f je na intervalu I *konvexní [konkávní]*, pokud pro každé $x_1, x_2 \in I$ a každé $\lambda \in [0,1]$ platí

$$f\big((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2\big) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \tag{1}$$

$$\Big[f\big((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2\big) \geq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)\Big].$$

Platí-li nerovnost ostře, mluvíme o *ostré (ryzí) konvexnosti* a *ostré (ryzí) konkávnosti*.

Poznámka

Nadgraf (množina $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \; x \in \mathcal{D}(f), y \geq f(x)\}$) konvexní funkce je konvexní množina.

Poznámka

Uvažujme $x, x_1, x_2 \in I$ takové, že $x_1 < x < x_2$. Volbou $\lambda = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ převedeme nerovnost (1) na

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1), \tag{2}$$

což vyjadřuje, že bod $[x, f(x)]$ je pod úsečkou spojující body $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_2, f(x_2)]$, popř. na ní.

Podobně pro konkávnost a ostré varianty. Jde o ekvivalentní definici.

Věta 18

Nechť funkce f má na intervalu I derivaci a pro libovolné $x_0 \in I$ platí

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \forall x \in I, \tag{3}$$

tj. graf funkce f leží nad tečnou sestrojenou v libovolném bodě $x_0 \in I$. Pak je funkce f konvexní na intervalu I.

Důkaz.

Nechť $x_1, x_2 \in I$ a $\lambda \in [0,1]$ jsou libovolné. Položme $x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. Dosazením $x = x_1$, $x = x_2$ do (3) dostaneme

(a) $f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\big[x_1 - \lambda x_1 - (1-\lambda)x_2\big]$

(b) $f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\big[x_2 - \lambda x_1 - (1-\lambda)x_2\big]$

$\boxed{\lambda(a) + (1-\lambda)(b)} \Rightarrow$

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \geq \big[\lambda + (1-\lambda)\big] f(x_0)$$
$$+ f'(x_0)\big[\lambda x_1 - \lambda^2 x_1 - \lambda(1-\lambda)x_2 + (1-\lambda)x_2 - (1-\lambda)\lambda x_1 - (1-\lambda)^2 x_2\big]$$

$$\Rightarrow \quad \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \geq f(x_0) + 0 = f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big).$$

$\square$

Poznámka

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \forall x, x_0 \in I,$$

tj. graf funkce f leží pod tečnou sestrojenou v libovolném bodě $x_0 \in I$, pak je f na intervalu I konkávní.

Lemma 1

Uvažujme funkci f definovanou na intervalu I. Nechť $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$. Pak jsou nasledující nerovnosti ekvivalentní.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}, \tag{4}$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}, \tag{5}$$

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \tag{6}$$

Důkaz.

Upravme nerovnost (4).

$$f(x_2)(x_3 - x_1) - f(x_1)(x_3 - x_1) \leq f(x_3)(x_2 - x_1) - f(x_1)(x_2 - x_1),$$

$$f(x_2)(x_3 - x_2 + x_2 - x_1) - f(x_1)(x_3 - x_2 + x_2 - x_1) \leq f(x_3)(x_2 - x_1) - f(x_1)(x_2 - x_1),$$

$$f(x_2)(x_3 - x_2) + f(x_2)(x_2 - x_1) - f(x_1)(x_3 - x_2) - f(x_1)(x_2 - x_1) \\ \leq f(x_3)(x_2 - x_1) - f(x_1)(x_2 - x_1),$$

$$[f(x_2) - f(x_1)](x_3 - x_2) \leq [f(x_3) - f(x_2)](x_2 - x_1).$$

Tím je dokázána ekvivalence nerovností (4) a (5). Ostatní analogicky. □

Věta 19

Nechť funkce f má na otevřeném intervalu I vlastní derivaci. Pak je f konvexní na I právě tehdy, když je f' neklesající.
Analogicky platí

$$\begin{aligned} f \text{ ostře konvexní } &\Leftrightarrow f' \text{ rostoucí,} \\ f \text{ konkávní } &\Leftrightarrow f' \text{ nerostoucí,} \\ f \text{ ostře konkávní } &\Leftrightarrow f' \text{ klesající.} \end{aligned}$$

Důkaz „⇒“.

Zvolíme libovolně $x, x_1, x_2 \in I$ tak, že $x_1 < x < x_2$.Pak z konvexnosti (viz (2)) a lemmatu 1 máme

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}.$$

V levém zlomku provedeme limitní přechod $x \to x_1^+$, v pravém $x \to x_2^-$.Dle předpokladů věty existují příslušné derivace, tedy

$$f'(x_1) \leq f'(x_2),$$

tedy f' je neklesající.

Důkaz „$\Leftarrow$“.

f' je neklesající na I, $x, x_1, x_2 \in I$ tak, že $x_1 < x < x_2$. Na intervalech $[x_1, x]$ a $[x, x_2]$ lze použít pro f Lagrangeovu větu 9, tedy existují $c_1 \in (x_1, x), c_2 \in (x, x_2)$ takové, že

$$f'(c_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}, \qquad f'(c_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

přičemž $c_1 < c_2$.Protože f' je neklesající, máme $f'(c_1) \leq f'(c_2)$, tedy

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

což je vztah (2) ekvivalentní s definicí konvexnosti.

$\square$

Věta 20

Nechť funkce f má na otevřeném intervalu I vlastní druhou derivaci a platí

$$f''(x) > 0 \quad (f''(x) < 0) \quad \forall x \in I.$$

Pak funkce f je na intervalu I ostře konvexní (ostře konkávní).

Důkaz.

Tvrzení plyne přímo z vět 12 a 19. □

Definice 10

Předpokládejme, že funkce f má v bodě x_0 derivaci $f'(x_0)$.
Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *inflexní bod* (graf funkce f má inflexní bod), jestliže existuje okolí $\mathcal{P}^-(x_0)$, v němž je funkce ryze konvexní (konkávní), a okolí $\mathcal{P}^+(x_0)$, v němž je f ryze konkávní (konvexní).

Poznámka

V definici konvexnosti a konkávnosti funkce je neostrá nerovnost, vyhovuje jí i lineární funkce $y = ax + b$, která je konvexní i konkávní. Žádný inflexní bod ale nemá.

Příklad 7

- $y = x^3$ má inflexní bod $x_0 = 0$,
- $y = \sin x$ má inflexní body $x_0 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Věta 21

Jestliže x_0 je inflexní bod funkce f a $f''(x_0)$ existuje, pak $f''(x_0) = 0$.

Důkaz.

Kdyby $f''(x_0) > 0$, pak je f v okolí x_0 konvexní $\to$ spor,
kdyby $f''(x_0) < 0$, pak je f v okolí x_0 konkávní $\to$ spor. □

Věta 22

Nechť $f''(x_0) = 0$ *a* $f'''(x_0) \neq 0$, *pak funkce* f *má v bodě* x_0 *inflexní bod.*

Důkaz.

Předpokládejme $f'''(x_0) > 0$ (pro $f'''(x_0) < 0$ je postup analogický).

$$f'''(x_0) > 0, \text{ tj. } (f'')'(x_0) > 0,$$

tedy f'' je rostoucí v okolí x_0 a tedy $f''(x) < 0 (> 0)$ v levém (pravém) ryzím okolí $x_0 \Rightarrow f$ je vlevo od x_0 ryze konkávní a vpravo ryze konvexní. □

Věta 23

Nechť funkce f má v bodě x_0 derivace po řád $n \geq 1$ ($n \in \mathbb{N}$) včetně a $f'(x_0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(x_0) = 0$ a $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

1. *Je-li n sudé, má f v x_0 lokální extrém, a to minimum pro $f^{(n)}(x_0) > 0$ a maximum pro $f^{(n)}(x_0) < 0$.*
2. *Je-li n liché, má f v x_0 inflexní bod.*

Důkaz.

V příští kapitole ukážeme, že za předpokladů věty se funkce f chová v okolí x_0 přibližně jako funkce $g(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$. □

Definice 11 (Asymptota bez směrnice)

Řekneme, že svislá přímka $x = x_0$ je *asymptotou bez směrnice* grafu funkce $y = f(x)$, jestliže aspoň jedna z jednostranných limit

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x), \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

je nevlastní.

Příklad 8

Funkce $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ má asymptoty bez směrnice $x = 1$ a $x = -1$.
(Obě jednostranné limity jsou nevlastní.)

Příklad 9

Funkce $f(x) = \mathrm{e}^{1/x}$ má asymptotu bez směrnice $x = 0$.
(Jedna jednostranná limita je nevlastní.)

Příklad 10

Funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ nemá asymptotu bez směrnice.

Definice 12

Řekneme, že přímka $y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ je *asymptotou grafu funkce* $y = f(x)$ pro $x \to \infty(-\infty)$, jestliže

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

$$\left(\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0\right).$$

Přímka $y = ax + b$ se nazývá *asymptota se směrnicí*.

Poznámka

Asymptoty se směrnicí může mít funkce nejvýše dvě (do $\pm\infty$).

Věta 24

Přímka $y = ax + b$ je asymptotou se směrnicí grafu funkce $y = f(x)$ právě tehdy, když

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax),$$

přičemž $x \to +\infty$ je pro asymptotu v $+\infty$ a $x \to -\infty$ pro asymptotu v $-\infty$.

Důkaz.

Přímka je asymptotou jestliže

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax] = b,$$

což znamená

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - a\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{b}{x} = 0,$$

tedy

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{f(x)}{x}\right] = a.$$

$\square$

Příklad 11

Určete asymptoty se směrnicí

- $f(x) = x + \frac{1}{x}$.
  $a = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}(1 + \frac{1}{x^2}) = 1$,
  $b = \lim_{x\to+\infty}(x + \frac{1}{x} - 1 \cdot x) = 0$,
  $a = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\frac{1}{x}}{x} = 1,\ b = 0$
  asymptota: $y = x$.
- $f(x) = x^2$
  $a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$ tedy f nemá asymptoty se směrnicí
- $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$
  $a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+\frac{\sin x}{x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}(1 + \frac{\sin x}{x^2}) = 1$,
  $b = \lim_{x\to\pm\infty}(x + \frac{\sin x}{x} - x) = 0$, asymptota $y = x$
  (pozn.: as. bez směrnice v bodě $x_0 = 0$ není, $\lim_{x\to 0}(x + \frac{\sin x}{x}) = 1$)

Postup při vyšetřování průběhu funkce

(i) *Přímo z funkce*:
- $D(f)$, sudost/lichost, periodičnost, průsečíky s osami, kladnost/zápornost,
- asymptoty (se směrnicí, bez směrnice).

(ii) *Z první derivace*: rostoucí/klesající, lokální extrémy.

(iii) *Z druhé derivace*: konvexní/konkávní, inflexní body.

(iv) *Načrtnutí grafu*: ke všem výše zmíněným bodům dopočítáme funkční hodnoty a zkombinujeme zjištěné informace.

Postupně tedy plníme následující body:

a) definiční obor,
b) sudost/lichost (periodičnost),
c) asymptoty bez směrnice,
d) asymptoty se směrnicí,
e) průsečíky s osami,
f) kladnost/zápornost,

g) první derivaci,
h) kde je f rostoucí/klesající,
i) lokální extrémy,

j) druhou derivaci,
k) kde je f konvexní/konkávní,
l) inflexní body,

m) funkční hodnoty ve významných bodech,
n) načrtneme graf.

Příklad 12

Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = -\frac{x^2}{x+1}$$

Řešení:

a) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla taková, že $x + 1 \neq 0$. Proto máme

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

b) O sudosti/lichosti funkce snadno rozhodneme dosazením $-x$. Poněvadž platí

$$f(-x) = -\frac{x^2}{-x+1} \neq \pm f(x),$$

není zadaná funkce ani lichá, ani sudá (což je vidět už z nesymetrie definičního oboru). Vzhledem k definičnímu oboru je zřejmé, že funkce nemůže být periodická.

c) Asymptoty bez směrnice popisují limitní chování funkce v bodech nespojitosti (nebo na okraji definičního oboru), proto přímým výpočtem ihned dostaneme

$$\lim_{x\to -1^+} -\frac{x^2}{x+1} = -\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{x+1} = -(+\infty) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to -1^-} -\frac{x^2}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} -\frac{x^2}{x+1} = -(-\infty) = \infty.$$

Funkce má jednu svislou asymptotu $x = -1$.

d) Pomocí vzorců určíme asymptoty se směrnicí (pokud existují).

$$a = \lim_{x\to \pm\infty} -\frac{x^2}{x^2+x} = -1,$$
$$b = \lim_{x\to \pm\infty} -\frac{x^2}{x+1} + x = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x}{x+1} = 1.$$

Funkce $f(x)$ má tedy v $+\infty$ i $-\infty$ asymptotu se směrnicí, která je dána rovnicí $y = -x + 1$.

e) Určíme průsečíky s osou x ($\Rightarrow y = 0$):

$$f(x) = 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0,$$

tedy $P_x = [0, 0]$,
a s osou y ($\Rightarrow x = 0$):

$$y = -\frac{0^2}{0+1} = 0 \iff y = 0,$$

tedy $P_y = [0, 0] = P_x$.

f) Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná:

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
sgn f	$+$	$-$	$-$
f	kladná	záporná	záporná

g) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x}{(x+1)^2}, \quad D(f') = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

h) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.

$$f'(x) = 0 \iff -x(x+2) = 0 \iff x_1 = 0,\ x_2 = -2.$$

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
$\operatorname{sgn} f'$	$-$	$+$	$+$	$-$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$

i) Z tabulky vidíme, že funkce má v $x = -2$ lokální minimum a v $x = 0$ lokální maximum.

j) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = \frac{-2x-2}{(x+1)^4} = \frac{-2}{(x+1)^3},$$
$$D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

k) Určíme kritické body a intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

$$f''(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -2 = 0,$$

což je nesmysl. Druhá derivace tedy nemá žádný nulový bod. Nesmíme ovšem zapomenout, že její znaménko se může změnit i v bodech, ve kterých není definována (tj. v „dírách“ jejího definičního oboru).

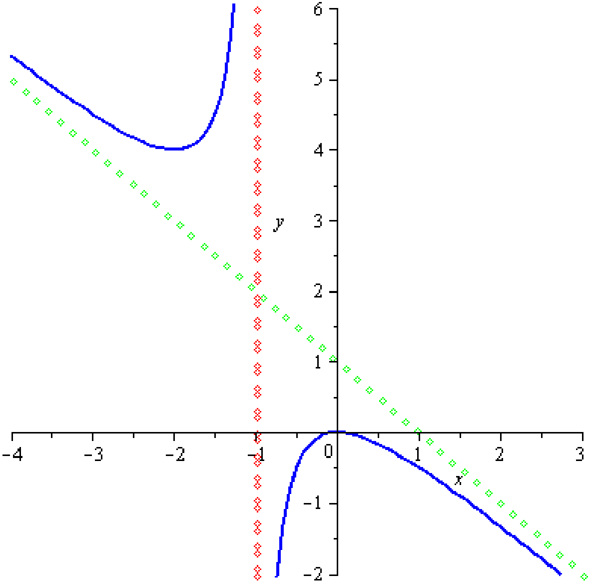
x	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
sgn f''	$+$	$-$
f	$\cup$	$\cap$

l) Funkce nemá žádný inflexní bod ($-1 \notin D(f)$).

m) Zrekapitulujme význačné body a spočtěme v nich funkční hodnoty.

- Průsečíky s osami $P_x = P_y = [0, 0]$.
- Lokální minimum v $x = -2, f(-2) = 4$, tedy jde o bod $[-2, 4]$.
- Lokální maximum v $x = 0, f(0) = 0$, tedy jde o bod $[0, 0]$.

n) Nyní zkombinujeme všechny získané informace a obdržíme graf funkce



Věta 25

Nechť funkce f, g mají na intervalu I derivaci a $\forall x \in I$ platí $f'(x) = g'(x)$. Pak $\exists c \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) - g(x) = c$, $\forall x \in I$.

Důkaz.

$F(x) = f(x) - g(x)$. Pak $F'(x) = 0$, $\forall x \in I$, a tedy pro libovolné $x_1, x_2 \in I$ podle Lagrangeovy věty platí

$$F(x_2) - F(x_1) = F'(\xi)(x_2 - x_1) = 0,$$

kde ξ leží mezi hodnotami x_1, x_2.
Tedy $F(x) = c$, $\forall x \in I \Rightarrow f(x) - g(x) = c$. $\square$

Příklad 13

Dokažte pro $x \geq 0$ identitu

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} \frac{\sqrt{1+x^2}-x\frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2}2x}{(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}} \frac{-1}{2}(1+x^2)^{-3/2}2x = \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{1+x^2},$$

kde jsme využili $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$.
Dosaďme $x = 1$.

$$\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}}$$

V jednom bodě z intervalu nabývají stejné hodnoty a derivace mají stejné, tedy identita platí na celém intervalu $I = [0, \infty)$.

Příklad 14

Dokažte $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arccotg} \frac{1}{x}$. Pro která $x \in \mathbb{R}$ identita platí?

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad g'(x) = \frac{-1}{1+(\frac{1}{x})^2}\frac{-1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

V $x = 0$ je funkce $\operatorname{arccotg} \frac{1}{x}$ nespojitá. Dosadíme $x = 1$ a $x = -1$.

$$\operatorname{arctg} 1 = \tfrac{\pi}{4} = \operatorname{arccotg} 1, \quad \operatorname{arctg}(-1) = -\tfrac{\pi}{4}, \quad \operatorname{arccotg}(-1) = \tfrac{3\pi}{4}.$$

Identita tedy platí pro $x \in (0, \infty)$.
Pro $x \in (-\infty, 0)$ jsou funkce různé o π.

Příklad 15

Dokažte, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $2x \operatorname{arctg} x \geq \ln(1+x^2)$.

$$F(x) := 2x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2)$$

a spočítáme minimum na $\mathbb{R}$.

$$F'(x) = 2 \operatorname{arctg} x + 2x \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} 2x = 2 \operatorname{arctg} x,$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad F''(x) = 2 \frac{1}{1+x^2} > 0, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

tedy $x = 0$ je lokální minimum. $F(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$, rovnost nastává pro $x = 0$.

Definice 13

Nechť je funkce f definovaná v $\mathcal{O}(x_0)$ a pro $h \in \mathbb{R}$ platí $x_0 + h \in \mathcal{O}(x_0)$. Pak číslo h nazýváme *přírůstek nezávisle proměnné* a rozdíl $\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ nazýváme *přírůstek závisle proměnné* (popř. detailněji $\Delta f(x_0)(h)$ jako přírůstek funkce f v bodě x_0 s krokem h).

Definice 14

Řekneme, že funkce f je *diferencovatelná v bodě* $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že

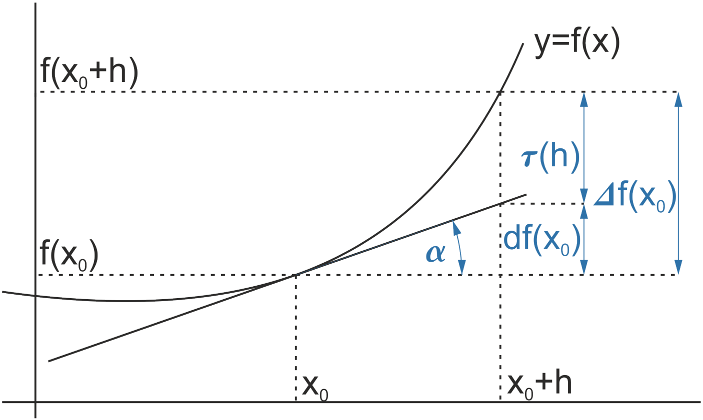
$$f(x_0 + h) - f(x_0) = A \cdot h + \tau(h),$$

kde $A \in \mathbb{R}$ je vhodné číslo a $\tau(h)$ je funkce s vlastností

$$\lim_{h \to 0} \frac{\tau(h)}{h} = 0.$$

Je-li f v x_0 diferencovatelná, nazýváme výraz $A \cdot h$ *diferenciál* funkce f a píšeme $\mathrm{d}f(x_0)$, popř. $\mathrm{d}f(x_0)(h)$.

Diferenciál funkce je lineární funkce přírůstku nezávisle proměnné h.



$$\Delta f(x_0) := f(x_0 + h) - f(x_0),\ \Delta f(x_0) := A \cdot h + \tau(h),\ A = \operatorname{tg} \alpha$$

Věta 26

Funkce f je v bodě x_0 diferencovatelná právě tehdy, když v tomto bodě existuje vlastní derivace $f'(x_0)$. Přitom platí

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0) \cdot h.$$

Tedy $A = f'(x_0)$. Často se používá značení $\mathrm{d}x = h$, tj.

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x.$$

Diferenciál v obecném bodě x

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x) \cdot \mathrm{d}x.$$

$$y = f(x) \Rightarrow \mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x) \Rightarrow \underbrace{f'(x)}_{\text{Newton}} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}_{\text{Leibnitz}} .$$

Derivace inverzní funkce $x = f^{-1}(y)$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}.$$

Derivace složené funkce $F(x) = (g \circ f)(x)$, kde $f(x) = y, g(y) = z$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Důkaz.

„$\Rightarrow$“ Předpokládejme, že funkce f je diferencovatelná v bodě x_0, pak

$$f(x_0+h)-f(x_0)=Ah+\tau(h)$$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=A+\frac{\tau(h)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(A+\underbrace{\frac{\tau(h)}{h}}_{\to 0}\right)$$

$$f'(x_0)=A+0=A.$$

„$\Leftarrow$“ Předpokládejme, že existuje derivace $f'(x_0)=A\in\mathbb{R}$ a položme $\tau(h)=f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h$. Pak

$$\lim_{h\to 0}\frac{\tau(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)\right)=f'(x_0)-f'(x_0)=0.$$

□

Poznámka

Využití diferenciálu pro přibližný výpočet funkčních hodnot:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot h + \tau(h),$$

tedy

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h.$$

Příklad 16

Vypočtěte pomocí diferenciálu přibližně $\sqrt[3]{7.9}$.

$$f(x) = \sqrt[3]{x},\ x_0 = 8,\ h = x - x_0 = -0.1,\ f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\sqrt[3]{7.9} \approx \sqrt[3]{8} + \tfrac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}(-0.1) = 2 - \tfrac{1}{30\cdot 4} = 2 - \tfrac{1}{120} = 2 - 0.008\overline{3} = 1.991\overline{6}.$$

Motivace

Máme dánu funkci f a chceme sestrojit polynom stupně $n \in \mathbb{N}$, který v okolí bodu x_0 nejlépe aproximuje funkci f.

- Pro $n = 1$: $P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, viz diferenciál. $P(x)$ má s funkcí $f(x)$ v x_0 stejnou funkční hodnotu a hodnotu první derivace.
- Najdeme polynom $P(x) = a_n(x - x_0)^n + \cdots + a_1(x - x_0) + a_0$, mající s funkcí $f(x)$ v bodě x_0 stejnou funkční hodnotu a derivace až do řádu n.

Hledáme polynom $P(x) = a_n(x-x_0)^n + \cdots + a_1(x-x_0) + a_0$ splňující

$$P^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0), \qquad i = 0, 1, \ldots, n,$$

tedy

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= P(x_0) = a_0,\\
f'(x_0) &= P'(x_0) = 1 \cdot a_1,\\
f''(x_0) &= P''(x_0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2,\\
f^{(3)}(x_0) &= P^{(3)}(x_0) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3,\\
&\vdots\\
f^{(n-1)}(x_0) &= P^{(n-1)}(x_0) = (n-1)! \cdot a_{n-1},\\
f^{(n)}(x_0) &= P^{(n)}(x_0) = n! \cdot a_n.
\end{aligned}$$

Odtud ihned

$$a_0 = f(x_0), a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \ldots, a_{n-1} = \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Definice 15

Předpokládejme, že funkce f má v bodě x_0 derivace až do řádu $n \in \mathbb{N}$ včetně. *Taylorovým polynomem stupně n funkce f v bodě x_0*, značíme jej $T_n(x, x_0)$, rozumíme polynom, který má v bodě x_0 stejnou funkční hodnotu a stejnou hodnotu prvních n derivací jako funkce f, tj.

$$f(x_0) = T_n(x_0, x_0), f'(x_0) = T_n'(x_0, x_0), \dots, f^{(n)}(x_0) = T_n^{(n)}(x_0, x_0).$$

Věta 27 (Taylorova věta)

Nechť má funkce f v okolí bodu x_0 vlastní derivace až do řádu $n+1$ pro nějaké $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak pro všechna x z tohoto okolí platí

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots \\ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

kde ξ je vhodné číslo ležící mezi x_0 a x.

Vzorec uvedený ve větě se nazývá *Taylorův vzorec*.

Zbytek $R_n(x)$ je uveden v Lagrangeově tvaru.

Vynecháme-li zbytek $R_n(x)$, obdržíme *Taylorův polynom*:

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i.$$

Pokud v položíme $x_0 = 0$, získáme tzv. *Maclaurinův polynom*:

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i.$$

Příklad 17

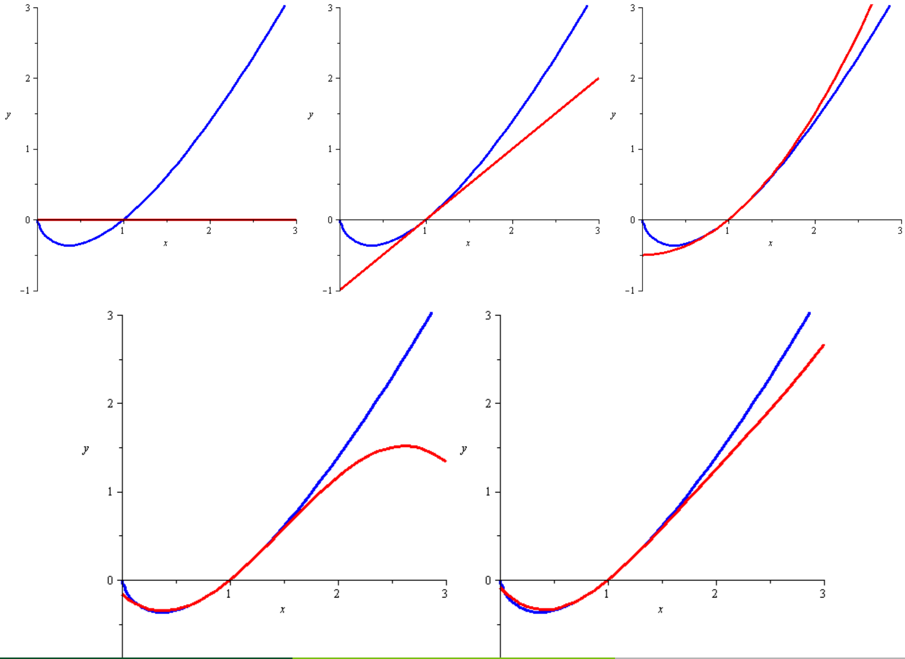
Určete Taylorův polynom 4. řádu se středem v bodě $x_0 = 1$ funkce $f(x) = x \ln x$.

$$f'(x) = 1 + \ln x,\ f''(x) = \frac{1}{x},\ f'''(x) = \frac{-1}{x^2},\ f^{(4)}(x) = \frac{2}{x^3}.$$

$$f(1) = 0,\ f'(1) = 1,\ f''(1) = 1,\ f'''(1) = -1,\ f^{(4)}(1) = 2.$$

Tedy

$$\begin{aligned} T(x) &= 0 + \tfrac{1}{1!}(x-1) + \tfrac{1}{2!}(x-1)^2 + \tfrac{-1}{3!}(x-1)^3 + \tfrac{2}{4!}(x-1)^4 \\ &= \tfrac{1}{12}(x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 10x - 3). \end{aligned}$$


y
x
3
2
1
0
-1
1
2
3

Věta 28

Maclaurinovy polynomy pro e^x, $\sin x$ *a* $\cos x$*:*

- $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$,
- $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$,
- $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

Důkaz.

Přímým výpočtem. □

Příklad 18

Určete počet členů Maclaurinova polynomu funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$, abychom číslo $\frac{1}{\mathrm{e}}$ spočítali s chybou menší než 10^{-3}.

$$R_n(x) = \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad c \text{ mezi } x, x_0$$

$$\mathrm{e}^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}(-1)^{n+1}$$

$\left|\frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}(-1)^{n+1}\right| < 10^{-3}$, $c \in (-1, 0)$,tedy

$$\left|\frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}(-1)^{n+1}\right| < \frac{\mathrm{e}^0}{(n+1)!} < \frac{1}{1000} \Rightarrow (n+1)! > 1000 \Rightarrow n = 6,$$

$\mathrm{e}^{-1} \approx \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}$ toto vyjádření je s chybou menší než 10^{-3}.

Věta 29

Maclaurinovy vzorce pro $\mathrm{e}^x, \sin x$ *a* $\cos x$ *(*$n \in \mathbb{N}, c$ *mezi* 0 *a* x*):*

- $\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!} x^{n+1}$,
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{\cos c}{(2n+1)!} x^{2n+1}$,
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+2} \frac{\cos c}{(2n+2)!} x^{2n+2}$.

Důkaz.

- $(\mathrm{e}^x)^{(i)} = \mathrm{e}^x$, $i \in \mathbb{N}_0$, tedy $R_n(x) = \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!} x^{n+1}$,
- $(\sin x)^{(2i)} = (-1)^i \sin x\big|_{x=0} = 0$,
  $(\sin x)^{(2i+1)} = (-1)^i \cos x\big|_{x=0} = (-1)^i$, $i \in \mathbb{N}_0$,
  tedy $R_{2n}(x) = (-1)^n \frac{\cos c}{(2n+1)!} x^{2n+1}$,
- $(\cos x)^{(2i)} = (-1)^i \cos x\big|_{x=0} = (-1)^i$,
  $(\cos x)^{(2i+1)} = (-1)^{i+1} \sin x\big|_{x=0} = 0$, $i \in \mathbb{N}_0$,
  tedy $R_{2n+1}(x) = (-1)^{n+2} \frac{\cos c}{(2n+2)!} x^{2n+2}$.

$\square$

Poznámka (Eulerova identita – exponenciální tvar komplexního čísla)

$\cos\varphi + i\sin\varphi = \mathrm{e}^{i\varphi}$, $x = i\varphi \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{i\varphi} &= 1 + \frac{i\varphi}{1!} + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \cdots + \frac{(i\varphi)^n}{n!} + \cdots \\
&= 1 + i\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \cdots \\
&= \underbrace{1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \cdots}_{\cos\varphi} + i\left(\underbrace{\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \cdots}_{\sin\varphi}\right) \\
&= \cos\varphi + i\sin\varphi
\end{aligned}$$

Taylorův (Maclaurinův) rozvoj dalších elementárních funkcí

- pro $x \in (-1, \infty)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + (-1)^{n+2}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}$$

- pro $\alpha \in \mathbb{R}, x \in (-1, \infty)$, nebo $\alpha \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \\ &\quad \cdots + \tfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \tfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+c)^{\alpha-n-1} \\ &= 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+c)^{\alpha-n-1}\end{aligned}$$

kde jsme (pro $\alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$) použili zobecněný binomický koeficient

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Využití Taylorova a Maclaurinova polynomu

- přibližný výpočet funkčních hodnot,
- výpočet limit.

Příklad 19

Pomocí Taylorova polynomu 2. řádu vypočtěte přibližně $\sqrt[3]{7.9}$.

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

$f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$, $h = x - x_0 = -0.1$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, $f''(x) = \frac{-2}{9}x^{-5/3}$

$$\sqrt[3]{7.9} \approx 2 - \frac{1}{3 \cdot 4}(0.1) - \frac{1}{2}\frac{2}{9 \cdot 32}(0.1)^2 = 2 - \frac{1}{120} - \frac{1}{28\,800} = \frac{57\,359}{28\,800}$$

Příklad 20

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1+x^3}}{x^2} = ?$$

$(1+t)^{1/2} = 1 + \binom{1/2}{1} t + \binom{1/2}{2} t^2 + \cdots$ použijeme pro $t = x^2$, tedy

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \cdots$$

$(1+t)^{1/3} = 1 + \binom{1/3}{1} t + \binom{1/3}{2} t^2 + \cdots$ použijeme pro $t = x^3$, tedy

$$\sqrt[3]{1+x^3} = 1 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{9}x^6 + \cdots$$

Odtud

$$? = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \cdots - \left(1 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{9}x^6 + \cdots\right)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Poznámka (Diferenciály vyšších řádů)

$$f(x+h)-f(x)=Ah+\tau(h)=\mathrm{d}\,f(x)(h)+\tau(h)=f'(x)h+\tau(h),$$

$$f(x+h)=f(x)+\underbrace{f'(x)h}_{\mathrm{d}\,f(x)(h)}+\underbrace{\tau(h)}_{R_1(x)}$$

V rozvoji

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n+R_n(x)$$

označme

$$f''(x)h^2=\mathrm{d}^{\,2}f(x)(h),\,f'''(x)h^3=\mathrm{d}^{\,3}f(x)(h),\ldots,f^{(n)}(x)h^n=\mathrm{d}^{\,n}f(x)(h).$$

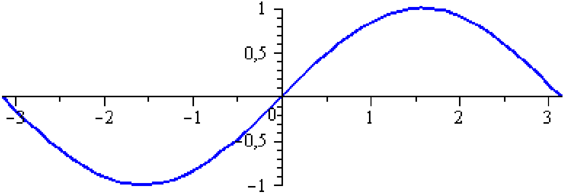
Tím dostaneme

$$f(x+h)=f(x)+\mathrm{d}\,f(x)(h)+\frac{1}{2!}\mathrm{d}^{\,2}f(x)(h)+\cdots+\frac{1}{n!}\mathrm{d}^{\,n}f(x)(h)+\text{ zbytek.}$$

Zadáme-li např. graf funkce sinus po souřadnicích x, y, dostaneme množinu bodů

$$[x, y] = [x, \sin x], x \in \mathbb{R},$$

protože x je nezávisle proměnná a $y = f(x)$ je závisle proměnná.



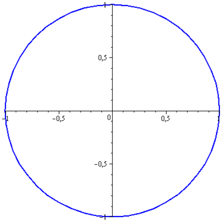
Obr. 4: $y = \sin x, x \in [-\pi, \pi]$

Body o souřadnicích

$$x = \cos t,$$
$$y = \sin t, t \in [0, 2\pi]$$

dávají jednotkovou kružnici

$$x^2 + y^2 = 1.$$



Body o souřadnicích

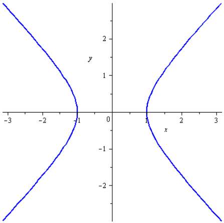
$$x = \cosh t, y = \sinh t, t \in \mathbb{R}$$

dávají pravou větev a body

$$x = -\cosh t, y = \sinh t, t \in \mathbb{R}$$

levou větev hyperboly

$$x^2 - y^2 = 1.$$



Definice 16

Nechť φ a ψ jsou funkce, které zobrazují interval $[\alpha, \beta]$ do $\mathbb{R}$. Pak množina bodů $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ takových, že

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta]$$

se nazývá *křivka parametricky zadaná dvojicí φ a ψ*.

Jsou-li funkce φ a ψ spojité, nazývá se křivka jimi určená, *spojitá*.

Mají-li funkce φ a ψ navíc na intervalu $[\alpha, \beta]$ derivace a

$$\forall t \in [\alpha, \beta] : \; [\varphi']^2 + [\psi']^2 > 0,$$

řekneme, že křivka je *hladká*.

Poznámka

V roce 1890 sestrojil G. Peano příklad spojitých funkcí $\varphi, \psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ takových, že množina $[\varphi(t), \psi(t)]$, tj. křivka s parametrizací φ, ψ, vyplnila celý jednotkový čtverec $[0,1] \times [0,1]$.

Poznámka

Křivka

$$x = \varphi(t) = \begin{cases} -t^2 & t < 0 \\ t^2 & t \geq 0 \end{cases}, \quad y = \psi(t) = t^2, t \in \mathbb{R}$$

má $\varphi'(0) = 0$, $\psi'(0) = 0$, tedy není hladká na žádném intervalu obsahujícím nulu. (Jde o $y = |x|$.)

Věta 30

Nechť

$$C = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \ x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta]\}$$

je hladká křivka a v bodě $t_0 \in [\alpha, \beta]$ *platí* $\varphi'(t_0) \neq 0$*. Pak směrnice tečny ke křivce* C *v bodě* $[x_0, y_0] = [\varphi(t_0), \psi(t_0)]$ *je*

$$k = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

Důkaz.

Tečnou ke křivce rozumíme, podobně jako pro graf funkce $y = f(x)$, limitní polohu sečen. Směrnice sečny je
$\frac{\psi(t)-\psi(t_0)}{\varphi(t)-\varphi(t_0)} =$ (podle Cauchyho věty) $= \frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)}$, kde c leží mezi t, t_0.
Limitním přechodem $t \to t_0$ dostáváme, že $k = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$. □

Příklad 21

Určete směrnici tečny ke kružnici $x = \cos t, y = \sin t$ v bodě $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$.

$$t_0 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow k = \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{-\sin\frac{\pi}{4}} = -\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -1.$$

Věta 31

Nechť

$$C = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta]\},$$

φ, ψ *mají na* $[\alpha, \beta]$ *druhé derivace a* $\varphi'(t_0) \neq 0$*. Pak v okolí bodu* $[x_0, y_0] = [\varphi(t_0), \psi(t_0)]$ *je křivka* C *totožná s grafem jisté funkce* $y = f(x)$ *a pro její druhou derivaci v bodě* $x_0 = \varphi(t_0)$ *platí*

$$f''(x_0) = \frac{\psi''(t_0)\varphi'(t_0) - \psi'(t_0)\varphi''(t_0)}{\varphi'^3(t_0)}.$$

Důkaz.

Protože $\varphi'(t_0) \neq 0$, je φ v okolí t_0 prostá, tedy existuje inverzní funkce $t = \varphi^{-1}(x)$. Pak

$$y = \psi(t) = \psi(\varphi^{-1}(x)) =: f(x).$$

$$f'(x) = \psi'(\underbrace{\varphi^{-1}(x)}_{t}) \cdot \underbrace{(\varphi^{-1})'(x)}_{\frac{1}{\varphi'(t)}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

$$\begin{aligned} f''(x) = (f'(x))' &= \left(\frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}\right)' \\ &= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)} \cdot \left(\varphi^{-1}\right)'(x) = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)} \end{aligned}$$

$\square$

Příklad 22

$x = \cos t, y = \sin t, t_0 = \pi/4$

$$f''(x) = \frac{(\sin t)''(\cos t)' - (\cos t)''(\sin t)'}{(\cos t)'^3} = \frac{-\sin t(-\sin t) - (-\cos t)(\cos t)}{(-sint)^3} = \frac{-1}{sin^3 t},$$

tedy

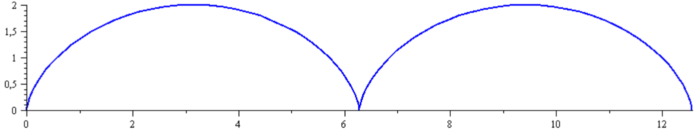
$$f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^3} = -2\sqrt{2}.$$

Příklad 23

Cykloida má parametrizaci $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, t \in [0, 2\pi]$. V okolí bodu daného hodnotou parametru $t = \pi/2$ zadává jistou funkci $y = f(x)$. Určete hodnotu první a druhé derivace funkce f v tomto bodě.

$$f'(x) = \frac{(1-\cos t)'}{(t-\sin t)'} = \frac{\sin t}{1-\cos t}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1-0} = 1,$$

$$f''(x_0) = \frac{\cos t(1-\cos t)-\sin^2 t}{(1-\cos t)^3} = \frac{-1+\cos t}{(1-\cos t)^3}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{-1+0}{(1-0)^3} = -1$$



Obr. 5: Cykloida pro $t \in [0, 4\pi]$

Definice 17

Oskulační kružnice rovinné křivky C v bodě $[x_0, y_0]$ je kružnice, která prochází bodem $[x_0, y_0]$ a má v něm shodnou (aspoň) první a druhou derivaci s křivkou C. Říkáme, že má v tomto bodě s křivkou C styk (nejméně) druhého řádu.

- Poloměr oskulační kružnice se nazýváme poloměr křivosti.
- Střed oskulační kružnice nazýváme střed křivosti a leží na normále křivky v daném bodě.

Poznámka

Oskulační kružnice např. ve vrcholech kuželoseček mají s křivkami styk vyššího řádu než dva a jsou označovány jako hyperoskulační nebo superoskulační.

Oskulační kružnici získáme jako limitní polohu kružnic podobně jako jsme získali tečnu (derivaci) jako limitní polohu sečen. Budeme uvažovat bod $[x_0, y_0]$, ve kterém chceme kružnici získat, a další dva body $[x_1, y_1], [x_2, y_2]$ vlevo a vpravo od něj. Sestrojíme kružnici procházející těmito třemi body. Následně body $[x_1, y_1], [x_2, y_2]$ přibližujeme k bodu $[x_0, y_0]$ a stále používáme kružnici, která skrze všechny tři prochází. Výsledkem tohoto limitního procesu je oskulační kružnice.

(Samozřejmě je možné použít libovolné tři body z okolí bodu $[x_0, y_0]$ a limitně je všechny „poslat" k němu.)

Pro jednoduchost uvažujme graf funkce f, tedy křivku $[x, f(x)]$, která má v okolí bodu x_0 derivace do řádu dva včetně a $f''(x_0) \neq 0$.
Kružnici budeme hledat ve tvaru

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Derivováním podle x (přičemž $y = y(x)$) dostaneme

$$x - a + (y-b)y' = 0,$$

$$1 + y'^2 + (y-b)y'' = 0.$$

Poznámka

Pracujeme zde s implicitně danou funkcí. Základní předpoklad, aby vztah $F(x,y) = c$ zadával v okolí bodu x_0 implicitně funkci $y = y(x)$ spňující $y(x_0) = y_0$ je, že derivace F podle y musí být v bodě $[x_0, y_0]$ nenulová (podrobněji v diferenciálním počtu více proměnných).

Do těchto rovnic dosadíme $x = x_0, y = f(x_0), y' = f'(x_0), y'' = f''(x_0)$. Tím obdržíme soustavu tří rovnic o třech neznámých a, b, r a ty vypočítáme. Dostaneme

$$a = x_0 - \frac{f'(x_0) + f'^3(x_0)}{f''(x_0)}, \qquad b = \frac{1 + f'^2(x_0) + f(x_0)f''(x_0)}{f''(x_0)},$$

$$r = \frac{\left[1 + f'^2(x_0)\right]^{\frac{3}{2}}}{|f''(x_0)|}.$$

Poznámka

Parametricky máme

$$r = \frac{\left[x'^2 + y'^2\right]^{\frac{3}{2}}}{|x'y'' - x''y'|},$$

kde $x = x(t), y = y(t)$, derivace je podle t a dosazujeme t_0.

Větší poloměr znamená menší zakřivení a naopak, to motivuje následující definici.

Definice 18

Hodnota $1/r$ se nazývá křivost funkce f v bodě x_0.