

Derivace funkce

Petr Hasil

Přednáška z Matematické analýzy



Obsah

- 1 Derivace funkce
 - Základní vlastnosti derivace
 - Geometrický význam derivace
 - Výpočet derivace
 - Věty o střední hodnotě
 - L'Hospitalovo pravidlo
- 2 Vyšetřování průběhu funkce
 - Extrémy
 - Konvexnost, konkávnost a inflexní body
 - Asymptoty
 - Průběh funkce – shrnutí a příklad
 - Využití derivace k důkazu identit a nerovností

Obsah

- 3 Diferenciál, Taylorův polynom
 - Diferenciál
 - Taylorův polynom
- 4 Rovinné křivky
 - Křivka daná parametricky
 - Oskulační kružnice a křivost

Definice 1 (Derivace funkce f v bodě)

Nechť x_0 je vnitřním bodem $\mathcal{D}(f)$. Jestliže existuje limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

nazýváme tuto limitu *derivací funkce f v bodě x_0* , píšeme $f'(x_0)$.

Poznámka

- Je-li limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$ řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *vlastní derivaci*.
- Je-li limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *nevlastní derivaci* $+\infty$ nebo $-\infty$.

Definice 2 (Derivace funkce)

Má-li funkce f derivaci v každém bodě intervalu $I \subseteq \mathcal{D}(f)$, pak se funkce $x \mapsto f'(x)$ nazývá **derivace funkce f** a značí se f' .

Definice 3 (Derivace zprava / zleva)

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Poznámka

Zavedením h jako $x = x_0 + h$ získáme

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Následující tvrzení jsou přímým důsledkem tvrzení o limitách funkcí.

- ❶ Funkce f má v bodě x_0 nejvýše jednu derivaci.
- ❷ Derivace v bodě existuje právě tehdy, když existují jednostranné derivace a $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.
- ❸ Necht' funkce f, g mají derivace v bodě x_0 , pak v x_0 mají derivace i funkce: $f \pm g$, $f \cdot g$ a je-li $g(x_0) \neq 0$ i f/g .

Poznámka

Pozor, tvrzení 3 se týká pouze existence derivace, nikoli její hodnoty.

Definice 4

Necht' funkce f má v bodě x_0 derivaci $f'(x_0)$, pak se přímka

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

nazývá **tečna** ke grafu funkce f v bodě $[x_0, y_0]$. Přímka procházející bodem $[x_0, y_0]$, která je kolmá k tečně v tomto bodě se nazývá **normála** ke grafu funkce f v bodě $[x_0, y_0]$.

Poznámka

Protože součin směrnic dvou vzájemně kolmých přímek je roven -1 , je rovnice normály ke grafu funkce f v bodě x_0

(i) pro $f'(x_0) \neq 0$

$$y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

(ii) pro $f'(x_0) = 0$

$$x = x_0.$$

Poznámka

Má-li funkce f v bodě x_0 nevlastní derivace a je v tomto bodě spojitá, potom má v x_0 tečnu

$$t : x = x_0$$

a normálu

$$n : y = f(x_0).$$

(Např. funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v bodě $x_0 = 0$.)

Příklad 1

Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $y = \sqrt{1-x^2}$ v bodě $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, tedy jedná se o bod grafu funkce.

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}} = -1$$

$$t: y - \frac{1}{\sqrt{2}} = -1\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\boxed{t: y = -x + \sqrt{2}}$$

$$n: y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0)$$

$$n: y - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\boxed{n: y = x}$$

Geometrický význam derivace

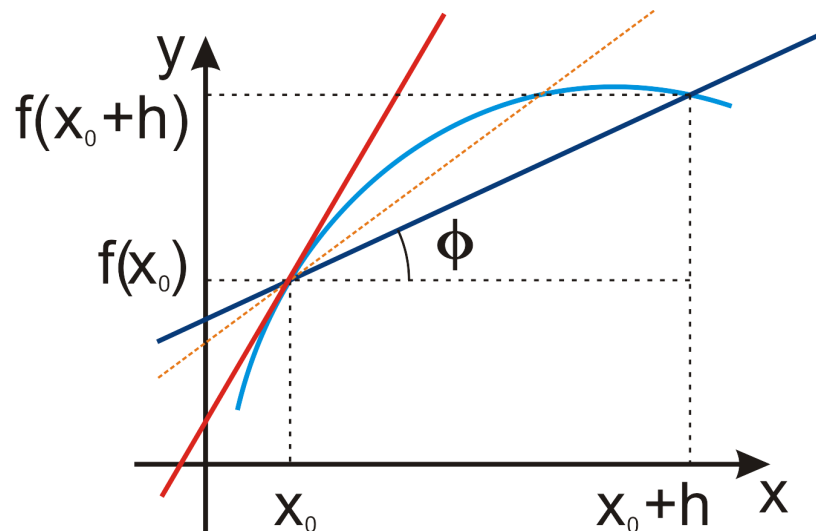
Sečna grafu funkce f procházející body $[x_0, f(x_0)]$ a $[x_0 + h, f(x_0 + h)]$ má směrnici

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Jestliže se s bodem $x_0 + h$ blížíme k bodu x_0 (tj. provádíme limitní přechod $h \rightarrow 0$), přejde tato sečna v tečnu v bodě $[x_0, f(x_0)]$. Směrnice tečny ke grafu funkce f v bodě x_0 je tedy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

což je přesně derivace funkce f v bodě x_0 .



Věta 1

Nechť funkce f a g mají v bodě x_0 derivaci a necht' $c \in \mathbb{R}$ je libovolné. Pak platí

$$(i) \quad (cf)' = cf',$$

$$(ii) \quad (f \pm g)' = f' \pm g',$$

$$(iii) \quad (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g',$$

$$(iv) \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \quad \text{pro } g \neq 0.$$

Důkaz (iii).

$$\begin{aligned}
(f(x) \cdot g(x))'_{x=x_0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h)}_{g(x)} \cdot \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{f'(x)} + f(x) \cdot \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{g'(x)} \\
&= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).
\end{aligned}$$

(Pro $h \rightarrow 0$ máme $x \rightarrow x_0$.) □

Věta 2

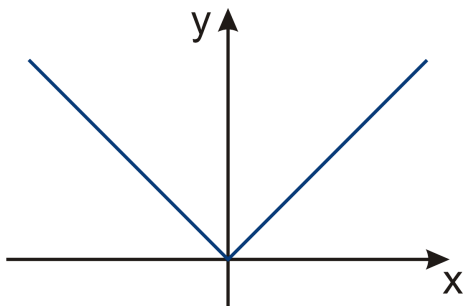
Má-li funkce v bodě x_0 derivaci (vlastní), pak je v tomto bodě spojitá.

Důkaz.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \\
&= \underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)}_0 \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\text{číslo} \in \mathbb{R}} = 0.
\end{aligned}$$
□

Poznámka

Opačné tvrzení neplatí – ze spojitosti neplyne existence derivace.
 Např. funkce $f(x) = |x|$ je spojitá na celém \mathbb{R} , ale v $x_0 = 0$ nemá derivaci.

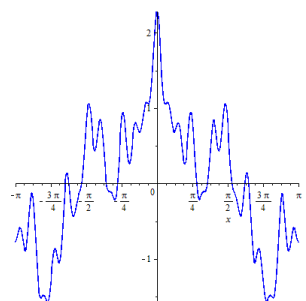
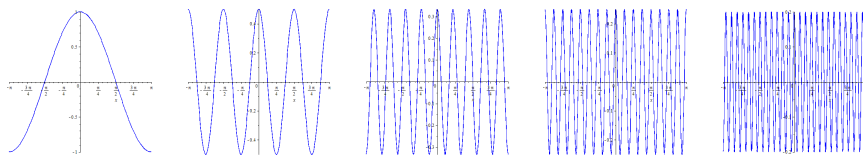


Poznámka

Bolzano a Weierstrass sestrojili funkci, která je spojitá v každém bodě, ale v žádném nemá derivaci.

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \cos(n^2 x), \quad g_n(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x)$$

Pro $n \rightarrow \infty$ je g_n spojitá („hustá, roztřesená čára“).



$$g_5(x) = \sum_{i=1}^5 \frac{1}{i} \cos(i^2 x)$$

Věta 3

Nechť funkce f má derivaci v bodě x_0 a funkce g má derivaci v bodě $y_0 = f(x_0)$. Pak složená funkce

$$F(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

má derivaci v bodě x_0 a platí, že

$$F'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

Důkaz.

Předpokládejme nejprve, že existuje $\mathcal{P}(x_0)$ takové, že $f(x) \neq f(x_0)$ pro $\forall x \in \mathcal{P}(x_0)$.

$$\begin{aligned} F'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \cdot f'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0). \end{aligned}$$

Jestliže neexistuje $\mathcal{P}(x_0)$ takové, že $f(x) \neq f(x_0)$ pro $\forall x \in \mathcal{P}(x_0)$, pak existuje posloupnost $x_n \rightarrow x_0$ taková, že $f(x_n) = f(x_0)$, tedy

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = 0,$$

pak

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x_n) - F(x_0)}{x_n - x_0} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{x_n - x_0} = 0. \end{aligned}$$

Tedy i v tomto případě vzorec platí, neboť

$$F'(x_0) = 0 = \underbrace{g'(y_0)}_{\text{konečné číslo}} \cdot \underbrace{0}_{=f'(x_0)}.$$

□

Věta 4

Nechť funkce f má pro každé $x \in I$ derivaci a $f'(x) \neq 0$. Pak na intervalu $J = f(I) = \{y : \exists x \in I, f(x) = y\}$ existuje funkce inverzní a pro její derivaci platí

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Důkaz (odvození).

$$f(f^{-1}(x)) = x \xrightarrow{\text{derivujeme}} f'(f^{-1}(x)) \cdot [f^{-1}(x)]' = 1$$

$$\Downarrow$$

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

□

Věta 5 (O derivaci elementárních funkcí)

Nechť $n \in \mathbb{Z}$, $a, b, c, \alpha \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $b \neq 1$.

- $(c)' = 0$,
- $(x^n)' = nx^{n-1}$,
- $(e^x)' = e^x$,
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$,
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,
- $(\log_b x)' = \frac{1}{x \cdot \ln b}$,
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$,
- $(\sin x)' = \cos x$,
- $(\cos x)' = -\sin x$,
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$,
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$,
- $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Důkaz.

- $(c)' = 0, c \in \mathbb{R}$:

$$(c)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

- $(x^n)' = nx^{n-1}, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} (x^n)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + \binom{n}{n}h^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \dots + h^{n-1} \right] = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

- $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}, n \in \mathbb{N}$:

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n} \right)' = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

- $(e^x)' = e^x$:

$$\begin{aligned} (e^x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} \\ &= e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x. \end{aligned}$$

- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a, a \in \mathbb{R}^+$:

$$(a^x)' = (e^{\ln a^x})' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} (1 \cdot \ln a + x \cdot 0) = a^x \ln a.$$

- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$$(\ln x)' = \left| f^{-1}(x) = \ln x, f(x) = e^x \Rightarrow \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \right| = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

- $(\log_b x)' = \frac{1}{x \cdot \ln b}, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$:

$$(\log_b x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln b} \right)' = \frac{1}{\ln b} (\ln x)' = \frac{1}{x \cdot \ln b}.$$

- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{R}$:

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

- $(\sin x)' = \cos x$:

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \frac{\sin h}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \frac{\cos h - 1}{h} \\ &= \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} + \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} \\ &= \cos x - 2 \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^2(h/2)}{h} \\ &= \cos x - 2 \sin x \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h/2)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} \sin(h/2)}_{=1/2} \\ &= \cos x - 0 = \cos x. \end{aligned}$$

- $\cos x$ podobně, $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ jako derivaci podílu.

- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

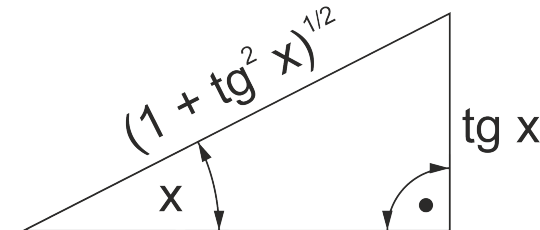
$$\begin{aligned} (\arcsin x)' &= \left| f^{-1}(x) = \arcsin x, f(x) = \sin x \Rightarrow \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \right| \\ &= \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$(\arccos x)' = \left| \arccos x = \pi/2 - \arcsin x \right| = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$:

$$\begin{aligned} (\operatorname{arctg} x)' &= \left| f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x, f(x) = \operatorname{tg} x \Rightarrow \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \right| \\ &= \frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$



Obr. 1: $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$

- $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$:

$$(\operatorname{arccotg} x)' = \left| \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \pi/2 \right| = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Věta 6 (Logaritmická derivace)

$$\left[f(x)^{g(x)} \right]' = f(x)^{g(x)} \left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right]$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} \left[f(x)^{g(x)} \right]' &= \left[e^{\ln(f(x))^{g(x)}} \right]' = \left[e^{g(x) \ln f(x)} \right]' \\ &= e^{g(x) \ln f(x)} \left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{1}{f(x)} f'(x) \right] \\ &= f(x)^{g(x)} \left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right] \end{aligned}$$

□

Příklad 2

Derivujte a upravte funkci

$$y = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

$$y' = \frac{1}{x^3+1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Definice 5 (Derivace vyšších řádů)

$$f'' := (f')', \dots, f^{(n)} = \left(f^{(n-1)} \right)'.$$

Příklad 3

Odvoďte vzorec pro výpočet n -té derivace funkce $\frac{1}{x}$.

$$f' = -\frac{1}{x^2}, f'' = \frac{2}{x^3}, f''' = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}, \dots, f^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

Indukční krok:

$$f^{(n+1)} = \left[(-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} \right]' = -(-1)^n \frac{n!(n+1)}{x^{n+2}} = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}.$$

Věta 7 (Leibnitzovo pravidlo)

Pro n -tou derivaci součinu platí vzorec

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(n-i)}.$$

Důkaz.

Použijeme indukci.

$$\boxed{n=1} \quad (fg)' = f'g + fg' = \binom{1}{0} f'g + \binom{1}{1} fg' \quad \checkmark$$

$$\boxed{n \rightarrow n+1}$$

$$\begin{aligned} [(fg)^{(n)}]' &= [\binom{n}{0} f^{(n)} g + \binom{n}{1} f^{(n-1)} g' + \dots + \binom{n}{n-1} f' g^{(n-1)} + \binom{n}{n} f g^{(n)}]' \\ &= \binom{n}{0} [f^{(n+1)} g + f^{(n)} g'] + \binom{n}{1} [f^{(n)} g' + f^{(n-1)} g''] + \dots \\ &\quad \dots + \binom{n}{n-1} [f'' g^{(n-1)} + f' g^{(n)}] + \binom{n}{n} [f' g^{(n)} + f g^{(n+1)}] \\ &= \binom{n+1}{0} f^{(n+1)} g + \underbrace{[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}] f^{(n)} g'}_{=\binom{n+1}{1}} + \dots \\ &\quad \dots + \underbrace{[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}] f' g^{(n)}}_{=\binom{n+1}{n}} + \binom{n+1}{n+1} f g^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} f^{(n+1-i)} g^{(i)} \end{aligned}$$



Příklad 4

Vypočtete třetí derivaci funkce $f(x) = e^x \sin 2x$.

$$\begin{aligned} f''' &= e^x \sin 2x + 3 \cdot 2 e^x \cos 2x - 3 \cdot 4 e^x \sin 2x - 8 e^x \cos 2x \\ &= e^x (\sin 2x + 6 \cos 2x - 12 \sin 2x - 8 \cos 2x) = e^x (-11 \sin 2x - 2 \cos 2x). \end{aligned}$$

Věta 8 (Rolleova věta o střední hodnotě)

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a na otevřeném intervalu (a, b) existuje její derivace f' .

Jestliže $f(a) = f(b)$, pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f'(c) = 0$.

Důkaz.

Je-li f konstantní funkce, je tvrzení triviální ($f' \equiv 0$).

Nechť f není konstantní funkce. Pak podle 2. Weierstrassovy věty $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$ takové, že

$$f(x_1) = \sup\{f(x), x \in [a, b]\}, \quad f(x_2) = \inf\{f(x), x \in [a, b]\}.$$

Alespoň jeden z bodů x_1, x_2 je v (a, b) . Předpokládejme, že je to x_1 (pro x_2 podobně). Podle předpokladu existuje $f'(x_1)$.

Je-li $f'(x_1) > 0$ z definice derivace plyne, že $f(x) > f(x_1)$ v nějakém prstencovém okolí $P^+(x_1)$, což je spor s maximalitou $f(x_1)$.

Podobně pro $f'(x_1) < 0 \Rightarrow \exists P^-(x_1): f(x) > f(x_1)$, opět spor.

Tedy $f'(x_1) = 0$, čili $x_1 = c$. □

Věta 9 (Lagrangeova)

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a na intervalu (a, b) existuje derivace f' .

Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$, tj.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Důkaz.

Uvažujme přímku procházející body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

a funkci

$$F(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right],$$

tedy $F(a) = 0, F(b) = 0$.

Podle věty 8 existuje $c \in (a, b)$ takové, že $F'(c) = 0$.

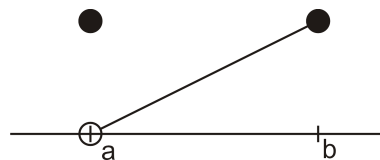
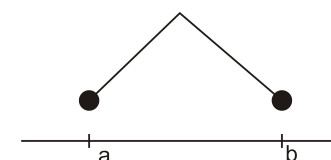
Zároveň $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Pro $x = c$ tedy máme

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Poznámka

Předpoklady vět 8 a 9 nelze zeslabit. Např. předpoklad spojitosti na $[a, b]$ nelze nahradit spojitostí na (a, b) (obr. 2). Nelze ani vypustit předpoklad existence derivace (obr. 3).

Obr. 2: Interval $(a, b]$ 

Obr. 3: Existence derivace

Věta 10 (Cauchyova)

Nechť funkce f a g jsou spojité na $[a, b]$ a na (a, b) existují jejich derivace a $g'(x) \neq 0, x \in (a, b)$. Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Důkaz.

Uvažujeme funkci

$$F(x) = [g(b) - g(a)][f(x) - f(b)] - [f(b) - f(a)][g(x) - g(b)]$$

a aplikujeme Rolleovu větu (Věta 8). \square

Poznámka

- Lagrangeova věta je speciálním případem Cauchyovy věty pro $g(x) = x$.
- Rolleova věta je speciálním typem Lagrangeovy věty pro $f(a) = f(b)$.

Věta 11 (L'Hospitalovo pravidlo)

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, na ryzím okolí x_0 jsou funkce f, g diferencovatelné a $g'(x) \neq 0$. Dále nechť je splněna jedna z podmínek

$$(i) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty.$$

Existuje-li (vlastní nebo nevlastní)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

pak existuje také

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

a obě limity jsou stejné. Tvrzení platí i pro jednostranné limity.

Požadavek $g'(x) \neq 0$ na ryzím okolí x_0 lze nahradit např. požadavkem, aby tam byly definované podíly funkcí i derivací, nebo rozšířením požadavku diferencovatelnosti obou funkcí i na bod x_0 .

Odvození.

Detailní rozbor (existence apod.) viz skriptum.

Nechť $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$. Změňme (pokud je to nutné) funkce f, g tak, aby $f(x_0) = 0, g(x_0) = 0$. Pak limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = *$$

Z Cauchyovy věty o střední hodnotě víme, že $\exists c \in (x_0, x)$ nebo $c \in (x, x_0)$ takové, že

$$* = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = |\text{pokud existuje}| = L.$$

Pokud $|\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)| = \infty = |\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)|$, potom

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-\frac{g'(x)}{g^2(x)}}{-\frac{f'(x)}{f^2(x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^2(x)}{g^2(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}, \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \end{aligned}$$



Poznámka

Jestliže neexistuje limita derivací, neznamená to, že neexistuje původní limita. Pouze nejde použít L'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}.$$

Tato limita neexistuje, tedy L'Hospitalovo pravidlo nelze použít. Původní limitu ale snadno spočítáme.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\cos x}{x}} = 1.$$

Poznámka

L'Hospitalovo pravidlo lze používat opakovaně, tj.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \dots$$

Pozor na splnění předpokladů!

Příklad 5

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2 \end{aligned}$$

Neurčité výrazy

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0.$$

- $0 \cdot \infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{\infty}{\frac{1}{0}}$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ln f(x)}$

$$0^0 \rightarrow e^{0 \cdot (-\infty)}, \quad 1^\infty \rightarrow e^{\infty \cdot 0}, \quad \infty^0 \rightarrow e^{0 \cdot \infty}$$

- $\infty - \infty$

$$f - g = \frac{1}{\frac{1}{f}} - \frac{1}{\frac{1}{g}} = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}} = \left| \frac{0}{0} \right| = \dots$$

(tento obrat se téměř nepoužívá - většinou to jde mnohem jednodušeji úpravami)

• „ $0 \cdot \infty$ “

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x &= |0 \cdot (-\infty)| = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left| \frac{-\infty}{\infty} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0\end{aligned}$$

• „ $\infty - \infty$ “

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \cotg x \right) &= |(\infty - \infty)^+, (-\infty + \infty)^-| \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x} \right) = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{\sin x + x \cos x} \right) = \left| \frac{0}{0} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x + x \cos x}{\cos x + \cos x - x \sin x} \right) = \frac{0}{2} = 0\end{aligned}$$

• „ $\infty - \infty$ “

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2} - x \right) &= |\infty - \infty| \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2} - x \right) \frac{\sqrt[3]{(x^3 + x^2)^2} + x \sqrt[3]{x^3 + x^2} + x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + x^2)^2} + x \sqrt[3]{x^3 + x^2} + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 - x^3}{\sqrt[3]{(x^3 + x^2)^2} + x \sqrt[3]{x^3 + x^2} + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

• „ 0^0 “

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = |0^0| = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x} = *$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x &= |0 \cdot (-\infty)| = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \left| \frac{-\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x \cos x} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos x} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x} = \left| \frac{0}{0} \right| \\ &= -1 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin x \cos x}{1} = 0 \\ * &= e^0 = 1\end{aligned}$$

• „ 1^∞ “

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = |1^\infty| = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}} = *$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x} &= |\infty \cdot 0| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2} = \left| \frac{0}{0} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sin x} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{2x^3} = \left| \frac{0}{0} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{6x^2} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - x \cos x}{12x} = \left| \frac{0}{0} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x - \cos x + x \sin x}{12} = \frac{-1}{6} \\ * &= e^{-1/6}\end{aligned}$$

Věta 12

Nechť $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) pro všechna $x \in I = (a, b)$. Pak je funkce f na I rostoucí (klesající). Je-li $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) na I , pak je f neklesající (nerostoucí).

Důkaz ($f'(x) > 0$).

Nechť $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, jsou libovolné. Potřebujeme dokázat, že $f(x_1) < f(x_2)$. Protože

$$0 < f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

existuje δ_1 takové, že $f(x) - f(x_1) > 0$, $x \in (x_1, x_1 + \delta_1)$.

Označme $y_1 = x_1 + \delta_1$. Pak platí $f'(y_1) > 0$, $\exists \delta_2 > 0$: $f(x) > f(y_1)$ pro $x \in (y_1, y_1 + \delta_2)$. Označíme $y_2 = y_1 + \delta_2, \dots$

Postupujeme tak dlouho, dokud „nedoskáčeme“ k bodu x_2 , tj.

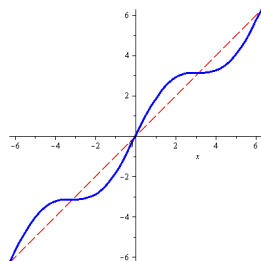
$$\exists y_n : f(y_n) > f(y_{n-1}) > \dots > f(y_1) > f(x_1),$$

$$\exists \delta_n > 0 : f(x) > f(y_n), x \in (y_n, y_n + \delta_n)$$

$$a x_2 \in (y_n, y_n + \delta_n) \Rightarrow f(x_2) > f(y_n) > \dots > f(x_1). \quad \square$$

Poznámka

Opačná implikace „ f je rostoucí $\Rightarrow f'(x) > 0$ “ obecně neplatí, např. funkce $f(x) = x + \sin x$ je rostoucí \mathbb{R} , ale $f'(x) = 0$ pro $x = (2k + 1)\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).



Platí: f je rostoucí $\Rightarrow f'(x) \geq 0$ a rovnost nule nenastane na žádném podintervalu intervalu I , kde je funkce rostoucí (tj. na žádném intervalu větším než jeden bod). Kdyby $f'(x) = 0$ na (x_1, x_2) , $x_1 < x_2$, tak podle Lagrangeovy věty $\exists c \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(c)}_{=0} (x_2 - x_1) \Rightarrow$

$f(x_1) = f(x_2)$, což je spor s tím, že je funkce rostoucí.

Definice 6 (Lokální extrémy)

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 **lokální maximum (minimum)**, jestliže existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$) pro $\forall x \in \mathcal{O}(x_0)$.

Jsou-li nerovnosti pro $x \neq x_0$ ostré, mluvíme o **ostrém** lokálním maximu, resp. minimu.

Věta 13 (Nutná podmínka pro lokální extrém funkce mající derivaci)

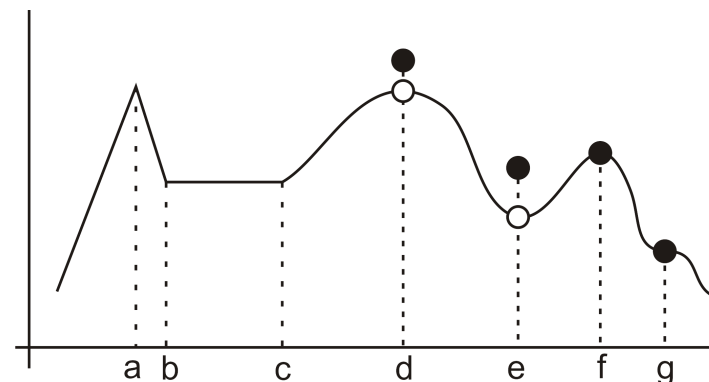
Nechť funkce f má v bodě x_0 lokální extrém a existuje $f'(x_0)$.
 Pak $f'(x_0) = 0$.

Důkaz.

Případy $f'(x_0) > 0$ a $f'(x_0) < 0$ vedou ke sporu s faktem, že funkce f má v bodě x_0 lokální extrém. □

Definice 7

Body, kde $f'(x) = 0$, se nazývají *stacionární body* funkce f .

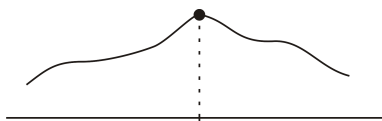


Věta 14

Nechť funkce f je spojitá v bodě x_0 . Jestliže existuje okolí $\mathcal{P}^-(x_0)$, v němž je funkce f rostoucí (klesající), a $\mathcal{P}^+(x_0)$, v němž je funkce klesající (rostoucí), pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum (minimum).

Důkaz.

► $f(x_0) > f(x)$ v levém i pravém okolí bodu x_0 (minimum podobně)



□

► pozor na spojitost



Věta 15

Nechť je funkce f spojitá v bodě x_0 . Jestliže existuje okolí $\mathcal{P}^-(x_0)$, kde $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), a $\mathcal{P}^+(x_0)$, kde $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$), pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum (minimum).

Důkaz.

Plyne z vět 12 a 14. □

Věta 16

Nechť bod x_0 je stacionárním bodem funkce f (tj. $f'(x_0) = 0$), a platí, že $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$). Pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum (maximum).

Důkaz.

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f'$ je v x_0 rostoucí, tedy

$$\exists \mathcal{P}^-(x_0) : f'(x) < f'(x_0) = 0,$$

$$\exists \mathcal{P}^+(x_0) : f'(x) > f'(x_0) = 0.$$

$f'(x_0)$ existuje $\Rightarrow f$ je spojitá v x_0 . V $\mathcal{P}^-(x_0)$ je f klesající, v $\mathcal{P}^+(x_0)$ je f rostoucí, tedy x_0 je ostré lokální minimum. (Pro maximum podobně.) \square

Definice 8 (Absolutní (globální) extrémy)

Buď $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in [a, b]$ **absolutní maximum (minimum) na intervalu $[a, b]$** , jestliže pro všechna $x \in [a, b]$ platí, že

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)).$$

Jsou-li nerovnosti pro $x \neq x_0$ ostré, mluvíme o **ostrých** absolutních extrémech funkce na $[a, b]$.

Věta 17

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$. Pak funkce f nabývá svého absolutního maxima i minima na intervalu $[a, b]$ a to buď v bodě lokálního extrému ležícího v (a, b) nebo v jednom z krajních bodů $x = a$, $x = b$.

Důkaz.

Podle 2. Weierstrassovy věty existují $x_1, x_2 \in [a, b]$ takové, že

$$f(x_1) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}, \quad f(x_2) = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Pro $x = x_1$ máme možnosti: Buď $x_1 = a$, nebo $x_1 = b$, nebo $x_1 \in (a, b)$, pak je x_1 bodem lokálního maxima. Analogicky pro x_2 . \square

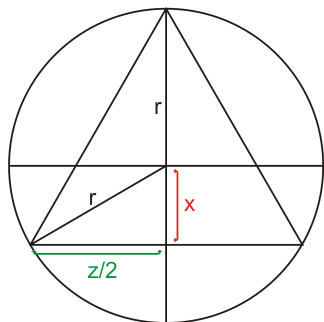
Poznámka

Globální extrémy spojitě funkce f na intervalu $[a, b]$ hledáme takto:

Určíme stacionární body a body uvnitř intervalu $[a, b]$, v nichž neexistuje derivace, pak porovnáme funkční hodnoty v těchto bodech s hodnotami $f(a)$ a $f(b)$.

Příklad 6

Do kružnice s poloměrem r vepište rovnoramenný trojúhelník s maximálním obsahem. Tento maximální obsah určete.



$$P = \frac{1}{2}zv = \frac{1}{2}2\sqrt{r^2 - x^2}(x + r)$$

$$= (r + x)\sqrt{r^2 - x^2}$$

$\rightarrow \max, x \in [-r, r]$

$$P = P(x), \quad P(-r) = 0 = P(r)$$

$$P'(x) = \sqrt{r^2 - x^2} + (r + x) \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-2x^2 - rx + r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -r \notin (-r, r), \quad x_2 = r/2 \text{ (max. např. z } P'')$$

$$P(r/2) = (r + r/2)\sqrt{r^2 - r^2/4} = \frac{3}{4}\sqrt{3}r^2$$

Definice 9 (Konvexní a konkávní funkce)

Řekneme, že funkce f je na intervalu I **konvexní [konkávní]**, pokud pro každé $x_1, x_2 \in I$ a každé $\lambda \in [0, 1]$ platí

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \quad (1)$$

$$\left[f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \geq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \right].$$

Platí-li nerovnost ostře, mluvíme o **ostré (ryzí) konvexnosti** a **ostré (ryzí) konkávnosti**.

Poznámka

Nadgraf (množina $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathcal{D}(f), y \geq f(x)\}$) konvexní funkce je konvexní množina.

Poznámka

Uvažujme $x, x_1, x_2 \in I$ takové, že $x_1 < x < x_2$. Volbou $\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ převedeme nerovnost (1) na

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1), \quad (2)$$

což vyjadřuje, že bod $[x, f(x)]$ je pod úsečkou spojující body $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_2, f(x_2)]$, popř. na ní.

Podobně pro konkávnost a ostré varianty. Jde o ekvivalentní definici.

Věta 18

Nechť funkce f má na intervalu I derivaci a pro libovolné $x_0 \in I$ platí

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \forall x \in I, \quad (3)$$

tj. graf funkce f leží nad tečnou sestavenou v libovolném bodě $x_0 \in I$. Pak je funkce f konvexní na intervalu I .

Důkaz.

Nechť $x_1, x_2 \in I$ a $\lambda \in [0, 1]$ jsou libovolné. Položme $x_0 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$. Dosazením $x = x_1$, $x = x_2$ do (3) dostaneme

$$(a) f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)[x_1 - \lambda x_1 - (1 - \lambda)x_2]$$

$$(b) f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)[x_2 - \lambda x_1 - (1 - \lambda)x_2]$$

$$\lambda(a) + (1 - \lambda)(b) \Rightarrow$$

$$\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \geq [\lambda + (1 - \lambda)]f(x_0) + f'(x_0)[\lambda x_1 - \lambda^2 x_1 - \lambda(1 - \lambda)x_2 + (1 - \lambda)x_2 - (1 - \lambda)\lambda x_1 - (1 - \lambda)^2 x_2]$$

$$\Rightarrow \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \geq f(x_0) + 0 = f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2).$$

□

Poznámka

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \forall x, x_0 \in I,$$

tj. graf funkce f leží pod tečnou sestavenou v libovolném bodě $x_0 \in I$, pak je f na intervalu I konkávní.

Lemma 1

Uvažujme funkci f definovanou na intervalu I . Nechť $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$. Pak jsou následující nerovnosti ekvivalentní.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}, \quad (4)$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}, \quad (5)$$

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \quad (6)$$

Důkaz.

Upravme nerovnost (4).

$$f(x_2)(x_3 - x_1) - f(x_1)(x_3 - x_1) \leq f(x_3)(x_2 - x_1) - f(x_1)(x_2 - x_1),$$

$$f(x_2)(x_3 - x_2 + x_2 - x_1) - f(x_1)(x_3 - x_2 + x_2 - x_1) \leq f(x_3)(x_2 - x_1) - f(x_1)(x_2 - x_1),$$

$$f(x_2)(x_3 - x_2) + f(x_2)(x_2 - x_1) - f(x_1)(x_3 - x_2) - f(x_1)(x_2 - x_1) \leq f(x_3)(x_2 - x_1) - f(x_1)(x_2 - x_1),$$

$$[f(x_2) - f(x_1)](x_3 - x_2) \leq [f(x_3) - f(x_2)](x_2 - x_1).$$

Tím je dokázána ekvivalence nerovností (4) a (5). Ostatní analogicky. □

Věta 19

Nechť funkce f má na otevřeném intervalu I vlastní derivaci. Pak je f konvexní na I právě tehdy, když je f' neklesající.

Analogicky platí

$$\begin{aligned} f \text{ ostře konvexní} &\Leftrightarrow f' \text{ rostoucí,} \\ f \text{ konkávní} &\Leftrightarrow f' \text{ nerostoucí,} \\ f \text{ ostře konkávní} &\Leftrightarrow f' \text{ klesající.} \end{aligned}$$

Důkaz „ \Rightarrow “.

Zvolíme libovolně $x, x_1, x_2 \in I$ tak, že $x_1 < x < x_2$. Pak z konvexnosti (viz (2)) a lemmatu 1 máme

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}.$$

V levém zlomku provedeme limitní přechod $x \rightarrow x_1^+$, v pravém $x \rightarrow x_2^-$. Dle předpokladů věty existují příslušné derivace, tedy

$$f'(x_1) \leq f'(x_2),$$

tedy f' je neklesající.

Důkaz „ \Leftarrow “.

f' je neklesající na I , $x, x_1, x_2 \in I$ tak, že $x_1 < x < x_2$. Na intervalech $[x_1, x]$ a $[x, x_2]$ lze použít pro f Lagrangeovu větu 9, tedy existují $c_1 \in (x_1, x)$, $c_2 \in (x, x_2)$ takové, že

$$f'(c_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}, \quad f'(c_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

přičemž $c_1 < c_2$. Protože f' je neklesající, máme $f'(c_1) \leq f'(c_2)$, tedy

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

což je vztah (2) ekvivalentní s definicí konvexnosti. □

Věta 20

Nechť funkce f má na otevřeném intervalu I vlastní druhou derivaci a platí

$$f''(x) > 0 \quad (f''(x) < 0) \quad \forall x \in I.$$

Pak funkce f je na intervalu I ostře konvexní (ostře konkávní).

Důkaz.

Tvrzení plyne přímo z vět 12 a 19. □

Definice 10

Předpokládejme, že funkce f má v bodě x_0 derivaci $f'(x_0)$.

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 **inflexní bod** (graf funkce f má inflexní bod), jestliže existuje okolí $\mathcal{P}^-(x_0)$, v němž je funkce ryze konvexní (konkávní), a okolí $\mathcal{P}^+(x_0)$, v němž je f ryze konkávní (konvexní).

Poznámka

V definici konvexnosti a konkávnosti funkce je neostrá nerovnost, vyhovuje jí i lineární funkce $y = ax + b$, která je konvexní i konkávní. Žádný inflexní bod ale nemá.

Příklad 7

- $y = x^3$ má inflexní bod $x_0 = 0$,
- $y = \sin x$ má inflexní body $x_0 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Věta 21

Jestliže x_0 je inflexní bod funkce f a $f''(x_0)$ existuje, pak $f''(x_0) = 0$.

Důkaz.

Kdyby $f''(x_0) > 0$, pak je f v okolí x_0 konvexní \rightarrow spor,
kdyby $f''(x_0) < 0$, pak je f v okolí x_0 konkávní \rightarrow spor. \square

Věta 22

Nechť $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, pak funkce f má v bodě x_0 inflexní bod.

Důkaz.

Předpokládejme $f'''(x_0) > 0$ (pro $f'''(x_0) < 0$ je postup analogický).

$$f'''(x_0) > 0, \text{ tj. } (f'')'(x_0) > 0,$$

tedy f'' je rostoucí v okolí x_0 a tedy $f''(x) < 0 (> 0)$ v levém (pravém) ryzím okolí $x_0 \Rightarrow f$ je vlevo od x_0 ryze konkávní a vpravo ryze konvexní. \square

Věta 23

Nechť funkce f má v bodě x_0 derivace po řád $n \geq 1$ ($n \in \mathbb{N}$) včetně a $f'(x_0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(x_0) = 0$ a $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

- ① Je-li n sudé, má f v x_0 lokální extrém, a to minimum pro $f^{(n)}(x_0) > 0$ a maximum pro $f^{(n)}(x_0) < 0$.
- ② Je-li n liché, má f v x_0 inflexní bod.

Důkaz.

V příští kapitole ukážeme, že za předpokladů věty se funkce f chová v okolí x_0 přibližně jako funkce $g(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$. \square

Definice 11 (Asymptota bez směrnice)

Řekneme, že svislá přímka $x = x_0$ je *asymptotou bez směrnice* grafu funkce $y = f(x)$, jestliže aspoň jedna z jednostranných limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

je nevlastní.

Příklad 8

Funkce $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ má asymptoty bez směrnice $x = 1$ a $x = -1$. (Obě jednostranné limity jsou nevlastní.)

Příklad 9

Funkce $f(x) = e^{1/x}$ má asymptotu bez směrnice $x = 0$. (Jedna jednostranná limita je nevlastní.)

Příklad 10

Funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ nemá asymptotu bez směrnice.

Definice 12

Řekneme, že přímka $y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ je *asymptotou grafu funkce* $y = f(x)$ pro $x \rightarrow \infty(-\infty)$, jestliže

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \right).$$

Přímka $y = ax + b$ se nazývá *asymptota se směrnicí*.

Poznámka

Asymptoty se směrnicí může mít funkce nejvýše dvě (do $\pm\infty$).

Věta 24

Přímka $y = ax + b$ je asymptotou se směrnicí grafu funkce $y = f(x)$ právě tehdy, když

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax),$$

přičemž $x \rightarrow +\infty$ je pro asymptotu v $+\infty$ a $x \rightarrow -\infty$ pro asymptotu v $-\infty$.

Důkaz.

Přímka je asymptotou jestliže

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = b,$$

což znamená

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - a \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{b}{x} = 0,$$

tedy

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right] = a.$$



Příklad 11

Určete asymptoty se směrnicí

- $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x} - 1 \cdot x\right) = 0,$$

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x} = 1, \quad b = 0$$

asymptota: $y = x$.

- $f(x) = x^2$

$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty$ tedy f nemá asymptoty se směrnicí

- $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \frac{\sin x}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x^2}\right) = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x + \frac{\sin x}{x} - x\right) = 0, \quad \text{asymptota } y = x$$

(pozn.: as. bez směrnice v bodě $x_0 = 0$ není, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \frac{\sin x}{x}\right) = 1$)

Postup při vyšetřování průběhu funkce

(i) **Přímo z funkce:**

- $D(f)$, sudost/lichost, periodičnost, průsečky s osami, kladnost/zápornost,
- asymptoty (se směrnicí, bez směrnice).

(ii) **Z první derivace:** rostoucí/klesající, lokální extrémy.

(iii) **Z druhé derivace:** konvexní/konkávní, inflexní body.

(iv) **Načrtnutí grafu:** ke všem výše zmíněným bodům dopočítáme funkční hodnoty a zkombinujeme zjištěné informace.

Postupně tedy plníme následující body:

- | | |
|-----------------------------------|--|
| a) definiční obor, | j) druhou derivaci, |
| b) sudost/lichost (periodičnost), | k) kde je f konvexní/konkávní, |
| c) asymptoty bez směrnice, | l) inflexní body, |
| d) asymptoty se směrnicí, | |
| e) průsečíky s osami, | |
| f) kladnost/zápornost, | |
| g) první derivaci, | m) funkční hodnoty ve významných bodech, |
| h) kde je f rostoucí/klesající, | n) načrtne graf. |
| i) lokální extrém, | |

Příklad 12

Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = -\frac{x^2}{x+1}$$

Řešení:

- a) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla taková, že $x+1 \neq 0$. Proto máme

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

- b) O sudosti/lichosti funkce snadno rozhodneme dosazením $-x$. Poněvadž platí

$$f(-x) = -\frac{x^2}{-x+1} \neq \pm f(x),$$

není zadaná funkce ani lichá, ani sudá (což je vidět už z nesymetrie definičního oboru). Vzhledem k definičnímu oboru je zřejmé, že funkce nemůže být periodická.

- c) Asymptoty bez směrnice popisují limitní chování funkce v bodech nespojitosti (nebo na okraji definičního oboru), proto přímým výpočtem ihned dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} -\frac{x^2}{x+1} = -\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{x+1} = -(+\infty) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} -\frac{x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} -\frac{x^2}{x+1} = -(-\infty) = \infty.$$

Funkce má jednu svislou asymptotu $x = -1$.

- d) Pomocí vzorců určíme asymptoty se směrnicí (pokud existují).

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{x^2}{x^2+x} = -1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{x^2}{x+1} + x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x+1} = 1.$$

Funkce $f(x)$ má tedy v $+\infty$ i $-\infty$ asymptotu se směrnicí, která je dána rovnicí $y = -x + 1$.

- e) Určíme průsečíky s osou x ($\Rightarrow y = 0$):

$$f(x) = 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0,$$

tedy $P_x = [0, 0]$,

a s osou y ($\Rightarrow x = 0$):

$$y = -\frac{0^2}{0+1} = 0 \iff y = 0,$$

tedy $P_y = [0, 0] = P_x$.

- f) Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná:

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
$\text{sgn } f$	+	-	-
f	kladná	záporná	záporná

g) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x}{(x+1)^2}, \quad D(f') = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

h) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.

$$f'(x) = 0 \iff -x(x+2) = 0 \iff x_1 = 0, x_2 = -2.$$

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
$\text{sgn } f'$	-	+	+	-
f	↘	↗	↗	↘

i) Z tabulky vidíme, že funkce má v $x = -2$ lokální minimum a v $x = 0$ lokální maximum.

j) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = \frac{-2x - 2}{(x+1)^4} = \frac{-2}{(x+1)^3},$$

$$D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

k) Určíme kritické body a intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

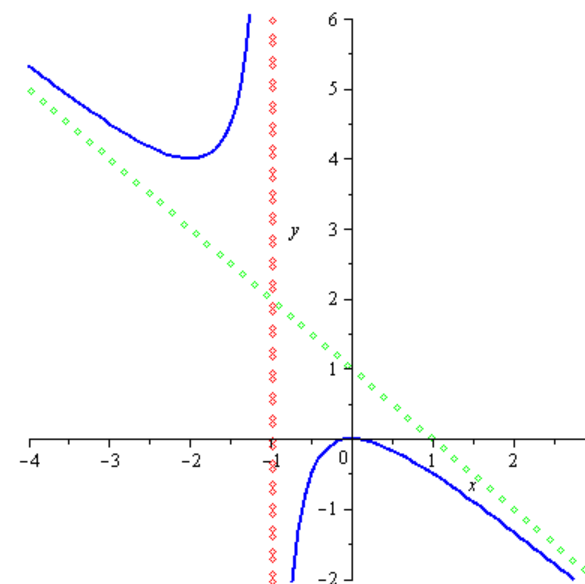
$$f''(x) = 0 \iff -2 = 0,$$

což je nesmysl. Druhá derivace tedy nemá žádný nulový bod. Nesmíme ovšem zapomenout, že její znaménko se může změnit i v bodech, ve kterých není definována (tj. v „dírách“ jejího definičního oboru).

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
$\text{sgn } f''$	+	-
f	∪	∩

- l) Funkce nemá žádný inflexní bod ($-1 \notin D(f)$).
- m) Zrekapitulujme význačné body a spočtěme v nich funkční hodnoty.
- Průsečíky s osami $P_x = P_y = [0, 0]$.
 - Lokální minimum v $x = -2, f(-2) = 4$, tedy jde o bod $[-2, 4]$.
 - Lokální maximum v $x = 0, f(0) = 0$, tedy jde o bod $[0, 0]$.

n) Nyní zkombinujeme všechny získané informace a obdržíme graf funkce



Věta 25

Nechť funkce f, g mají na intervalu I derivaci a $\forall x \in I$ platí $f'(x) = g'(x)$. Pak $\exists c \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) - g(x) = c, \forall x \in I$.

Důkaz.

$F(x) = f(x) - g(x)$. Pak $F'(x) = 0, \forall x \in I$, a tedy pro libovolné $x_1, x_2 \in I$ podle Lagrangeovy věty platí

$$F(x_2) - F(x_1) = F'(\xi)(x_2 - x_1) = 0,$$

kde ξ leží mezi hodnotami x_1, x_2 .

Tedy $F(x) = c, \forall x \in I \Rightarrow f(x) - g(x) = c$. □

Příklad 13

Dokažte pro $x \geq 0$ identitu

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} \frac{\sqrt{1+x^2} - x \cdot \frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2} 2x}{(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)' = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}} \cdot \frac{-1}{2} (1+x^2)^{-3/2} 2x = \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{1+x^2},$$

kde jsme využili $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$.

Dosaďme $x = 1$.

$$\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}}$$

V jednom bodě z intervalu nabývají stejné hodnoty a derivace mají stejné, tedy identita platí na celém intervalu $I = [0, \infty)$.

Příklad 14

Dokažte $\arctg x = \operatorname{arccotg} \frac{1}{x}$. Pro která $x \in \mathbb{R}$ identita platí?

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad g'(x) = \frac{-1}{1+(\frac{1}{x})^2} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

V $x = 0$ je funkce $\operatorname{arccotg} \frac{1}{x}$ nespojitá. Dosaďme $x = 1$ a $x = -1$.

$$\arctg 1 = \frac{\pi}{4} = \operatorname{arccotg} 1, \quad \arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{arccotg}(-1) = \frac{3\pi}{4}.$$

Identita tedy platí pro $x \in (0, \infty)$.

Pro $x \in (-\infty, 0)$ jsou funkce různé o π .

Příklad 15

Dokažte, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $2x \operatorname{arctg} x \geq \ln(1+x^2)$.

$$F(x) := 2x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2)$$

a spočítáme minimum na \mathbb{R} .

$$F'(x) = 2 \operatorname{arctg} x + 2x \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} 2x = 2 \operatorname{arctg} x,$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad F''(x) = 2 \frac{1}{1+x^2} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

tedy $x = 0$ je lokální minimum. $F(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, rovnost nastává pro $x = 0$.

Definice 13

Nechť je funkce f definovaná v $\mathcal{O}(x_0)$ a pro $h \in \mathbb{R}$ platí $x_0 + h \in \mathcal{O}(x_0)$. Pak číslo h nazýváme *přírůstek nezávisle proměnné* a rozdíl $\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ nazýváme *přírůstek závisle proměnné* (popř. detailněji $\Delta f(x_0)(h)$ jako přírůstek funkce f v bodě x_0 s krokem h).

Definice 14

Řekneme, že funkce f je *diferencovatelná v bodě* $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že

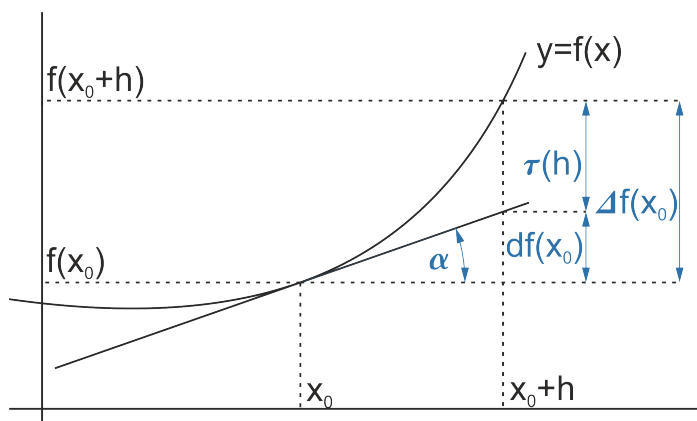
$$f(x_0 + h) - f(x_0) = A \cdot h + \tau(h),$$

kde $A \in \mathbb{R}$ je vhodné číslo a $\tau(h)$ je funkce s vlastností

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tau(h)}{h} = 0.$$

Je-li f v x_0 diferencovatelná, nazýváme výraz $A \cdot h$ *diferenciál* funkce f a píšeme $df(x_0)$, popř. $df(x_0)(h)$.

Diferenciál funkce je lineární funkce přírůstku nezávisle proměnné h .



$$\Delta f(x_0) := f(x_0 + h) - f(x_0), \quad \Delta f(x_0) := A \cdot h + \tau(h), \quad A = \operatorname{tg} \alpha$$

Věta 26

Funkce f je v bodě x_0 diferencovatelná právě tehdy, když v tomto bodě existuje vlastní derivace $f'(x_0)$. Přitom platí

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot h.$$

Tedy $A = f'(x_0)$. Často se používá značení $dx = h$, tj.

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx.$$

Diferenciál v obecném bodě x

$$df(x) = f'(x) \cdot dx.$$

$$y = f(x) \Rightarrow dy = df(x) \Rightarrow \underbrace{f'(x)}_{\text{Newton}} = \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{\text{Leibnitz}}.$$

Derivace inverzní funkce $x = f^{-1}(y)$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Derivace složené funkce $F(x) = (g \circ f)(x)$, kde $f(x) = y, g(y) = z$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Důkaz.

„ \Rightarrow “ Předpokládejme, že funkce f je diferencovatelná v bodě x_0 , pak

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &= Ah + \tau(h) \\ \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= A + \frac{\tau(h)}{h} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(A + \underbrace{\frac{\tau(h)}{h}}_{\rightarrow 0} \right) \\ f'(x_0) &= A + 0 = A. \end{aligned}$$

„ \Leftarrow “ Předpokládejme, že existuje derivace $f'(x_0) = A \in \mathbb{R}$ a položeme $\tau(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h$. Pak

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tau(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$$

Poznámka

Využití diferenciálu pro přibližný výpočet funkčních hodnot:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot h + \tau(h),$$

tedy

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h.$$

Příklad 16

Vypočtete pomocí diferenciálu přibližně $\sqrt[3]{7.9}$.

$$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 8, \quad h = x - x_0 = -0.1, \quad f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\sqrt[3]{7.9} \approx \sqrt[3]{8} + \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}(-0.1) = 2 - \frac{1}{30.4} = 2 - \frac{1}{120} = 2 - 0.008\bar{3} = 1.991\bar{6}.$$

Motivace

Máme dānu funkci f a chceme sestrojīt polynom stupnĚ $n \in \mathbb{N}$, kterŕy v okolí bodu x_0 nejlĚpe aproximuje funkci f .

- Pro $n = 1$: $P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, viz diferenciāl. $P(x)$ mĀ s funkcí $f(x)$ v x_0 stejnou funkční hodnotu a hodnotu první derivace.
- Najdeme polynom $P(x) = a_n(x - x_0)^n + \dots + a_1(x - x_0) + a_0$, mající s funkcí $f(x)$ v bodĚ x_0 stejnou funkční hodnotu a derivace aĹ do řādu n .

HledĀme polynom $P(x) = a_n(x - x_0)^n + \dots + a_1(x - x_0) + a_0$ splňující

$$P^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

tedy

$$f(x_0) = P(x_0) = a_0,$$

$$f'(x_0) = P'(x_0) = 1 \cdot a_1,$$

$$f''(x_0) = P''(x_0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2,$$

$$f^{(3)}(x_0) = P^{(3)}(x_0) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3,$$

⋮

$$f^{(n-1)}(x_0) = P^{(n-1)}(x_0) = (n-1)! \cdot a_{n-1},$$

$$f^{(n)}(x_0) = P^{(n)}(x_0) = n! \cdot a_n.$$

Odtud ihned

$$a_0 = f(x_0), a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \dots, a_{n-1} = \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Definice 15

Předpokládejme, Źe funkce f mĀ v bodĚ x_0 derivace aĹ do řādu $n \in \mathbb{N}$ vĚtĚnĚ. *Taylorovŕm polynomem stupnĚ n funkce f v bodĚ x_0* , znaĹme jej $T_n(x, x_0)$, rozumĪme polynom, kterŕy mĀ v bodĚ x_0 stejnou funkční hodnotu a stejnou hodnotu prvnĪch n derivacĪ jako funkce f , tj.

$$f(x_0) = T_n(x_0, x_0), f'(x_0) = T'_n(x_0, x_0), \dots, f^{(n)}(x_0) = T_n^{(n)}(x_0, x_0).$$

VĚta 27 (Taylorova vĚta)

Nechť mĀ funkce f v okolí bodu x_0 vlastní derivace aĹ do řādu $n + 1$ pro nĚjakĚ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak pro vřechna x z tohoto okolí platĪ

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

kde ξ je vhodnĚ čĪslo leŹící mezi x_0 a x .

Vzorec uvedenŕy ve vĚtĚ se nazŕvĀ *Taylorův vzorec*.

Zbytek $R_n(x)$ je uveden v Lagrangeově tvaru.

Vynecháme-li zbytek $R_n(x)$, obdržíme *Taylorův polynom*:

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i.$$

Pokud v položíme $x_0 = 0$, získáme tzv. *Maclaurinův polynom*:

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i.$$

Příklad 17

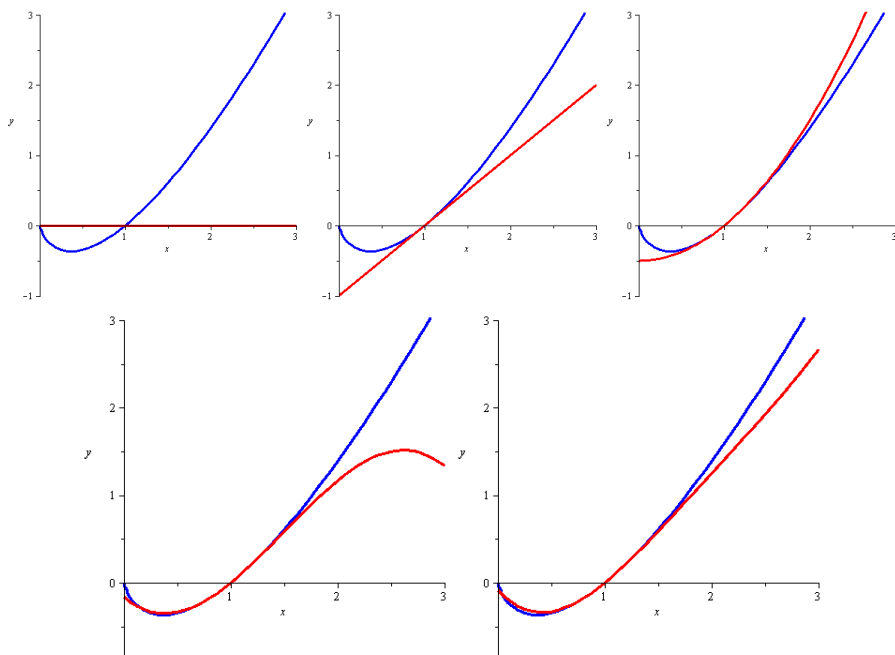
Určete Taylorův polynom 4. řádu se středem v bodě $x_0 = 1$ funkce $f(x) = x \ln x$.

$$f'(x) = 1 + \ln x, \quad f''(x) = \frac{1}{x}, \quad f'''(x) = \frac{-1}{x^2}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{2}{x^3}.$$

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = 1, \quad f''(1) = 1, \quad f'''(1) = -1, \quad f^{(4)}(1) = 2.$$

Tedy

$$\begin{aligned} T(x) &= 0 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{-1}{3!}(x-1)^3 + \frac{2}{4!}(x-1)^4 \\ &= \frac{1}{12}(x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 10x - 3). \end{aligned}$$



Věta 28

Maclaurinovy polynomy pro e^x , $\sin x$ a $\cos x$:

- $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$,
- $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$,
- $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

Důkaz.

Přímým výpočtem.

Příklad 18

Určete počet členů Maclaurinova polynomu funkce $f(x) = e^x$, abychom číslo $\frac{1}{e}$ spočítali s chybou menší než 10^{-3} .

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad c \text{ mezi } x, x_0$$

$$e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!} (-1)^{n+1}$$

$$\left| \frac{e^c}{(n+1)!} (-1)^{n+1} \right| < 10^{-3}, \quad c \in (-1, 0), \text{ tedy}$$

$$\left| \frac{e^c}{(n+1)!} (-1)^{n+1} \right| < \frac{e^0}{(n+1)!} < \frac{1}{1000} \Rightarrow (n+1)! > 1000 \Rightarrow n = 6,$$

$$e^{-1} \approx \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \text{ toto vyjádření je s chybou menší než } 10^{-3}.$$

Věta 29

Maclaurinovy vzorce pro e^x , $\sin x$ a $\cos x$ ($n \in \mathbb{N}$, c mezi 0 a x):

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$,
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{\cos c}{(2n+1)!} x^{2n+1}$,
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+2} \frac{\cos c}{(2n+2)!} x^{2n+2}$.

Důkaz.

- $(e^x)^{(i)} = e^x, i \in \mathbb{N}_0$, tedy $R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$,
- $(\sin x)^{(2i)} = (-1)^i \sin x|_{x=0} = 0$,
 $(\sin x)^{(2i+1)} = (-1)^i \cos x|_{x=0} = (-1)^i, i \in \mathbb{N}_0$,
 tedy $R_{2n}(x) = (-1)^n \frac{\cos c}{(2n+1)!} x^{2n+1}$,
- $(\cos x)^{(2i)} = (-1)^i \cos x|_{x=0} = (-1)^i$,
 $(\cos x)^{(2i+1)} = (-1)^{i+1} \sin x|_{x=0} = 0, i \in \mathbb{N}_0$,
 tedy $R_{2n+1}(x) = (-1)^{n+2} \frac{\cos c}{(2n+2)!} x^{2n+2}$.

□

Poznámka (Eulerova identita – exponenciální tvar komplexního čísla)

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}, \quad x = i\varphi \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= 1 + \frac{i\varphi}{1!} + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \dots + \frac{(i\varphi)^n}{n!} + \dots \\ &= 1 + i \frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^2}{2!} - i \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \dots \\ &= \underbrace{1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \dots}_{\cos \varphi} + i \underbrace{\left(\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \dots \right)}_{\sin \varphi} \\ &= \cos \varphi + i \sin \varphi \end{aligned}$$

Taylorův (Maclaurinův) rozvoj dalších elementárních funkcí

- pro $x \in (-1, \infty)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + (-1)^{n+2} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}$$

- pro $\alpha \in \mathbb{R}, x \in (-1, \infty)$, nebo $\alpha \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots \\ &\dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!} x^{n+1} (1+c)^{\alpha-n-1} \\ &= 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+c)^{\alpha-n-1} \end{aligned}$$

kde jsme (pro $\alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$) použili zobecněný binomický koeficient

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Využití Taylorova a Maclaurinova polynomu

- přibližný výpočet funkčních hodnot,
- výpočet limit.

Příklad 19

Pomocí Taylorova polynomu 2. řádu vypočtete přibližně $\sqrt[3]{7.9}$.

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x}, x_0 = 8, h = x - x_0 = -0.1, f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3}, f''(x) = \frac{-2}{9} x^{-5/3}$$

$$\sqrt[3]{7.9} \approx 2 - \frac{1}{3 \cdot 4} (0.1) - \frac{1}{2} \frac{2}{9 \cdot 32} (0.1)^2 = 2 - \frac{1}{120} - \frac{1}{28800} = \frac{57359}{28800}$$

Příklad 20

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1+x^3}}{x^2} = ?$$

$(1+t)^{1/2} = 1 + \binom{1/2}{1} t + \binom{1/2}{2} t^2 + \dots$ použijeme pro $t = x^2$, tedy

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} x^4 + \dots$$

$(1+t)^{1/3} = 1 + \binom{1/3}{1} t + \binom{1/3}{2} t^2 + \dots$ použijeme pro $t = x^3$, tedy

$$\sqrt[3]{1+x^3} = 1 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{9} x^6 + \dots$$

Odtud

$$\begin{aligned} ? &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1+x^3}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} x^4 + \dots - (1 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{9} x^6 + \dots)}{x^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Poznámka (Diferenciály vyšších řádů)

$$f(x+h) - f(x) = Ah + \tau(h) = d f(x)(h) + \tau(h) = f'(x)h + \tau(h),$$

$$f(x+h) = f(x) + \underbrace{f'(x)h}_{d f(x)(h)} + \underbrace{\tau(h)}_{R_1(x)}$$

V rozvoji

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!} h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} h^n + R_n(x)$$

označme

$$f''(x)h^2 = d^2 f(x)(h), f'''(x)h^3 = d^3 f(x)(h), \dots, f^{(n)}(x)h^n = d^n f(x)(h).$$

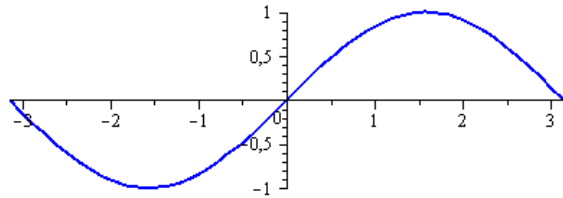
Tím dostaneme

$$f(x+h) = f(x) + d f(x)(h) + \frac{1}{2!} d^2 f(x)(h) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(x)(h) + \text{zbytek.}$$

Zadáme-li např. graf funkce sinus po souřadnicích x, y , dostaneme množinu bodů

$$[x, y] = [x, \sin x], x \in \mathbb{R},$$

protože x je nezávisle proměnná a $y = f(x)$ je závisle proměnná.



Obr. 4: $y = \sin x, x \in [-\pi, \pi]$

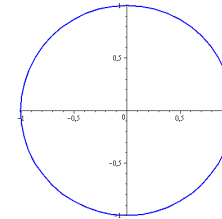
Body o souřadnicích

$$x = \cos t,$$

$$y = \sin t, t \in [0, 2\pi]$$

dávají jednotkovou kružnici

$$x^2 + y^2 = 1.$$



Body o souřadnicích

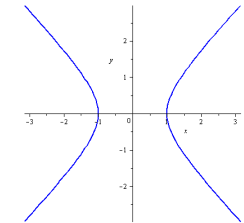
$$x = \cosh t, y = \sinh t, t \in \mathbb{R}$$

dávají pravou větev a body

$$x = -\cosh t, y = \sinh t, t \in \mathbb{R}$$

levou větev hyperboly

$$x^2 - y^2 = 1.$$



Definice 16

Nechť φ a ψ jsou funkce, které zobrazují interval $[\alpha, \beta]$ do \mathbb{R} . Pak množina bodů $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ takových, že

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta]$$

se nazývá *křivka parametricky zadaná dvojicí φ a ψ* .

Jsou-li funkce φ a ψ spojité, nazývá se křivka jimi určená, *spojitá*.

Mají-li funkce φ a ψ navíc na intervalu $[\alpha, \beta]$ derivace a

$$\forall t \in [\alpha, \beta] : [\varphi']^2 + [\psi']^2 > 0,$$

řekneme, že křivka je *hladká*.

Poznámka

V roce 1890 sestrojil G. Peano příklad spojitých funkcí $\varphi, \psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ takových, že množina $[\varphi(t), \psi(t)]$, tj. křivka s parametrizací φ, ψ , vyplnila celý jednotkový čtverec $[0, 1] \times [0, 1]$.

Poznámka

Křivka

$$x = \varphi(t) = \begin{cases} -t^2 & t < 0 \\ t^2 & t \geq 0 \end{cases}, \quad y = \psi(t) = t^2, t \in \mathbb{R}$$

má $\varphi'(0) = 0, \psi'(0) = 0$, tedy není hladká na žádném intervalu obsahujícím nulu. (Jde o $y = |x|$.)

Věta 30

Nechť

$$C = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta]\}$$

je hladká křivka a v bodě $t_0 \in [\alpha, \beta]$ platí $\varphi'(t_0) \neq 0$. Pak směrnice tečny ke křivce C v bodě $[x_0, y_0] = [\varphi(t_0), \psi(t_0)]$ je

$$k = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

Důkaz.

Tečnou ke křivce rozumíme, podobně jako pro graf funkce $y = f(x)$, limitní polohu sečen. Směrnice sečny je

$$\frac{\psi(t) - \psi(t_0)}{\varphi(t) - \varphi(t_0)} = (\text{podle Cauchyho věty}) = \frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)}, \text{ kde } c \text{ leží mezi } t, t_0.$$

Limitním přechodem $t \rightarrow t_0$ dostáváme, že $k = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$. \square

Příklad 21

Určete směrnici tečny ke kružnici $x = \cos t, y = \sin t$ v bodě $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$.

$$t_0 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow k = \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{-\sin \frac{\pi}{4}} = -\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -1.$$

Věta 31

Nechť

$$C = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta]\},$$

φ, ψ mají na $[\alpha, \beta]$ druhé derivace a $\varphi'(t_0) \neq 0$. Pak v okolí bodu $[x_0, y_0] = [\varphi(t_0), \psi(t_0)]$ je křivka C totožná s grafem jisté funkce $y = f(x)$ a pro její druhou derivaci v bodě $x_0 = \varphi(t_0)$ platí

$$f''(x_0) = \frac{\psi''(t_0)\varphi'(t_0) - \psi'(t_0)\varphi''(t_0)}{\varphi'^3(t_0)}.$$

Důkaz.

Protože $\varphi'(t_0) \neq 0$, je φ v okolí t_0 prostá, tedy existuje inverzní funkce $t = \varphi^{-1}(x)$. Pak

$$y = \psi(t) = \psi(\varphi^{-1}(x)) =: f(x).$$

$$f'(x) = \underbrace{\psi'(\varphi^{-1}(x))}_t \cdot \underbrace{(\varphi^{-1})'(x)}_{\frac{1}{\varphi'(t)}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' = \left(\frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} \right)' \\ &= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)} \cdot (\varphi^{-1})'(x) = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)} \end{aligned}$$

 \square

Příklad 22

$$x = \cos t, y = \sin t, t_0 = \pi/4$$

$$f''(x) = \frac{(\sin t)''(\cos t)' - (\cos t)''(\sin t)'}{(\cos t)'^3} = \frac{-\sin t(-\sin t) - (-\cos t)(\cos t)}{(-\sin t)^3} = \frac{-1}{\sin^3 t},$$

tedy

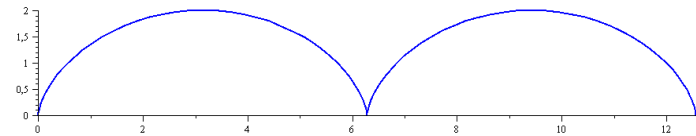
$$f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^3} = -2\sqrt{2}.$$

Příklad 23

Cykloida má parametrizaci $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, t \in [0, 2\pi]$. V okolí bodu daného hodnotou parametru $t = \pi/2$ zadává jistou funkci $y = f(x)$. Určete hodnotu první a druhé derivace funkce f v tomto bodě.

$$f'(x) = \frac{(1 - \cos t)'}{(t - \sin t)'} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} \Big|_{t=\pi/2} = \frac{1}{1-0} = 1,$$

$$f''(x_0) = \frac{\cos t(1 - \cos t) - \sin^2 t}{(1 - \cos t)^3} = \frac{-1 + \cos t}{(1 - \cos t)^3} \Big|_{t=\pi/2} = \frac{-1+0}{(1-0)^3} = -1$$



Obr. 5: Cykloida pro $t \in [0, 4\pi]$

Definice 17

Oskulační kružnice rovinné křivky C v bodě $[x_0, y_0]$ je kružnice, která prochází bodem $[x_0, y_0]$ a má v něm shodnou (aspoň) první a druhou derivaci s křivkou C . Říkáme, že má v tomto bodě s křivkou C styk (nejméně) druhého řádu.

- Poloměr oskulační kružnice se nazýváme poloměr křivosti.
- Střed oskulační kružnice nazýváme střed křivosti a leží na normále křivky v daném bodě.

Poznámka

Oskulační kružnice např. ve vrcholech kuželoseček mají s křivkami styk vyššího řádu než dva a jsou označovány jako hyperoskulační nebo superoskulační.

Oskulační kružnici získáme jako limitní polohu kružnic podobně jako jsme získali tečnu (derivaci) jako limitní polohu sečen. Budeme uvažovat bod $[x_0, y_0]$, ve kterém chceme kružnici získat, a další dva body $[x_1, y_1], [x_2, y_2]$ vlevo a vpravo od něj. Sestrojíme kružnici procházející těmito třemi body. Následně body $[x_1, y_1], [x_2, y_2]$ přibližujeme k bodu $[x_0, y_0]$ a stále používáme kružnici, která skrze všechny tři prochází. Výsledkem tohoto limitního procesu je oskulační kružnice.

(Samozřejmě je možné použít libovolné tři body z okolí bodu $[x_0, y_0]$ a limitně je všechny „poslat“ k němu.)

Pro jednoduchost uvažujme graf funkce f , tedy křivku $[x, f(x)]$, která má v okolí bodu x_0 derivace do řádu dva včetně a $f''(x_0) \neq 0$.

Kružnici budeme hledat ve tvaru

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Derivováním podle x (přičemž $y = y(x)$) dostaneme

$$x - a + (y - b)y' = 0,$$

$$1 + y'^2 + (y - b)y'' = 0.$$

Poznámka

Pracujeme zde s implicitně danou funkcí. Základní předpoklad, aby vztah $F(x, y) = c$ zadával v okolí bodu x_0 implicitně funkci $y = y(x)$ spňující $y(x_0) = y_0$ je, že derivace F podle y musí být v bodě $[x_0, y_0]$ nenulová (podrobněji v diferenciálním počtu více proměnných).

Do těchto rovnic dosadíme $x = x_0, y = f(x_0), y' = f'(x_0), y'' = f''(x_0)$. Tím obdržíme soustavu tří rovnic o třech neznámých a, b, r a ty vypočítáme. Dostaneme

$$a = x_0 - \frac{f'(x_0) + f'^3(x_0)}{f''(x_0)}, \quad b = \frac{1 + f'^2(x_0) + f(x_0)f''(x_0)}{f''(x_0)},$$

$$r = \frac{[1 + f'^2(x_0)]^{\frac{3}{2}}}{|f''(x_0)|}.$$

Poznámka

Parametricky máme

$$r = \frac{[x'^2 + y'^2]^{\frac{3}{2}}}{|x'y'' - x''y'|},$$

kde $x = x(t), y = y(t)$, derivace je podle t a dosazujeme t_0 .

Větší poloměr znamená menší zakřivení a naopak, to motivuje následující definici.

Definice 18

Hodnota $1/r$ se nazývá křivost funkce f v bodě x_0 .