Množiny, číselné obory, funkce

Petr Hasil

Přednáška z Matematické analýzy

Obsah

Operace

- $x \in A$ *(prvek)*
- $A \subseteq B$ *(podmnožina)*
- $A \subset B$ *(vlastní podmnožina)*
- $A \times B = \{[a, b] : a \in A, b \in B\}$ *(kartézský součin)*
- $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$ *(sjednocení)*
- $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ *(průnik)*
- $A \smallsetminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$ *(rozdíl)*

Výroky

- $A \wedge B$ *(konjunkce)*
- $A \vee B$ *(disjunkce)*
- $A \Rightarrow B$ *(implikace)*
  A je dostačující podmínka pro B; B je nutná podmínka pro A
- $A \Leftrightarrow B$: $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ *(ekvivalence)*
- $\neg A$ *(negace)*
- $\forall, \exists$ *(obecný a existenční kvantifikátor)*
  V: $\forall x \in A$ má vlastnost P ... $\neg V$: $\exists x \in A$ má vlastnost $\neg P$

$$\neg(\forall x \in A : P) \Leftrightarrow (\exists x \in A : \neg P)$$

$$\neg(\exists x \in A : P) \Leftrightarrow (\forall x \in A : \neg P)$$

Výroky 2

- $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ *(De Morganovo pravidlo)*
- $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ *(De Morganovo pravidlo)*
- $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$
- $\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ *(obměna implikace)*

Značení

- **Přirozená čísla**: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ $(\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\})$.
- **Celá čísla**: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- **Racionální čísla**: $\mathbb{Q} = \{q = \frac{z}{n} : z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.
  Čísla, která nejsou racionální, tj. nelze je vyjádřit jako podíl celého a přirozeného čísla, nazýváme *iracionální* a značíme $\mathbb{I}$.
- **Reálná čísla**: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.
  K reálným číslům lze jednoznačně přiřadit všechny body nekonečné přímky (číselné osy) dle jejich vzdálenosti od počátku.
- **Komplexní čísla**: $\mathbb{C} = \{z = a + bi : a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$.
  Komplexním číslem z nazýváme uspořádanou dvojici reálných čísel $[a, b]$ a píšeme $z = [a, b] = a + bi$. Číslu a říkáme reálná část komplexního čísla z, číslu b imaginární část komplexního čísla z.

Uspořádání

Binární relace $\leq$ na množině A (podmnožina kartézského součinu $A \times A$) se nazývá *uspořádání*, jestliže je

- reflexivní, tj. $\forall x \in A : x \leq x$,
- antisymetrická, tj. $\forall x, y \in A : (x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y$,
- tranzitivní, tj. $\forall x, y, z \in A : (x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z$.

Dvojice $(A, \leq)$ se pak nazývá *uspořádaná množina*.

Úplné uspořádání

Je-li relace $\leq$ na množině A uspořádání a je úplná, tj. platí

$$\forall x, y \in A : x \leq y \vee y \leq x,$$

nazýváme ji *úplné uspořádání*.
Dvojice $(A, \leq)$ se pak nazývá *úplně uspořádaná množina* (řetězec).

Horní a dolní závora

Nechť $A = (A, \leq)$ je uspořádaná množina, $B \subseteq A$ a $U, L \in A$. Jestliže platí

$$\forall x \in B : x \leq U,$$

nazýváme prvek U *horní závora* množiny B.
Jestliže platí

$$\forall x \in B : L \leq x,$$

nazýváme prvek L *dolní závora* množiny B.
Má-li množina B aspoň jednu horní (dolní) závoru, nazýváme ji *shora (zdola) ohraničenou*.
Je-li ohraničená zdola i shora, nazýváme ji *ohraničenou*.

Supremum a infimum

Nechť $A \neq \emptyset$ je uspořádaná množina, $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$ a $a_s, a_i \in A$. *Supremum* množiny B se nazývá její nejmenší horní závora, píšeme $a_s = \sup B$.
Analogicky, *infimum* množiny B se nazývá její největší dolní závora, píšeme $a_i = \inf B$.

Axiomatické zavedení reálných čísel

Nechť $\mathbb{R}$ je množina, na níž jsou definovány binární operace sčítání $(+)$ a násobení $(\cdot)$ a binární relace uspořádání $(\leq)$, přičemž jsou splněny následující axiomy (R1) – (R13).

1. *$(\mathbb{R}, +)$ je komutativní grupa.*
   - (R1) komutativita: $\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a$,
   - (R2) asociativita: $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a + b) + c = a + (b + c)$,
   - (R3) nulový prvek: $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} : 0 + a = a$,
   - (R4) opačný prvek: $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists b \in \mathbb{R} : a + b = 0$ (značíme $-a$).
2. *$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ je komutativní grupa.*
   - (R5) komutativita: $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \cdot b = b \cdot a$,
   - (R6) asociativita: $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
   - (R7) jednotkový prvek: $\exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \forall a \in \mathbb{R} : 1 \cdot a = a$,
   - (R8) inverzní prvek: $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists b \in \mathbb{R} : a \cdot b = 1$ (značíme a^{-1}).
3. *$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ je pole (komutativní těleso).*
   - (R9) distributivní zákon: $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

4. *$(\mathbb{R}, \leq)$ je úplně uspořádaná množina.*
   - (R10) Relace $\leq$ je reflexivní, antisymetrická, tranzitivní a úplná.
5. *Operace $+, \cdot$ jsou slučitelné s relací $\leq$.*
   - (R11) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$,
   - (R12) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, c > 0 : a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$.
6. (R13) Každá neprázdná shora ohraničená podmnožina množiny $\mathbb{R}$ má supremum.

Definice 1

Množina reálných čísel je libovolná množina s dvojicí binárních operací a uspořádáním splňující podmínky (R1) – (R13).

Poznámka

(i) Podle (R4) platí $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists (-x) \in \mathbb{R} : x + (-x) = 0$. Potom lze položit

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-x : x \in \mathbb{N}\}.$$

(ii) Podle (R8) platí $\forall x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\ \exists x^{-1} \in \mathbb{R} : x \cdot x^{-1} = 1$. Potom lze položit

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{x}{y} : x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{N} \right\}.$$

Poznámka

Uzavřenost na sčítání a násobení je obsažena v tom, že $+, \cdot$ jsou binární operace na $\mathbb{R}$, tj. $\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b \in \mathbb{R}, a \cdot b \in \mathbb{R}$.

Poznámka

Množina racionálních čísel nesplňuje podmínku (R13).
$X = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, x^2 < 2\} \Rightarrow \sup X = \sqrt{2}$, ale $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
Důkaz sporem:
Předpokládejme, že $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, kde m, n jsou nesoudělná, $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$.

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{m^2}{n^2} \quad \Rightarrow \quad 2n^2 = m^2$$

Tedy m^2 je sudé číslo $\Rightarrow$ m je sudé číslo $\Rightarrow \exists \ell : m = 2\ell \Rightarrow 2n^2 = (2\ell)^2 \Rightarrow n^2 = 2\ell^2 \Rightarrow n^2$ je sudé, tj. n je sudé. Celkem tedy m i n jsou sudá čísla, což je spor s předpokladem, že jde o čísla nesoudělná. Tím jsme také dokázali, že $\mathbb{I} \neq \emptyset$.

Definice 2

Nechť $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$. Symbolem $X \leq Y$ rozumíme, že pro každé $x \in X$ a každé $y \in Y$ platí $x \leq y$.

Poznámka (Axiom spojitosti)

Axiom (R13) je ekvivalentní tzv. axiomu spojitosti:
Pro libovolné množiny $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$ a $X \leq Y$, existuje prvek $c \in \mathbb{R}$ s vlastností $X \leq c \leq Y$.

Axiom (R13) je samozřejmě také ekvivalentní axiomu infima.

Axiom spojitosti ⇒ axiom suprema, infima

Nechť $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$ je shora ohraničená a označme $U(X)$ množinu horních závor množiny X.
X je shora ohraničená, tedy $U(X) \neq \emptyset$ a platí $X \leq U(X)$.
Tedy $\exists c \in \mathbb{R} : X \leq c \leq U(X)$, toto c je hledaným suprémem množiny X jehož existenci jsme chtěli dokázat:
1) $c \geq X \Rightarrow c$ je horní závora,
2) skutečnost, že c je nejmenší horní závora, plyne z faktu, že $c \leq U(X)$.
Tvrzení pro infimum dokážeme podobně pomocí množiny $L(X)$ dolních závor.

Příklad 1 (sup, inf)

$X = (0, 1)$, pak $\sup X = 1$, $\inf X = 0$ $(0, 1 \notin X)$
$X = [0, 1]$, pak $\sup X = 1$, $\inf X = 0$ $(0, 1 \in X)$
$X = (1, \infty)$, pak $\inf X = 1$ a supremum (v $\mathbb{R}$) neexistuje.

Poznámka

- Někdy se definuje supremum a infimum prázdné množiny (v rozšířených reálných číslech)

$$\inf \emptyset = +\infty, \qquad \sup \emptyset = -\infty.$$

- $X \subseteq Y \Rightarrow \sup X \leq \sup Y$ a $\inf Y \leq \inf X$

Věta 1

Nechť r_1, r_2, $r_1 > 0$ jsou reálná čísla. Pak existuje přirozené číslo n takové, že $nr_1 > r_2$.

Důkaz.

Sporem předpokládejme, že takové n neexistuje, tedy

$$\forall n \in \mathbb{N} : nr_1 \leq r_2.$$

Odtud máme $n \leq \frac{r_2}{r_1}$, což je spor s neohraničeností $\mathbb{N}$. □

Věta 2 ($\mathbb{Q}$ hustá v $\mathbb{R}$)

Nechť r_1, r_2, $r_1 < r_2$ jsou libovolná reálná čísla, pak existuje racionální číslo p takové, že $r_1 < p < r_2$.

Důkaz.

Nechť $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 < r_2$.

(i) $r_1 < 0$, $r_2 > 0$, pak $p = 0 \in \mathbb{Q}$. Bez újmy na obecnosti lze tedy předpokládat, že r_1, r_2 jsou kladná.

(ii) $0 < r_1 < r_2$ (kdyby $0 > r_1 > r_2$, konstrukci "překlopíme") nechť $n \in \mathbb{N}$ je takové, že platí $n(r_2 - r_1) > 1$. Takové n existuje, neboť kdyby neexistovalo, pak by $n \leq \frac{1}{r_2 - r_1}$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$, ale $\mathbb{N}$ není omezená shora. Tedy $nr_2 > 1 + nr_1$ (jsou vzdálena o více než 1), nechť $m \in \mathbb{N}$ je nejmenší takové, že $m > nr_1$ (tj. $m - 1 \leq nr_1$) $\Rightarrow m \leq nr_1 + 1 \Rightarrow$ $nr_1 < m < nr_2$ a odtud $r_1 < \frac{m}{n} < r_2$.

$\Rightarrow \mathbb{Q}$ je hustá v $\mathbb{R}$. □

Věta 3 ($\mathbb{I}$ hustá v $\mathbb{R}$)

Nechť r_1, r_2, $r_1 < r_2$ jsou libovolná reálná čísla, pak existuje iracionální číslo p takové, že $r_1 < p < r_2$.

Důkaz.

Již víme, že $\mathbb{I} \neq \emptyset$. Dále platí, že pro $\forall a \in \mathbb{I}$ a $\forall q \in \mathbb{Q}$ je $a + q \in \mathbb{I}$. (Jinak by bylo $a + q + (-q) = a \in \mathbb{Q}$, protože by šlo o součet racionálních čísel $a + q$ a $-q$.)
Nechť $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 < r_2$. Potom $r_1 - a < r_2 - a$ a protože $\mathbb{Q}$ je hustá v $\mathbb{R}$ existuje $z \in \mathbb{Q}$ splňující $r_1 - a < z < r_2 - a$, tedy $r_1 < z + a < r_2$, kde $z + a \in \mathbb{I}$. □

Věta 4

$\forall r \in \mathbb{R}, r > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ *existuje právě jedno* $x \in \mathbb{R}, x > 0$, *takové, že*

$$x^n = r \qquad (\textit{píšeme } \sqrt[n]{r} = x).$$

Důkaz.

$$x = \sup \{a \in \mathbb{R} : a > 0, a^n \leq r\}$$

□

Definice 3

Komplexní čísla $\mathbb{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot)$ je množina, kde $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a operace jsou definovány následovně

- $[a_1, b_1] + [a_2, b_2] = [a_1 + a_2, b_1 + b_2]$,
- $[a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2] = [a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1]$.

$$[0, 1] \leftrightarrow i$$

$$[a, b] = [a, 0] + [0, b] = [a, 0] + [b, 0] \cdot [0, 1] \leftrightarrow a + bi$$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je komutativní těleso:

- $(\mathbb{C}, +)$ je komutativní grupa *(R1)–(R4)*,
- $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ je komutativní grupa *(R5)–(R8)*,
- platí distributivní zákon *(R9)*.

Nelze ale definovat uspořádání slučitelné s operacemi + a · *(R11), (R12)*.

Poznámka

- algebraický tvar $z = a + bi$,
- velikost $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$,
- goniometrický tvar $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,
- exponenciální tvar $z = |z|\,e^{i\varphi}$.

Definice 4

Řekneme, že množina A je *induktivní*, jestliže platí

(i) $1 \in A$;
(ii) je-li $x \in A$, potom $x + 1 \in A$.

Poznámka

(i) Množina $\mathbb{R}$ je induktivní.
(ii) Průnik libovolného systému induktivních množin je induktivní množina.
(iii) Průnikem všech induktivních podmnožin $\mathbb{R}$ je $\mathbb{N}$.
(iv) Každá induktivní množina je nadmnožinou $\mathbb{N}$. Jestliže tedy pro induktivní množinu A platí $A \subseteq \mathbb{N}$, potom $A = \mathbb{N}$ (princip matematické indukce).

Definice 5

Nechť $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $f \subseteq A \times B$. Jestliže ke každému prvku $a \in A$ existuje právě jeden prvek $b \in B$ tak, že $[a, b] \in f$, pak relaci f nazýváme *zobrazení* množiny A do množiny B ($f\colon A \to B$).
Množina A se nazývá *definiční obor* zobrazení f, značíme $\mathcal{D}(f) = Dom(f)$.
Množinu $\mathcal{H}(f) = Im(f) = \{b \in B : \exists x \in \mathcal{D}(f) : f(x) = b\}$ nazýváme *obor hodnot* zobrazení f.
Zobrazení f nazýváme *reálná funkce* (reálná funce reálné proměnné).

- Píšeme $y = f(x)$.
- x se nazývá *nezávisle proměnná* (argument) funkce f.
- y se nazývá *závisle proměnná* funkce f.
- Číslo $f(x_0) \in \mathbb{R}$ se nazývá *funkční hodnota* funkce f v bodě x_0.

Poznámka

Není-li definiční obor funkce zadán, jedná se o množinu všech $x \in \mathbb{R}$ pro která má daná funkce smysl, tj.

$$D(f) = \{x \in A : \exists y \in B \text{ splňující } [x, y] \in f\}.$$

Příklad 2

- Definiční obor funkce $f(x) = \frac{1}{x-1}$ je $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Definiční obor funkce $g(x) = \sqrt{-x}$ je $D(g) = (-\infty, 0]$.

Definice 6

Nechť $f: A \to B$ je reálná funkce.

- Řekneme, že f je na A *prostá*, pokud

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

  (Prostá = injektivní.)
- Řekneme, že funkce f zobrazuje A *na* B (f je surjektivní), pokud ke každému $b \in B$ existuje $x \in A$: $f(x) = b$, tj. $B = \mathcal{H}(f)$.
- Množina $G \subseteq A \times B$ definovaná $G = \{[x, y] : x \in \mathcal{D}(f), y = f(x)\}$ se nazývá *graf* funkce f.

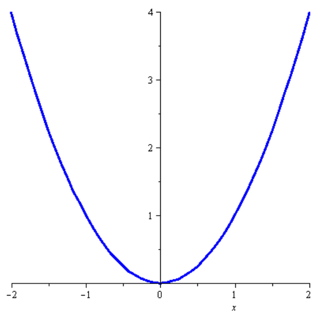
Poznámka

Bijekce = prosté a na.

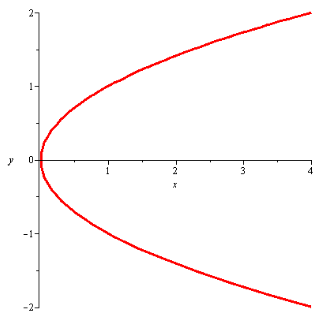
Poznámka

Graf funkce f = množina všech bodů roviny daných souřadnicemi $[x, f(x)]$.

Příklad 3



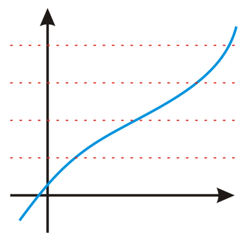
Obr.: Funkce $f(x) = x^2$.

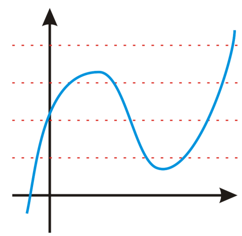


Obr.: Nejde o graf funkce.

Poznámka

- Graf prosté funkce protíná všechny vodorovné přímky nejvýše jednou.





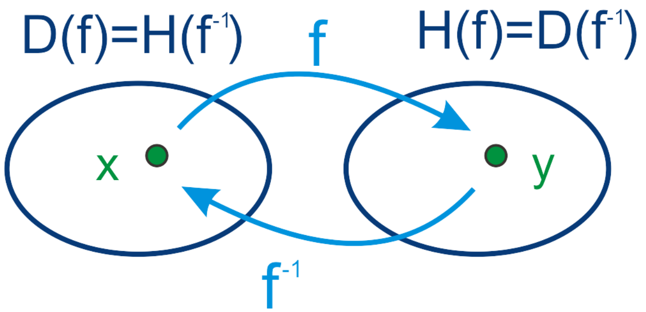
- Je-li funkce na množině M ryze monotónní, pak je na ní prostá.

Definice 7

Nechť $f: A \to B$ je prostá na podmnožině $D \subseteq A$, pak *inverzní funkci* k funkci f definované na D definujeme jako

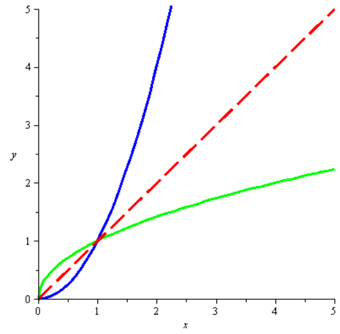
$$f^{-1} = \{[y, x] : [x, y] \in f\}.$$

Tj. pro $y \in f(D) = \{b \in B : \exists x \in D : f(x) = b\}$ definujeme $f^{-1}(y) = x \in D$, kde $f(x) = y$.



Poznámka

Je-li f prostá na celém definičním oboru, pak $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{H}(f)$. Grafy funkcí f a f^{-1} jsou souměrně sdružené podle osy I. a III. kvadrantu.



Příklad 4

Pro funkci $f(x) = x^2 + 2x + 3$ určete podmnožinu definičního oboru, kde je funkce prostá, a zde určete funkci inverzní.

Výpočet inverzní funkce

Iverzní funkci k funkci f určíme tak, že v předpisu $y = f(x)$ zaměníme proměnné x a y, tím dostaneme $x = f(y)$. Z této rovnice pak vyjádříme, je-li to možné, proměnnou y.

K elementární funkci je inverzní funkcí jiná elementární funkce:

$f(x)$	$f^{-1}(x)$
$x^2 \quad (x \geq 0)$	$\sqrt{x}$
$x^2 \quad (x \leq 0)$	$-\sqrt{x}$
x^3	$\sqrt[3]{x}$
e^x	$\ln x$
$a^x \quad (a \neq 1)$	$\log_a x$
$\sin x \quad (x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$	$\arcsin x$
$\cos x \quad (x \in [0, \pi])$	$\arccos x$
$\operatorname{tg} x \quad (x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$	$\operatorname{arctg} x$
$\operatorname{cotg} x \quad (x \in (0, \pi))$	$\operatorname{arccotg} x$

Poznámka

Pro všechna x, pro která má zápis smysl, platí

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x.$$

Příklad 5

Určete inverzní funkci k funkci f a určete $\mathcal{D}(f)$, $\mathcal{H}(f)$, $\mathcal{D}(f^{-1})$ a $\mathcal{H}(f^{-1})$.

- $f(x) = \frac{3x-4}{2}$,
- $f(x) = e^{\sin x}$.

- $f(x) = \frac{3x-4}{2}$

$$y = \frac{3x-4}{2} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} x &= \frac{3y-4}{2} \\ 2x &= 3y-4 \\ 3y &= 2x+4 \\ y &= \frac{2x+4}{3} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{2x+4}{3}. \end{aligned}$$

$\mathcal{D}(f) = \mathcal{H}(f) = \mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{H}(f^{-1}) = \mathbb{R}$.

- $f(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$

$$y = \mathrm{e}^{\sin x} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} x &= \mathrm{e}^{\sin y} && / \ln(\cdot) \\ \ln x &= \sin y && / \arcsin(\cdot) \\ \arcsin \ln x &= y \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \arcsin \ln x. \end{aligned}$$

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, funkce f je prostá pro $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] = \mathcal{H}(f^{-1})$,

$\mathcal{D}(f^{-1})$:

- $\ln x \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x \in (0, \infty)$
- $\arcsin \ln x \quad \Rightarrow \quad \ln x \in [-1, 1]$

$$-1 \le \ln x \le 1 \quad / \, \mathrm{e}^{(\cdot)} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{-1} \le x \le \mathrm{e} \quad \Rightarrow \quad x \in \left[\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right]$$

$\mathcal{D}(f^{-1}) = (0, \infty) \cap \left[\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right] = \left[\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right]$.

Celkem tedy $\mathcal{H}(f) = \mathcal{D}(f^{-1}) = \left[\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right]$.

Definice 8 (Parita)

Buď f taková funkce, že pro její definiční obor platí

$$x \in \mathcal{D}(f) \quad \Rightarrow \quad -x \in \mathcal{D}(f).$$

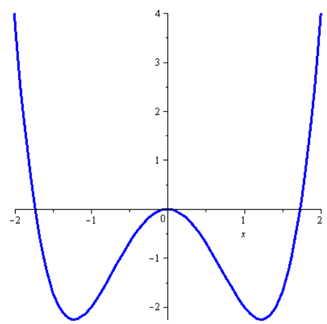
- Řekneme, že funkce f je *sudá*, jestliže pro $\forall x \in \mathcal{D}(f)$ platí, že

$$f(-x) = f(x).$$

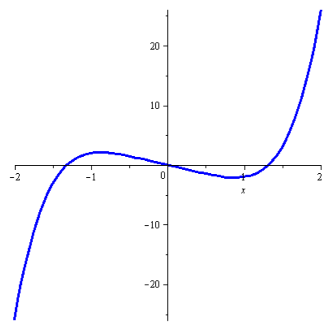
- Řekneme, že funkce f je *lichá*, jestliže pro $\forall x \in \mathcal{D}(f)$ platí, že

$$f(-x) = -f(x).$$

Příklad 6



Obr.: Graf sudé funkce je symetrický podle osy y.



Obr.: Graf liché funkce je symetrický podle počátku.

Věta 5

Nechť funkce f je na svém definičním oboru prostá a lichá, pak inverzní funkce f^{-1} je také lichá.

Důkaz.

Z lichosti funkce f plyne $x \in \mathcal{D}(f)$, pak i $-x \in \mathcal{D}(f)$. Nechť $y \in \mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{H}(f)$ je libovolné, tj. $\exists x \in \mathcal{D}(f) : f(x) = y$. Pro

$$-x \in \mathcal{D}(f) : f(-x) = -f(x) = -y \quad \Rightarrow \quad -y \in \mathcal{D}(f^{-1}).$$

Označme $f^{-1}(-y) = z$, pak

$$-y = f(z) \;\Rightarrow\; y = -f(z) \;\Rightarrow\; y = f(-z) \;\Rightarrow\; -z = f^{-1}(y) \\ \Rightarrow\; z = -f^{-1}(y) \;\Rightarrow\; f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y),$$

tedy f^{-1} je lichá. □

Příklad 7

Rozhodněte o paritě funkce

$$f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Dále určete podmnožinu definičního oboru, kde je funkce prostá, a zde určete funkci inverzní.

Lichá, $f^{-1}(y) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

Definice 9 (Ohraničenost)

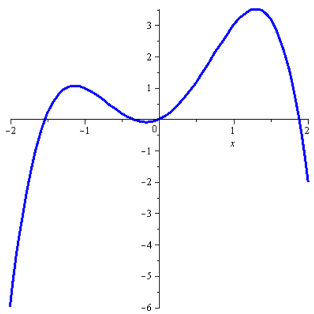
Buď f funkce a $M \subseteq D(f)$. Řekneme, že funkce f je na množině M

- *zdola ohraničená*, jestliže existuje $d \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $f(x) \geq d$,
- *shora ohraničená*, jestliže existuje $h \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $f(x) \leq h$,
- *ohraničená*, jestliže existují $d, h \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $d \leq f(x) \leq h$.

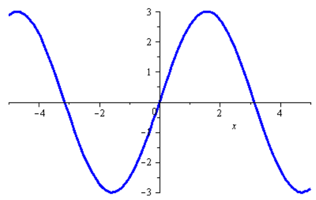
Ohraničenost ekvivalentně

$$\exists C \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq C \quad \forall x \in M.$$

Příklad 8



Obr.: Funkce ohraničená shora.



Obr.: Ohraničená funkce.

Definice 10

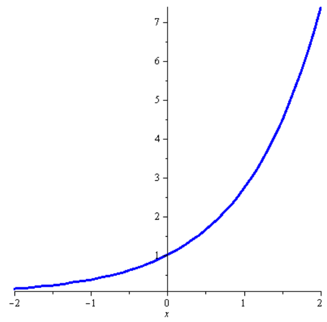
Buď f funkce a $M \subseteq \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že funkce f je na množině M

- *rostoucí*, jestliže
$$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2),$$
- *neklesající*, jestliže
$$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2),$$
- *klesající*, jestliže
$$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2),$$
- *nerostoucí*, jestliže
$$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

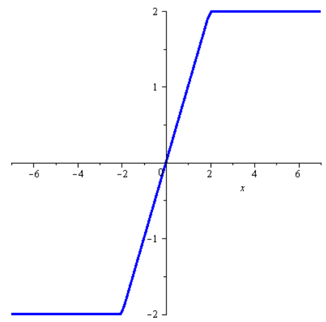
Definice 11

Je-li funkce f na množině M neklesající, nebo nerostoucí, nazýváme ji *monotónní*.Je-li funkce f na množině M rostoucí, nebo klesající, nazýváme ji *ryze monotónní*.

Příklad 9



Obr.: Rostoucí funkce.



Obr.: Neklesající funkce.

Věta 6

Nechť f je na A rostoucí (klesající), pak inverzní funkce f^{-1} je také rostoucí (klesající).

Důkaz.

f rostoucí ($\Rightarrow$ prostá): $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow y_1 < y_2$. Uvažujme $y_1 < y_2$ libovolné $\Rightarrow \exists x_1, x_2 : y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$. Možnosti:

1. $x_1 = x_2$ nelze,
2. $x_1 > x_2$ nelze,
3. $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.

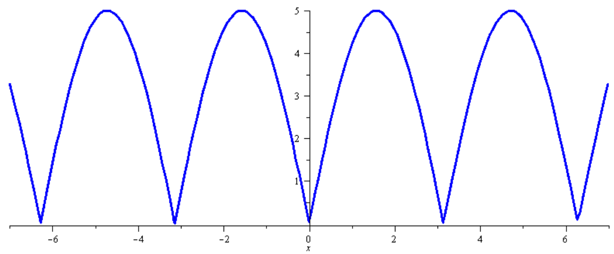
□

Definice 12 (Periodičnost)

Nechť $\hat{p} \in \mathbb{R}, \hat{p} > 0$. Řekneme, že funkce f je *periodická* s periodou $\hat{p}$, jestliže pro $\forall x \in \mathcal{D}(f)$ platí

$$x \pm \hat{p} \in \mathcal{D}(f), \qquad f(x \pm \hat{p}) = f(x).$$

Nejmenší prvek množiny všech period funkce f nazýváme *nejmenší perioda* funkce f a budeme ho značit p.



Obr.: Periodická funkce.

Poznámka

- Funkce má buď nekonečně mnoho period, nebo žádnou.
- $f(x) \equiv 1$ je periodická, ale nejmenší perioda $p\ (> 0)$ neexistuje,
- $\chi(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ každé $q \in \mathbb{Q}, q > 0$, je perioda, ale nejmenší perioda neexistuje (Dirichletova funkce).

Další pojmy

Buď f funkce a $M \subseteq \mathcal{D}(f)$.

- Je-li $f(x) > 0$ pro $\forall x \in M$, řekneme, že f je na množině M *kladná*.
- Je-li $f(x) \geq 0$ pro $\forall x \in M$, řekneme, že f je na množině M *nezáporná*.
- Je-li $f(x) < 0$ pro $\forall x \in M$, řekneme, že f je na množině M *záporná*.
- Je-li $f(x) \leq 0$ pro $\forall x \in M$, řekneme, že f je na množině M *nekladná*.
- Bod $[0, f(0)]$ nazýváme *průsečík funkce f s osou y*.
- Je-li $f(x_0) = 0$, pak nazýváme bod $[x_0, 0]$ *průsečík funkce f s osou x*.

Následující pojmy budou přesněji definovány později

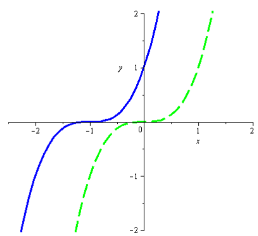
Buď f funkce a $M \subseteq \mathcal{D}(f)$.

- Je-li graf funkce f pro $\forall x \in M$ nad tečnou sestrojenou v libovolném bodě $x_0 \in M$, řekneme, že f je na množině M *konvexní*.
- Je-li graf funkce f pro $\forall x \in M$ pod tečnou sestrojenou v libovolném bodě $x_0 \in M$, řekneme, že f je na množině M *konkávní*.
- Přímku nazýváme *asymptotou* grafu funkce f, jestliže se její vzdálenost od grafu funkce s rostoucí souřadnicí neustále zmenšuje.

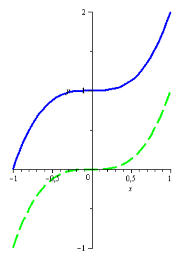
Transformace grafu funkce

Nechť je dána funkce $y = f(x)$ a nenulová reálná čísla a, b.

- Uvažujme funkci $\tilde{y} = f(x + a)$. Tato funkce má vůči původní funkci graf posunutý buď doleva (je-li $a > 0$), nebo doprava (pro $a < 0$), a to o velikost čísla a.
- Uvažujme funkci $\hat{y} = f(x) + b$. Tato funkce má vůči původní funkci graf posunutý buď nahoru (je-li $b > 0$), nebo dolů (pro $b < 0$), a to o velikost čísla b.



Obr.: $f(x) = (x + 1)^3$



Obr.: $f(x) = x^3 + 1$

Operace s funkcemi

- Platí

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x),$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Definiční obor těchto funkcí je průnikem definičních oborů původních funkcí, tj.

$$\mathcal{D}(f \pm g) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g) = \mathcal{D}(f \cdot g).$$

- Platí

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Definiční obor nové funkce je průnikem definičních oborů funkcí f a g zúžený o body, v nichž je $g(x) = 0$, tj.

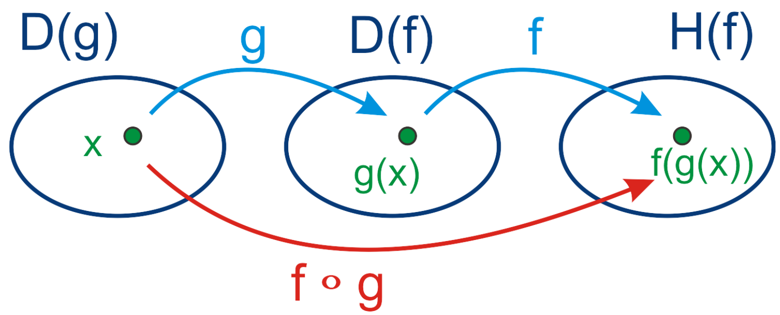
$$\mathcal{D}\left(\frac{f}{g}\right) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g) \setminus \{x : g(x) = 0\}.$$

Další operací je skládání funkcí.

Definice 13 (Složená funkce)

Nechť $u = g(x)$ je funkce s definičním oborem $\mathcal{D}(g)$ a oborem hodnot $\mathcal{H}(g)$. Nechť $y = f(u)$ je funkce s definičním oborem $\mathcal{D}(f) \supseteq \mathcal{H}(g)$.

Složenou funkcí $(f \circ g)(x)$ rozumíme přiřazení, které $\forall x \in \mathcal{D}(g)$ přiřadí $y = f(u) = f\big(g(x)\big)$. Funkci g nazýváme vnitřní složkou a funkci f vnější složkou složené funkce.



Příklad 10

- Funkce

$$F(x) = \sin x^2$$

je složena z funkcí $f(x) = \sin x$ a $g(x) = x^2$ tak, že

$$F(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big).$$

- Funkce

$$G(x) = \sqrt[3]{\mathrm{e}^{2x-4}}$$

je složena z funkcí $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = \mathrm{e}^x$, $h(x) = 2x - 4$ tak, že

$$G(x) = (f \circ g \circ h)(x) = f\Big(g\big(h(x)\big)\Big).$$

Poznámka

Při určování definičních oborů složených funkcí je vhodné postupovat zevnitř. Každý definiční obor je průnikem všech získaných podmínek. Např. je-li $F(x) = \sqrt{f(x)}$, najdeme nejprve $\mathcal{D}(f)$, poté zjistíme, ve kterých bodech je $f(x) < 0$ a ty odstraníme, tj.

$$\mathcal{D}(F) = \mathcal{D}(f) \setminus \{x : f(x) < 0\}.$$

Tedy mimo definiční obory základních funkcí musíme brát v úvahu např. u funkce

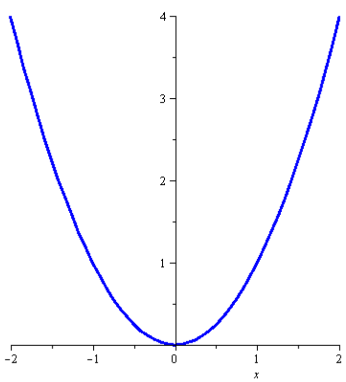
- $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, že $g(x) \neq 0$,
- $F(x) = \sqrt{f(x)}$, že $f(x) \geq 0$,
- $F(x) = \log_a f(x)$, že $f(x) > 0$,
- $F(x) = \operatorname{tg} f(x)$, že $f(x) \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$,
- $F(x) = \operatorname{cotg} f(x)$, že $f(x) \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
- $F(x) = \arcsin f(x)$, že $f(x) \in [-1, 1]$,
- $F(x) = \arccos f(x)$, že $f(x) \in [-1, 1]$.

Definice 14 (Základní elementární funkce)

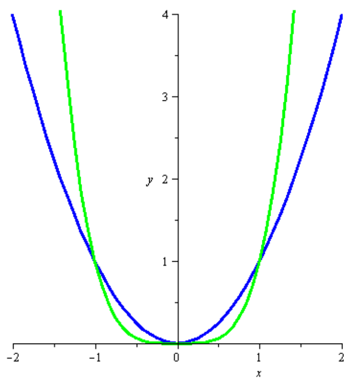
Obecná mocnina, polynomy, goniometrické, cyklometrické, exponenciální a logaritmické (a hyperbolické a hyperbolometrické) funkce se nazývají *základní elementární funkce*.

Definice 15 (Elementární funkce)

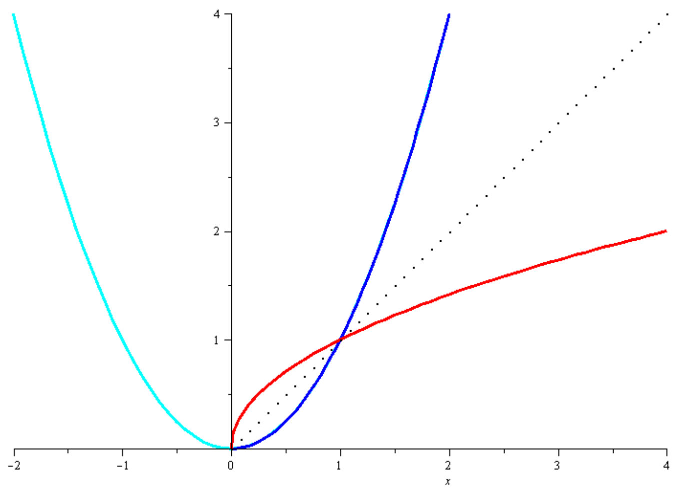
Funkce, které lze získat konečným počtem sečtení, odečtení, vynásobení, podělení a složení základních elementárních funkcí se nazývají *elementární funkce*.



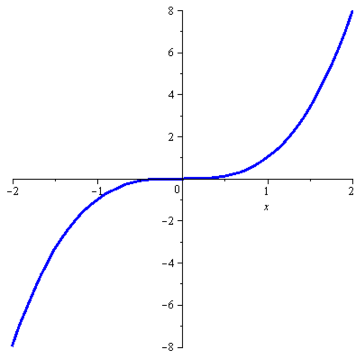
Obr.: x^2



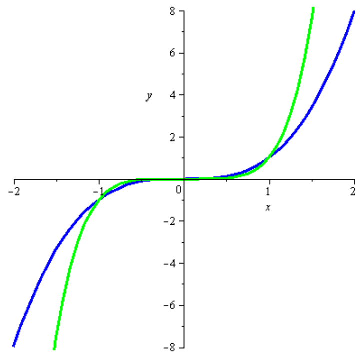
Obr.: x^2, x^4



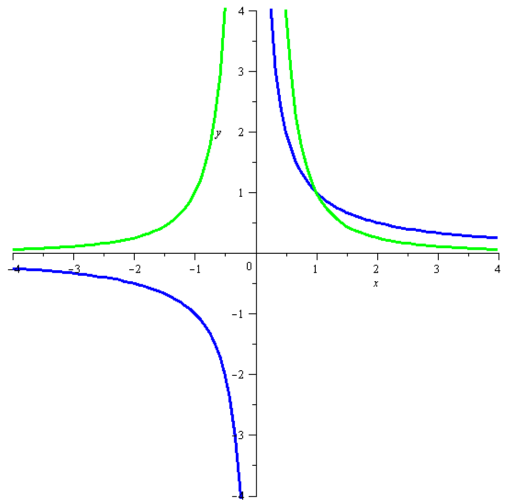
Obr.: x^2, $\sqrt{x}$



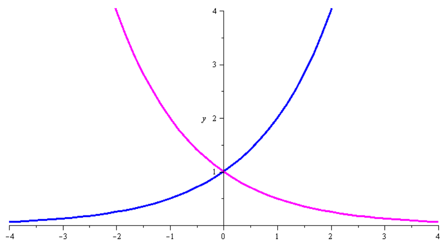
Obr.: x^3



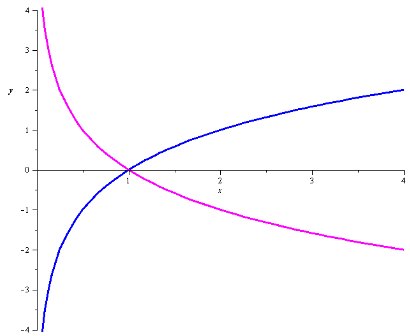
Obr.: x^3, x^5



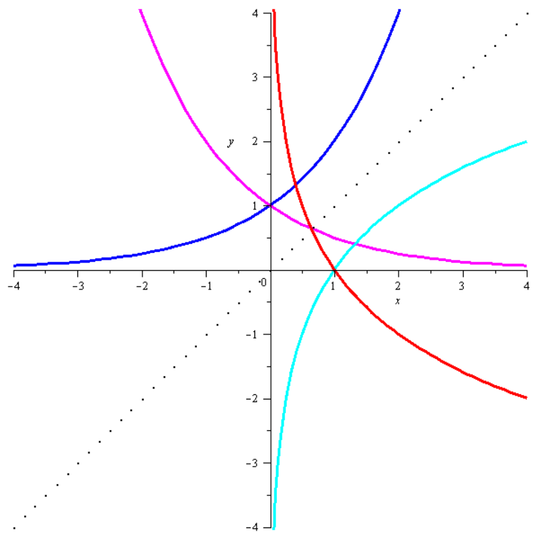
Obr.: $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$



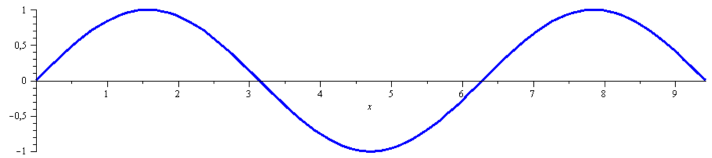
Obr.: 2^x, $\left(\frac{1}{2}\right)^x$



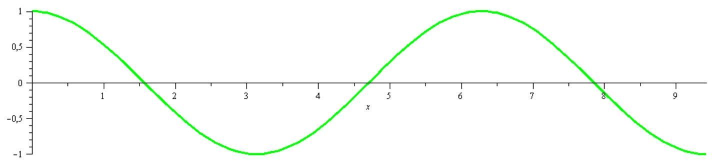
Obr.: $\log_2 x$, $\log_{\frac{1}{2}} x$



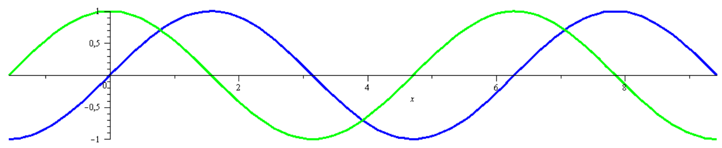
Obr.: 2^x, $\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $\log_2 x$, $\log_{\frac{1}{2}} x$



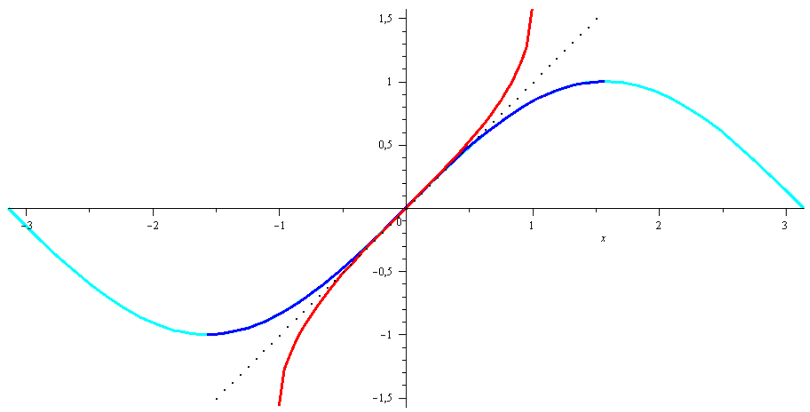
Obr.: $\sin x$



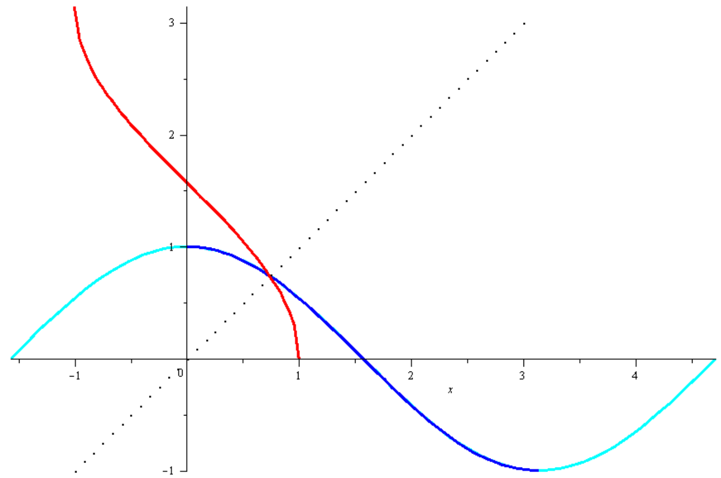
Obr.: $\cos x$



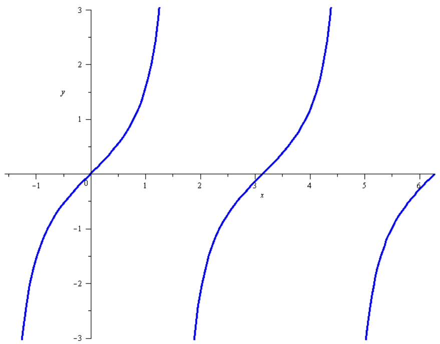
Obr.: $\sin x$, $\cos x$



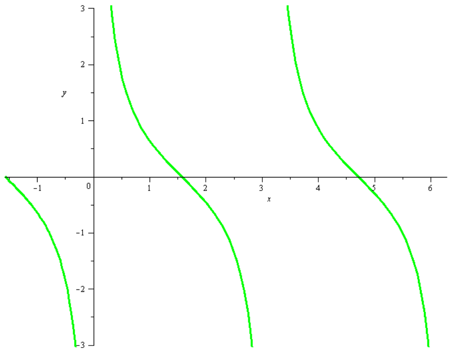
Obr.: $\sin x$, $\arcsin x$



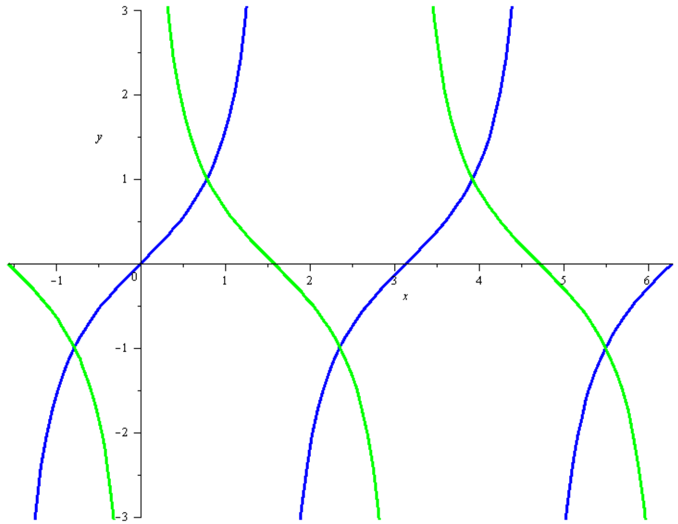
Obr.: $\cos x$, $\arccos x$



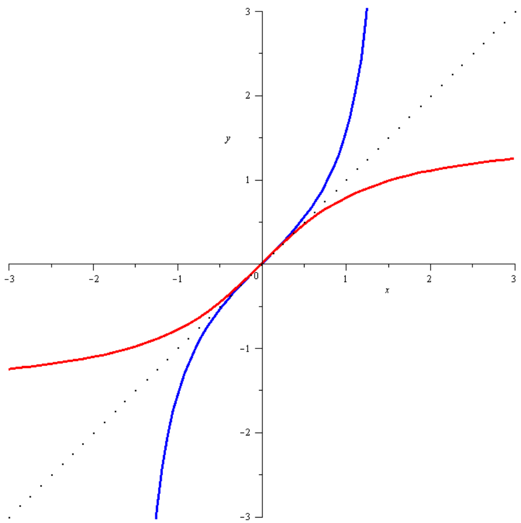
Obr.: tg x



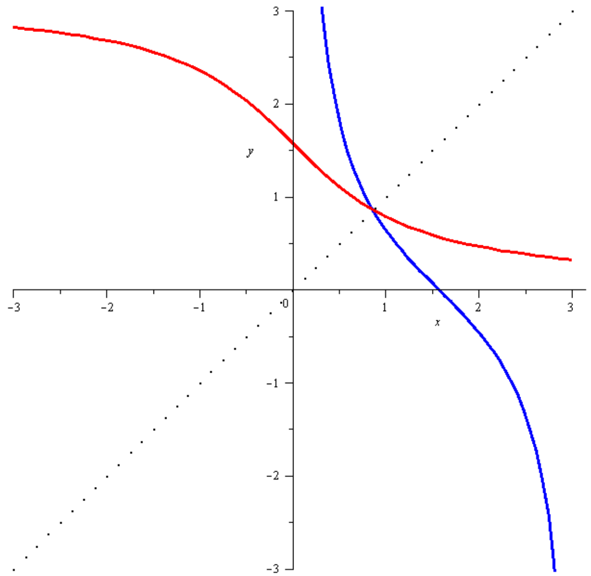
Obr.: cotg x



Obr.: tg x, cotg x



Obr.: tg x, arctg x



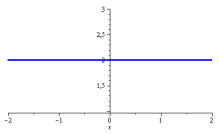
Obr.: cotg x, arccotg x

Definice 16 (Polynom)

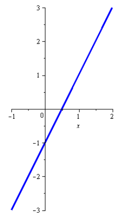
Funkci $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ danou předpisem

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

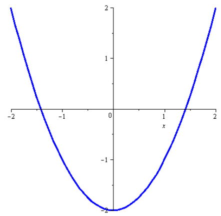
kde $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$ nazýváme *polynom stupně n*. Čísla $a_0, \dots, a_n$ nazýváme koeficienty polynomu P. Koeficient a_n nazýváme vedoucí koeficient, koeficient a_0 nazýváme absolutní člen. Je-li $a_n = 1$ říkáme, že polynom P je normovaný.



Obr.: $P(x) = 2$.



Obr.: $P(x) = 2x - 1$.



Obr.: $P(x) = x^2 - 2$.

Příklad 11 (Operace s polynomy)

- Sčítání a násobení konstantou

$$\begin{aligned}
&(3x^2 - 2x + 4) - 2(x^3 + x^2 + 2x - 1) \\
&= 3x^2 - 2x + 4 - 2x^3 - 2x^2 - 4x + 2 \\
&= -2x^3 + x^2 - 6x + 6
\end{aligned}$$

- Násobení

$$\begin{aligned}
&(2x^2 - 3)(x^3 + 2x + 3) \\
&= 2x^2(x^3 + 2x + 3) - 3(x^3 + 2x + 3) \\
&= 2x^5 + 4x^3 + 6x^2 - 3x^3 - 6x - 9 \\
&= 2x^5 + x^3 + 6x^2 - 6x - 9
\end{aligned}$$

Příklad 12 (Operace s polynomy)

- Dělení

$$\begin{aligned}
&(4x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 7) : (x^2 + 2) = 4x^2 - x - 7 + \tfrac{-x+21}{x^2+2} \\
-&\underline{(4x^4 + 8x^2)} \\
&0 - x^3 - 7x^2 - 3x + 7 \\
-&\underline{(-x^3 - 2x)} \\
&0 - 7x^2 - x + 7 \\
-&\underline{(-7x^2 - 14)} \\
&0 - x + 21
\end{aligned}$$

Definice 17 (Kořen polynomu)

Číslo $\alpha \in \mathbb{C}$, pro které platí $P(\alpha) = 0$ nazýváme kořen polynomu P.

Věta 7 (Základní věta algebry)

Každý polynom (mnohočlen) stupně většího než 1 má alespoň jeden komplexní kořen.

Důkaz.

Viz algebra. □

Věta 8

Nechť P je polynom stupně $n \geq 1$ a α je kořenem polynomu. Pak existuje polynom Q stupně $n-1$ takový, že $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$.

Důkaz.

$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, pak
$P(x) - P(\alpha) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 - (a_n \alpha^n + \cdots + a_1 \alpha + a_0) =$
$a_n(x^n - \alpha^n) + \cdots + a_1(x-\alpha) =$

$$(x-\alpha)\underbrace{\left[a_1 + a_2(x+\alpha) + \cdots + a_n(x^{n-1} + x^{n-2}\alpha + \cdots + x\alpha^{n-2} + \alpha^{n-1})\right]}_{Q(x)},$$

st $Q = n-1$. □

Definice 18 (Kořenový činitel a násobný kořen)

Je-li číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ kořen polynomu P, nazýváme lineární polynom $x - \alpha$ *kořenový činitel* příslušný ke kořenu α. Číslo α je k-násobným kořenem polynomu P ($k \in \mathbb{N}$), jestliže existuje polynom $Q(x)$ stupně $n-k$ takový, že

$$P(x) = (x-\alpha)^k Q(x), \quad Q(\alpha) \neq 0.$$

Důsledek (věty 7)

Každý polynom stupně $n \geq 1$ má právě n kořenů v $\mathbb{C}$, přičemž každý kořen je počítán tolikrát, kolik je jeho násobnost.

Důkaz.

$P(x)$, st. $n \geq 1$, pak $\exists \alpha \in \mathbb{C}$: $P(\alpha) = 0 \Rightarrow P(x) = (x-\alpha)Q(x)$, je-li st$Q \geq 1$, pak má Q alespoň jeden kořen $\beta \in \mathbb{C}$ (je možné $\beta = \alpha$) $\Rightarrow$ $P(x) = (x-\alpha)(x-\beta)Q_1(x) \ldots$ □

Věta 9 (Rozklad polynomu na součin kořenových činitelů)

Nechť P je polynom stupně $n \geq 1$ a $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ ($m \leq n$) jsou jeho kořeny násobnosti postupně $k_1, \ldots, k_m$, pak platí $k_1 + \cdots + k_m = n$ a
$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_m)^{k_m}$.

Důkaz.

Vztah $k_1 + \cdots + k_m = n$ plyne z předchozího důsledku. Podle definice k_1-násobného kořene α_1 máme $P(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}Q_1(x)$ a $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$ jsou kořeny $Q_1(x)$ jako byly kořeny $P(x) \Rightarrow Q_1(x) = (x-\alpha_2)^{k_2}Q_2(x) \Rightarrow \cdots \Rightarrow$

$$P(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_m)^{k_m} \cdot C,$$

kde C je polynom stupně 0. Porovnáním koeficientů u x^n zjistíme hodnotu $C \Rightarrow C = a_n$. Tedy

$$P(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_m)^{k_m}.$$

□

Věta 10

Nechť $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ je polynom s reálnými koeficienty (tj. $a_i \in \mathbb{R}$). Je-li komplexní číslo $z = \alpha + i\beta$ kořenem polynomu $P(x)$, pak je jeho kořenem i číslo $\overline{z} = \alpha - i\beta$.

Důkaz.

$0 = P(z) \quad \Rightarrow \quad \overline{0} = \overline{P(z)} \quad \Rightarrow$

$$0 = \overline{a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0} = \overline{a_n}(\overline{z})^n + \cdots + \overline{a_1}(\overline{z}) + \overline{a_0}$$
$$= a_n(\overline{z})^n + \cdots + a_1(\overline{z}) + a_0 = P(\overline{z}),$$

$\Rightarrow P(\overline{z}) = 0$, tedy $\overline{z}$ je kořenem polynomu $P(x)$. □

Důsledek

Nechť $P(x)$ je polynom s reálnými koeficienty a $z = \alpha + i\beta$ je k-násobným kořenem $P(x)$, pak i $\overline{z} = \alpha - i\beta$ je k-násobným kořenem $P(x)$. Zejména každý polynom lichého stupně má alespoň jeden reálný kořen a počet reálných kořenů polynomu stupně n je roven n, nebo je o sudé číslo menší.

Věta 11 (O rozkladu v reálném oboru)

Nechť $P(x)$ je polynom s reálnými koeficienty, $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ jsou jeho reálné kořeny násobnosti $k_1, \dots, k_m$, $\beta_1 \pm i\gamma_1, \dots, \beta_p \pm i\gamma_p$ jsou navzájem sdružené komplexní kořeny násobnosti $\ell_1, \dots, \ell_p$. Pak platí

$$k_1 + \cdots + k_m + 2(\ell_1 + \cdots + \ell_p) = n$$

a

$$P(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1} \cdots (x-\alpha_m)^{k_m} \left[(x-\beta_1)^2 + \gamma_1^2\right]^{\ell_1} \cdots \left[(x-\beta_p)^2 + \gamma_p^2\right]^{\ell_p}.$$

Důkaz.

Důkaz plyne ze vzorce pro rozklad na součin kořenových činitelů. □

Příklad 13

Rozložte v reálném oboru polynom $P(x) = x^6 + x^2$.

$$P(x) = x^2\left[(x^2+1)^2 - 2x^2\right] = x^2\left[(x^2+1) - \sqrt{2}x\right]\left[(x^2+1) + \sqrt{2}x\right]$$

(Kořeny jsou $0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$.)

Poznámka

Výpočet kořenů polynomu

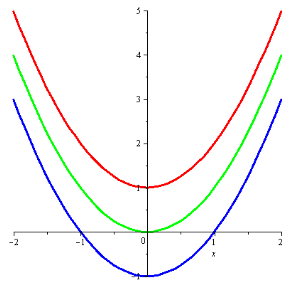
- $n = 1$: $P(x) = ax + b \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$,
- $n = 2$: $P(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,
- $n = 3$: Cardanovy vzorce,
- $n = 4$: existují vzorce pro výpočet pomocí koeficientů,
- $n \geq 5$: neexistuje obecný vzorec (dokázal E. Galois).

Hornerovo schéma pro výpočet hodnoty polynomu
$P(x) = \underbrace{P(x) - P(\alpha)}_{\text{má kořen } \alpha} + P(\alpha) = (x - \alpha)Q(x) + P(\alpha)$.

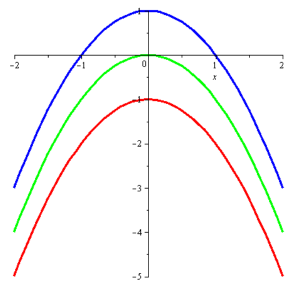
Kvadratický polynom $P(x) = ax^2 + bx + c$

- $D = b^2 - 4ac$,
- $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$,
- $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

- $D > 0 \Rightarrow x_1 \neq x_2, \quad x_{1,2} \in \mathbb{R}$,
- $D = 0 \Rightarrow x_1 = x_2, \quad x_{1,2} \in \mathbb{R}$,
- $D < 0 \Rightarrow x_1 = \bar{x}_2, \quad x_{1,2} \in \mathbb{C}$.



Obr.: $P(x) = ax^2 + bx + c, \ a > 0$.

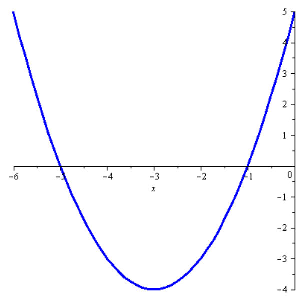


Obr.: $P(x) = ax^2 + bx + c, \ a < 0$.

Doplnění na čtverec

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{c}{a}), \qquad x^2 + px + q = (x + \tfrac{p}{2})^2 - \tfrac{p^2}{4} + q.$$

$y = x^2 + 6x + 5$,
$y = (x + 3)^2 - 9 + 5$,
$y = (x + 3)^2 - 4$,
$y + 4 = (x + 3)^2$.



Tato parabola má vrchol v bodě $[-3, -4]$ a je otevřena směrem nahoru.

Hornerovo schéma je algoritmus používaný při rozkladu polynomu na součin kořenových činitelů.

Věta 12

Nechť jsou dány polynomy

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Jestliže existují $\alpha, b_{-1} \in \mathbb{R}$ takové, že

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) + b_{-1},$$

pak

$$b_{n-1} = a_n, \qquad b_{k-1} = \alpha b_k + a_k, \quad k = 0, \dots, n - 1.$$

Poznámka

$P(\alpha) = b_{-1}$, tedy je-li $b_{-1} = 0$, pak je α kořenem polynomu P.

Postup

Koeficienty polynomu $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ spolu s číslem α sepíšeme do tabulky

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_1	a_0
α	b_{n-1}	b_{n-2}	$\cdots$	b_0	b_{-1}

A dopočítáme čísla $b_{n-1}, \dots, b_{-1}$:

$$b_{n-1} = a_n, \qquad b_{k-1} = \alpha b_k + a_k, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Tím získáme polynom $Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$ a číslo b_{-1} takové, že platí

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) + b_{-1}.$$

Věta 13 (Celočíselné kořeny)

Nechť P je polynom s celočíselnými koeficienty. Pak jsou všechny jeho racionální kořeny vyjádřitelné jako podíl dělitelů jeho absolutního člene a vedoucího koeficientu.

Příklad 14

$$P(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18, \quad \text{tedy } a_0 = -18, a_4 = 1.$$

Všechny racionální (celočíselné) kořeny jsou tedy mezi děliteli čísla -18:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18.$$

Skutečně

$$P(x) = (x-1)(x+2)(x-3)^2.$$

Příklad 15

Rozložte polynom $P(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18$ na součin kořenových činitelů.

Racionální kořeny jsou mezi čísly $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$.

	1	-5	1	21	-18
1	1	-4	-3	18	‖0
1	1	-3	-6	12	–
-1	1	-5	2	16	–
2	1	-2	-7	4	–
-2	1	-6	9	‖0	–
⋮	⋮	⋮	⋮	–	–

- ✓ Našli jsme kořeny $1, -2$.
- ✓ $Q(x) = x^2 - 6x + 9$
- ✓ $P(x) = (x-1)(x+2)Q(x)$

Protože $Q(x)$ je kvadratický polynom, není nutné dál pokračovat v Hornerově schématu. Zbývající kořeny dopočítáme pomocí diskriminantu.

$$Q(x) = x^2 - 6x + 9 \quad \Rightarrow \quad D = 36 - 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{6 \pm 0}{2} = 3$$

Tedy polynom P má dva jednoduché kořeny $1, -2$ a jeden dvojnásobný kořen 3.Odtud

$$P(x) = (x-1)(x+2)(x-3)^2.$$

Definice 19

Nechť P, Q jsou polynomy takové, že Q je nenulový (tj. $Q(x) \not\equiv 0$) a P, Q nemají společné kořeny, pak funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ se nazývá *racionální lomená funkce*. Je-li navíc $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$ nazývá se *ryze racionálně lomená funkce*.

Věta 14

Každou neryze lomenou funkci je možné (pomocí dělení polynomů) vyjádřit jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce.

Věta 15

Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty ($P, Q \in \mathbb{R}[x]$), $\operatorname{st} P = n, \operatorname{st} Q = m$, $\alpha \in \mathbb{R}$ je k-násobný kořen polynomu Q, tj. $Q(x) = (x-\alpha)^k Q_1(x)$, kde $Q_1(\alpha) \neq 0$. Pak existují čísla $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)^k} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^{k-1}} + \dots + \frac{A_k}{(x-\alpha)} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \tag{1}$$

kde P_1 je jistý polynom stupně $n-k$. Zejména má-li Q pouze reálné kořeny $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ násobnosti $k_1, \dots, k_m$, pak existují čísla $A_1^1, \dots, A_{k_1}^1, \dots, A_1^m, \dots, A_{k_m}^m \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^1}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \dots + \frac{A_{k_1}^1}{(x-\alpha_1)} + \frac{A_1^2}{(x-\alpha_2)^{k_2}} + \dots + \frac{A_{k_2}^2}{(x-\alpha_2)} + \dots + \frac{A_1^m}{(x-\alpha_m)^{k_m}} + \dots + \frac{A_{k_m}^m}{(x-\alpha_m)}. \tag{2}$$

Důkaz.

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-\alpha)^k Q_1(x)}$, pro $\forall A \in \mathbb{R}$ platí rovnost

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)^k Q_1(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^k} + \frac{P(x) - AQ_1(x)}{(x-\alpha)^k Q_1(x)},$$

zejména platí pro $A = \frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$. Pro takto zvolené A je číslo α kořenem $P(x) - AQ_1(x)$, tj. $P(\alpha) - \frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)} Q_1(\alpha) = 0$

$$\Rightarrow \quad P(x) - AQ_1(x) = (x-\alpha)Q_2(x) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-\alpha)^k Q_1(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^k} + \frac{(x-\alpha)Q_2(x)}{(x-\alpha)^k Q_1(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^k} + \frac{B}{(x-\alpha)^{k-1}} + \frac{Q_2(x) - BQ_1(x)}{(x-\alpha)^{k-1} Q_1(x)}.$$

Opakováním postupu dostaneme tvrzení (1). Tvrzení (2) dostaneme z (1) použitím pro další kořeny. □

Věta 16

Nechť $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$ a Q má dvojici komplexních kořenů $\beta \pm i\gamma$, každý z nich násobnosti $\ell \geq 1$. Pak existují reálná čísla $B_1, C_1, \dots, B_\ell, C_\ell$ taková, že platí

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{\left[(x-\beta)^2 + \gamma^2\right]^\ell Q_1(x)} = \frac{B_1 x + C_1}{\left[(x-\beta)^2 + \gamma^2\right]^\ell} + \dots + \frac{B_\ell x + C_\ell}{\left[(x-\beta)^2 + \gamma^2\right]} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

kde $Q_1(x)$ má stupeň $(\operatorname{st} Q - 2\ell)$ a $P_1(x)$ je jistý polynom.

Důkaz.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{\left[(x-\beta)^2+\gamma^2\right]^\ell Q_1(x)} = \frac{Bx+C}{\left[(x-\beta)^2+\gamma^2\right]^\ell} + \frac{P(x)-(Bx+C)Q_1(x)}{\left[(x-\beta)^2+\gamma^2\right]^\ell Q_1(x)}.$$

Nechť B, C jsou takové, že $P(x)-(Bx+C)Q_1(x)$ má kořeny $\beta \pm i\gamma$, tj. platí $P(x)-(Bx+C)Q_1(x) = [(x-\beta)^2+\gamma^2]P_2(x)$. Pak platí

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Bx+C}{\left[(x-\beta)^2+\gamma^2\right]^\ell} + \frac{\left[(x-\beta)^2+\gamma^2\right]P_2(x)}{\left[(x-\beta)^2+\gamma^2\right]^\ell Q_1(x)}$$
$$= \frac{Bx+C}{\left[(x-\beta)^2+\gamma^2\right]^\ell} + \frac{P_2(x)}{\left[(x-\beta)^2+\gamma^2\right]^{\ell-1} Q_1(x)}.$$

Opakováním tohoto postupu ℓ-krát dostáváme

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{B_1x+C_1}{\left[(x-\beta)^2+\gamma^2\right]^\ell} + \cdots + \frac{B_\ell x+C_\ell}{\left[(x-\beta)^2+\gamma^2\right]} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

□

Shrnutí – Rozklad racionální lomené funkce na součet parciálních zlomků

st $P <$ st Q, st $Q = k_1 + \cdots + k_m + 2(\ell_1 + \cdots + \ell_p)$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x-\alpha_m)^{k_m}\cdot\left[(x-\beta_1)^2+\gamma_1^2\right]^{\ell_1}\cdots\left[(x-\beta_p)^2+\gamma_p^2\right]^{\ell_p}}$$
$$= \frac{A_1^{[1]}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \cdots + \frac{A_{k_1}^{[1]}}{(x-\alpha_1)} + \cdots + \frac{A_1^{[m]}}{(x-\alpha_m)^{k_m}} + \cdots + \frac{A_{k_m}^{[m]}}{(x-\alpha_m)}$$
$$+ \frac{B_1^{[1]}x+C_1^{[1]}}{\left[(x-\beta_1)^2+\gamma_1^2\right]^{\ell_1}} + \cdots + \frac{B_{\ell_1}^{[1]}x+C_{\ell_1}^{[1]}}{\left[(x-\beta_1)^2+\gamma_1^2\right]} + \cdots$$
$$+ \frac{B_1^{[p]}x+C_1^{[p]}}{\left[(x-\beta_p)^2+\gamma_p^2\right]^{\ell_p}} + \cdots + \frac{B_{\ell_p}^{[p]}x+C_{\ell_p}^{[p]}}{\left[(x-\beta_p)^2+\gamma_p^2\right]}$$

Příklad 16

Rozložte funkci

$$\frac{x+1}{x^5+3x^3+2x}$$

na parciální zlomky.

$$\frac{x+1}{x^5+3x^3+2x} = \frac{x+1}{x(x^4+3x^2+2)} = \frac{x+1}{x(x^2+2)(x^2+1)} = \frac{1}{2x} - \frac{x-1}{x^2+1} + \frac{x-2}{2x^2+4}$$

Vlastnosti goniometrických funkcí

- $f(x) = \sin x$:
  $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = [-1,1]$, lichá, periodická $p = 2\pi$,
- $f(x) = \cos x$:
  $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = [-1,1]$, sudá, periodická $p = 2\pi$,
- $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$:
  $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, lichá, periodická $p = \pi$,
- $f(x) = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$:
  $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, lichá, periodická $p = \pi$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg} x$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Vzorce

- $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\sin \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$
- $\cos \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$
- $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$

Definice 20

Inverzní funkci k funkci $\sin x$ definované na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ nazýváme arkus sinus a značíme $\arcsin x$.

Vlastnosti

$\mathcal{D}(f) = [-1, 1]$, $\mathcal{H}(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, rostoucí, lichá

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Příklad 17

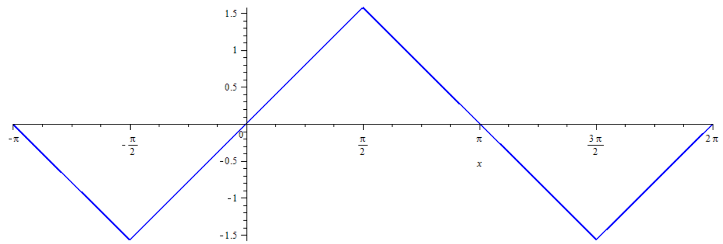
Načrtněte graf funkce $y = \arcsin(\sin x)$.

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \qquad \mathcal{H}(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$

perioda: $g(f(x)) = g(f(x+p)) \Rightarrow$ periodičnost g: $p = 2\pi$

$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$: $\quad \arcsin(\sin x) = x$

$x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$: $\quad x = \pi + t$, $\sin x = \sin(\pi + t) = -\sin t = \sin(-t)$,
$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(-t)) = -t = \pi - x$



Definice 21

Inverzní funkci k funkci $\cos x$ definované na intervalu $[0, \pi]$ nazýváme arkus kosinus a značíme $\arccos x$.

Vlastnosti

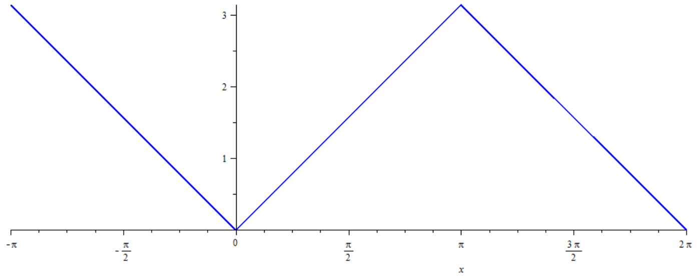
$\mathcal{D}(f) = [-1, 1]$, $\mathcal{H}(f) = [0, \pi]$, klesající, ani sudá ani lichá

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Příklad 18

Načrtněte graf funkce $y = \arccos(\cos x)$.

perioda $p = 2\pi$, $x \in [-\pi, 0] \Rightarrow -x \in [0, \pi]$



Příklad 19

Dokažte, že pro $\forall x \in [-1, 1]$ platí

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Pro $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\sin \alpha = \cos(\pi/2 - \alpha)$.

Nechť $\alpha = \arcsin x$, $x \in [-1, 1] \Rightarrow \alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Tedy $\alpha = \arcsin x \Rightarrow \sin \alpha = x \Rightarrow x = \cos(\pi/2 - \alpha)$ kde $(\pi/2 - \alpha) \in [0, \pi]$ $\Rightarrow \arccos x = \arccos(\cos(\pi/2 - \alpha)) = \pi/2 - \alpha = \pi/2 - \arcsin x \Rightarrow$ $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$. $\square$

Definice 22

Inverzní funkci k funkci $\operatorname{tg} x$ definované na intervalu $[-\pi/2, \pi/2]$ nazýváme arkus tangens a značíme $y = \operatorname{arctg} x$.

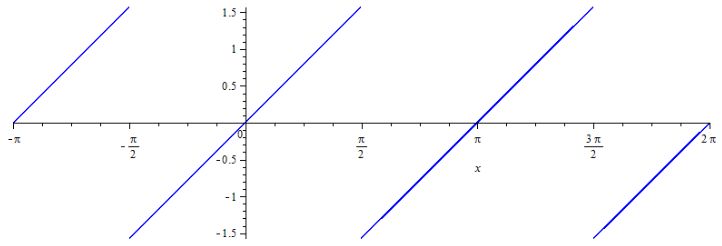
Vlastnosti

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = (-\pi/2, \pi/2)$, rostoucí, lichá

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\operatorname{arctg} x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Příklad 20

Načrtněte graf funkce $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.



$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Definice 23

Inverzní funkci k funkci $\operatorname{cotg} x$ definované na intervalu $[0, \pi]$ nazýváme arkus kotangens a značíme $y = \operatorname{arccotg} x$.

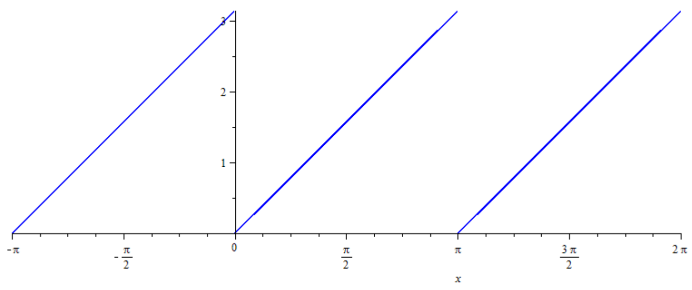
Vlastnosti

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = (0, \pi)$, klesající, ani sudá ani lichá

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\operatorname{arccotg} x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Příklad 21

Načrtněte graf funkce $y = \operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg} x)$.



$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Definice 24 (Mocnina)

Nechť $a, x \in \mathbb{R}, a > 0$. Potom definujeme mocninu jako

$$a^x = \begin{cases} \sup\{a^r : r \leq x, r \in \mathbb{Q}\}, & a > 1, \\ \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}, & 0 < a < 1, \\ 1^x = 1, & a = 1. \end{cases}$$

- $x = n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad a^n = \underbrace{a \cdots a}_{n\text{-krát}}$,
- $x = -n,\ n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$,
- $a^{1/n} = y,\ y > 0 \Rightarrow y^n = a$,
- $a^r = a^{p/q} = \left(a^p\right)^{1/q}$, $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

Definice 25

Nechť $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Funkci $y = a^x$ nazýváme *exponenciální funkce o základu a*.

Vlastnosti

- $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = (0, \infty)$,
- $a^0 = 1$ pro $\forall a > 0$,
- grafy funkcí a^x a $(1/a)^x$ jsou osově souměrné podle osy y,
- pro $a > 1$ je rostoucí, $a = 1$ konstantní a $0 < a < 1$ klesající,
- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$,
- $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$,
- Eulerovo číslo: $\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.718\,28\ldots$

Definice 26

Inverzní funkce k funkci $y = a^x$ se nazývá *logaritmus o základu a*, pro $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ (pro $a = 1$ není a^x prostá funkce), značí se $y = \log_a x$.

Vlastnosti

- $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$,
- $\log_a 1 = 0$
- pro $0 < a < 1$ je klesající a pro $a > 1$ rostoucí,
- grafy funkcí $\log_a x$ a $\log_{\frac{1}{a}} x$ jsou osově souměrné podle osy x,
- $\log_{\mathrm{e}} x = \ln x$.

Vzorce

$\forall x, y, a, b \in \mathbb{R}^+, a, b \neq 1$

- $\log_a 1 = 0$,
- $\log_b b = 1 = \log_a b \cdot \log_b a$,
- $\log_a x^y = y \log_a x$,
- $\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$,
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$,
- $\log_a x^y = y \cdot \log_a x$,
- $x = a^{\log_a x}$,
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

Definice 27

Nechť $r \in \mathbb{R}$. Funkci $y = x^r, x > 0$ nazýváme *mocninnou funkcí*.

Vlastnosti

- $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$
- $\mathcal{H}(f) = \begin{cases} (0, \infty), & r \neq 0, \\ \{1\}, & r = 0, \end{cases}$
- pro $r > 0$ je na $(0, \infty)$ rostoucí, pro $r < 0$ klesající a pro $r = 0$ konstantní,
- $x^r = \mathrm{e}^{r \ln x}, x \in (0, \infty)$.

Poznámka

Pro některá r lze samozřejmě rozšířit i do nekladných hodnot x.