Integrální počet v $\mathbb{R}$

Petr Hasil

Přednáška z Matematické analýzy

Obsah

Definice 1

Řekneme, že funkce F je na intervalu I *primitivní funkcí k funkci f*, jestliže

$$F'(x) = f(x),\ \forall x \in I.$$

Věta 1

Jsou-li funkce F a G primitivní funkce k funkci f na intervalu I, pak existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že $G = F + c$.

Důkaz.

$F'(x) = f(x), G'(x) = f(x) \Rightarrow (\underbrace{F(x) - G(x)}_{\text{spojitá funkce}})' = 0$ na $I \Rightarrow$

$F(x) - G(x) = c \in \mathbb{R}.$ □

Definice 2

Množina primitivních funkcí k funkci f se nazývá *neurčitý integrál funkce f* a značí se $\int f(x)\mathrm{d}x$.

Věta 2

- $\int [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$,
- $\int [c\cdot f(x)]\mathrm{d}x = c \cdot \int f(x)\mathrm{d}x$, $c\in\mathbb{R}$.

Důkaz.

Důkaz plyne z příslušných vzorců pro derivování. □

Poznámka

Neexistují obecné vzorce pro integrál ze součinu dvou funkcí a jejich podílu.

Věta 3 (Základní integrální vzorce)

Nechť $A, B, a, c, k, n \in \mathbb{R}$, $a>0$, $n\neq -1$.

1. $\int k\, dx = kx + c$,
2. $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$,
3. $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c$,
4. $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$,
5. $\int e^x\, dx = e^x + c$,
6. $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$,
7. $\int \cos x\, dx = \sin x + c$,
8. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x + c$,
9. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\operatorname{cotg} x + c$,
10. $\int \frac{1}{\sqrt{A^2-x^2}}\, dx = \arcsin\frac{x}{A} + c$,
11. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm B}}\, dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm B}\right| + c$,
12. $\int \frac{1}{A^2+x^2}\, dx = \frac{1}{A}\operatorname{arctg}\frac{x}{A} + c$,
13. $\int \frac{1}{A^2-x^2}\, dx = \frac{1}{2A}\ln\left|\frac{A+x}{A-x}\right| + c$,

kde x náleží vždy do definičního oboru příslušné funkce.

Důkaz.

Důkaz provedeme dle definice, tedy přímým derivováním. (Přičemž bereme v úvahu větu 1.) Např.

$$\left[\ln(x+\sqrt{x^2\pm B})+c\right]' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm B}}\left(1+\frac{1}{2}(x^2\pm B)^{-1/2}2x\right)$$
$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm B}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2\pm B}}\right)$$
$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm B}}\,\frac{x+\sqrt{x^2\pm B}}{\sqrt{x^2\pm B}} = \frac{1}{\sqrt{x^2\pm B}}$$

□

Poznámka

$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ je inverzní funkcí k funkci $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sinh x$.

Věta 4 (Dostatečná podmínka existence primitivní funkce)

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $I\subseteq\mathbb{R}$. Pak k ní na tomto intervalu existuje funkce primitivní.

Důkaz.

Později – viz věta 23. □

Příklad 1

Uvažujme funkci

$$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

Pro $x\neq 0$ je $F'(x)=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\frac{-1}{x^2}=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$,
pro $x=0$ je
$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$,
tedy $F'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$
Pro funkci $f(x):=F'(x)$ je tedy $F(x)$ primitivní funkcí na celém $\mathbb{R}$.
Funkce $f(x)$ přitom není spojitá v $x=0$, protože
$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}=\underbrace{\lim_{x\to 0}2x\sin\frac{1}{x}}_{=0}-\underbrace{\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}}_{\text{neexistuje}}$
neexistuje.
Tedy spojitost *není nutnou podmínkou* pro existenci primitivní funkce.

Definice 3

Řekneme, že funkce f má intervalu I *Darbouxovu vlastnost*, jestliže $\forall t_1, t_2 \in I$ funkce f nabývá všech hodnot mezi hodnotami $f(t_1)$ a $f(t_2)$.

Poznámka

Podle 2. Bolzanovy věty spojité funkce mají Darbouxovu vlastnost.

Věta 5 (Nutná podmínka)

Nechť F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu I. Pak funkce f má na intervalu I Darbouxovu vlastnost.

Důkaz.

Nechť $x_1, x_2 \in I$ jsou libovolné a předpokládejme, že $f(x_1) < f(x_2)$. (Kdyby $f(x_1) > f(x_2)$, důkaz je obdobný.)

Nechť $\alpha \in (f(x_1), f(x_2))$ je libovolné. Ukážeme, že existuje $c \in I$ takové, že $f(c) = \alpha$.

Uvažujme funkci $g(x) = F(x) - \alpha x$, tato funkce je na uzavřeném intervalu s krajními body x_1, x_2 spojitá (má derivaci $\Rightarrow$ je spojitá) a

$$g'(x) = F'(x) - \alpha = f(x) - \alpha.$$

Dále $g'(x_1) = f(x_1) - \alpha < 0$, $g'(x_2) = f(x_2) - \alpha > 0$. Nechť $x_1 < x_2$ a $c \in (x_1, x_2)$ je takové, že $g(c) = \min\{g(x), x \in [x_1, x_2]\}$ (takové c existuje podle 2. Weierstrassovy věty). Nutně platí $g'(c) = 0$ (jinak by bod c nebyl bodem minima funkce g na intervalu $[x_1, x_2]$), tedy $0 = g'(c) = f(c) - \alpha \Rightarrow f(c) = \alpha$. Pro $x_1 > x_2$ podobně (c bude bod maxima funkce g). □

Příklad 2

K funkci

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

neexistuje primitivní funkce na žádném intervalu obsahujícím bod $x=0$. Tato funkce nemá na takovém intervalu Darbouxovu vlastnost.

Příklad 3

K Dirichletově funkci $\chi(x)$ neexistuje primitivní funkce na žádném intervalu.

Příklad 4

K funkci $f(x)=|x|$ existuje primitivní funkce na celém $\mathbb{R}$. Touto primitivní funkcí je

$$F(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}+c & x\geq 0\\ -\frac{x^2}{2}+c & x<0\end{cases}.$$

Poznámka

Není známa nutná a postačující podmínka pro integraci.

Věta 6 (Metoda per partes)

Nechť funkce u, v mají derivaci na intervalu I. Jestliže existuje primitivní funkce k funkci (uv'), pak existuje i primitivní funkce k funkci $(u'v)$ a platí

$$\int uv'\mathrm{d}x = uv - \int u'v\mathrm{d}x.$$

Důkaz.

$(uv)'=u'v+uv'$ na intervalu I. Je-li F primitivní funkce k uv', tj. $F'=uv'$, pak pro funkci $G=uv-F$ platí

$$G'=(uv-F)'=u'v+uv'-F'=u'v+uv'-uv'=u'v,$$

tedy funkce G je primitivní funkcí k funkci $u'v$, přičemž $F=uv-G$ je vztah z věty. □

Poznámka

Jako funkci u, tedy tu, kterou při použití věty derivujeme, volíme zpravidla funkci, která se při derivování „více zlepší".

$$\int P(x)f(x)\mathrm{d}x,$$

kde $P(x)$ je polynom, řešíme pomocí metody per partes takto:

Je-li $f(x)$ jedna z funkcí $a^{kx}, \sin(kx), \cos(kx)$, pak volíme $u = P(x)$.

Je-li $f(x)$ jedna z funkcí $\log_a^n(kx), \arcsin(kx), \arccos(kx), \operatorname{arctg}(kx)$, $\operatorname{arccotg}(kx)$, pak volíme $u = f(x)$.

Metodu per partes lze použít opakovaně.

Příklad 5

$$\int x\sin x\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{vmatrix}$$
$$= x\cdot(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)\mathrm{d}x = -x\cos x + \int \cos x\mathrm{d}x$$
$$= -x\cos x + \sin x + c.$$

Poznámka

Zkoušku provedeme zderivováním výsledku.

Příklad 6

$$\int 3x^2\ln^2 x\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \ln^2 x & u' = 2\ln x\cdot\frac{1}{x} \\ v' = 3x^2 & v = x^3 \end{vmatrix}$$
$$= x^3\ln^2 x - \int 2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot x^3\mathrm{d}x$$
$$= x^3\cdot\ln^2 x - 2\int x^2\ln x\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x^2 & v = \frac{x^3}{3} \end{vmatrix}$$
$$= x^3\cdot\ln^2 x - 2\left[\ln x\cdot\frac{x^3}{3} - \int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right]$$
$$= x^3\cdot\ln^2 x - 2\frac{x^3}{3}\ln x + \frac{2}{3}\int x^2\mathrm{d}x$$
$$= x^3\cdot\ln^2 x - \frac{2}{3}x^3\ln x + \frac{2}{3}\cdot\frac{x^3}{3} + c$$
$$= x^3\cdot\ln^2 x - \frac{2}{3}x^3\ln x + \frac{2}{9}x^3 + c.$$

Příklad 7

$$\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \mathrm{e}^x & v = \mathrm{e}^x \end{vmatrix} = x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$
$$= \begin{vmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \mathrm{e}^x & v = \mathrm{e}^x \end{vmatrix} = x^2\mathrm{e}^x - 2\left(x\mathrm{e}^x - \int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\right)$$
$$= x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + c = \mathrm{e}^x(x^2 - 2x + 2) + c$$

Příklad 8

$$\int \ln x \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{vmatrix} = x \ln x - \int 1 \mathrm{d}x$$
$$= x \ln x - x + c$$

Poznámka

Metodu per partes je možné použít i na součin trigonometrické funkce s funkcí exponenciální. V tomto případě se metoda provede dvakrát se stejnou volbou u, v a hledaný integrál se vyjádří přímo z obdržené rovnosti.

Příklad 9

$$\int e^x \sin x \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \sin x & u' = \cos x \\ v' = e^x & v = e^x \end{vmatrix} = e^x \sin x - \int e^x \cos x \mathrm{d}x$$
$$= \begin{vmatrix} u = \cos x & u' = -\sin x \\ v' = e^x & v = e^x \end{vmatrix} = e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x(-\sin x)\mathrm{d}x$$
$$= e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x \mathrm{d}x$$

Tedy pro $I := \int e^x \sin x \mathrm{d}x$ máme $I = e^x(\sin x - \cos x) - I$. Odtud $2I = e^x(\sin x - \cos x)$, tj.

$$\int e^x \sin x \mathrm{d}x = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c.$$

Volba u, v je zde libovolná, pouze se musí zopakovat stejně.

Věta 7 (Substituční metoda)

Nechť $I, J \subseteq \mathbb{R}$ jsou intervaly, $\varphi : I \to J$, $f : J \to \mathbb{R}$ a φ má na I derivaci. Je-li funkce F primitivní k funkci f na J (tj. $F'(x) = f(x)$ na J), pak funkce $F(\varphi(x))$ je primitivní na I k funkci $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$.

Naopak má-li funkce φ na I derivaci různou od nuly a G je primitivní funkce na I k funkci $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ (tj. $G'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$), pak funkce $G(\varphi^{-1}(x))$ je primitivní k funkci f na intervalu J.

Platí tedy vzorce:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = \varphi(x) \\ \mathrm{d}t = \varphi'(x)\mathrm{d}x \end{vmatrix} = \int f(t)\mathrm{d}t,$$

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} x = \varphi(t) \\ \mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t \end{vmatrix} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

Důkaz.

Věta vyplývá ze vzorce pro derivaci složené funkce.

V první části je F primitivní funkce k f, tj.

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow [F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

V druhé části má φ' Darbouxovu vlastnost a je buď kladná, nebo záporná na celém I. Funkce φ je tedy spojitá a ryze monotónní $\to$ φ^{-1} má derivaci na J a

$$(\varphi^{-1})'(x) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}.$$

Předpokladem věty je $G'(x) = (f \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x)$, tedy

$$\begin{aligned}(G \circ \varphi^{-1})'(x) &= (G' \circ \varphi^{-1})(x) \cdot (\varphi^{-1})'(x) \\ &= (f \circ \varphi \circ \varphi^{-1})(x) \cdot (\varphi' \circ \varphi^{-1})(x) \cdot \frac{1}{(\varphi' \circ \varphi^{-1})(x)} = f(x).\end{aligned}$$

$\square$

Příklad 10

$$\int x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x^2 = t \\ 2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \mathrm{e}^t \tfrac{1}{2}\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^t + c = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x^2} + c$$

Příklad 11

$$\int \tfrac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x^2 = t \\ 2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t \end{array} \right| = \tfrac{1}{2}\int \tfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg} t + c = \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + c$$

Příklad 12

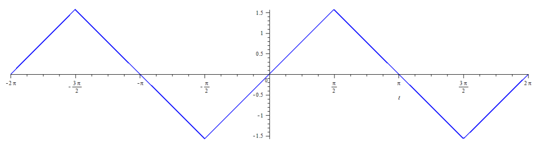
Určete primitivní funkci k funkci $\sqrt{a^2 - x^2}$ pro $x \in [-a, a]$.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x &= \left| \begin{array}{c} x = a\sin t \\ \mathrm{d}x = a\cos t\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\; a\cos t\mathrm{d}t \\ &= a^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t\mathrm{d}t = a^2 \int \cos^2 t\mathrm{d}t = a^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{a^2}{2}\int 1\mathrm{d}t + \frac{a^2}{2}\int \cos 2t\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}\frac{\sin 2t}{2} + c \\ &= \frac{a^2}{2}(t + \sin t\cos t) + c = \frac{a^2}{2}(t \pm \sin t\sqrt{1 - \sin^2 t}) + c \\ &= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right) + c\end{aligned}$$

Poznámka

Víme, že platí

$$\arcsin(\sin t) = \begin{cases} t, & t \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}, \\ -t, & t \in \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$



Tedy pro $\frac{x}{a} = \sin t$ máme $\arcsin\frac{x}{a} = \pm t$, tj. $t = \pm\arcsin\frac{x}{a}$, přičemž znaménko se shoduje se znaménkem funkce kosinus. Celkově jsme proto mohli ve výpočtu postupovat jako pro $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, protože minusy se vždy sejdou dva a všechny konstanty lze shrnout na závěr do c. (Ve skutečnosti je samozřejmě $t \in \mathbb{R}$.)

Poznámka

Již víme, že každou racionální lomenou funkci, která není ryze lomená, lze pomocí dělení polynomů převést na součet polynomu a ryze lomené racionální funkce, kterou je možné rozložit na parciální zlomky.

Budeme se tedy zajímat pouze o integrály z parciálních zlomků

Zaměříme se na 5 typů integrálů:

1. $\int \frac{A}{x-\alpha}\mathrm{d}x$,
2. $\int \frac{A}{(x-\alpha)^n}\mathrm{d}x$,
3. $\int \frac{A}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$,
4. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$,
5. $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$,

kde A, B, α, p, q jsou reálná čísla, $p^2 - 4q < 0$ a $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Typ 1 a 2 řešíme substitucí $t = x - \alpha$.

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^n}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x-\alpha = t \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = A\int \frac{1}{t^n}\mathrm{d}t$$

$$= \begin{cases} A\ln|t| + c = A\ln|x-\alpha| + c & (n=1) \\ A\frac{t^{1-n}}{1-n} + c = \frac{A}{(1-n)t^{n-1}} + c = \frac{A}{(1-n)(x-\alpha)^{n-1}} + c & (n \neq 1) \end{cases}$$

Příklad 13 (Typ 1)

$$\int \frac{3}{2x-8}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = 2x-8 \\ \mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{3}{t}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\int \frac{1}{t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3}{2}\ln|t| + c = \frac{3}{2}\ln|2x-8| + c.$$

Příklad 14 (Typ 2)

$$\int \frac{3}{(2x-8)^3}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = 2x-8 \\ \mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{3}{t^3}\frac{1}{2}\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3}{2}\int t^{-3}\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\frac{t^{-2}}{-2} + c$$

$$= \frac{3}{-4}\frac{1}{t^2} + c = \frac{-3}{4(2x-8)^2} + c.$$

Typ 3 řešíme doplněním jmenovatele na čtverec a použitím vzorce pro $\int \frac{1}{A^2+x^2}\mathrm{d}x$.

Příklad 15 (Typ 3)

$$\int \frac{3}{2x^2-4x+10}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2-2x+5}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x-1)^2+4}\mathrm{d}x$$

$$= \left| \begin{matrix} t = x-1 \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{matrix} \right| = \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2+2^2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot \operatorname{arctg}\frac{t}{2} + c = \frac{3}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + c.$$

Typ 4 řešíme převedením na součet integrálu typu $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$ a integrálu typu 3. ($A \neq 0$, jinak by šlo o typ 3.)

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = A\int \frac{x+\frac{B}{A}}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p+\overbrace{\frac{2B}{A}-p}^{=:C}}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{A}{2}\left(\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\mathrm{d}x + C\int \frac{1}{x^2+px+q}\mathrm{d}x\right) = \left| \begin{matrix} x^2+px+q = t \\ (2x+p)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{matrix} \right|$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{1}{t}\mathrm{d}t + \frac{AC}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \underbrace{q-\frac{p^2}{4}}_{:=D^2}}\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} x+\frac{p}{2} = z \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}z \end{matrix} \right|$$

$$= \frac{A}{2}\ln|t| + \frac{AC}{2}\int \frac{1}{z^2+D^2}\mathrm{d}z = \frac{A}{2}\ln|t| + \frac{AC}{2D}\operatorname{arctg}\frac{z}{D} + c$$

$$= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{AC}{2D}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{D} + c$$

Příklad 16 (Typ 4)

$$\int \frac{3x-6}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x = 3\int \frac{x-2}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x = 3\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+2-2-4}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} + \frac{-6}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$$

$$I_1 = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x = \ln|x^2+2x+3| + c_1$$

$$I_2 = -6\int \frac{1}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x = -6\int \frac{1}{(x+1)^2+2}\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} t = x+1 \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{matrix} \right|$$

$$= -6\int \frac{1}{t^2+2}\mathrm{d}t = -6\int \frac{1}{t^2+(\sqrt{2})^2}\mathrm{d}t = \frac{-6}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + c_2$$

$$= -3\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}(x+1)}{2} + c_2$$

Celkem

$$\int \frac{3x-6}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\left(\ln|x^2+2x+3| - 3\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}(x+1)}{2}\right) + c$$

Příklad 17

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3\cdot 2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x + \frac{3}{3\cdot 2}\int \frac{1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x$$
$$= \left| \begin{array}{c} x-\frac{1}{2}=t \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{2}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}} + c$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c$$

Typ 5 řešíme podobnou úpravou jako typ 4, tedy rozdělením na dvě části, kde první část lze vyřešit snadnou substitucí (čitatel je derivací trojčlene za jmenovatele) a na druhou část použijeme rekurentní vzorec (viz dále).

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} + \frac{\frac{2B}{A}-p}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$$
$$= \left| \begin{array}{c} x^2+px+q=t \\ (2x+p)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{A}{2}\int \frac{1}{t^n}\mathrm{d}t + \frac{A}{2}\int \frac{C}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right]^n}\mathrm{d}x$$
$$= \left| \begin{array}{c} x+\frac{p}{2}=z \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}z \end{array} \right| = \frac{A}{2}\int \frac{1}{t^n}\mathrm{d}t + \frac{A}{2}\int \frac{C}{(z^2+D^2)^n}\mathrm{d}z$$
$$= \frac{A}{2}\int \frac{1}{t^n}\mathrm{d}t + \frac{AC}{2D^{2n}}\int \frac{1}{\left[\left(\frac{z}{D}\right)^2+1\right]^n}\mathrm{d}z = \left| \begin{array}{c} \frac{z}{D}=s \\ \mathrm{d}z=D\mathrm{d}s \end{array} \right|$$
$$= \frac{A}{2}\int \frac{1}{t^n}\mathrm{d}t + \frac{AC}{2D^{2n-1}}\int \frac{1}{(s^2+1)^n}\mathrm{d}s = \frac{A}{2(1-n)t^{n-1}} + E\int \frac{1}{(s^2+1)^n}\mathrm{d}s$$

Nyní musíme vyřešit poslední integrál. Odvoďme rekurentní vzorec.

$$\underbrace{\int \frac{\mathrm{d}s}{(1+s^2)^n}}_{=:I_n} = \int \frac{1+s^2-s^2}{(1+s^2)^n}\mathrm{d}s = \underbrace{\int \frac{\mathrm{d}s}{(1+s^2)^{n-1}}}_{=:I_{n-1}} - \int \frac{s\cdot s}{(1+s^2)^n}\mathrm{d}s$$
$$= I_{n-1} + \frac{s}{2(n-1)(1+s^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}I_{n-1}$$
$$= \frac{s}{2(n-1)(1+s^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}$$

Tímto způsobem lze postupně snižovat exponent ve jmenovateli integrálu I_n až na 1, což vede na funkci $\operatorname{arctg} s$.

Kde jsme použili následující mezivýpočet.

$$\int \frac{s\cdot s}{(1+s^2)^n}\mathrm{d}s = \left| \begin{array}{cc} u=s & u'=1 \\ v'=\frac{s}{(1+s^2)^n} & v=(*) \end{array} \right|$$
$$= \frac{s}{2(1-n)(1+s^2)^{n-1}} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1-n)(1+s^2)^{n-1}}\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{s}{2(n-1)(1+s^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\underbrace{\int \frac{1}{(1+s^2)^{n-1}}\mathrm{d}t}_{I_{n-1}}$$

$$(*) = \int \frac{s}{(1+s^2)^n}\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int \frac{2s}{(1+s^2)^n}\mathrm{d}s = \left| \begin{array}{c} 1+s^2=w \\ 2s\mathrm{d}s=\mathrm{d}w \end{array} \right|$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{w^n}\mathrm{d}w = \frac{1}{2(1-n)w^{n-1}}$$

Příklad 18

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$
$$= \operatorname{arctg} x - \int \frac{x\cdot x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{cc} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{2x}{2(1+x^2)^2} & v = \frac{-1}{2(1+x^2)} \end{array} \right|$$
$$= \operatorname{arctg} x - \left(-\frac{x}{2(1+x^2)} - \int \frac{-1}{2(1+x^2)}\mathrm{d}x \right)$$
$$= \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(1+x^2)} + c$$

Vzorcem:

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2(2-1)(1+x^2)^{2-1}} + \frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2}\int \frac{1}{(1+x^2)^1}\mathrm{d}x$$

Symbolem $R(u,v)$ budeme rozumět racionální lomenou funkci v proměnných u, v, tj. u, v jsou svázány operacemi $+, -, \cdot, /, ()^z$ $(z \in \mathbb{Z})$.

$$\boxed{\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x}$$

a) Je-li R lichá funkce vzhledem k první proměnné, tj. $R(-u,v) = -R(u,v)$ (je lichá vzhledem k $\sin x$), pak volíme substituci $\cos x = t$.
b) Je-li lichá vzhledem k $\cos x$, tj. $R(u,-v) = -R(u,v)$, pak volíme substituci $\sin x = t$.
c) Je-li $R(-u,-v) = R(u,v)$, tj. je lichá nebo sudá vzhledem k oběma proměnným, volíme $\operatorname{tg} x = t$.
d) Nenastane-li žádný z výše uvedených případů, pak použijeme univerzální substituci $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.

Každá ze substitucí převede integrál $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$ na integrál z racionální lomené funkce.

Příklad 19

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = -\int \underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x} t^2 \mathrm{d}t$$
$$= -\int (1-t^2)t^2\mathrm{d}t = \cdots$$

$$\int \sin^n x \cos^m x \mathrm{d}x = \begin{cases} \text{je-li } n \text{ liché a } m \text{ sudé} & \to t = \cos x \\ \text{je-li } n \text{ sudé a } m \text{ liché} & \to t = \sin x \\ n \text{ i } m \text{ liché} & \to t = \sin x, t = \cos x, t = \operatorname{tg} x \\ n \text{ i } m \text{ sudé} & \to t = \operatorname{tg} x \end{cases}$$

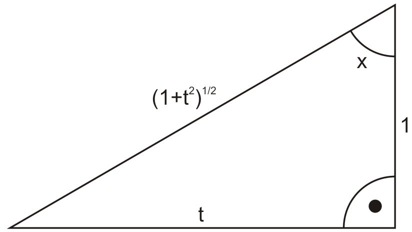
Vždy je možné použít $t = tg\frac{x}{2}$.

Příklad 20

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+3\cos^2 x} = \left| \begin{array}{c} \operatorname{tg} x = t, x = \operatorname{arctg} t, \mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}}{1+3\frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{1+t^2}{1+t^2+3}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{4+t^2}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + c = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{2}\right) + c$$



Příklad 21

$$\int \frac{\sin x + 2}{\cos x - 2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, x = 2\operatorname{arctg} t, \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}+2}{\frac{1-t^2}{1+t^2}-2}\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t = -4\int \frac{1+t+t^2}{(3t^2+1)(t^2+1)}\mathrm{d}t$$

$$= |\text{rozklad na parciální zlomky}| = -4\int \frac{\frac{3}{2}t+1}{3t^2+1}\mathrm{d}t - 4\int \frac{-\frac{1}{2}t}{t^2+1}$$

$$= -4\left(\frac{1}{4}\ln(1+3t^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\sqrt{3}t) - \frac{1}{4}\ln(1+t^2)\right) + c = \dots$$

Kde

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$\boxed{\int \sin^{2n} x \cdot \cos^{2m} x \mathrm{d}x, \ m, n \in \mathbb{N}_0}$$

Příklad 22

$\int \sin^4 x \cos^2 x \mathrm{d}x = ?$

$$a) = \left| \begin{array}{c} \operatorname{tg} x = t, \mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right| = \int \frac{t^4}{(1+t^2)^2}\frac{1}{1+t^2}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{t^4}{(1+t^2)^4}\mathrm{d}t = \cdots$$

$$b) = \left| \begin{array}{l} \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \\ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \end{array} \right| = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \frac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{8}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)(1+\cos 2x)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{8}\int (1 - \cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{8}\int 1\mathrm{d}x - \frac{1}{8}\underbrace{\int (\cos 2x - \cos^3 2x)\mathrm{d}x}_{\text{subst.: } \sin 2x = t} - \frac{1}{8}\int \frac{1+\cos 4x}{2}\mathrm{d}x = \cdots$$

Integrály typu

$$\boxed{\int \sin \alpha x \cos \beta x\mathrm{d}x, \quad \int \sin \alpha x \sin \beta x\mathrm{d}x, \quad \int \cos \alpha x \cos \beta x\mathrm{d}x}$$

lze zjednodušit převedením na součet.

$$\sin(\alpha x \pm \beta x) = \sin \alpha x \cos \beta x \pm \cos \alpha x \sin \beta x$$
$$\Rightarrow \sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}[\sin(\alpha x + \beta x) + \sin(\alpha x - \beta x)]$$

$$\cos(\alpha x \pm \beta x) = \cos \alpha x \cos \beta x \mp \sin \alpha x \sin \beta x$$
$$\Rightarrow \sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2}[\cos(\alpha x - \beta x) - \cos(\alpha x + \beta x)]$$
$$\Rightarrow \cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}[\cos(\alpha x + \beta x) + \cos(\alpha x - \beta x)]$$

Příklad 23

$$\int \sin 2x \cos 3x\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}[\sin 5x + \sin(-x)]\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int \sin 5x\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \sin x\mathrm{d}x = \frac{-1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + c$$

U integrálů typu

$$\boxed{\int R\left(x, x^{q_1}, \dots, x^{q_n}\right)\mathrm{d}x, \; q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Q}}$$

je výhodné volit substituci $t^s = x$, kde s je nejmenší společný násobek jmenovatelů čísel $q_1, \dots, q_n$.

Příklad 24

$$\int \frac{\sqrt[5]{x} - 3\sqrt{x}}{x}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} t^{10} = x \Rightarrow t = \sqrt[10]{x} \\ 10t^9\mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{t^{10/5} - 3\cdot t^{10/2}}{t^{10}} \cdot 10t^9\mathrm{d}t$$
$$= \int \frac{t^2 - 3t^5}{t^{10}} 10t^9\mathrm{d}t = 10\int t - 3t^4\mathrm{d}t = 10\left(\frac{t^2}{2} - 3\frac{t^5}{5}\right) + c$$
$$= 5\sqrt[10]{x^2} - 6\sqrt[10]{x^5} + c = 5\sqrt[5]{x} - 6\sqrt{x} + c.$$

Na integrály typu

$$\boxed{\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^s\right) \mathrm{d}x, \ s \in \mathbb{Q}, s = \frac{m}{n}}$$

používáme substituci $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$, tedy

$$ax + b = t^n(cx + d) \Rightarrow x(a - t^n c) = t^n d - b$$

$$\Rightarrow x = \frac{t^n d - b}{a - t^n c}, \ \mathrm{d}x = \left(\frac{t^n d - b}{a - t^n c}\right)' \mathrm{d}t$$

Příklad 25

$$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{1}{x+1} \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \frac{x+1}{x-1} = t^3, x+1 = t^3x - t^3, x = \frac{t^3+1}{t^3-1} \\ \mathrm{d}x = \frac{3t^2(t^3-1)-3t^2(t^3+1)}{(t^3-1)^2}\mathrm{d}t = \frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}\mathrm{d}t \end{array} \right|$$

$$= \int t \cdot \frac{1}{\frac{t^3+1}{t^3-1} + 1} \frac{-6t^2}{(t^3-1)^2} \mathrm{d}t = -\int \frac{6t^3}{(t^3+1+t^3-1)(t^3-1)} \mathrm{d}t$$

$$= -3 \int \frac{1}{t^3-1} \mathrm{d}t = \dots \ \text{(rozklad na parc. zlomky)}$$

$$\boxed{\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) \mathrm{d}x}$$

kde $b^2 - 4ac \neq 0$, tj. kvadratický polynom nemá dvojnásobný reálný kořen. Nejprve uvažujme případ $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

a) Jestliže $a > 0$ a kvadratický polynom má dva reálné kořeny $x_1 < x_2$, potom

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}\sqrt{(x - x_1)^2 \frac{x - x_2}{x - x_1}} = \sqrt{a}\,|x - x_1| \sqrt{\frac{x - x_2}{x - x_1}},$$

poté ho s použitím substituce $t^2 = \frac{x-x_2}{x-x_1}$ převedeme na integrál z RLF.

b) Jestliže $a < 0$ a kvadratický polynom má dva reálné kořeny $x_1 < x_2$, potom

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{-a}\sqrt{(x - x_1)^2 \frac{x_2 - x}{x - x_1}} = \sqrt{-a}\,(x - x_1) \sqrt{\frac{x_2 - x}{x - x_1}},$$

poté ho s použitím substituce $t^2 = \frac{x_2-x}{x-x_1}$ převedeme na integrál z RLF.

Pokud polynom nemá reálné kořeny, pak nutně $a > 0$ (jinak nelze odmocňovat) a můžeme použít některou z tzv. *Eulerových substitucí*. Protože je lze použít i v případě reálných kořenů, objevuje se u první z nich podmínka na kladnost a. Volba znamének v místech se symbolem '$\pm$' je libovolná.

1. $a > 0: \sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a}x \pm t$
   $\Rightarrow ax^2 + bx + c = ax^2 \pm 2\sqrt{a}tx + t^2 \Rightarrow x = \frac{t^2-c}{b\mp 2\sqrt{a}t}$
2. $c > 0: \sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm xt \pm \sqrt{c}$
   $\Rightarrow ax^2 + bx + c = x^2t^2 \pm 2xt\sqrt{c} + c \Rightarrow ax + b = xt^2 \pm 2t\sqrt{c}$
   $\Rightarrow x = \frac{-b\pm 2t\sqrt{c}}{a-t^2}$
3. $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2), x_1, x_2 \in \mathbb{R}: \sqrt{ax^2 + bx + c} = (x-x_1)t$
   $\Rightarrow ax^2 + bx + c = (x - x_1)^2t^2 \Rightarrow a(x - x_2) = (x - x_1)t^2$

Kde poslední substituce je znovu pouze pro případ existence dvou reálných kořenů.

Příklad 26

$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$ řešíme pomocí Eulerovy substituce 1, znaménka volíme tak, aby ve jmenovateli vyšlo pouze t:

$$\sqrt{x^2-x+1} = x-t \quad \Rightarrow \quad x = \frac{t^2-1}{2t-1}, \mathrm{d}x = \frac{2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}\mathrm{d}t,$$

tedy

$$I = \int \frac{2(t^2-t+1)}{t(2t-1)^2}\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2-t+1}{t(2t-1)^2}\mathrm{d}t = 2\int \frac{A}{t} + \frac{B}{2t-1} + \frac{C}{(2t-1)^2}\mathrm{d}t = \cdots .$$

Příklad 27

$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$ lze řešit také pomocí Eulerovy substituce 2:

$$\sqrt{x^2-x+1} = xt+1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2t+1}{1-t^2}, \mathrm{d}x = \frac{2(t^2+t+1)}{(1-t^2)^2}\mathrm{d}t,$$

tedy

$$I = 2\int \frac{1}{\frac{2t+1}{1-t^2} - \left(\frac{2t+1}{1-t^2}t+1\right)} \frac{t^2+t+1}{(1-t^2)^2}\mathrm{d}t = \int \text{RLF}\,\mathrm{d}t = \cdots .$$

Příklad 28

$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{-x^2+3x-2}}$, kde $-x^2+3x-2 = -(x-1)(x-2)$, vyřešme pomocí Eulerovy substituce 3:

$$\sqrt{-x^2+3x-2} = (x-1)t \quad \Rightarrow \quad -(x-2) = (x-1)t^2$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{2+t^2}{1+t^2}, \mathrm{d}x = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t,$$

tedy

$$I = \int \frac{\frac{-2t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t}{\left(\frac{2+t^2}{1+t^2}-1\right)^2 t} = -2\int \mathrm{d}t = -2t + c = \frac{-2\sqrt{-x^2+3x-2}}{x-1} + c.$$

Další možností je doplnění kvadratického polynomu pod odmocninou na čtverec a podle jeho typu pak použití jedné z následujících substitucí.

1. $R(x, \sqrt{x^2-\alpha^2}) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\alpha}{\sin t}$,
2. $R(x, \sqrt{x^2+\alpha^2}) \quad \Rightarrow \quad x = \alpha \operatorname{tg} t$,
3. $R(x, \sqrt{\alpha^2-x^2}) \quad \Rightarrow \quad x = \alpha \sin t$.

Tím převedeme integrál na typ $\int R(\sin t, \cos t)\mathrm{d}t$.

Speciální případy

a) $\boxed{\int x^n\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x}$, b) $\boxed{\int x^n\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x}$

(i) n liché, $n\in\mathbb{Z}$, pak substituce je

$$a)\ a^2-x^2=t^2,\quad b)\ a^2+x^2=t^2,$$

(ii) n sudé, $n\in\mathbb{Z}$, pak

$$a)\ x=a\sin t,\quad b)\ x=a\,\mathrm{tg}\,t.$$

Příklad 29

$$\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\mathrm{d}x=\int\frac{x\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{c}1-x^2=t^2\\ -2x\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t\end{array}\right|$$
$$=\int\frac{-t}{1-t^2}t\mathrm{d}t=\int\frac{t^2}{t^2-1}\mathrm{d}t=\int 1+\frac{1/2}{t-1}-\frac{1/2}{t+1}\mathrm{d}t$$
$$=t+\frac{1}{2}\ln|t-1|-\frac{1}{2}\ln|t+1|+c=\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1}\right|+c$$

Příklad 30

$$\int\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{c}x=\mathrm{tg}\,t\\ \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}\end{array}\right|=\int\sqrt{1+tg^2 t}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$$
$$=\int\sqrt{\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\cos^2 t}}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}=\int\frac{\mathrm{d}t}{\cos^3 t}=\left|\begin{array}{c}\sin t=u\\ \cos t\mathrm{d}t=\mathrm{d}u\end{array}\right|$$
$$=\int\frac{\mathrm{d}u}{(1-u^2)^2}=\cdots$$

Předchozí příklad lze vyřešit i takto.

Příklad 31

$$I=\int\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}+\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$
$$=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\int\frac{x\cdot x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{cc}u=x & u'=1\\ v'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} & v=\sqrt{1+x^2}\end{array}\right|$$
$$=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x\sqrt{1+x^2}-I$$
$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\left[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x\sqrt{1+x^2}\right]+c$$

Binomický integrál $\boxed{\int x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x}$, $m,n,p\in\mathbb{Q}$

lze převést na integrál z RLF takto

(i) $p\in\mathbb{Z} \quad\Rightarrow\quad x=t^s, s=$ nejmenší spol. násobek jmenovatelů m,n,

(ii) $\frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z} \quad\Rightarrow\quad a+bx^n=t^s$, $s=$ jmenovatel p,

(iii) $\frac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z} \quad\Rightarrow\quad ax^{-n}+b=t^s$, $s=$ jmenovatel p.

Poznámka

Samozřejmě pokud je $p\in\mathbb{N}$, stačí integrand roznásobit.

Příklad 32

$$\int\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\mathrm{d}x=\left|\, m=\tfrac12, n=\tfrac13, p=-2\Rightarrow x=t^6, \mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t\,\right|$$
$$=6\int\frac{t^3}{(1+t^2)^2}t^5\mathrm{d}t=6\int\frac{t^8}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t=\cdots|\text{parc. zlomky}|$$

Příklad 33

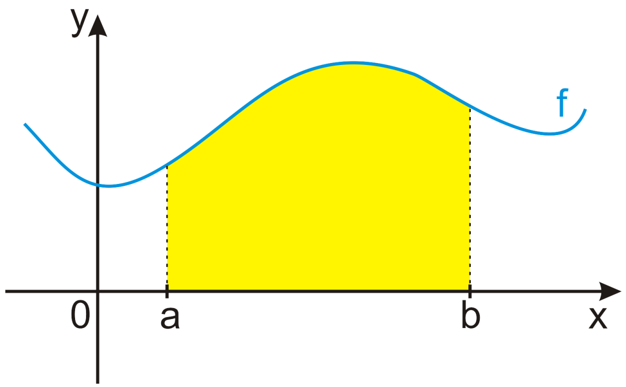
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\left|\begin{matrix} m=0, n=4, p=-\frac14 \\ x^{-4}+1=t^4, x^4=\frac{1}{t^4-1}, x=\frac{1}{\sqrt[4]{t^4-1}}, \mathrm{d}x=\frac{-4t^3}{4\sqrt[4]{(t^4-1)^5}}\mathrm{d}t\end{matrix}\right|$$
$$=\int\left[\frac{t}{(t^4-1)^{1/4}}\right]^{-1}\frac{-t^3}{(t^4-1)^{5/4}}\mathrm{d}t=-\int\frac{t^2}{t^4-1}\mathrm{d}t=\cdots$$

Poznámka (Nevypočitatelné integrály)

Některé primitivní funkce k elementárním funkcím nemusí být funkce elementární, ale tzv. *vyšší transcendentní funkce*. Jsou to např.

- integrálsinus $\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x, x\in\mathbb{R}$, kde integrand v nule je dodefinován jako jednička;
- logaritmusintegrál $\int\ln^{-1}x, x\in(0,1), x\in(1,\infty)$;
- exponenciální integrál $\int\frac{e^x}{x}\mathrm{d}x, x\in(-\infty,0), x\in(0,\infty)$;
- chybová funkce $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-x^2}\mathrm{d}x, x\in\mathbb{R}$;
- Fresnelovy integrály $\int\cos x^2\mathrm{d}x, \int\sin x^2\mathrm{d}x, x\in\mathbb{R}$;
- $\int R(x,\sqrt{P(x)})\mathrm{d}x$, kde P je polynom 3. nebo 4. stupně bez násobných kořenů (eliptické integrály).

Naším cílem nyní bude výpočet plochy podgrafu dané (nezáporné) funkce f.



Podgraf $= \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [a, b], 0 \le y \le f(x)\}$.

Definice 4 (Dělení intervalu)

Uvažujme uzavřený interval $I = [a, b], -\infty < a < b < \infty$.

Dělením intervalu I rozumíme konečnou posloupnost $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ bodů z intervalu I takových, že

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

čísla $x_0, x_1, \dots, x_n$ nazýváme *dělicí body*.

Normou $\nu(D)$ dělení D rozumíme maximální vzdálenost sousedních dělicích bodů, tedy

$$\nu(D) = \max\{x_i - x_{i-1}, i = 1, \dots, n\}.$$

Definice 5

Jsou-li D_1, D_2 dělení intervalu $[a, b]$ a platí $D_1 \subseteq D_2$ (tj. každý dělicí bod D_1 je i dělicím bodem D_2), řekneme, že D_2 je *zjemněním* D_1.

Dělení $D_1 \cup D_2$ se nazývá *nejmenší společné zjemnění* dělení D_1 a D_2.

Poznámka

V průběhu konstrukce Riemannova integrálu předpokládáme, že funkce f je ohraničená na intervalu $[a, b]$.

Nechť $D = \{x_0, \dots, x_n\}$je dělení intervalu $[a, b]$. Označme

$$m_i = \inf\{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \; i = 1, \dots, n,$$
$$M_i = \sup\{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \; i = 1, \dots, n.$$

Čísla m_i, M_i jsou dobře definována vzhledem k předpokladu ohraničenosti funkce f. Potom

$$s(D, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

nazýváme *dolní součet* příslušný dělení D a podobně

$$S(D, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

nazýváme *horní součet* příslušný dělení D.
Je zřejmé, že

$$D_1 \subseteq D_2 \;\Rightarrow\; s(D_1, f) \le s(D_2, f), \; S(D_1, f) \ge S(D_2, f).$$

Z předpokladu ohraničenosti funkce f na intervalu $[a, b]$ plyne existence $c, d \in \mathbb{R}$ takových, že

$$\forall x \in [a, b]: \; c \le f(x) \le d \Rightarrow \; c \le m_i, \; M_i \le d, \; i = 1, \dots, n$$
$$\Rightarrow \; c(b-a) \le s(D, f) \le S(D, f) \le d(b-a).$$

Navíc jsou-li D_1, D_2 libovolná dělení intervalu $[a, b]$, pak

$$s(D_1, f) \le S(D_2, f).$$

Tato nerovnost plyne z faktu, že

$$s(D_1, f) \le s(D_1 \cup D_2, f) \le S(D_1 \cup D_2, f) \le S(D_2, f).$$

Odtud plyne, že množina všech dolních součtů je shora ohraničená (např. číslem $d(b-a)$) a množina všech horních součtů je zdola ohraničená (např. číslem $c(b-a)$) a množiny obou součtů jsou neprázdné.

Definice 6

Symbolem $\mathcal{D}$ budeme rozumět množinu všech dělení intervalu $[a, b]$. Chceme-li zdůraznit, že se jedná o dělení intervalu $[a, b]$, píšeme $\mathcal{D}([a, b])$.

Označíme suprémum množiny všech dolních součtů jako

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\mathrm{d}x := \sup\{s(D, f), D \in \mathcal{D}\}.$$

Toto číslo se nazývá *dolní Riemannův integrál* funkce f na intervalu $[a, b]$. Podobně

$$\int_{a}^{\overline{b}} f(x)\mathrm{d}x := \inf\{S(D, f), D \in \mathcal{D}\}$$

je *horní Riemannův integrál* funkce f na intervalu $[a, b]$.

Definice 7

Jestliže platí

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\mathrm{d}x,$$

řekneme, že funkce f je *(Riemannovsky) integrovatelná* na intervalu $[a, b]$ a definujeme

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x := \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\mathrm{d}x.$$

Příklad 34

Uvažujme funkci $f(x) = \chi(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ na intervalu $[a, b] = [0, 1]$.

Je-li D libovolné dělení intervalu $[0, 1]$, $D = \{x_0, \dots, x_n\}$, pak

$$m_i = \inf\{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 0, \quad M_i = \sup\{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 1,$$

kde $i = 1, \dots, n$, tedy

$$s(D, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = 0, \quad S(D, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = 1.$$

Odtud

$$\underline{\int_0^1} \chi(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \overline{\int_0^1} \chi(x)\mathrm{d}x = 1,$$

tedy funkce f není integrovatelná na intervalu $[0, 1]$.

Věta 8

Nechť funkce f je ohraničená na intervalu $[a, b]$ a $\varepsilon > 0$ je libovolné. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D, pro něž $\nu(D) < \delta$ platí

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x - \varepsilon < s(D, f) \le \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$$

a

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x + \varepsilon > S(D, f) \ge \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x.$$

Poznámka

Pro přehlednost zápisů označme symbolem $d(I)$ délku intervalu I, tj. pro $I = [a, b], b \ge a$, je $d(I) = b - a$.

Důkaz.

Tvrzení dokážeme pro horní součty (pro dolní se dokáží analogicky).

Nerovnost $S(D, f) \ge \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$ plyne z definice horního Riemannova integrálu.

Nechť $\varepsilon > 0$. Z definice horního Riemannova integrálu plyne, že existuje dělení D_1 takové, že

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} > S(D_1, f).$$

Podle předpokladu ohraničenosti funkce f na intervalu $[a, b]$

$$\exists K > 0 \colon |f(x)| \le K \ \forall x \in [a, b].$$

Dále nechť $\{z_0, \dots, z_p\}$ jsou dělicí body dělení D_1 a nechť $\delta = \frac{\varepsilon}{K \cdot p \cdot 4}$.

Ukážeme, že toto δ má vlastnost požadovanou v tvrzení věty.

Nechť D je libovolné dělení intervalu $[a, b]$, pro něž $\nu(D) < \delta$. Označme $D_2 = D \cup D_1$, pak

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} > S(D_1, f) \ge S(D_2, f).$$

Přitom máme $S(D, f) \ge S(D_2, f)$. K důkazu nerovnosti uvedené ve větě tedy stačí dokázat, že $S(D, f) - S(D_2, f) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Nechť $\{I_1, \dots, I_n\}$ je množina všech intervalů dělení D takových, že v intervalu I_k neleží žádný z bodů dělení D_1, a nechť $\{J_1, \dots, J_m\}$ je množina zbývajících dělicích intervalů dělení D.

Protože uvnitř každého intervalu J_i leží některý z bodů $z_1, \dots, z_{p-1}$, je $m \le p - 1$. Protože naopak uvnitř žádného intervalu I_i takový bod neleží, je každý z intervalů $I_1, \dots, I_n$ také dělicím intervalem dělení D_2.

Označme zbývající dělicí intervaly dělení D_2 jako $\{J'_1, \dots, J'_s\}$ a

$$M_k := \sup\{f(x)\colon\ x \in I_k\} \text{ pro } k = 1, \dots, n,$$
$$N_i := \sup\{f(x)\colon\ x \in J_i\} \text{ pro } i = 1, \dots, m,$$
$$N'_t := \sup\{f(x)\colon\ x \in J'_t\} \text{ pro } t = 1, \dots, s.$$

Vzhledem k ohraničenosti funkce f jsou všechna tato čísla v intervalu $[-K, K]$.

Můžeme tedy počítat

$$S(D, f) - S(D_2, f) = \sum_{k=1}^{n} M_k\, d(I_k) + \sum_{i=1}^{m} N_i\, d(J_i) - \\ - \left(\sum_{k=1}^{n} M_k\, d(I_k) + \sum_{t=1}^{s} N'_t\, d(J'_t)\right) \le \\ \le \sum_{i=1}^{m} |N_i| d(J_i) + \sum_{t=1}^{s} |N'_t| d(J'_t) \le K \left(\sum_{i=1}^{m} d(J_i) + \sum_{t=1}^{s} d(J'_t)\right).$$

Protože $\sum_{t=1}^{s} d(J'_t)$ je součet délek všech dělicích intervalů dělení D_2 různých od intervalů $I_1, \dots, I_n$, platí

$$\sum_{t=1}^{s} d(J'_t) = \sum_{i=1}^{m} d(J_i).$$

Dále

$$\sum_{t=1}^{s} d(J'_t) = \sum_{i=1}^{m} d(J_i) \le m\,\nu(D) < p\,\nu(D) < p\,\delta.$$

Proto

$$S(D, f) - S(D_2, f) < 2Kp\delta = \frac{\varepsilon}{2},$$

čímž je požadovaná nerovnost a tím i celé tvrzení dokázáno. □

Definice 8

Řekneme, že posloupnost D_n dělení intervalu $[a, b]$ je *nulová*, pokud

$$\lim_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0.$$

Pro rovnoměrné (ekvidistantní) rozdělení to znamená

$$\nu(D_n) = \frac{b-a}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Věta 9

Nechť D_n je libovolná nulová posloupnost dělení intervalu $[a, b]$. Pak platí

$$\lim_{n\to\infty} s(D_n, f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \lim_{n\to\infty} S(D_n, f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz.

Dokážeme druhý vztah (první se dokazuje analogicky).

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Potřebujeme najít $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \geq n_0$ je

$$\left| S(D_n, f) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| < \varepsilon.$$

Podle předchozí věty k ε existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D splňující $\nu(D) < \delta$ platí $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq S(D, f) < \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \varepsilon$. Protože $\nu(D) \to 0$, k danému δ existuje n_0 takové, že $\forall n \geq n_0$ je

$$\nu(D_n) < \delta \Rightarrow \forall n \geq n_0 : \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq S(D_n, f) < \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \varepsilon,$$

odtud plyne, že $|S(D_n, f) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x| < \varepsilon$. □

Příklad 35

Pomocí Věty 9 rozhodněte, zda je funkce $f(x) = x$ integrovatelná na intervalu $[0, 1]$.

Nechť $D_n = \{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\}$. Potom $m_i = x_{i-1} = \frac{i-1}{n}$, $M_i = \frac{i}{n}$, $i = 1, \dots, n$, tedy

$$s(D_n, x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1) = \frac{n(n-1)}{2n^2},$$

$$S(D_n, x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2n^2}.$$

Odtud

$$\lim_{n\to\infty} s(D_n, x) = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{n\to\infty} S(D_n, x) = \frac{1}{2}.$$

Proto $\int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

Věta 10

Nechť funkce f je ohraničená na intervalu $[a, b]$. Pak je f integrovatelná na $[a, b]$ právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje dělení D intervalu $[a, b]$ tak, že platí

$$S(D, f) - s(D, f) < \varepsilon.$$

Důkaz (⇒).

Předpokládejme, že $\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$. Podle věty 8 k danému $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ $\exists \delta > 0$ takové, že $s(D, f) \in \left(\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2}, \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \right]$ a $S(D, f) \in \left[\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x, \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \right)$ pro každé dělení D, pro něž $\nu(D) < \delta$. Nechť D je libovolné dělení, pro které $\nu(D) < \delta$, pak

$$s(d, f), S(D, f) \in \left(\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2}, \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

$$\Rightarrow S(D, f) - s(D, f) < \varepsilon.$$

Důkaz ($\Leftarrow$).

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Podle předpoklad existuje dělení D s vlastností $S(D,f) - s(D,f) < \varepsilon$. Protože ale $\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \le S(D,f)$ a $\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \ge s(D,f)$, máme $\underbrace{\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x}_{\ge 0} < \varepsilon$. Jelikož ε bylo libovolné, platí $\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$. □

Věta 11

Nechť funkce f je ohraničená a monotónní na intervalu $[a,b]$. Pak je f integrovatelná na $[a,b]$.

Důkaz.

Předpokládejme, že f je neklesající (pro nerostoucí je důkaz obdobný).

Je-li $f(b) = f(a)$, pak je f konstantní na $[a,b]$ a tedy integrovatelná, neboť $s(D,f) = S(D,f)\ \forall D \in \mathcal{D}$.

Nechť $f(b) - f(a) > 0$ a nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Uvažujme $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$.

Nechť D je libovolné dělení s $\nu(D) < \delta$, pak

$$\begin{aligned}
&S(D,f) - s(D,f) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})]\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{<\delta} < \delta \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\
&= \delta\,[f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \cdots + f(x_n) - f(x_{n-1})] \\
&= \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}[f(b) - f(a)] = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tedy funkce f je (podle věty 10) integrovatelná. □

Věta 12

Nechť je funkce f spojitá na intervalu $[a,b]$, pak je na tomto intervalu integrovatelná.

Poznámka

- Předpoklad ohraničenosti funkce je schován ve spojitosti uvažované funkce a plyne z 1. Weierstrassovy věty.
- Podle Heineho–Cantorovy věty je funkce f spojitá stejnoměrně[a]. (Spojitá funkce z kompaktního metrického prostoru do metrického prostoru je stejnoměrně spojitá.)

[a] $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ |x_1 - x_2| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

Důkaz.

Nechť $\varepsilon > 0$ libovolné. Ze stejnoměrné spojitosti f dostáváme, že k číslu $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$ existuje $\delta > 0$ s vlastností $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ platí

$$|x_1 - x_2| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Nechť D je dělení s $\nu(D) < \delta$, pak

$$\begin{aligned} S(D,f) - s(D,f) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} [f(t_i) - f(s_i)](x_i - x_{i-1}), \end{aligned}$$

kde $t_i, s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ taková, že $f(t_i) = M_i, f(s_i) = m_i$ (existence t_i, s_i plyne z 2. Weierstrassovy věty).

Protože $|t_i - s_i| < \delta$, je $f(t_i) - f(s_i) < \frac{\varepsilon}{b-a}$, a dostaneme

$$\begin{aligned} S(D,f) - s(D,f) &= \sum_{i=1}^{n} [f(t_i) - f(s_i)](x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \\ &= \Big|\ \text{součet dílků dá délku intervalu}\ \Big| = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Definice 9

Řekneme, že množina $M \subseteq \mathbb{R}$ má *Jordanovu míru* rovnu nule, jestliže $\forall \varepsilon > 0$ existuje systém po dvou disjunktních otevřených intervalů $J_i, i = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N}$, s vlastností

$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} J_i \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^{n} d(J_i) < \varepsilon,$$

kde $d(J_i)$ značí délku intervalu J_i.

Poznámka

Konečná množina bodů má nulovou míru.

Lemma 1

Nechť $M = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ je množina bodů konvergentní posloupnosti reálných čísel, tj. $x_n \to x_0 \in \mathbb{R}$. Pak M má míru nula.

Např. množina $M = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ má míru nula.

Důkaz.

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné, z definice $\lim x_n = x_0$ plyne, že k číslu $\frac{\varepsilon}{4}$ existuje n_0 takové, že

$$\forall n > n_0 : |x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Nechť $J_0 = (x_0 - \frac{\varepsilon}{4}, x_0 + \frac{\varepsilon}{4})$. Vně tohoto intervalu leží nejvýše n_0 členů posloupnosti $\{x_n\}$, a to $x_1, \dots, x_{n_0}$. Kolem těchto zbývajících bodů sestrojíme otevřená okolí s délkou menší než $\frac{\varepsilon}{4n_0}$, označíme je $J_1, \dots, J_{n_0}$. Pokud již některý z bodů x_i ležel v intervalu J_0, tak položíme $J_i = \emptyset$. Dále označme $I = \left\{i \in \{1, \dots, n_0\} : J_i \neq \emptyset\right\}$ (množina všech indexů neprázdných intervalů $J_i, i = 1, \dots, n_0$). Celkově tedy množinu M lze pokrýt po dvou disjunktními intervaly $J_0, J_i, i \in I$ takovými, že

$$d(J_0) + \sum_{i \in I} d(J_i) \leq \frac{\varepsilon}{2} + n_0 \frac{\varepsilon}{4n_0} < \varepsilon.$$

□

Věta 13

Nechť funkce f je na intervalu $[a, b]$ ohraničená a množina jejích bodů nespojitosti na tomto intervalu má míru nula. Pak je funkce f na intervalu $[a, b]$ integrovatelná.

Důkaz.

Důkaz je opět založen na větě 10 (detaily viz skripta). Body nespojitosti pokryjeme intervaly $J_1, \cdots, J_{n_0}$ (pro $n_0 \in \mathbb{N}$ bodů nespojitosti). Tyto intervaly lze zvolit libovolně malé, tedy součet jejich délek bude libovolně malý. Protože funkce f je ohraničená ($\exists K \in \mathbb{R}^+ : |f| < K$), tedy příspěvek těchto intervalů do rozdílu $S(D, f) - s(D, f)$ bude libovolně malý. Na zbylých částech intervalu $[a, b]$ je funkce spojitá a lze zde tedy provést konstrukci z důkazu věty 12 (spolu s intervaly J_i tak získáme dělení D) a jejich příspěvky zmenšit pod $\frac{\varepsilon}{2}$.

$S(D, f) - s(D, f) =$

$=$ pěkné příspěvky (spojité intervaly) + škaredé příspěvky (intervaly J_i)

$= \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{n_0} \underbrace{(M_i - m_i)}_{<2K} \underbrace{d(J_i)}_{<\frac{\varepsilon}{4Kn_0}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$ □

Věta 14

Nechť f, g jsou ohraničené funkce na intervalu $[a, b]$ a množina bodů intervalu $[a, b]$, kde $f(x) \neq g(x)$ má míru nula.
Pak je funkce f integrovatelná na intervalu $[a, b]$, právě tehdy, když je funkce g je integrovatelná na intervalu $[a, b]$ a platí

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Tedy hodnota integrálu z ohraničené funkce se nemění, pokud tuto funkci změníme na množině míry nula.

Důkaz.

Je podobného typu jako u věty 13, tzn. „škaredé“ intervaly nepokazí integrovatelnost funkce. □

Věta 15

Nechť f, g jsou integrovatelné na intervalu $[a, b]$. Pak na tomto intervalu jsou integrovatelné i funkce

$$f \pm g, \quad f \cdot g, \quad |f|, \quad |g|$$

a jestliže existuje $c > 0$ takové, že $|g(x)| \geq c$ pro $x \in [a, b]$, pak je na $[a, b]$ integrovatelná i funkce

$$\frac{f}{g}.$$

Důkaz.

Ukážeme integrovatelnost $f + g$. Nechť $D = \{x_0, \dots, x_n\}$ je libovolné dělení intervalu $[a, b]$ a

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \qquad M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),$$

$$n_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} g(x), \qquad N_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} g(x),$$

$$p_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} (f(x)+g(x)), \qquad P_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} (f(x)+g(x)).$$

Pak pro $i = 1, \dots, n$ platí

$$m_i + n_i \leq p_i \leq P_i \leq M_i + N_i.$$

Odtud

$$\sum_{i=1}^n (m_i + n_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n p_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n P_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n (M_i + N_i)(x_i - x_{i-1}),$$

$$s(D,f) + s(D,g) \leq s(D,f+g) \leq S(D,f+g) \leq S(D,f) + S(D,g),$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x + \underline{\int_a^b} g(x)\mathrm{d}x \leq \underline{\int_a^b} (f(x)+g(x))\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} (f(x)+g(x))\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x + \overline{\int_a^b} g(x)\mathrm{d}x,$$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (f(x)+g(x))\mathrm{d}x.$ □

Věta 16

Nechť funkce f je integrovatelná na intervalu $[a, b]$ a nechť $[c, d] \subseteq [a, b]$. Pak je funkce f integrovatelná i na intervalu $[c, d]$.

Důkaz.

Nechť je funkce f integrovatelná na intervalu $[a, b]$. Pak existuje dělení D splňující $S(D, f) - s(D, f) < \varepsilon$ (věta 10). Pokud čísla c, d nepatří do dělení D, přidáme je tam a výsledné dělení zúžíme na interval $[c, d]$. Tím vytvoříme dělení intervalu $[c, d]$

$$D_{cd} := \{D \cup \{c, d\}\} \cap [c, d],$$

které splňuje

$$S(D_{cd}, f) - s(D_{cd}, f) < S(D, f) - s(D, f) < \varepsilon.$$

Podle věty 10 je tedy funkce f integrovatelná na intervalu $[c, d]$. □

Věta 17

Nechť funkce f je integrovatelná na intervalu $[a, b]$ a c je libovolné číslo z intervalu (a, b). Pak funkce f je integrovatelná na každém z intervalů $[a, c], [c, b]$ a platí

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Důkaz.

Přímo z definice. □

Věta 18

Nechť f, g jsou funkce integrovatelné na intervalu $[a, b]$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pak je na intervalu $[a, b]$ integrovatelná i funkce $\alpha f + \beta g$ a platí

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Důkaz.

Přímo z definice (viz důkaz věty 15). □

Věta 19

Nechť f, g jsou funkce integrovatelné na intervalu $[a, b]$ a nechť platí $f(x) \le g(x)$ pro $x \in [a, b]$.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Důkaz.

Přímo z konstrukce integrálních součtů. □

Věta 20

Nechť f je funkce integrovatelná na intervalu $[a,b]$. Pak je zde integrovatelná i funkce $|f|$ a platí

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Důkaz.

Viz skripta. □

Věta 21 (1. věta o střední hodnotě integrálního počtu)

Nechť funkce f, g jsou integrovatelné na intervalu $[a,b]$, $g(x)$ je nezáporná na $[a,b]$ (tj. $g(x) \geq 0, x \in [a,b]$) a označme

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x), \qquad M = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Pak existuje číslo $\mu \in [m,M]$ takové, že

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \mu \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Zejména pokud je funkce f spojitá na $[a,b]$, existuje číslo $c \in [a,b]$ s vlastností, že

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(c) \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Důkaz.

Ze značení věty plyne $m \leq f(x) \leq M$ pro $x \in [a,b]$. Protože $g(x) \geq 0$, platí $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x), x \in [a,b]$. Použitím vět 18 a 19 obdržíme

$$m \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq M \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Je-li $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$, potom $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$ a tvrzení věty platí pro libovolné $\mu \in \mathbb{R}$.

Je-li $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x > 0$, potom $m \leq \underbrace{\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}}_{:=\mu} \leq M.$

Tedy $m \leq \mu \leq M$ a $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \mu \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.
Je-li $f(x)$ spojitá, pak podle 2. Bolzanovy věty existuje $c \in [a,b] : f(c) = \mu$. □

Důsledek

Položíme-li ve větě 21 funkci $g(x) \equiv 1$, pak

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mu(b-a),$$

kde

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) \leq \mu \leq \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Poznámka

- Číslo $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ nazýváme *střední hodnota* funkce f na intervalu $[a,b]$.
- Dle předchozího důsledku a 2. Bolzanovy věty nabývá každá spojitá funkce f na intervalu $[a,b]$ své střední hodnoty.

Uvažujme funkci f integrovatelnou na intervalu $[a, b]$. Funkce f je (podle věty 16) integrovatelná i na libovolném intervalu typu $[a, x], a < x \leq b$. Je tedy smysluplné definovat funkci $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, x \in (a, b]$. Dodefinujeme-li navíc $F(a) = \int_a^a f(t)\mathrm{d}t := 0$, rozšíříme tak definici na interval $[a, b]$. Funkci F nazýváme *funkce horní meze*.

Poznámka

Je samozřejmě možné podobně definovat i funkci dolní meze $G(x) = \int_x^b f(t)\mathrm{d}t$, ale vzhledem k přepisu

$$G(x) = \int_x^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = K - F(x),$$

kde $K \in \mathbb{R}$ a F je funkce horní meze, je zřejmé, že vlastnosti jsou obdobné.

Věta 22

Nechť funkce f je integrovatelná na intervalu $[a, b]$ a $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. Pak F je spojitá na intervalu $[a, b]$.

Důkaz.

Z integrovatelnosti f na $[a, b]$ plyne existence $K \geq 0$ takového, že $|f(x)| \leq K$ pro $x \in [a, b]$. Nechť $x_0 \in [a, b)$ je libovolné. Pak pro $x \in \mathcal{O}^+(x_0)$ platí

$$0 \leq \lim_{x \to x_0} |F(x) - F(x_0)| = \lim_{x \to x_0} \left| \int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t \right|$$
$$= \lim_{x \to x_0} \left| \int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t \right| \leq \lim_{x \to x_0} \int_{x_0}^x |f(t)|\mathrm{d}t \leq \lim_{x \to x_0} K(x - x_0) = 0.$$

Odtud $\lim_{x \to x_0} |F(x) - F(x_0)| = 0$, tedy funkce $F(x)$ je v x_0 spojitá zprava. Spojitost zleva podobně. □

Věta 23

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. Pak funkce F má na intervalu (a, b) derivaci a platí $F'(x) = f(x)$, tj. F je primitivní k f na (a, b).

Důkaz.

Nechť $x_0 \in (a, b)$ je libovolné a nechť $x > x_0$ (pro $x < x_0$ postupujeme analogicky). Označme

$$m(x) = \inf_{t \in (x_0, x)} f(t), \quad M(x) = \sup_{t \in (x_0, x)} f(t).$$

Protože f je spojitá na $[x_0, x]$, podle 2. Weierstrassovy věty existují $t_1, t_2 \in [x_0, x]$ takové, že $f(t_1) = m(x), f(t_2) = M(x)$.
Jestliže $x \to x_0$, pak $t_1, t_2 \to x_0$ a tedy

$$\lim_{x \to x_0} m(x) = \lim_{t_1 \to x_0} f(t_1) = |f \text{ spojitá funkce}| = f(x_0)$$

a podobně

$$\lim_{x \to x_0} M(x) = \lim_{t_2 \to x_0} f(t_2) = f(x_0).$$

Pro derivaci zprava tedy platí

$$\begin{aligned} F'_+(x_0) &= \lim_{x \to x_0^+} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t}{x - x_0} = \Big| \text{dle věty 21} \Big| \\ &= \lim_{x \to x_0^+} \frac{\mu(x)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \mu(x) \\ &= \Big| m(x) \le \mu(x) \le M(x) \Big| = f(x_0), \end{aligned}$$

podobně pro derivaci zleva $F'_-(x_0) = f(x_0)$ a tedy $F'(x_0) = f(x_0)$. $\square$

Poznámka

Věta 23 je důkazem tvrzení, že ke spojité funkci existuje primitivní funkce (věta 4). Jednou z těchto primitivních funkcí je $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

Poznámka

Je-li $G(x) = \int_x^b f(t)\mathrm{d}t$, pak pro spojitou funkci f je $G'(x) = -f(x)$, neboť

$$G'(x) = \left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \right]' = 0 - f(x) = -f(x).$$

Věta 24 (2. věta o střední hodnotě integrálního počtu)

Nechť funkce f je na intervalu $[a, b]$ integrovatelná a funkce g je na tomto intervalu monotónní. Pak existuje číslo $c \in [a, b]$ s vlastností

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a) \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + g(b) \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Důkaz.

Předpokládejme, že g je neklesající (pro nerostoucí podobně). Naznačíme důkaz za silnějšího předpokladu, že funkce g má na intervalu $[a,b]$ derivaci a pro zjednodušení využijeme obsahu následující sekce (zvláště metodu per partes pro určitý integrál). Pro důkaz v plné obecnosti viz skripta.

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = g(x) & u' = g'(x) \\ v' = f(x) & v = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \end{vmatrix}$$
$$= \left[g(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]_a^b - \int_a^b g'(x)\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x.$$

Pomocí 1. věty o střední hodnotě integrálního počtu lze psát pro $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

$$\int_a^b g'(x)F(x)\mathrm{d}x = F(c)\int_a^b g'(x)\mathrm{d}x = [g(b) - g(a)]\int_a^c f(t)\mathrm{d}t,$$

kde $c \in [a,b]$.

Tedy

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b)\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - [g(b) - g(a)]\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$$
$$= g(a)\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

□

Definice 10

Nechť $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ je dělení intervalu $[a,b]$ a $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Pak $K = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ se nazývá *výběr reprezentantů dělení D* a součet

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) =: \mathcal{S}(D,f,K)$$

se nazývá *integrální součet funkce f* příslušný dělení D a výběru reprezentantů K.

Poznámka

Pro každý výběr reprezentantů K a každé dělení D platí

$$s(D,f) \le \mathcal{S}(D,f,K) \le S(D,f).$$

Věta 25

Nechť funkce f je integrovatelná na intervalu $[a,b]$ a D_n je libovolná nulová posloupnost dělení tohoto intervalu. Pak pro každý výběr reprezentantů K_n dělení D_n platí

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{S}(D_n,f,K_n) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Důkaz.

Plyne přímo z nerovnosti

$$\underbrace{s(D_n,f)}_{\to\int_a^b f(x)\mathrm{d}x} \le \mathcal{S}(D_n,f,K_n) \le \underbrace{S(D_n,f)}_{\to\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}.$$

□

Věta 26 (Newtonův-Leibnitzův vzorec)

Nechť funkce f je integrovatelná na intervalu $[a,b]$, funkce F je spojitá na $[a,b]$ a na (a,b) je primitivní funkcí k f, tj. $F' = f$ na (a,b). Pak platí

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Důkaz.

Nechť $D = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ je libovolné dělení intervalu $[a,b]$, pak platí

$$\sum_{i=1}^{n}[F(x_i) - F(x_{i-1})] =$$
$$= F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + \dots + F(x_n) - F(x_{n-1})$$
$$= F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a).$$

Současně podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),\ \xi \in (x_{i-1}, x_i), F'(\xi_i) = f(\xi_i).$$

Tedy pro libovolné dělení D máme

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \mathcal{S}(D, f, K),$$

kde $K = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$.

Nechť D_n je nulová posloupnost dělení intervalu $[a,b]$ a K_n je příslušející výběr reprezentantů, který dostaneme aplikací Lagrangeovy věty na každý dílek dělení D_n, pak

$$F(b) - F(a) = \mathcal{S}(D_n, f, K_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

□

Věta 27 (Metoda per partes pro Riemannův integrál)

Nechť funkce u, v jsou spojité na intervalu $[a,b]$ a jejich derivace u', v' jsou integrovatelné na tomto intervalu. Pak platí

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x,$$

kde $[u(x)v(x)]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

Důkaz.

$(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow uv$ je primitivní funkcí k $u'v + uv'$, tedy

$$\int_a^b [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)]\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b.$$

□

Věta 28 (Substituční metoda pro Riemannův integrál)

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[\alpha, \beta]$ a nechť funkce φ má derivaci na intervalu $[a, b]$ a tato derivace φ' je na $[a, b]$ integrovatelná. Nechť dále $\varphi([a, b]) \subseteq [\alpha, \beta]$. Pak platí

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\mathrm{d}t.$$

Důkaz.

Protože f je spojitá na $[\alpha, \beta]$ a φ' integrovatelná na $[a, b]$, je funkce $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ integrovatelná na $[a, b]$. Uvažujme funkci

$$F(x) := \int_\alpha^x f(t)\mathrm{d}t, \quad x \in [\alpha, \beta],$$

která je (věta 23) primitivní k funkci f na $[\alpha, \beta]$. Dále funkce $F(\varphi(x))$ je primitivní k funkci $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ na $[a, b]$ (dle věty o derivaci složené funkce). Tedy

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &= \int_\alpha^{\varphi(b)} f(t)\mathrm{d}t - \int_\alpha^{\varphi(a)} f(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

$\square$

Poznámka

Při substituční metodě pro Riemannův (určitý) integrál se musí transformovat i meze.

Příklad 36

$$\int_{-2}^5 x^2\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = \frac{133}{3}.$$

Příklad 37

$$\int_1^3 x\ln x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u=\ln x & u'=\frac{1}{x} \\ v'=x & v=\frac{x^2}{2}\end{vmatrix} = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^3 - \int_1^3 \frac{1}{x}\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{9}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 1\right) - \frac{1}{2}\int_1^3 x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{9}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}\ln 3 - 2$$

Příklad 38

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x \begin{vmatrix} u=\operatorname{arctg} x & u'=\frac{1}{1+x^2} \\ v'=1 & v=x\end{vmatrix}$$

$$= [x\operatorname{arctg} x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}[\ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

Příklad 39

$$\int_1^2 x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} 1+x^2=t^2 & x=2\Rightarrow t=\sqrt{5} \\ x\mathrm{d}x = t\mathrm{d}t & x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}\end{vmatrix}$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} t^2\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3}.$$

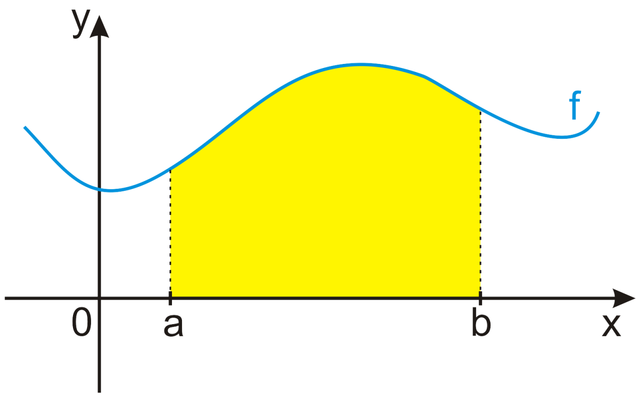
Příklad 40

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} x=\sin t & x=1\Rightarrow t=\pi/2 \\ \mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t & x=0\Rightarrow t=0\end{vmatrix}$$

$$= \int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t+\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

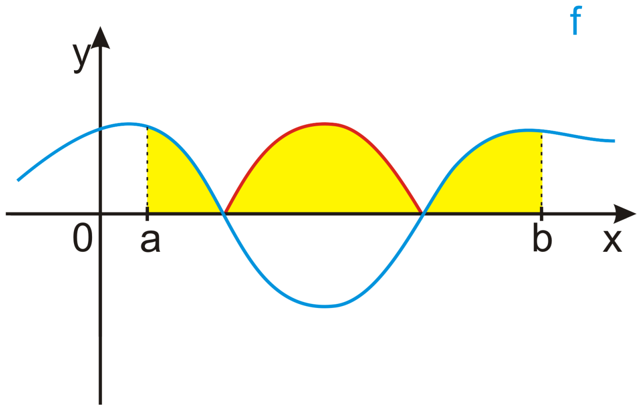
Plocha podgrafu kladné funkce na intervalu $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$



Plocha mezi grafem funkce f a osou x na intervalu $[a, b]$:

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

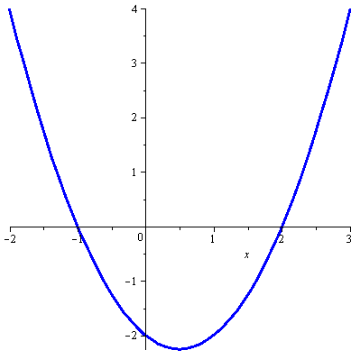


Příklad 41

Určete plochu ohraničenou grafem funkce $f(x) = x^2 - x - 2$ a osou x na intervalu $I = [-2, 3]$.

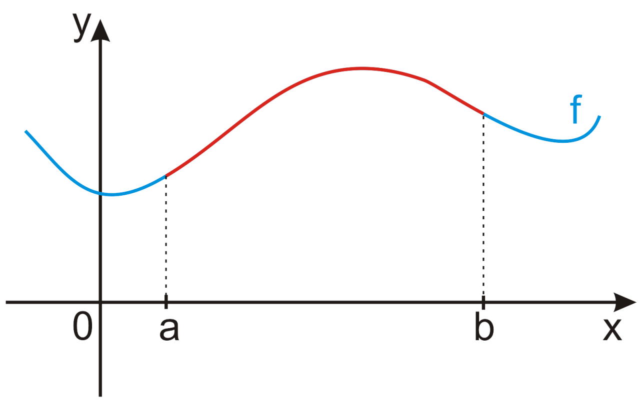
Protože $x^2 - x - 2 = 0$ má kořeny $x_1 = -1$ a $x_2 = 2$, snadno zjistíme, že funkce f je na intervalu I kladná pro $x \in (-2, -1) \cup (2, 3)$ a záporná pro $x \in (-1, 2)$.

$$\begin{aligned} P &= \int_{-2}^{3} |f(x)|\mathrm{d}x \\ &= \int_{-2}^{-1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{2} (-f(x))\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{2}^{3} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \ldots = \frac{49}{6} \end{aligned}$$

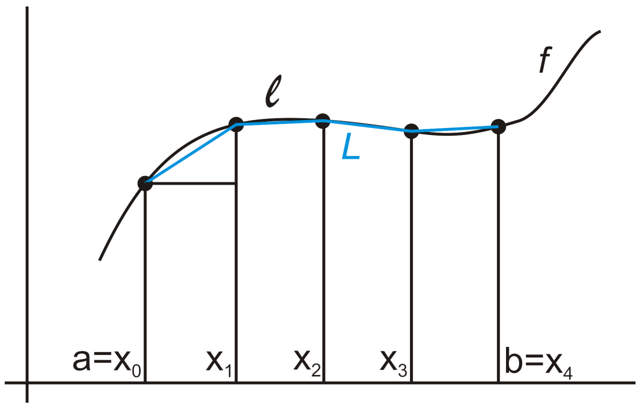


Délka křivky grafu funkce f na intervalu $[a, b]$.

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\mathrm{d}x.$$



Délka křivky – odvození



Křivku ℓ nahradíme lomenou čarou L, která vznikla dělením intervalu $[a, b]$. Předpokládejme, že f je na $[a, b]$ diferencovatelná a že funkce $\sqrt{1 + f'^2}$ je na něm integrovatelná.

Pak délka lomené čáry je

$$d(L) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f(x_i) - f(x_{i-1})]^2 + (x_i - x_{i-1})^2}.$$

Dle Lagrangeovy věty o střední hodnotě existují $\xi_i \in (x_{i-1}, x_1)$, $i = 1, \dots, n$ taková, že $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, $i = 1, \dots, n$. Tedy

$$d(L) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\,(x_i - x_{i-1}) = \mathcal{S}(D, \sqrt{1 + f'^2}, K).$$

Výše uvedené platí pro libovolné dělení D, platí tedy i pro nulovou posloupnost dělení D_n

$$d(L) = \mathcal{S}(D_n, \sqrt{1 + f'^2}, K_n) \longrightarrow \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\mathrm{d}x,$$

tedy $d(\ell) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\mathrm{d}x$.

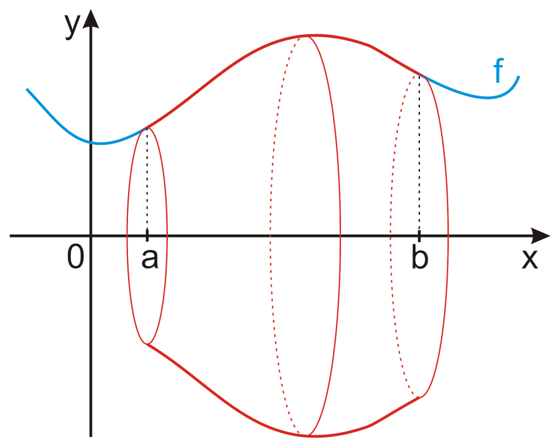
Příklad 42

Odvoďte vzorec pro výpočet obvodu kruhu o poloměru R.

$$O = 4\int_0^R \sqrt{1 + \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)'^2}\mathrm{d}x = 4\int_0^R \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2}\mathrm{d}x$$
$$= 4\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\mathrm{d}x = 4\left[R \arcsin\frac{x}{R}\right]_0^R = 4R\frac{\pi}{2} = 2\pi R$$

Objem a povrch pláště rotačního tělesa
(rotace nezáporné funkce f kolem osy x na intervalu $[a, b]$).

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\mathrm{d}x, \quad V = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$



Vzorec pro objem rotačního tělesa plyne přímo z konstrukce integrálu. Uvažujme dělení intervalu $[a, b]$, v každém dílku zvolíme reprezentanta ξ_i. Tím obdržíme obdélník daný délkou dílku a funkční hodnotou v příslušném reprezentantu. Rotujeme-li tento obdélník kolem osy x, vytvoří válec o poloměru $f(\xi_i)$ a výšce $x_i - x_{i-1}$. Součet všech objemů přejde pro nulovou posloupnost dělení v objem uvažovaného rotačního tělesa.

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \mathcal{S}(D, \pi f^2, K) \longrightarrow \boxed{\pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = V}$$

Podobně lze odvodit vzorec pro povrch pláště – nahradíme-li křivku za lomenou čáru, objekt snadno rozdělíme na sadu komolých kuželů. Součet povrchů pláště těchto kuželů se pro nulové dělení blíží k povrchu pláště daného tělesa.

Příklad 43

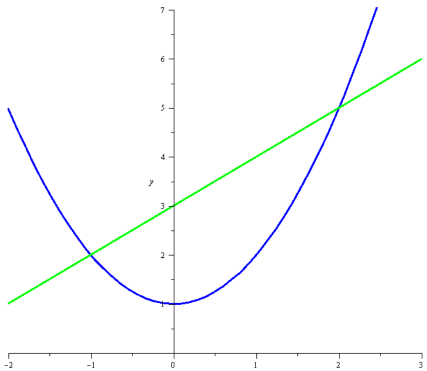
Vypočtěte povrch koule o poloměru R.

$$P = 2 \cdot 2\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\mathrm{d}x = 4\pi R \int_0^R \mathrm{d}x = 4\pi R^2$$

Příklad 44

Určete plochu ohraničenou grafy funkcí $f(x) = x^2 + 1$ a $g(x) = x + 3$.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x^2 + 1 &= x + 3 \\ x^2 - x - 2 &= 0 \\ x_1 = -1&, x_2 = 2 \end{aligned}$$

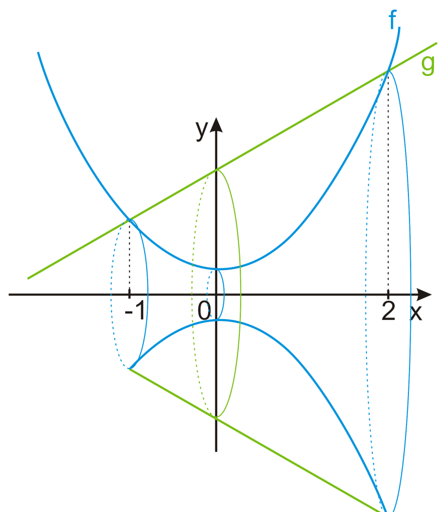


$$\int_{-1}^2 g(x) - f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^2 (x+3) - (x^2+1)\mathrm{d}x = \int_{-1}^2 2 + x - x^2\mathrm{d}x = \ldots = \frac{9}{2}.$$

Příklad 45

Určete objem tělesa vzniklého rotací plochy omezené grafy funkcí $f(x) = x^2 + 1$ a $g(x) = x + 3$ kolem osy x.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^2 g^2(x)\mathrm{d}x - \pi \int_{-1}^2 f^2(x)\mathrm{d}x \\ &= \pi \int_{-1}^2 (x+3)^2 - (x^2+1)^2\mathrm{d}x \\ &= \pi \int_{-1}^2 8 + 6x - x^2 - x^4\mathrm{d}x \\ &= \ldots = \frac{117}{5}\pi. \end{aligned}$$



V této sekci budeme uvažovat křivku zadanou parametricky jako

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \tag{P}$$

kde φ, ψ jsou spojitě diferencovatelné a $\varphi'(t) \neq 0$ pro $t \in (\alpha, \beta)$.

Obsah obrazce ohraničeného křivkou s parametrizací (P), osou x a přímkami $x = \varphi(\alpha), x = \varphi(\beta)$ je

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)|\varphi'(t)| \mathrm{d}t.$$

Délka křivky zadané parametrizací (P) je

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, \mathrm{d}t.$$

Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací podgrafu spojité nezáporné funkce $f(x)$, $x \in [a, b]$, kolem osy y je

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy vymezené křivkou zadanou parametrizací (P) kolem osy x (kde $\psi(t) \geq 0, t \in [\alpha, \beta]$), osou x a přímkami $x = \varphi(\alpha), x = \varphi(\beta)$ je

$$V_x = \pi \int_\alpha^\beta \psi^2(t) \cdot \left|\varphi'(t)\right| \mathrm{d}t.$$

Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy vymezené křivkou zadanou parametrizací (P) (kde $\psi(t) \geq 0, t \in [\alpha, \beta]$), osou x a přímkami $x = \varphi(\alpha) \geq 0, x = \varphi(\beta) \geq 0$ kolem osy y je

$$V_y = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi(t) \left|\varphi'(t)\right| \mathrm{d}t.$$

Obsah pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy vymezené křivkou zadanou parametrizací (P) (kde $\psi(t) \geq 0, t \in [\alpha, \beta]$), osou x a přímkami $x = \varphi(\alpha), x = \varphi(\beta)$ kolem osy x je

$$Q = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} \mathrm{d}t.$$

Nechť spojitá funkce $s(t)$ udává *specifickou hmotnost* v bodě $[\varphi(t), \psi(t)]$ pro křivku zadanou parametricky $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Potom

$$M = \int_\alpha^\beta s(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} \mathrm{d}t$$

je *hmotnost křivky*,

$$S_x = \int_\alpha^\beta s(t)\psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, \mathrm{d}t,$$

$$S_y = \int_\alpha^\beta s(t)\varphi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, \mathrm{d}t,$$

jsou *statické momenty* křivky vzhledem k ose x, resp. y a

$$T = \left[\frac{S_y}{M}, \frac{S_x}{M}\right]$$

jsou *souřadnice jejího těžiště*.

Nechť spojitá funkce $s(t)$ udává *specifickou hmotnost* v bodě $[x, f(x)]$ pro křivku, která je grafem spojitě diferencovatelné funkce $f(x)$, $x \in [a, b]$. Potom platí

$$M = \int_a^b s(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x,$$
$$S_x = \int_a^b s(x)f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x,$$
$$S_y = \int_a^b s(x)x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x,$$
$$T = \left[\frac{S_y}{M}, \frac{S_x}{M}\right].$$

Nechť spojitá funkce $s(t)$ udává *specifickou hmotnost* v bodě $[\varphi(t), \psi(t)]$. Pro rovinný obrazec vymezený křivkou zadanou parametricky $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, osou x a přímkami $x = \varphi(\alpha), x = \varphi(\beta)$ platí

$$M = \int_\alpha^\beta s(t)\psi(t)|\varphi'(t)|\mathrm{d}t,$$
$$S_x = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta s(t)\psi^2(t)|\varphi'(t)|\mathrm{d}t,$$
$$S_y = \int_\alpha^\beta s(t)\psi(t)\varphi(t)|\varphi'(t)|\mathrm{d}t,$$
$$T = \left[\frac{S_y}{M}, \frac{S_x}{M}\right].$$

Nechť spojitá funkce $s(t)$ udává *specifickou hmotnost* v bodě $[x, y]$ podgrafu spojité nezáporné funkce f. Potom pro podgraf funkce f platí

$$M = \int_a^b s(x)f(x)\mathrm{d}x,$$
$$S_x = \frac{1}{2}\int_a^b s(x)f^2(x)\mathrm{d}x,$$
$$S_y = \int_a^b xs(x)f(x)\mathrm{d}x,$$
$$T = \left[\frac{S_y}{M}, \frac{S_x}{M}\right].$$

Cílem této sekce je „zbavit se“ požadavku
na ohraničenost integrandu a intervalu.

Nejprve se budeme zabývat případem,
kdy je neohraničený interval...

Definice 11

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť f je funkce definovaná na intervalu $[a, \infty)$, která je integrovatelná na každém intervalu $[a, b]$, kde $b > a$. Definujme funkci F na intervalu $[a, \infty)$ vztahem

$$F(b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jestliže existuje vlastní limita $\lim_{b\to\infty} F(b)$, říkáme, že *nevlastní integrál* $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *konverguje* a klademe

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} F(b) = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Neexistuje-li vlastní limita $\lim_{b\to\infty} F(b)$ říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *diverguje*. Je-li tato limita nevlastní, říkáme, že nevlastní integrál *určitě diverguje* k $\pm\infty$. V případě, že tato limita neexistuje, říkáme, že integrál *osciluje*.

Poznámka

Nevlastní integrál $\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x$, kde $a \in \mathbb{R}$, definujeme analogicky

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty} \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Je-li funkce f integrovatelná na každém omezeném intervalu, řekneme, že nevlastní integrál $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, jestliže pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ (tedy pro každé $a \in \mathbb{R}$) konvergují oba nevlastní integrály $\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$. V tomto případě

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 46

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} [\operatorname{arctg} x]_0^b = \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}.$$

Příklad 47

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} [\ln x]_1^b = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty.$$

Příklad 48

$$\int_0^\infty \cos x\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \cos x\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} [\sin x]_0^b = \lim_{b\to\infty} \sin b = \text{ neexistuje}.$$

Věta 29

Nechť integrály $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$, $\int_a^\infty g(x)\mathrm{d}x$ konvergují a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak konverguje i integrál $\int_a^\infty \alpha f(x) + \beta g(x)\mathrm{d}x$ a platí

$$\int_a^\infty \alpha f(x) + \beta g(x)\mathrm{d}x = \alpha \int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_a^\infty g(x)\mathrm{d}x.$$

Věta 30

Nechť integrál $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ konverguje a integrál $\int_a^\infty g(x)\mathrm{d}x$ diverguje. Pak integrál $\int_a^\infty f(x) \pm g(x)\mathrm{d}x$ diverguje.

Příklad 49

Rozhodněte pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ integrál $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ konverguje a pro která diverguje.

Nechť $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$. Je-li $\alpha \neq 1$, je

$$F(x) = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^x = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right),$$

tedy

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{je-li } \alpha > 1, \\ \infty, & \text{je-li } \alpha < 1. \end{cases}$$

Pro $\alpha = 1$ je $F(x) = [\ln t]_1^x = \ln x$, tedy $\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$.
Celkem

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{je-li } \alpha > 1, \text{ integrál konverguje}, \\ \infty, & \text{je-li } \alpha \le 1, \text{ integrál určitě diverguje}. \end{cases}$$

Věta 31 (Cauchyho–Bolzanovo kritérium)

Nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $x_0 \ge a$ tak, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$, $x > x_0$, $y > x_0$, platí

$$\left|\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon.$$

Věta 32 (Prosté srovnávací kritérium)

Nechť funkce f, g splňují pro $x \in [a,\infty)$ nerovnosti $0 \le f(x) \le g(x)$.

(i) *Konverguje-li integrál $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$, konverguje i integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$, přičemž platí*

$$0 \le \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(ii) *Diverguje-li integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$, diverguje i integrál $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$.*

Věta 33 (Limitní srovnávací kritérium)

Nechť funkce f, g jsou nezáporné na intervalu $[a,\infty)$ a nechť existuje $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

(i) *Je-li $L < \infty$ a konverguje-li nevlastní integrál $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$, konverguje i nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$.*

(ii) *Je-li $L > 0$ a diverguje-li nevlastní integrál $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$, diverguje i nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Důsledek

Nechť $a > 0$ a $f(x) \ge 0$ pro $x \in [a,\infty)$. Jestliže existuje $\alpha > 1$ takové, že

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) < \infty,$$

pak integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Jestliže existuje $\alpha \le 1$ takové, že

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) > 0,$$

pak nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje.

Poznámka

Je-li funkce f nezáporná, pak je funkce $F(x) := \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ neklesající, a tedy existuje (vlastní nebo nevlastní) limita

$$\lim_{x\to\infty} F(x).$$

Věta 34 (Nutná podmínka konvergence)

Nechť integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *konverguje a nechť existuje* $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$. *Pak je* $c = 0$.

Důkaz.

Předpokládejme sporem, že je $c \neq 0$, např. $c > 0$. Podle definice limity, k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje x_0 takové, že pro $x > x_0$ je $f(x) \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$. Zvolíme-li $\varepsilon < c$, tj. $c - \varepsilon > 0$, pak pro $x > x_0$ je $f(x) > c - \varepsilon$. Protože platí $\int_{x_0}^\infty \mathrm{d}x = \infty$, tudíž i $\int_{x_0}^\infty (c-\varepsilon)\,\mathrm{d}x = \infty$, dostáváme ze srovnávacího kritéria divergenci integrálu $\int_{x_0}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ a tedy i $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \infty$, což je spor. Podobně dojdeme ke spornému závěru $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = -\infty$ v případě $c < 0$. □

Věta 35 (Abelovo kritérium)

Nechť nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *konverguje a nechť je funkce* g *monotónní a ohraničená na intervalu* $[a,\infty)$. *Pak nevlastní integrál* $\int_a^\infty f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$ *také konverguje.*

Věta 36 (Dirichletovo kritérium)

Nechť existuje číslo $k > 0$ *takové, že platí*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq k$$

pro každé $b > a$, *nechť* g *je monotónní funkce na intervalu* $[a,\infty)$ *a nechť platí* $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. *Pak integrál* $\int_a^\infty f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ *konverguje.*

Věta 37

Konverguje-li integrál $\int_a^\infty |f(x)|\mathrm{d}x$, *konverguje i integrál* $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *a platí*

$$\left|\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Definice 12

Říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *konverguje absolutně*, jestliže konverguje integrál $\int_a^\infty |f(x)|\mathrm{d}x$. Pokud ale integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje a integrál $\int_a^\infty |f(x)|\mathrm{d}x$ (určitě) diverguje, říkáme, že integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *konverguje neabsolutně*.

Věta 38

Nechť funkce g je nezáporná na intervalu $[a,\infty)$ a nechť integrál $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Platí-li $|f(x)| \le g(x)$ pro všechna $x \in [a,\infty)$ nebo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} < \infty,$$

pak integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje absolutně.

Nyní se budeme zabývat případem neohraničené funkce...

Definice 13

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je funkce definovaná na intervalu $[a, b)$. Řekneme, že b je *singulární bod* funkce f, jestliže f je ohraničená na každém intervalu $[a, b-\varepsilon]$, kde $0 < \varepsilon < b-a$, není ohraničená v žádném levém okolí bodu b, tj. na intervalu $(b-\varepsilon, b]$, a je integrovatelná (v Riemannově smyslu) na každém intervalu $[a, b-\varepsilon]$.

Definice 14

Nechť f je funkce definovaná na intervalu $[a, b)$ a nechť b je jejím singulárním bodem. Nechť funkce F je definovaná na intervalu $[a, b)$ předpisem $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Existuje-li *vlastní* limita $\lim_{x\to b^-} F(x)$, řekneme, že *nevlastní integrál* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *konverguje* a klademe

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b^-} F(x).$$

Neexistuje-li vlastní $\lim_{x\to b^-} F(x)$, říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *diverguje*. Je-li tato limita nevlastní, říkáme, že nevlastní integrál *určitě diverguje* k $\pm\infty$. V případě, že tato limita neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál *osciluje*.

Poznámka

Analogicky definujeme singulární bod a funkce f definované na intervalu $(a, b]$ a konvergenci nebo divergenci nevlastního integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, je-li a singulárním bodem funkce f.

Příklad 50

Vyšetřete konvergenci integrálu $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ pro $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Singulárním bodem funkce $\frac{1}{x^\alpha}$ je bod 0. Položme $F(x) = \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$. Pro $\alpha \neq 1$ je

$$F(x) = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_x^1 = \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right).$$

Tedy

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \text{je-li } \alpha < 1, \\ \infty, & \text{je-li } \alpha > 1. \end{cases}$$

V případě $\alpha = 1$ obdržíme $F(x) = [\ln t]_x^1 = -\ln x$, tudíž v tomto případě platí $\lim_{x\to 0^+} F(x) = \infty$. Celkem

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \text{je-li } \alpha < 1, \\ \infty, & \text{je-li } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Pro nevlastní integrály typu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, kde $a < b$ a b je singulárním bodem funkce f, platí tvrzení analogická k tvrzením předchozí sekce. Důkazy se provedou naprosto shodným způsobem. Např.

Věta 39 (Limitní srovnávací kritérium)

Nechť f, g jsou nezáporné funkce definované na intervalu $[a, b)$. Nechť b je singulárním bodem obou funkcí f, g a nechť existuje $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

(i) *Je-li $L < \infty$ a konverguje-li integrál $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, je také integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergentní.*

(ii) *Je-li $L > 0$ a diverguje-li integrál $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, je také integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ divergentní.*

Definice 15

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b). Nechť platí

(i) existuje primitivní funkce F k funkci f na (a, b),

(ii) existují *vlastní limity* $\lim_{x\to a^+} F(x) = A, \lim_{x\to b^-} F(x) = B$.

Pak říkáme, že funkce f je na intervalu (a, b) *integrovatelná v Newtonově smyslu*, a definujeme její *Newtonův integrál* přes interval (a, b) vztahem

$$(\mathcal{N})\int f(x)\mathrm{d}x = B - A.$$

Pro daný interval (a, b), kde $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, označíme symbolem $\mathcal{N}((a, b))$ množinu všech funkcí integrovatelných na (a, b) v Newtonově smyslu a symbolem $\mathcal{R}([a, b])$ množinu všech funkcí integrovatelných v Riemannově smyslu na $[a, b]$.

Věta 40

Nechť $f \in \mathcal{R}([a, b]) \cap \mathcal{N}((a, b))$. Pak

$$(\mathcal{R})\int f(x)\mathrm{d}x = (\mathcal{N})\int f(x)\mathrm{d}x.$$

Důkaz.

Z Newton–Leibnizovy formule. □

Věta 41

Nechť $f \in \mathcal{N}((a, b))$. Pak má funkce f na intervalu (a, b) Darbouxovu vlastnost.

Poznámka

Pokud existuje $(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, potom je f omezená.
Pokud existuje $(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, potom má f Darbouxovu vlastnost.

$\int_{-1}^{1} \operatorname{sgn}(x)\mathrm{d}x$ existuje v Riemannově smyslu (ohraničená s jediným bodem nespojitosti), ale ne v Newtonově (nemá Darbouxovu vlastnost).

$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ neexistuje (jako vlastní) v Riemannově smyslu (neohraničená funkce), ale

$$(\mathcal{N})\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \lim_{[a,b]\to[-1,1]} [\arcsin x]_a^b$$
$$= \lim_{b\to 1^-} (\arcsin b) - \lim_{a\to -1^+} (\arcsin a) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Je-li funkce spojitá na $[a,b]$, pak zde oba integrály existují a jsou si rovny.

Pro Newtonův integrál platí „obvyklé“ věty jako pro Riemannův, ale ne všechny. Např. jsou-li funkce f, g Riemannovsky integrovatelné na intervalu $[a,b]$, je na něm integrovatelná i funkce $f\cdot g$. To pro Newtonův integrál neplatí.

Nechť $[a,b]=[0,1], f(x)=g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$. Potom

$$(\mathcal{N})\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \lim_{b\to 1^-}(2\sqrt{b}) - \lim_{a\to 0^+}(2\sqrt{a}) = 2,$$

ale

$$(\mathcal{N})\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to 1^-}(\ln b) - \lim_{a\to 0^+}(\ln a)$$

neexistuje (vlastní).