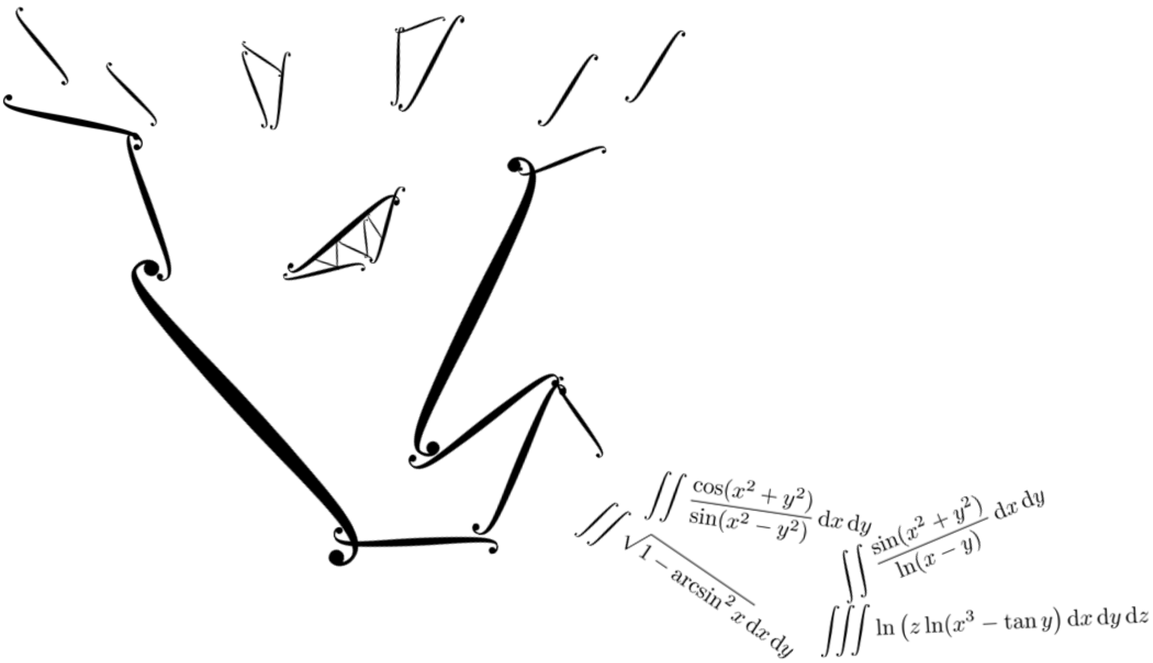
Integrální Monstrum

Jan Jekl



Verze: 2024A (pracovní)

19. prosince 2023

Příklady zde uvedené jsou vybrány ať přímo, nebo nepřímo z knih [3], [6], [10], z neřešených příkladů na stránkách VUT a z mnoha jiných míst. Další příklady jsou autorským dílem. Obrázky byly vytvořeny v softwarech Geogebra a Maple (a v jednom softwaru, jehož jméno se již ztratilo).

K uvedeným výsledkům mohou vést i jiné než zde uvedené postupy. Obecně platí, že nejlépe si lze osvojit probírané učivo aktivním počítáním a tato řešení tak slouží spíše ke kontrole. Doporučujeme řešení příkladů používat spíše ke kontrole postupu a výsledků.

Ve výpočtech se mohou nacházet numerické a další chyby. V případě nesrovnalostí se neváhejte ozvat. Budeme rádi za případné připomínky a návrhy na zlepšení objasňování postupů.

Tato sbírka je stále nekompletní a bude dále upravována. Od poslední verze došlo ke změnám převážně v kapitolách týkajících se trojných integrálů.

Obsah

1 Dvojný integrál **5**
1.1 Integrace přes obdélník . . . 7
1.2 Fubiniovy věta a záměna integračních proměnných . . . 15
1.3 Obsah plochy a integrály s funkcí $f(x, y) = 1$ přes obecnou množinu . . . 51
1.4 Integrace přes obecnou množinu . . . 64
1.5 Pokročilejší příklady . . . 76

2 Trojný integrál **90**
2.1 Integrace přes kvádr . . . 91
2.2 Fubiniova věta a záměna integračních proměnných . . . 100
2.3 Integrace přes obecnou množinu . . . 122
2.4 Vícerozměrné integrály . . . 137
2.5 Pokročilejší příklady . . . 141

3 Transformace dvojného integrálu **143**
3.1 Transformace množiny a popis principu . . . 149
3.2 Obvyklé transformace . . . 178
3.3 Obecné transformace a jejich využití, Jakobián . . . 200

4 Transformace trojného integrálu, integrály obecných řádů **214**
4.1 Transformace množiny a popis principu . . . 220
4.2 Obvyklé transformace . . . 231
4.3 Obecné transformace a jejich využití . . . 272
4.4 Pokročilejší příklady . . . 273

5 Aplikace vícerozměrných integrálů **275**

6 Nevlastní integrál **314**
6.1 Neomezená množina . . . 318
6.2 Singulární bod . . . 338
6.3 Pokročilejší příklady . . . 350
6.4 Rozhodování o konvergenci/divergenci . . . 360

7 Integrály závislé na parametru **372**

8 Nevlastní parametrické integrály-neohraničená množina **438**

9 Křivkový integrál 1.druhu **453**
9.1 Parametrizace křivky . . . 455
9.2 Křivka zadaná parametricky . . . 465
9.3 Obecně zadaná křivka . . . 477
9.4 Aplikace křivkového integrálu 1. druhu . . . 488
9.5 Pokročilejší příklady . . . 511

10 Křivkový integrál 2.druhu **516**
10.1 Orientace . . . 522
10.2 Obecná vektorová funkce . . . 523
10.3 Nezávislost na integrační cestě . . . 548
10.4 Aplikace křivkového integrálu 2. druhu . . . 562

11 Greenova věta **568**

12 Plošný integrál 1.druhu **593**

13 Plošný integrál 2.druhu **655**

14 Gaussova-Ostrogradského věta, Stokesova věta **674**

15 Příloha **695**
15.1 Ostrogradského metoda 697
Literatura704

1 Dvojný integrál

1. **Integrace přes obdélník**

Nechť $M = [a, b] \times [c, d]$ a funkce $f(x, y)$ je na množině M spojitá, potom platí

$$\iint_M f \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_a^b \int_c^d f \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_c^d \int_a^b f \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

Převedeme tak dvojný integrál na dvojnásobný. Někdy můžeme použít závorky, abychom zdůraznili, že se jedná o dva do sebe vnořené integrály jedné proměnné

$$\iint_M f \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Obecně však tyto závorky psát nemusíme, stejně jako obvykle nepíšeme závorky okolo integrované funkce, viz

$$\int_a^b (x^2 + 1) \,\mathrm{d}x, \qquad \int_a^b (f(y)) \,\mathrm{d}y.$$

Nechť $F(x, y) = f(x)g(y)$, kde $f(x), g(y)$ jsou spojité funkce a $M = [a, b] \times [c, d]$, potom platí

$$\iint_M F \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_a^b f \,\mathrm{d}x \int_c^d g \,\mathrm{d}y.$$

2. **Integrace přes obecnou, jasně vymezenou množinu (Fubiniovy věta)**

Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá na množině

(a) $M = \{[x, y] | a \le x \le b, g(x) \le y \le h(x)\}$, kde funkce $g(x), h(x)$ jsou spojité na intervalu $[a, b]$. Potom platí

$$\iint_M f \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$$

(b) $M = \{[x, y] | c \le y \le d, g(y) \le x \le h(y)\}$, kde funkce $g(y), h(y)$ jsou spojité na intervalu $[c, d]$. Potom platí

$$\iint_M f \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)} f \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

I zde uvedeným postupem převedeme dvojný integrál na dvojnásobný. Všimněme si, že pro případ konstantních funkcí $g \equiv a$ respektive c, $h \equiv b$ respektive d dostaneme $M = [a, b] \times [c, d]$.

3. **Integrace přes sjednocení vymezených množin**

Je-li funkce f integrovatelná na množinách M a N, pak platí, že

$$\iint_{M \cup N} f \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \iint_M f \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y + \iint_N f \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

Máme-li například množinu M danou jako

$$M = \{[x, y] | a_1 \le x \le b_1, g_1(x) \le y \le h_1(x)\} \cup \{[x, y] | a_2 \le x \le b_2, g_2(x) \le y \le h_2(x)\},$$

pak nelze Fubiniovu větu aplikovat přímo, ale lze ji aplikovat na „části“ množiny M.

Další vlastnosti dvojných integrálů

Jsou-li funkce f, g integrovatelné na množině M, potom platí

$$\iint_M Af + Bg \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = A\iint_M f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + B\iint_M g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

pro libovolné konstanty A, B.

Jsou-li funkce f, g integrovatelné na množině M a pokud platí pro libovolné $[x, y] \in M$, že $f(x, y) \leq g(x, y)$, pak také platí, že

$$\iint_M f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \iint_M g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Nechť je funkce $f(x, y)$ spojitá a ohraničená na omezené, měřitelné množině M, pak je funkce $f(x, y)$ na M integrovatelná, tj. existuje integrál

$$\iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

1.1 Integrace přes obdélník

Př. 1 *Vypočtěte dvojný integrál*

$$I = \iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde $M = [1,2] \times [3,6]$.

Jedná se o obdélník o obsahu $S = 3$. Navíc platí, že je-li $f(x,y) = 1$, poté je $\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = S$. Množina M je tvořena obdélníkem $[1,2] \times [3,6]$, snadno tak převedeme integrál podle teorie

$$I = \iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \begin{cases} = \int_3^6 \left(\int_1^2 \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y, \\ \\ = \int_1^2 \left(\int_3^6 \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x, \end{cases}$$

kde máme na výběr, kterou variantu převodu použijeme a obvykle se rozhodujeme podle toho, která varianta je pro nás výhodnější (jsme-li schopni rozhodnout). Zde není ani jedna varianta výhodnější, vezmeme např.

$$I = \int_1^2 \left(\int_3^6 \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Nyní začneme počítat nejprve vnitřní integrál, protože nevíme, jak spočítat vnější integrál z integrálu. Počítáme tedy vlastně integrál

$$\int_3^6 \mathrm{d}y = [y]_3^6 = (6-3) = 3.$$

Tuto hodnotu můžeme nyní dosadit do vyšetřovaného integrálu a dostaneme

$$I = \int_1^2 \left(\int_3^6 \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_1^2 3\,\mathrm{d}x = 3\,[x]_1^2 = 3.$$

Vidíme tedy, že výsledek odpovídá.

Př. 2 *Spočtěte*

$$I = \iint_M x^2 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je dána skrze $x = 1$, $x = 4$, $y = -2$, $y = 3$.

Vyšetřovanou množinu tvoří obdélník $M = [1,4] \times [-2,3]$. Snadno tedy převedeme integrál do tvaru

$$\iint_M x^2 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^4 \int_{-2}^3 x^2 y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Nyní si všimněme, že integrujeme součin dvou funkcí jedné proměnné, tj. $f(x,y) = x^2 y = g(x)h(y)$, kde $g(x) = x^2$, $h(y) = y$. Proto můžeme integrál rozdělit na součin integrálů jedné proměnné

$$I = \int_1^4 x^2 \,\mathrm{d}x \int_{-2}^3 y \,\mathrm{d}y = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-2}^3 = \frac{64-1}{3} \cdot \frac{9-4}{2} = \frac{105}{2}.$$

Př. 3 *Spočtěte*

$$\iint_M \frac{x^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je dána skrze $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$.

Vyšetřovaná množina je čtverec $M = [0,1] \times [0,1] = [0,1]^2$. Snadno tedy převedeme integrál jako

$$\iint_M \frac{x^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ \\ \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 [\operatorname{arctg} y]_0^1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}. \end{cases}$$

Př. 4 *Spočtěte*

$$\iint_M \sqrt{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je dána skrze $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$.

Vyšetřovaná množina je obdélník $M = [0,2] \times [0,3]$. Snadno tedy převedeme integrál a počítáme

$$\iint_M \sqrt{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \int_0^3 \sqrt{xy}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \int_0^3 \sqrt{y}\,\mathrm{d}y =$$
$$= \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right]_0^2 \left[\frac{2\sqrt{y^3}}{3}\right]_0^3 = \frac{4\sqrt{8\cdot 27}}{9} = \frac{8\sqrt{6}}{3}.$$

Př. 5 *Spočtěte*

$$\iint_M \sin(2x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je dána skrze $0 \le x \le \pi$, $\frac{\pi}{4} \le y \le \pi$.

Vyšetřovaná množina je obdélník $M = [0,\pi] \times \left[\frac{\pi}{4},\pi\right]$. Snadno tedy převedeme integrál

$$\begin{aligned}
\iint_M \sin(2x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^\pi \int_{\pi/4}^\pi \sin(2x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \left[-\cos(2x+y)\right]_{\frac{\pi}{4}}^\pi \,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^\pi -\cos(2x+\pi) + \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\,\mathrm{d}x = \\
&= \left[\frac{-\sin(2x+\pi)+\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}{2}\right]_0^\pi = \\
&= \frac{-\sin(3\pi)+\sin(2\pi+\pi/4)+\sin(\pi)-\sin(\pi/4)}{2} = \\
&= \frac{-\sin(\pi)+\sin(\pi/4)+\sin(\pi)-\sin(\pi/4)}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Obdobně můžeme počítat

$$\begin{aligned}
\iint_M \sin(2x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{\frac{\pi}{4}}^\pi \int_0^\pi \sin(2x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^\pi \sin 2x \cos y + \cos 2x \sin y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^\pi \sin 2x\,\mathrm{d}x \int_{\frac{\pi}{4}}^\pi \cos y\,\mathrm{d}y + \int_0^\pi \cos 2x\,\mathrm{d}x \int_{\frac{\pi}{4}}^\pi \sin y\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Př. 6 *Spočtěte*

$$\iint_M x \cos y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je dána skrze $1 \leq x \leq 2$, $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

Vyšetřovaná množina je obdélník $M = [1,2] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Snadno tedy převedeme integrál. Počítáme

$$\begin{aligned}\iint_M x \cos y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_1^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_1^2 x \,\mathrm{d}x \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos y \,\mathrm{d}y = \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 [\sin y]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3.\end{aligned}$$

Př. 7 *Spočtěte integrál* $\iint_M xy^2\,\mathrm{e}^{x+y}\;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$*, kde* M *je* $[0,2]\times[0,1]$.

Vyšetřovaná množina je obdélník. Snadno tedy převedeme integrál. Počítáme

$$\begin{aligned}\iint_M xy^2\,\mathrm{e}^{x+y}\;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^2\int_0^1 xy^2\,\mathrm{e}^{x+y}\;\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x\,\mathrm{e}^x\;\mathrm{d}x\int_0^1 y^2\,\mathrm{e}^y\;\mathrm{d}y = \\ &= \left([x\,\mathrm{e}^x]_0^2 - \int_0^2 \mathrm{e}^x\;\mathrm{d}x\right)\left(\left[y^2\,\mathrm{e}^y\right]_0^1 - \int_0^1 2y\,\mathrm{e}^y\;\mathrm{d}y\right) = \\ &= \left(2\,\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^2+1\right)\left(\mathrm{e}-[2y\,\mathrm{e}^y]_0^1+\int_0^1 2\,\mathrm{e}^y\;\mathrm{d}y\right) = \\ &= \left(\mathrm{e}^2+1\right)(\mathrm{e}-2\,\mathrm{e}+2\,\mathrm{e}-2) = \left(\mathrm{e}^2+1\right)(\mathrm{e}-2) = \mathrm{e}^3-2\,\mathrm{e}^2+\mathrm{e}-2.\end{aligned}$$

Př. 8 *Spočtěte integrál* $\iint_M xy^2\,\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, *kde* M *je* $[0,2]\times[0,1]$.

Vyšetřovaná množina je obdélník. Snadno tedy převedeme integrál. Počítáme

$$\begin{aligned}\iint_M xy^2\,\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^2 x\int_0^1 y^2\,\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^2 x\left[\frac{y^2\,\mathrm{e}^{xy}}{x}-\frac{2y\,\mathrm{e}^{xy}}{x^2}+\frac{2\,\mathrm{e}^{xy}}{x^3}\right]_0^1\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^2 \mathrm{e}^x-\frac{2\,\mathrm{e}^x}{x}+\frac{2\,\mathrm{e}^x}{x^2}-\frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Avšak integrál $\int\frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x$ jednoduše spočítat neumíme. Zaměníme tedy pořadí integrace a zkusíme počítat integrál znovu.

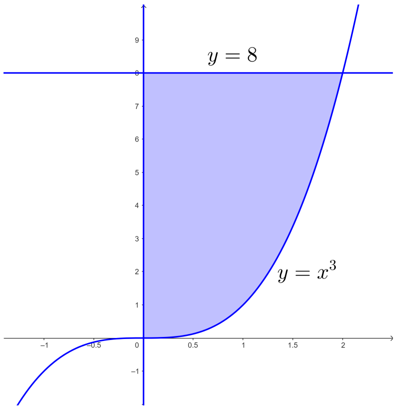
$$\begin{aligned}\iint_M xy^2\,\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 y^2\int_0^2 x\,\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y^2\left[\frac{x}{y}\,\mathrm{e}^{xy}\right]_0^2 - y^2\int_0^2\frac{1}{y}\,\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= \int_0^1 2y\,\mathrm{e}^{2y}-[\mathrm{e}^{xy}]_0^2\,\mathrm{d}y = \int_0^1(2y-1)\,\mathrm{e}^{2y}+1\,\mathrm{d}y = \\ &= \left[\frac{2y-1}{2}\,\mathrm{e}^{2y}+y\right]_0^1-\int_0^1\mathrm{e}^{2y}\,\mathrm{d}y = \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^2+1+\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2y}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^2+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^2+\frac{1}{2} = 2.\end{aligned}$$

1.2 Fubiniovy věta a záměna integračních proměnných

Př. 9 *Transformujte dvojný integrál*

$$\iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

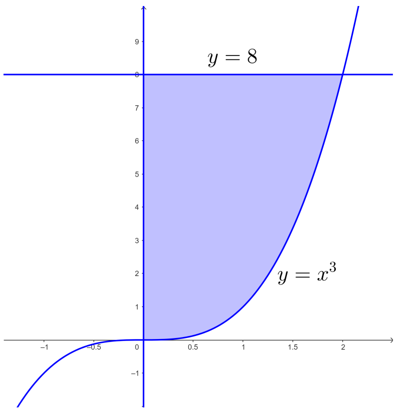
na dvojnásobný, pokud je množina M zadána obrázkem jako



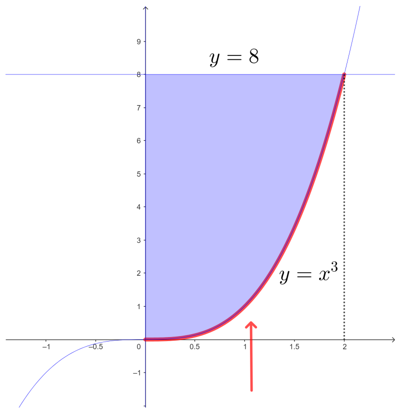
Abychom mohli aplikovat Fubiniovu větu, pak musíme nejprve množinu popsat pomocí jednoho z popisů

1. Při popisu z pohledu osy x jako $M = \{[x, y] | a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$,
2. Při popisu z pohledu osy y jako $M = \{[x, y] | c \leq y \leq d, g(y) \leq x \leq h(y)\}$.

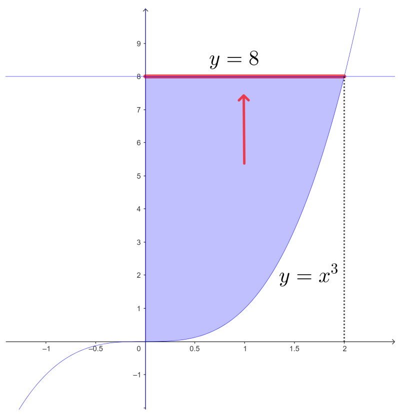
Popišme množinu nejprve vzhledem k ose x. Chceme nalézt hodnoty a, b takové, že všechny body $[x, y] \in M$ splňují, že jejich x-ové souřadnice leží v intervalu $[a, b]$. Z obrázku vidíme, že všechny x-ové souřadnice množiny M leží v intervalu $[-10, 10]$, ten je ale příliš velký a pro $x = -5$ například žádný bod množiny M nemáme. Chceme, aby pro každý bod intervalu (a, b) existoval nějaký bod množiny M. V opačném případě bychom integrovali přes jinou oblast, než je množina M. Promítněme tedy množinu M kolmo na osu x (toho dosáhneme tak, že u všech bodů množiny M zapomeneme jejich y-ovou složku).



Vidíme, že množina M se na osu x zobrazí jako interval $[0, 2]$, kde koncový bod intervalu dostaneme z průsečíku křivek $y = x^3$ a $y = 2$, tj. jako řešení rovnice $x^3 = 2$. Takže máme v popisu $a = 0$, $b = 2$. Nyní musíme určit, jaká funkce $g(x)$ ohraničuje množinu M zdola.



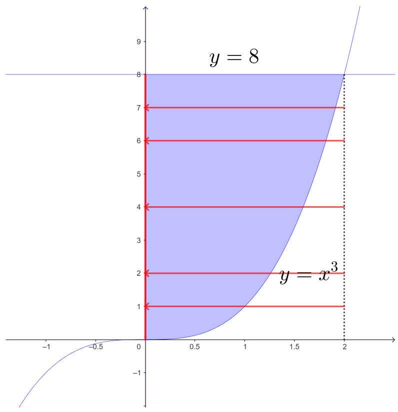
Vidíme, že na množinu M narazíme poprvé na křivce $y = x^3$, tvoří tedy její dolní hranici. Také si všimneme, že do M vstoupíme na této křivce pro libovolné $x \in [0, 2]$, tj. dolní hranice se nebude měnit a je vždy daná touto křivkou. Tudíž máme $g(x) = x^3 \leq y$. Nyní hledáme horní hranici množiny M.



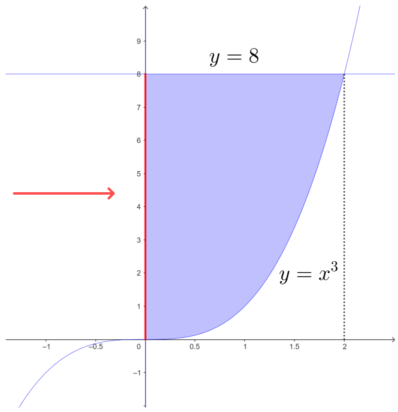
Když nyní projdeme množinou M, tak ji opustíme na křivce $y = 8$ a opět to platí pro libovolné $x \in [0, 2]$, proto máme $h(x) = 8$. Nyní můžeme integrál transformovat pomocí Fubiniovy věty jako

$$\iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \int_{x^3}^8 f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

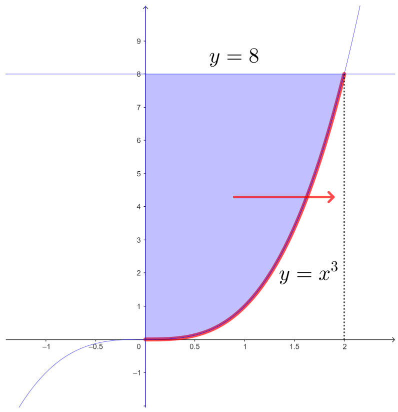
Popišme nyní množinu M vzhledem k ose y. Opět můžeme promítnou M, tentokrát ale na osu y tak, že zapomeneme x-ové souřadnice bodů $[x, y] \in M$.



Po zobrazení bychom nyní dostali interval $[0, 8]$ a tedy je $c = 0$, $d = 8$. Hledáme nyní funkce $g(y)$, $h(y)$.



Nyní se k množině M blížíme zleva (tj. zdola, pokud bychom si osy x a y prohodili). Do množiny M nyní vstupujeme po křivce $x = 0$ a tedy dostáváme $g(y) = 0$.



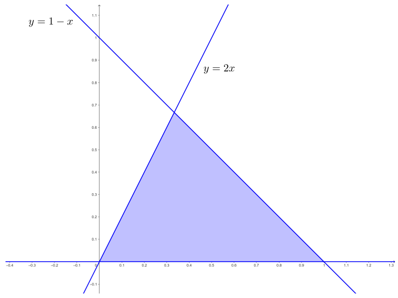
Množinu nyní opouštíme po křivce $y = x^3$, ale tuto křivku chceme vyjádřit jako $x = h(y)$, abychom dostali funkci proměnné y. Toho dosáhneme odmocněním, tj. $h(y) = \sqrt[3]{y}$. Výsledný integrál je tak

$$\iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^8 \int_0^{\sqrt[3]{y}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Př. 10 *Transformujte dvojný integrál*

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

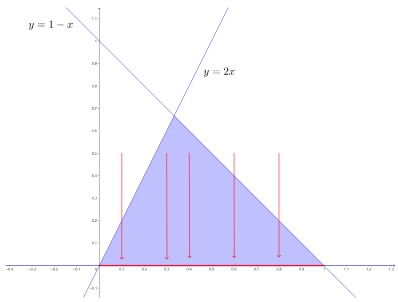
na dvojnásobný, pokud je množina M zadána obrázkem jako



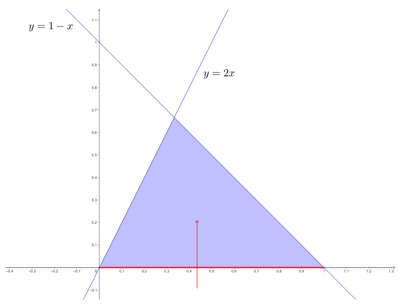
Abychom mohli aplikovat Fubiniovu větu, pak musíme nejprve množinu popsat pomocí jednoho z popisů

1. Při popisu z pohledu osy x jako $M = \{[x,y] | a \le x \le b, g(x) \le y \le h(x)\}$,
2. Při popisu z pohledu osy y jako $M = \{[x,y] | c \le y \le d, g(y) \le x \le h(y)\}$.

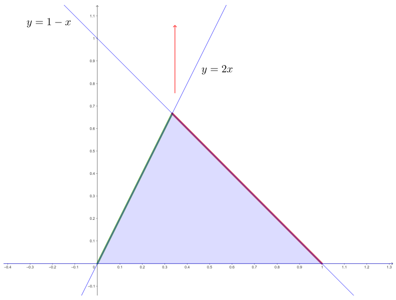
Popišme množinu nejprve vzhledem k ose x. Interval $[a,b]$ udává interval všech hodnot x, pro něž existuje bod $[x,y] \in M$. Tyto body dostaneme například tak, že u všech bodů množiny $[x,y] \in M$ zapomeneme y-ovou složku.



V tomto případě bychom dostali interval $[0,1]$ a tedy $a = 0$, $b = 1$. Dále chceme určit funkce $g(x)$, $h(x)$, které tvoří hranice množiny M.



Když se blížíme k množině M zdola, tak na množinu narazíme nejprve na ose x, tj. na křivce $y = 0$. Důležité je, že tato křivka tvoří dolní hranici M pro libovolné $x \in [0, 1]$. Potom máme $g(x) = 0$.



Když množinou projdeme a opustíme ji, tak vidíme, že záleží, pro jaké x množinu opouštíme. Pro $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ tvoří horní hranici M křivka $y = 2x$, ale pro$x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$ tvoří horní hranici křivka $y = 1 - x$. Bod, ve kterém dochází k přechodu, dostaneme jako průsečík těchto křivek. Pokud bychom popis spojili dohromady, tak můžeme položit $h(x) = \min\{2x, 1 - x\}$. Tento popis by však vyžadoval analýzu funkcí během integrování. Proto můžeme rovnou popsat M pomocí dvou částí jako

1. $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$, $0 \leq y \leq 2x$
2. $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1 - x$

Dostaneme tak pomocí Fubiniovy věty

$$\iint_M f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{1}{3}} \int_0^{2x} f(x, y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{3}}^{1} \int_0^{1-x} f(x, y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x.$$

Dále popišme množinu vzhledem k ose y. Opět můžeme promítnou M, tentokrát ale na osu y tak, že zapomeneme x-ové souřadnice bodů $[x, y] \in M$. Dostaneme interval $\left[0, \frac{2}{3}\right]$, tj. $c = 0$, $d = \frac{2}{3}$. Hodnotu d jsme získali jako y-ovou složku průsečíku křivek $y = 2x$, $y = 1 - x$. Hledáme nyní funkce $g(y)$, $h(y)$.

Nyní se k množině M blížíme zleva (tj. zdola, pokud bychom si osy x a y prohodili). Do množiny M nyní vstupujeme po křivce $y = 2x$, z níž chceme vyjádřit funkci $x = g(y)$. Po podělení tak máme $g(y) = \frac{y}{2}$. Projdeme-li množinou M zleva doprava, tak ji opustíme na křivce $y = 1 - x$, odkud opět vyjádříme $x = 1 - y$, tj. $h(y) = 1 - y$. Výsledný integrál je tak

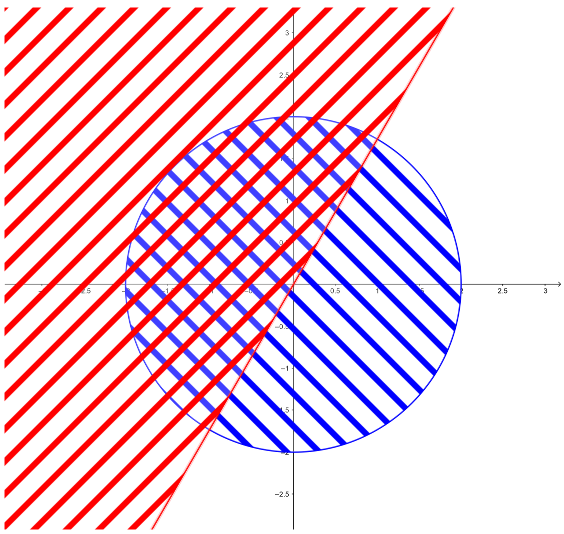
$$\iint_M f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{2}{3}} \int_{\frac{y}{2}}^{1-y} f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

Př. 11 *Převeďte dvojný integrál na dvojnásobný*

$$\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je dána nerovnostmi $x^2+y^2 \leq 4$, $y \geq \sqrt{3}x$.

Nejprve nalezneme průsečíky křivek $y=\sqrt{3}x$ a $x^2+y^2=4$, tj. řešíme rovnici $x^2+3x^2=4$ což dává řešení $x=\pm 1$. Máme tak průsečíky $[-1,-\sqrt{3}]$ a $[1,\sqrt{3}]$. Celou situaci pak můžeme vykreslit na obrázku



Nejprve popišme množinu M z pohledu osy x. Vidíme, že horní ohraničení je tvořeno kružnicí, zatímco dolní ohraničení je tvořeno nejprve kružnicí a poté přímkou. K přechodu dochází v levém průsečíku, tj. pro $x=-1$. Z rovnice kružnice vyjádříme $y=\pm\sqrt{4-x^2}$ a množinu M máme danou skrze dvě části jako:

1. $x \in [-2,-1]$, $-\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$,
2. $x \in [-1,1]$, $\sqrt{3}x \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$.

Pokud popisujeme množinu M z pohledu osy y, pak na obrázku vidíme, že dolní hranice je vždy tvořena kružnicí, ale horní hranice se mění z přímky na kružnici. Máme

1. $y \in \left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$, $-\sqrt{4-y^2} \leq y \leq \frac{y}{\sqrt{3}}$,
2. $y \in \left[\sqrt{3},2\right]$, $-\sqrt{4-y^2} \leq y \leq \sqrt{4-y^2}$.

Po transformaci dostáváme jednu z variant

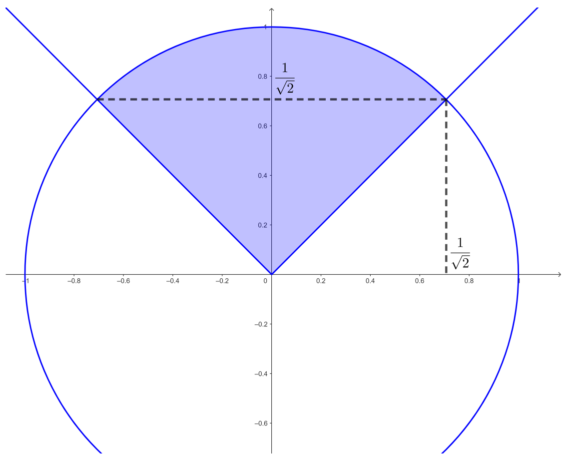
$$\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_{-2}^{-1}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1}\int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{4-x^2}} \\ \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{y/\sqrt{3}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{\sqrt{3}}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \end{cases}$$

Př. 12 *Převeďte dvojný integrál na dvojnásobný*

$$\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je dána nerovnostmi $x^2+y^2 \le 1$, $y \ge |x|$.

Nalezneme nejprve průsečíky křivek $x^2+y^2=1$ a $y=|x|$. Dosazením získáme, že hledáme řešení rovnice $2x^2=1$, což je $x=\pm 1/\sqrt{2}$ a tudíž pro $y=|x|$ je $y=1/\sqrt{2}$. Nyní si můžeme množinu M vykreslit.



Na intervalu daném rozsahem $x=\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ vidíme, že absolutní hodnota má menší funkční hodnoty než je horní polokružnice daná $y=\sqrt{1-x^2}$. Dostaneme

$$\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_{|x|}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0}\int_{-x}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_{x}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Z pohledu osy y vidíme, že se v bodě $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ mění horní i dolní ohraničení. Na intervalu $y\in\left[0,1/\sqrt{2}\right]$ je množina M daná trojúhelníkem, který vzniká z funkce $y=|x|$, což můžeme převést jako $-y\le x\le y$. Na intervalu $y\in\left[\frac{1}{\sqrt{2}},1\right]$ pak useknutou částí kružnice. Dostaneme

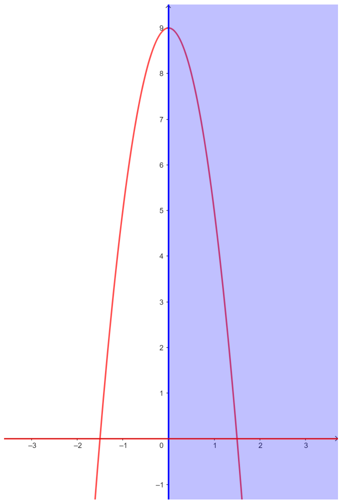
$$\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_{-y}^{y} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Př. 13 *Transformujte dvojný integrál na dvojnásobný*

$$I = \iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

kde množina M je ohraničená $x \geq 0$, $x = 3/2$, $y = 0$, $y = 9 - 4x^2$.

Vykreslíme křivky a nerovnost, abychom dostali



Hned vidíme, že množina M tvoří pravou polovinu useknutého vnitřku paraboly. Nalezneme kořeny paraboly jako řešení $9 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{3}{2}$. Pokud bychom tedy množinu M promítli na osu x, tj. zapomněli bychom y-ové souřadnice jejich bodů, tak dostaneme interval $\left[0, \frac{3}{2}\right]$. Vidíme také z obrázku, že množina M je zdola ohraničena osou x, tj. přímkou $y = 0$ a shora je ohraničená parabolou $y = 9 - 4x^2$. Integrál převedeme jako

$$I = \int_0^{\frac{3}{2}} \int_0^{9-4x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Při pohledu z osy y dostaneme podobnou situaci, pokud bychom zapomenuli x-ové souřadnice bodů množiny M, tak dostaneme interval $[0, 9]$, což vidíme z vrcholu paraboly $V = [0, 9]$ na obrázku. Dále je zdola množina M ohraničena osou y, tj přímkou $x = 0$ a shora je opět ohraničená kladnou polovinou paraboly, což můžeme vyjádřit jako $x = \frac{\sqrt{9-y}}{2}$. Druhý převod integrálu pomocí Fubiniovy věty dostaneme jako

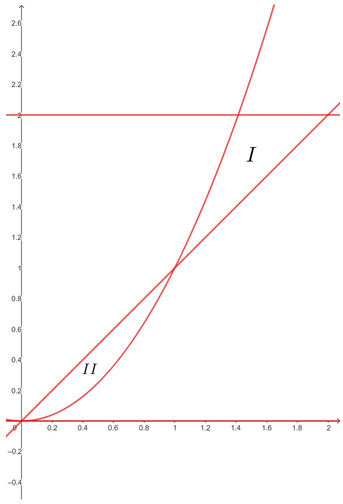
$$I = \int_0^9 \int_0^{\frac{\sqrt{9-y}}{2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Př. 14 *Transformujte dvojný integrál na dvojnásobný*

$$I = \iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

kde množina M je ohraničená křivkami $y=0$, $y=2$, $x=y$, $x=\sqrt{y}$.

Vykreslíme si křivky vymezující množinu M a dostaneme



Vidíme, že množina M se skládá ze dvou částí I a II. Nejprve se podívejme na část II. vidíme, že je tato oblast vymezena křivkami $x=y$, $x=\sqrt{y}$. Spočteme-li jejich průsečíky, tak dostaneme body $[0,0]$ a $[1,1]$. Množina M leží mezi nimi, tj. uvnitř čtverce $[0,1]^2$. Navíc pokud bychom zapomněli x-ové, nebo y-ové souřadnice bodů množiny M, pak dostaneme vždy interval $[0,1]$. Při pohledu z osy x je pak tato oblast jasně vymezena jako $x^2 \le y \le x$. Při pohledu z osy y bychom zase dostali omezení $y \le x \le \sqrt{y}$.
Pokud bychom promítli oblast I na osu x, pak dostaneme $1 \le x \le \alpha$, kde α je x-ová souřadnice průsečíku přímek $y=x$ a $y=2$, tj. $\alpha=2$. Nicméně vidíme, že horní ohraničení množiny tvoří nejprve část paraboly $y=x^2$, která následně přechází v přímku $y=2$. K tomu přechodu dochází v x-ové souřadnici průsečíku křivek $y=x^2$ a $y=2$, tj. pro $x=\sqrt{2}$. Část II bychom tedy museli rozdělit na dvě podčásti a dostaneme

1. $1 \le x \le \sqrt{2}$, $x \le y \le x^2$
2. $\sqrt{2} \le x \le 2$, $x \le y \le 2$.

Pokud bychom popisovali oblast I vzhledem k ose y, pak vidíme, že se horní a dolní ohraničení nemění. Máme $\sqrt{y} \le x \le y$ pro $0 \le y \le 2$. Dostaneme tak možné transformace integrálu jako

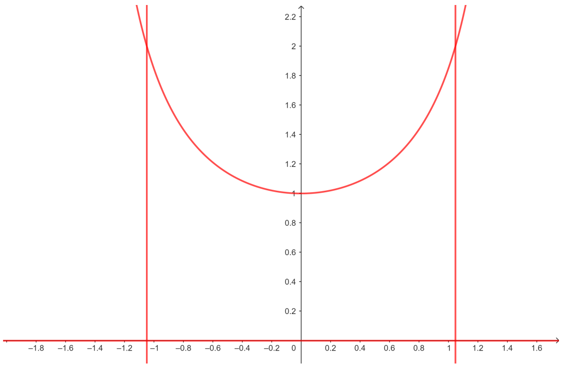
$$I = \begin{cases} \int_0^1 \int_{x^2}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt{2}} \int_x^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_x^2 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x, \\ \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_1^2 \int_{\sqrt{y}}^{y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \end{cases}$$

Př. 15 *Transformujte dvojný integrál na dvojnásobný*

$$I = \iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

kde množina M je ohraničená křivkami $x = -\frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{3}$, $y = 0$, $y = \frac{1}{\cos x}$.

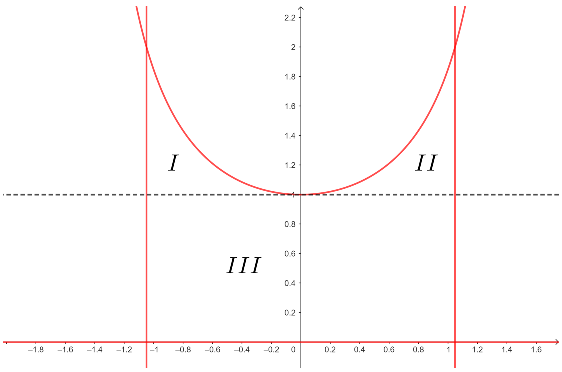
Vykreslíme si křivky omezující množinu a dostaneme



Přitom vidíme, že pokud bychom promítli množinu M na osu x, tak dostaneme interval $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$. Také hned vidíme, že $0 \leq y \leq \frac{1}{\cos x}$, což si také snadno uvědomíme, když uvážíme, že pro $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ je $\frac{1}{\cos x} \geq 0$. Pomocí Fubiniovy věty převedeme integrál jako

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\frac{1}{\cos x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Pokud bychom popisovali množinu M vzhledem k ose y, tak si musíme všimnout, že je třeba rozdělit množinu na 3 části



Kde přechod dostaneme v minimu funkce $\frac{1}{\cos x}$, což nastane očividně pro $\cos x = 1$. Část III je jasně obdélník $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] \times [0,1]$. Pro určení hranic částí I a II musíme počítat

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\cos x} \\ \cos x &= \frac{1}{y} \\ x &= \begin{cases} \arccos \frac{1}{y}, & x \geq 0 \\ -\arccos \frac{1}{y}, & x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

kde musíme uvážit, že x může být kladné i záporné. Navíc pro $x = \pm\frac{\pi}{3}$ dostaneme, že $y = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$. Celkově máme

1. pro I popis $1 \leq y \leq 2$, $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq -\arccos\frac{1}{y}$
2. pro II popis $1 \leq y \leq 2$, $\arccos\frac{1}{y} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

A transformujeme integrál dle Fubiniovy věty jako

$$I = \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_1^2 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\arccos\frac{1}{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_1^2 \int_{\arccos\frac{1}{y}}^{\frac{\pi}{3}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Př. 16 *Zaměňte integrační meze v integrálu*

$$\int_a^b \int_a^x f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Z integrálu vidíme, že integrovaná množina je vymezena $a \leq x \leq b$, $a \leq y \leq x$. Neboť $x \leq b$, je také $y \leq x \leq b$ a tedy $a \leq y \leq b$. Navíc podmínka $y \leq x \leq b$ udává funkční rozsahy pro x. Dostáváme

$$\int_a^b \int_a^x f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_a^b \int_y^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

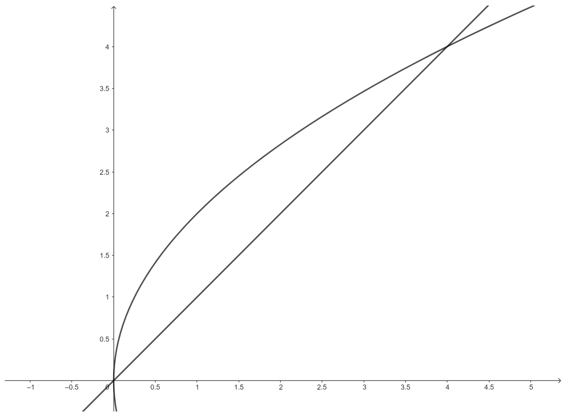
Př. 17 *Zaměňte integrační meze v integrálu*

$$\int_0^4 \int_x^{2\sqrt{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Z integrálu hned vidíme, že $0 \le x \le 4$ a $x \le y \le 2\sqrt{x}$. Přímo odsud plyne horní ohraničení pro x z nerovnosti $x \le y$. Z druhé podmínky $y \le 2\sqrt{x}$ máme $\frac{y^2}{4} \le x$, neboť nerovnost zůstane na intervalu $0 \le x \le 4$ zachována. Funkční ohraničení máme. Z omezení $0 \le x \le 4$ máme rovněž $0 \le x \le y \le 2\sqrt{x} \le 4$, tedy $0 \le y \le 4$. Můžeme převést integrál

$$\int_0^4 \int_{\frac{y^2}{4}}^{y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Pokud bychom množinu vykreslili, dostaneme průsečíky $[0,0]$ a $[4,4]$.

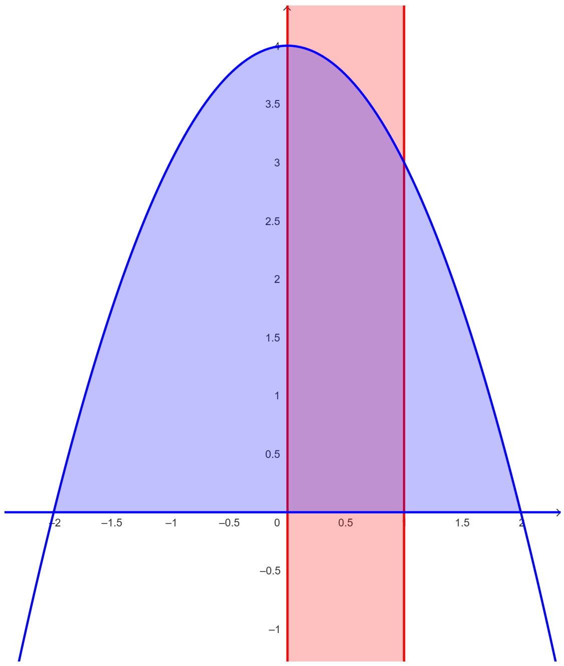


Vskutku, při pohledu z osy y tvoří dolní hranici křivka $y = 2\sqrt{x}$ odkud vyjádříme $x = \frac{y^2}{4}$. Horní hranici zase přímka $y = x$, tj. $x = y$. Z průsečíků také jasně vyčteme rozsah $0 \le y \le 4$. Všimněme si navíc, že při analytickém popisu mezí využíváme fakt, že pokrýváme celou část mezi průsečíky. Kdyby bylo například $x \in [0,2]$, pak by analýza mezí byla složitější.

Př. 18 *Zaměňte pořadí integrace v integrálu*

$$I = \int_0^1 \int_0^{4-x^2} xy - 7 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$$

Porovnáním mezí a integrovaných proměnných dostaneme rozsahy $0 \le x \le 1$ a $0 \le y \le 4 - x^2$. Podmínky lze vykreslit jako



Tady vidíme, že při pohledu ze směru osy y jsou y-ové souřadnice množiny M v rozsahu $[0, 4]$. Což také vidíme, protože pro $0 \le x$ je $y \le 4 - x^2 \le 4$ a pro $x = 0$ nastává rovnost. Po odmocnění v nerovnosti $y \le 4 - x^2$ dostaneme $-\sqrt{4-y} \le x \le \sqrt{4-y}$. Spolu s podmínkou $0 \le x \le 1$ dostaneme, že platí $\max\{0, -\sqrt{4-y}\} \le x \le \min\{1, \sqrt{4-y}\}$. Dále si snadno rozmyslíme, že platí $\sqrt{4-y} \ge 1$ pro $y \in [0, 3]$ a tedy cítíme, že dochází ke změně horního ohraničení. Dolní ohraničení je jasné, protože $\max\{0, -\sqrt{4-y}\} = 0$. Tyto fakta si můžeme rozmyslet také z obrázku. Dostaneme integrál

$$I = \int_0^3 \int_0^1 xy - 7 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y + \int_3^4 \int_0^{\sqrt{4-y}} xy - 7 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

Př. 19 *Zaměňte pořadí integrace v integrálu a integrál spočtěte*

$$I = \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{x\,\mathrm{e}^{2y}}{4-y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Porovnáním mezí a integrovaných proměnných dostaneme rozsahy $0 \le x \le 2$ a $0 \le y \le 4 - x^2$. Přitom musí platit, že pro $0 \le x$ je nutně $y \le 4 - x^2 \le 4$, kde nelze získat lepší omezení, tj. $0 \le y \le 4$. Z nerovnosti $y \le 4 - x^2$ zase odvodíme $-\sqrt{4-y} \le x \le \sqrt{4-y}$, což společně s podmínkou $0 \le x \le 2$ dává $0 \le x \le \sqrt{4-y}$, neboť $\sqrt{4-y} \le 2$ a jasně také $-\sqrt{4-y} \le 0$. Převedeme integrál a spočteme

$$\begin{aligned} I &= \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{x\,\mathrm{e}^{2y}}{4-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^4 \left[\frac{x^2\,\mathrm{e}^{2y}}{4-y}\right]_0^{\sqrt{4-y}} \mathrm{d}y = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^4 \mathrm{e}^{2y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\left[\mathrm{e}^{2y}\right]_0^4 = \frac{\mathrm{e}^8 - 1}{4}. \end{aligned}$$

Př. 20 *Zaměňte integrační meze v integrálu*

$$I = \int_0^2 \int_x^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

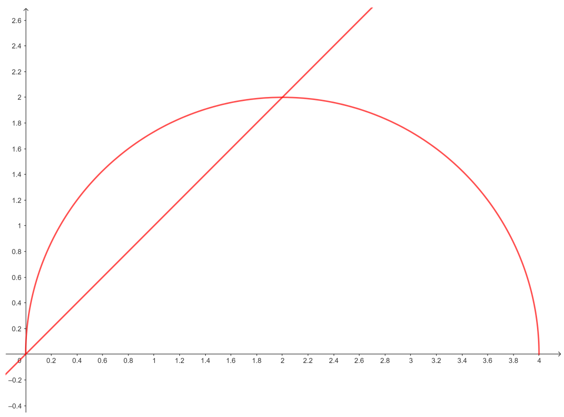
Z integrálu hned vidíme, že $0 \leq x \leq 2$ a $x \leq y \leq \sqrt{4x-x^2}$. Dále si všimněme, že pro $0 \leq x \leq 2$ je funkce $\sqrt{4x-x^2}$ rostoucí, neboť její derivace je

$$\left(\sqrt{4x-x^2}\right)' = \frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}} \geq 0.$$

Proto pro $0 \leq x \leq 2$ je nutně $0 \leq x \leq y \leq \sqrt{4x-x^2} \leq \sqrt{4x-x^2}\Big|_2 = 2$. Dostaneme $0 \leq y \leq 2$. Horní funkční hranici máme rovnou ze vztahu $x \leq y$ a druhou dostaneme z pozorování, že křivka $y = \sqrt{4x-x^2}$ je částí kružnice. Můžeme tedy převést $x = 2 \pm \sqrt{4-y^2}$ a pro $x \leq 2$ bereme část $x = 2 - \sqrt{4-y^2}$. Máme integrál

$$I = \int_0^2 \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Pokud bychom množinu analyzovali graficky, pak spočteme průsečíky křivek $y = x$ a $y = \sqrt{4x-x^2}$, což jsou body $[0,0]$ a $[2,2]$ a upravíme $y = \sqrt{4x-x^2}$ na čtverec jako $(x-2)^2 + y^2 = 4$.



Všimněme si navíc, že při analytickém popisu mezí využíváme fakt, že pokrýváme celou část mezi průsečíky. Kdyby bylo například $x \in [0,1]$, pak by analýza mezí byla složitější.

Př. 21 *Zaměňte integrační meze v integrálu*

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Z integrálu hned vidíme, že $0 \le x \le 1$ a $x^2 \le y \le \sqrt{2x-x^2}$. Funkce $f(x) = \sqrt{2x-x^2}$ nabývá hodnot $f(0) = 0$ a $f(1) = 1$, kde protíná parabolu $y = x^2$. Navíc můžeme vyjádřit

$$\sqrt{2x-x^2} = \sqrt{1-1+2x-x^2} = \sqrt{1-(x-1)^2}$$

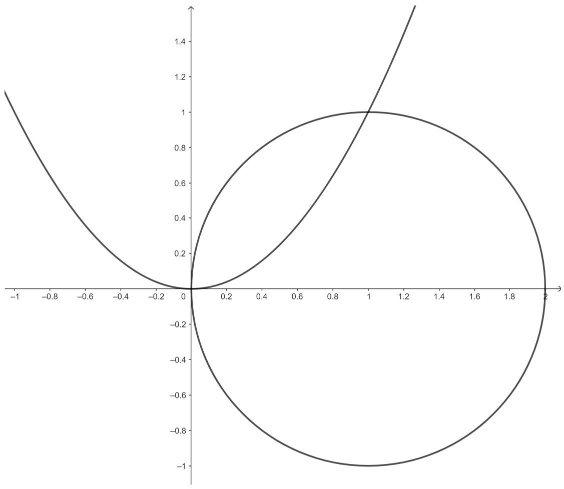
a $\sqrt{2x-x^2}$ je rostoucí funkcí. Pro $0 \le x \le 1$ dostaneme rozsahy $0 \le x^2 \le y \le \sqrt{2x-x^2} \le 1$ a tedy $0 \le y \le 1$. Funkční hranice pak dostaneme

$$\begin{aligned} x^2 &\le y \qquad & y &\le \sqrt{1-(x-1)^2} \\ x &\le \sqrt{y} & y^2 &\le 1-(x-1)^2 \\ & & 1-\sqrt{1-y^2} &\le x \end{aligned}$$

Dostáváme integrál

$$\int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Pokud bychom hranice neodvozovali analyticky, tak zjistíme, že křivka $y = \sqrt{1-(x-1)^2}$ tvoří polovinu kružnice $(x-1)^2 + y^2 = 1$ s poloměrem 1 a středem $S = [1,0]$. Následně můžeme spolu se znalostí průsečíků $[0,0]$, $[1,1]$ vše vykreslit.



Odkud určíme rozsahy stejně. Všimněme si navíc, že při analytickém popisu mezí využíváme fakt, že pokrýváme celou část mezi průsečíky. Tento předpoklad nemusí automaticky platit.

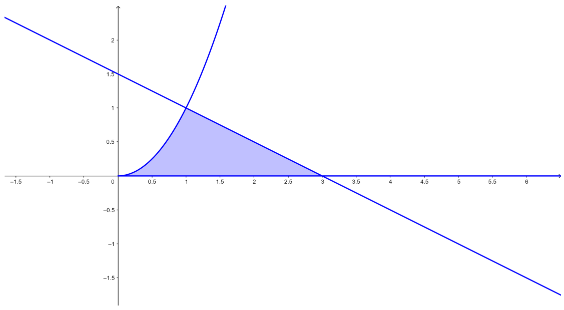
Př. 22 *Zaměňte integrační meze v integrálu*

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Z integrálu hned vidíme, že $0 \le y \le 1$ a $\sqrt{y} \le x \le 3-2y$. Pro $0 \le y \le 1$ pak máme $0 \le \sqrt{y} \le x \le 3-2y \le 3-2y\Big|_0 3$, kde si musíme dát pozor, že $3-2y$ je klesající funkce. Protože křivka $x = \sqrt{y}$ je rostoucí a křivka $x = 3-2y$ je klesající, vidíme složitější chování mezí. Funkce mají průnik v bodě $[1,1]$ a o křivkách $y = x^2$, $y = \frac{3-x}{2}$ (které tvoří hranice naší množiny) platí:

1. pro $x \in [0,1]$ je $x^2 \le 1 \le \frac{3-x}{2}$
2. pro $x \in [1,3]$ je $\frac{3-x}{2} \le 1 \le x^2$

Když tedy upravíme nerovnosti $\sqrt{y} \le x \Rightarrow y \le x^2$ a $x \le 3-2y \Rightarrow y \le \frac{3-x}{2}$ tak dostaneme spolu s podmínkou $0 \le y \le 1$, že je $0 \le y \le \min\{x^2, \frac{3-x}{2}\}$. Vidíme, že dochází ke změně horní hranice množiny M. Situaci si pro jistotu vykreslíme.



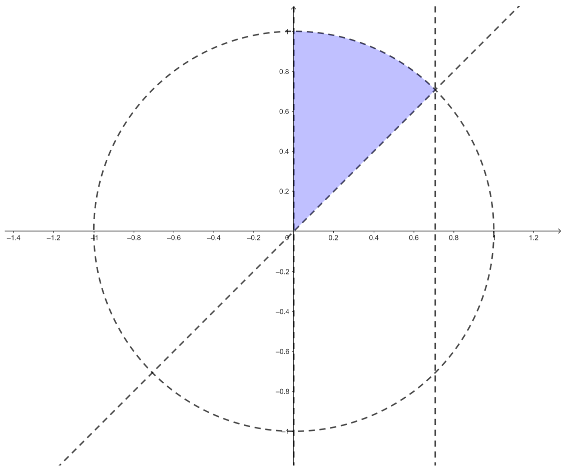
Naše analýza je vskutku správná. Dostáváme integrál

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_1^3 \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Př. 23 *Zaměňte integrační meze v integrálu*

$$I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_x^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$$

Z mezí vidíme, že M je ohraničena jako $0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ a $x \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$. Hranice množiny M tedy tvoří křivky $x = 0$, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = x$ a $y = \sqrt{1-x^2}$, v níž poznáme horní polovinu kružnice $x^2 + y^2 = 1$.
Namalujeme tedy množinu M, abychom dostali přesnou představu o její podobě.



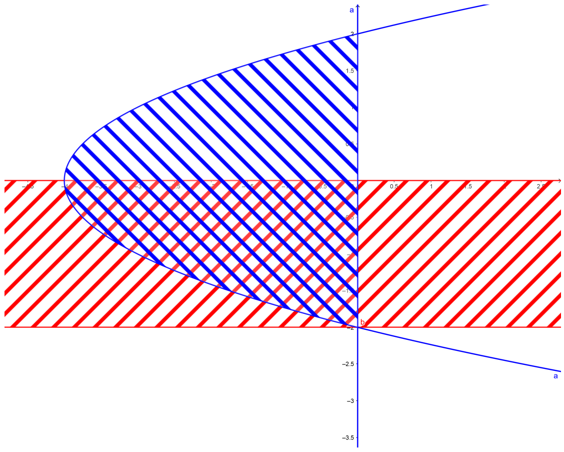
Původní integrál je popsán vzhledem k ose x, zatímco nyní chceme množinu popsat vzhledem k ose y. Vidíme, že $y-$ové souřadnice množiny M tvoří interval $[0, 1]$, tj. všechny body $[x, y]$ množiny M musí splňovat, že je $y \in [0, 1]$. Množina M je zdola ohraničena osou y, tj. křivkou $x = 0$ a horní ohraničení je udáno nejprve přímkou $x = y$ a následně polokružnicí $x = \sqrt{1-y^2}$. Navíc vidíme, že k tomu přechodu dochází v bodě, kde se protínají křivky $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = x$ a $y = \sqrt{1-x^2}$. Jejich průsečík určíme snadno z prvních dvou křivek a jedná se o bod $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.
Celkem tedy máme

$$I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_0^{y} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Př. 24 *Zaměňte integrační meze v integrálu*

$$I=\int_{-2}^{0}\int_{y^2-4}^{0}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Z mezí integrálu vyčteme, že integrovaná množina je ohraničena $y^2-4\leq x\leq 0$, pro $-2\leq y\leq 0$. Vykreslíme si tuto množinu na obrázku



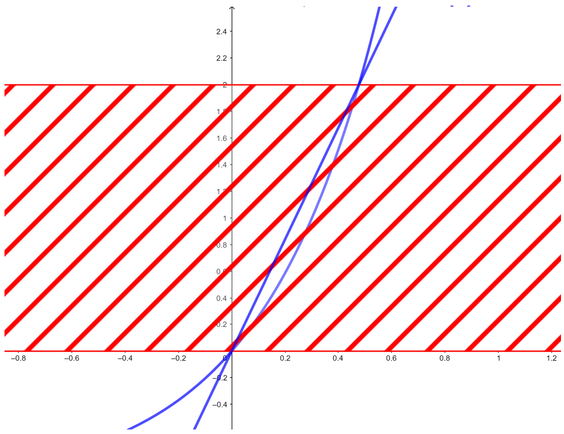
Vidíme, že množina M je tvořena useknutou polovinou vnitřku paraboly. Proměnné v parabole zaměníme odmocněním jako $y=\pm\sqrt{4+x}$ a z podmínky $y\leq 0$ nebo z obrázku odvodíme, že nás bude zajímat pouze dolní rameno paraboly $y=-\sqrt{4+x}$. Navíc je-li $-2\leq y\leq 0$ je $-4\leq y^2-4\leq 0$ čímž získáváme rozsah pro parabolu $x=y^2-4$ (která jak vidíme má největší rozsah x-ových hodnot) jako $x\in[-4,0]$. Dostáváme

$$I=\int_{-4}^{0}\int_{-\sqrt{4+x}}^{0}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Př. 25 *Zaměňte integrační meze v integrálu*

$$\int_0^2 \int_{y\ln\sqrt{3}}^{\ln(y+1)} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Vidíme, že integrovaná množina je ohraničena křivkami $x = y\ln\sqrt{3}$ a $x = \ln(y+1)$, pro $0 \le y \le 2$. Navíc platí $y\ln\sqrt{3} \le x \le \ln(y+1)$. Všimněme si, že pro $y = 2$ platí $y\ln\sqrt{3} = \ln(y+1) = \ln 3$ stejně jako pro $y = 0$ platí $y\ln\sqrt{3} = \ln(y+1) = 0$. Křivky se tedy protínají v bodech $[0,0]$ a $[\ln 3, 2]$, kterýmžto pozorováním si usnadníme vykreslení. Vykreslíme si celou situaci pro jistotu s upravený měřítkem na osách x a y



Dále převedeme nerovnosti

$$y\ln\sqrt{3} \le x \qquad\qquad x \le \ln(y+1)$$
$$y \le \frac{x}{\ln\sqrt{3}}, \qquad\qquad \mathrm{e}^x - 1 \le y,$$

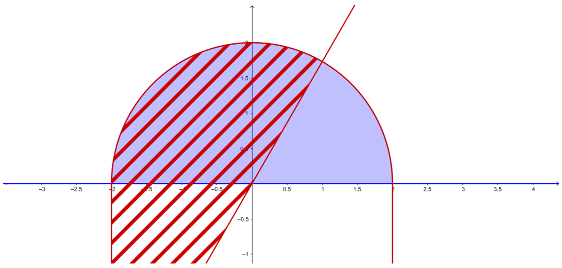
které omezují množinu shora a zdola. Navíc pro $y \le 2$ je $x \ge y\ln\sqrt{3} \le 2\ln\sqrt{3} = \ln 3$ a pro $y \ge 0$ je $0 = 0\ln\sqrt{3} \le y\ln\sqrt{3} \le x$ dostáváme ohraničení pro x. Stejné ohraničení dostaneme pokud uvážíme druhou hranici $x = \ln(y+1)$. Rozsah pro x nemusíme hledat analyticky, ale dostaneme jej také z obrázku, pokud uvážíme průsečíky.
Celkem máme

$$\int_0^{\ln 3} \int_{\mathrm{e}^x - 1}^{\frac{x}{\ln\sqrt{3}}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Př. 26 *Zaměňte integrační meze v integrálu*

$$\int_{-2}^{0}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}\int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{4-x^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Nejsnáze vyřešíme úkol, pokud si celou situaci namalujeme. Z prvního integrálu získáme rozsahy $-2 \le x \le 0$ je $0 \le y \le \sqrt{4-x^2}$ a ze druhého integrálu máme rozsahy $0 \le x \le 1$ je $\sqrt{3}x \le y \le \sqrt{4-x^2}$. Hranice množiny M tvoří křivky $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$ a horní polokružnice $x^2 + y^2 = 4$. Dostáváme situaci



Nyní popisujeme množinu M z pohledu osy y, kde y-ové souřadnice množiny M leží v intervalu $[0, 2]$ (však také vidíme, že všechny body množiny leží uvnitř horní poloviny kruhu). Přitom horní hranici množiny M tvoří přímka a poté hranice přechází v kružnici. Vidíme, že musíme určit průnik křivek $y = \sqrt{3}x$ a $x^2+y^2 = 4$. Získáváme dosazením rovnost $4x^2 = 4$ a tedy $x = \pm 1$. Neboť pro horní polokružnici je $y \ge 0$, tak dostáváme průsečík $[1, \sqrt{3}]$. Množina M je dána

1. $0 \le y \le \sqrt{3}$, $-\sqrt{4-y^2} \le x \le \frac{y}{\sqrt{3}}$
2. $\sqrt{3} \le y \le 2$, $-\sqrt{4-y^2} \le x \le \sqrt{4-y^2}$

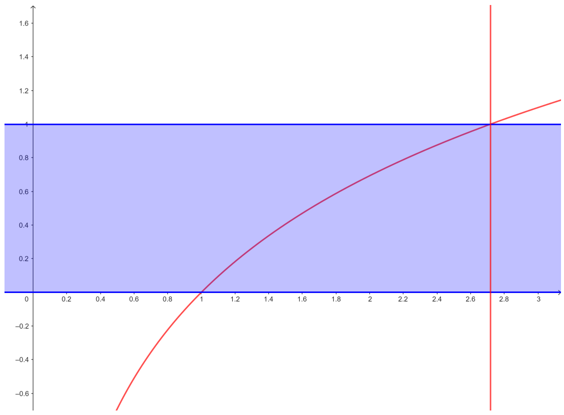
Dostáváme integrály

$$\int_{0}^{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\frac{y}{\sqrt{3}}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{\sqrt{3}}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Př. 27 *Zaměňte integrační meze v integrálu*

$$I = \int_0^1 \int_{\mathrm{e}^y}^{\mathrm{e}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Z integrálu hned vidíme, že $0 \le y \le 1$ a $\mathrm{e}^y \le x \le \mathrm{e}$. Pro $0 \le y$ platí vzhledem k tomu, že e^y je rostoucí funkce nerovnost $1 = \mathrm{e}^0 \le \mathrm{e}^y \le x \le \mathrm{e}$. Dostaneme rozsah $1 \le x \le \mathrm{e}$. Funkční hranice získáme z nerovnosti $\mathrm{e}^y \le x$ což vede na $y \le \ln x$ a z podmínky $0 \le y$. Pro jistotu vše ještě vykreslíme.



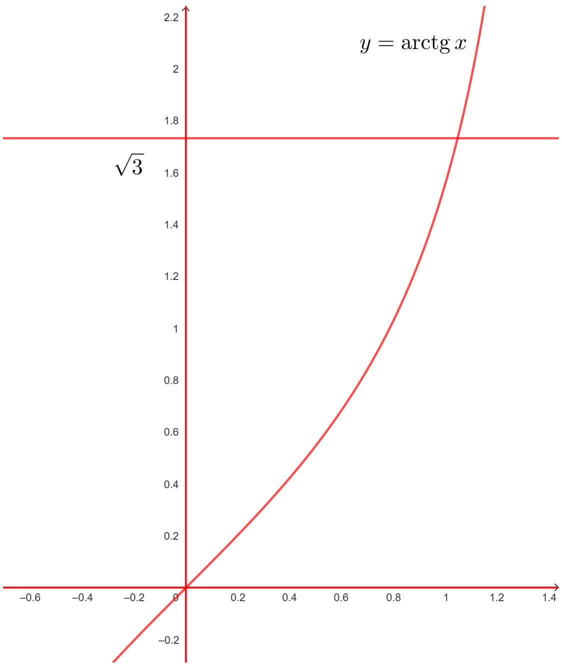
Dostáváme integrál

$$I = \int_1^{\mathrm{e}} \int_0^{\ln x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Př. 28 *Zaměňte pořadí integrace v integrálu*

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{\operatorname{arctg} y} \sqrt{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Z integrálu vyčteme omezení $0 \leq y \leq \sqrt{3}$ a $0 \leq x \leq \operatorname{arctg} y$. Při řešení vyjdeme z obrázku



Průsečík přímky $y = \sqrt{3}$ a křivky $y = \operatorname{arctg} x$ je bod $\left[\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right]$. Vidíme tedy, že body množiny M mají x-ové souřadnice v rozmezí $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$. Dále dolní hranice množiny M vychází z křivky $y = \operatorname{arctg} x$, kterou upravíme do podoby $y = \operatorname{tg} x$. Dostaneme integrál

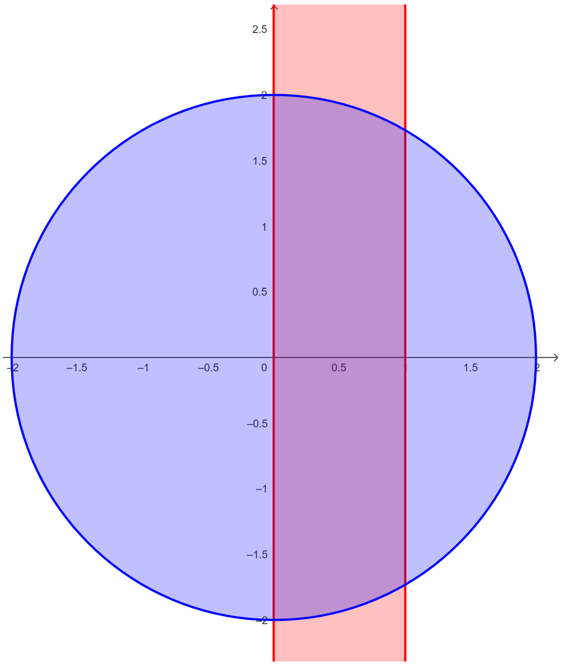
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_{\operatorname{tg} x}^{\sqrt{3}} \sqrt{xy}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Kdybychom chtěli popsat množinu M analyticky, tak pro $y \leq \sqrt{3}$ nutně platí $x \leq \operatorname{arctg} y \leq \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$. Na tomto intervalu pak platí $\operatorname{tg} x \leq \sqrt{3}$ a tedy y-ové souřadnice musí být někde mezi nimi. Z obrázku však vidíme celou situaci jasně.

Př. 29 *Zaměňte pořadí integrace v integrálu*

$$I = \int_0^1 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 6x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

Porovnáním mezí a integrovaných proměnných dostaneme rozsahy $0 \le x \le 1$ a $-\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}$. Z druhé nerovnosti dostaneme po umocnění $x^2 + y^2 \le 4$, tj. jedná se o část kruhu.



Z pohledu osy y vidíme, že body množiny M mají y-ové souřadnice na intervalu $[-2, 2]$, což vidíme také z faktu, že pro$0 \le x$ je nutně $-2 \le -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2} \le 2$ a z faktu, že zde pro $x = 0$ nastává rovnost. Množina M je zdola při pohledu z osy y omezena $x = 0$ a horní ohraničení se mění v okamžiku, kdy je $\sqrt{4-y^2} \ge 1$, tj. v průsečících křivek $x = \sqrt{4-y^2}$ a $x = 1$, kde máme $y = \pm\sqrt{3}$. Dostaneme integrály

$$I = \int_{-2}^{-\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{4-y^2}} 6x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_0^1 6x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \int_{\sqrt{3}}^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} 6x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

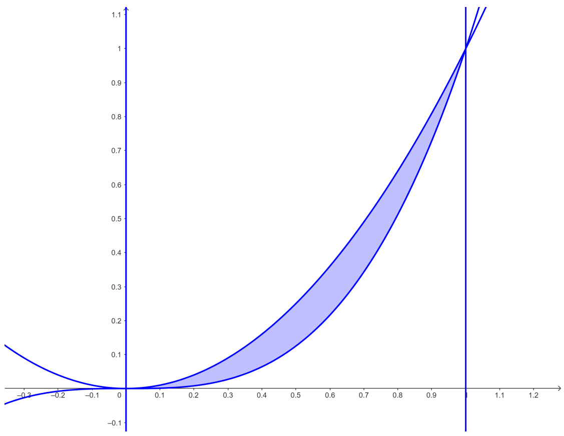
Př. 30 *Zaměňte integrační meze v integrálu*

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Z integrálu hned vidíme, že $0 \leq x \leq 1$ a $x^3 \leq y \leq x^2$. Nacházíme se na intervalu $x \in [0,1]$ a (funkce x^3, x^2 jsou rostoucí), proto můžeme dobře v nerovnosti $x^3 \leq y \leq x^2$ odmocnit. Dostáváme $\sqrt{y} \leq x$ a $x \leq \sqrt[3]{y}$ což nám dává funkční ohraničení pro x. Vidíme také, že pro $0 \leq x \leq 1$ je $0 \leq x^3 \leq y \leq x^2 \leq 1$. Odsud máme ohraničení pro y jako $0 \leq y \leq 1$.

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Pokud bychom množinu zobrazili, dostaneme analogický popis graficky.



Vidíme průsečíky $[0,0]$ a $[1,1]$ a pokud bychom kolmo zobrazili vyšetřovanou oblast na osu y, tak dostaneme interval $[0,1]$, tj. vskutku $0 \leq y \leq 1$. Původní dolní hranice $y = x^3$ je z pohledu osy y horní hranicí a tedy $x \leq \sqrt[3]{y}$. Původní dolní hranice $y = x^2$ je nyní dolní hranice a po odmocnění $x = \pm\sqrt{y}$ si uvědomíme, že chceme horní rameno paraboly neboť je $x \geq 0$.

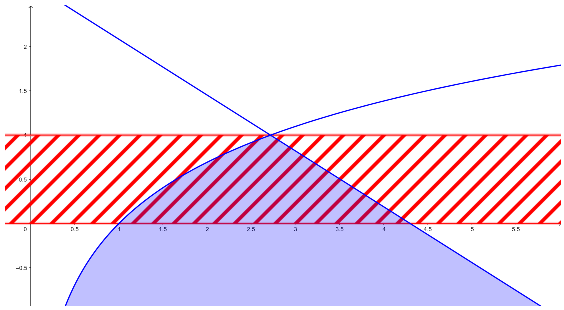
Př. 31 *Zaměňte pořadí integrovaných proměnných v integrálu*

$$I = \int_0^1 \int_{\mathrm{e}^y}^{-\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}y+\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}-1}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Z integrálu hned vidíme, že vyšetřovaná oblast je dána jako $0 \leq y \leq 1$ a $\mathrm{e}^y \leq x \leq -\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}y + \frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}-1}$. Nejsnáze situaci pochopíme, pokud si situaci vykreslíme. K tomu by se nám však hodily průsečíky křivek $x = \mathrm{e}^y$ a $x = -\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}y + \frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}-1}$, které není tak snadné najít. Pokud bychom hledali průsečíky s křivkou $y = 1$, pak dostaneme

$$x = \mathrm{e}^y \cap y = 1 \Rightarrow [\mathrm{e}, 1],$$
$$x = -\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}y + \frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}-1} \cap y = 1 \Rightarrow [\mathrm{e}, 1].$$

Vidíme, že se všechny 3 křivky protínají ve stejném bodě.



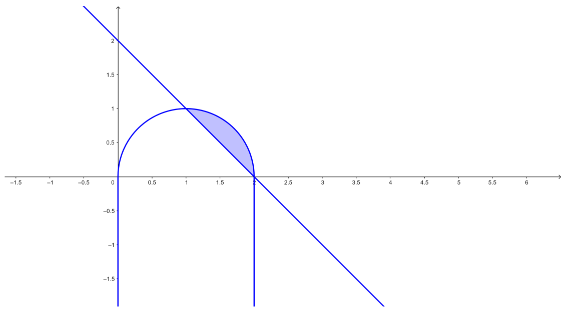
Průsečíky s osou x dostaneme jako body $[1, 0]$ a $[\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}-1}, 0]$.
Z pohledu osy x máme dolní ohraničení jasně dané osou x, ale horní ohraničení je nejprve dané exponenciálou $x = \mathrm{e}^y$, z níž vyjádříme $y = \ln x$. Pro $x = \mathrm{e}$ dojde ke změně horního ohraničení na přímku, kterou můžeme vyjádřit jako $y = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}x$. Dostáváme integrál

$$I = \int_1^{\mathrm{e}} \int_0^{\ln x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{\mathrm{e}}^{\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}-1}} \int_0^{\mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Př. 32 *Zaměňte integrační meze v integrálu*

$$I = \int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Z integrálu hned vidíme, že $1 \leq x \leq 2$ a $2 - x \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}$. Křivka $y = \sqrt{2x - x^2}$ je tvořena částí kružnice se středem posunutým mimo počátek. Umocněním a úpravou na čtverec získáme její vyjádření jako $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Omezení pak tvoří horní půlkružnici. Přímka $y = 2 - x$ má s kružnicí dva průsečíky a dosazením získáme, že jsou to body $[1, 1]$ a $[2, 0]$. Vykreslíme situaci



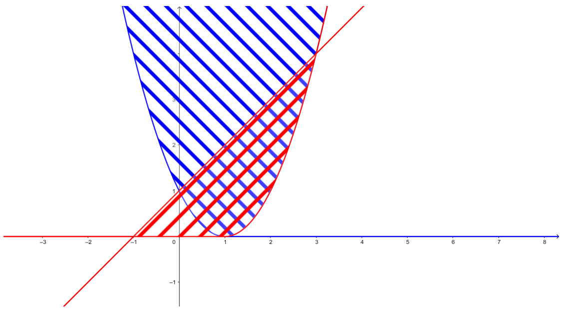
Z pohledu osy y vidíme, že $0 \leq y \leq 1$ a že funkční hranice se na intervalu nemění. Dolní hranici tvoří přímka a tedy vyjádříme $2 - y \leq x$. Horní hranici tvoří část kružnice pro $x \geq 0$ a ta je dána po odmocnění $x \leq 1 + \sqrt{1 - y^2}$. Toto vede na integrál

$$I = \int_0^1 \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Př. 33 *Zaměňte integrační meze v integrálu*

$$\int_0^1 \int_{1-\sqrt{y}}^{1+\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_1^4 \int_{y-1}^{1+\sqrt{y}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

V prvním integrálu máme omezení $0 \le y \le 1$ a $1-\sqrt{y} \le x \le 1+\sqrt{y}$. Ve druhém integrálu platí $1 \le y \le 4$ a $y-1 \le x \le 1+\sqrt{y}$. Celou situaci nejsnáze pojmeme, pokud si vše vykreslíme. Křivka $x = 1 \pm \sqrt{y}$ je posunutá parabola daná vyjádřením $y = (x-1)^2$. Druhá křivka je pak přímka $y = x+1$.



Dopočteme průsečíky křivek $x = 1-\sqrt{y}$ a $x = y-1$, což jsou body $[0,1]$ a $[3,4]$. Vidíme, že vyšetřovaná množina M popisuje celou část mezi průsečíky, tj. $x \in [0,3]$ a hranice zůstávají stejné, kde horní hranici tvoří přímka $y = x+1$ a dolní hranici parabola $y = (x-1)^2$. Máme integrál

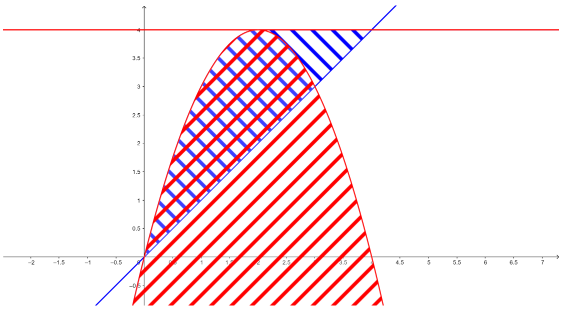
$$\int_0^3 \int_{(x-1)^2}^{x+1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Tohoto lze dosáhnout i opatrnou dedukcí z nerovností. Z nerovnosti $1-\sqrt{y} \le x \le 1+\sqrt{y}$ získáme, že $y \ge (x-1)^2$ a z nerovnosti $y-1 \le x$ máme $y \le x+1$.

Př. 34 *Zaměňte integrační meze v integrálu*

$$\int_0^3 \int_{2-\sqrt{4-y}}^{y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_3^4 \int_{2-\sqrt{4-y}}^{2+\sqrt{4-y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

V prvním integrálu máme omezení $0 \le y \le 3$ a $2-\sqrt{4-y} \le x \le y$. Ve druhém integrálu platí $3 \le y \le 4$ a $2-\sqrt{4-y} \le x \le 2+\sqrt{4-y}$. Podmínku $x = 2 \pm \sqrt{4-y}$ přepíšeme jako $y = 4-(x-2)^2$ pro lepší porozumění a snazší vykreslení. Průsečíky křivek $y = 4-(x-2)^2$ a $y = x$ jsou body $[0,0]$ a $[3,3]$.



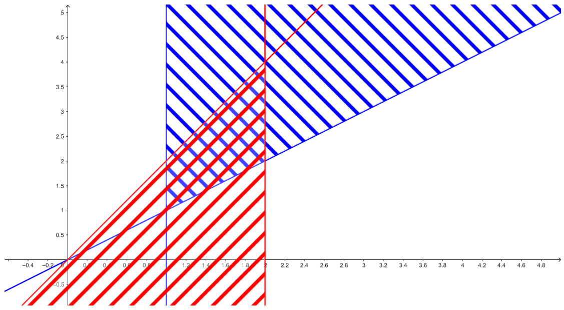
Vidíme, že popisujeme oblast mezi průsečíky, tj. $x \in [0,3]$ a horní hranice je tvořena parabolou $y = 4-(x-2)^2$ zatímco dolní hranice je tvořena přímkou $y = x$. Dostáváme integrál

$$\int_0^3 \int_x^{4-(x-2)^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Př. 35 *Zaměňte integrační meze v integrálu*

$$I = \int_1^2 \int_1^y f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_2^4 \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

V prvním integrálu máme omezení $1 \leq y \leq 2$ a $1 \leq x \leq y$. Ve druhém integrálu platí $2 \leq y \leq 4$ a $\frac{y}{2} \leq x \leq 2$. Všechny hranice jsou udány úsečkou, proto lze usuzovat, že vyšetřovaná množina je mnohoúhelníkem.



Průsečíky přímek získáme při tvorbě obrázku nebo dopočtem jako $[1,1]$, $[2,4]$, $[1,2]$ a $[2,2]$. Navíc vidíme, že z pohledu osy x je $x \in [1,2]$ a horní mez je dána přímkou $y = 2x$ zatímco dolní mez je tvořena přímkou $y = x$. Převedeme

$$I = \int_1^2 \int_x^{2x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Př. 36 *Spočtěte dvojnásobný integrál*

$$I = \int_0^2 \int_0^1 \frac{x}{1+xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

pomocí přímého výpočtu i pomocí záměny proměnných.

Nejprve integrál spočteme přímo. Máme

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^2 \int_0^1 \frac{x}{1+xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \frac{1}{y} \int_0^1 1 - \frac{1}{1+xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \frac{1}{y} \int_0^1 1 - \frac{1}{y}\frac{y}{1+xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= \int_0^2 \frac{1}{y}\left[x - \frac{1}{y}\ln|1+xy|\right]_0^1 \mathrm{d}y = \int_0^2 \frac{1}{y}\left(1 - \frac{1}{y}\ln(1+y)\right)\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\ln(1+y)\,\mathrm{d}y = \\
&= \left[\ln y + \frac{1}{y}\ln(1+y) - \ln\frac{y}{y+1}\right]_0^2 = \left[\left(\frac{1}{y}+1\right)\ln(1+y)\right]_0^2 = \frac{3}{2}\ln 2 - 1.
\end{aligned}$$

Kde využíváme metody per-partes, abychom určili

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{y^2}\ln(1+y)\,\mathrm{d}y &= -\frac{1}{y}\ln(1+y) + \int \frac{1}{y(y+1)}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{y}\ln(1+y) + \int \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}y \\
&= -\frac{1}{y}\ln(1+y) + \ln\left|\frac{y}{y+1}\right| + C
\end{aligned}$$

a faktu, že platí

$$\lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1.$$

Ve druhém případě zaměníme pořadí integrace a opět pomocí per-partes máme

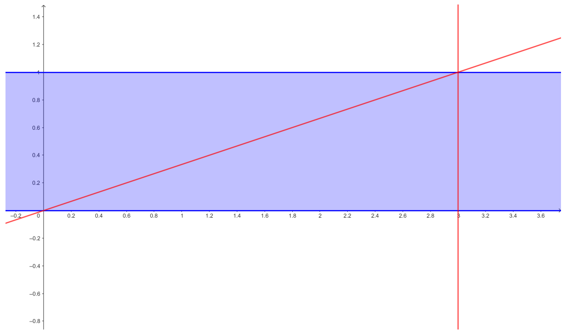
$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \int_0^2 \frac{x}{1+xy}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 [\ln|1+xy|]_0^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln(1+2x)\,\mathrm{d}x = \\
&= [x\ln(1+2x)]_0^1 - \int_0^1 1 - \frac{1}{1+2x}\,\mathrm{d}x = \ln 3 - \left[x - \frac{1}{2}\ln(1+2x)\right]_0^1 = \\
&= \ln 3 - 1 + \frac{1}{2}\ln 3 = \frac{3}{2}\ln 2 - 1.
\end{aligned}$$

Př. 37 *Spočtěte dvojnásobný integrál*

$$I = \int_0^1 \int_{3y}^3 \mathrm{e}^{x^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Všimněte si, že integrál $\int \mathrm{e}^{x^2}\, \mathrm{d}x$ *je transcendentní a nelze k němu najít primitivní funkci.*

Integrál $\int \mathrm{e}^{x^2}\, \mathrm{d}x$ nevyřešíme, ale mohli bychom se pokusit zaměnit integrované proměnné. Pro $0 \le y \le 1$ je $3y \le x \le 3$, kterou množinu si můžeme zobrazit.



Vyšetřovaná množina je obdélník, jehož x-ové souřadnice odpovídají rozsahu $0 \le x \le 3$ a je omezena přímkami $0 \le y \le \frac{x}{3}$. Dostáváme integrál

$$I = \int_0^3 \int_0^{\frac{x}{3}} \mathrm{e}^{x^2}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \int_0^3 \frac{x}{3}\, \mathrm{e}^{x^2}\, \mathrm{d}x = |t = x^2| = \frac{1}{6} \int_0^9 \mathrm{e}^t\, \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^9 - 1}{6}.$$

Př. 38 *Spočtěte*

$$I = \int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Všimněte si přitom, že integrál $\int \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y$ *je transcendentní.*

Samotný integrál $\int \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y$ nelze spočítat. Mohli bychom se však pokusit zaměnit pořadí integrovaných proměnných. Pro $0 \leq x \leq \pi$, $x \leq y \leq \pi$ platí, že $0 \leq y \leq pi$. Navíc vidíme, že $0 \leq x \leq y$ a tedy dostaneme integrál

$$I = \int_0^\pi \int_0^y \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^\pi y\frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y = \int_0^\pi \sin y\,\mathrm{d}y = [-\cos y]_0^\pi = 2.$$

Př. 39 *Spočtěte integrál*

$$I = \int_0^1 \operatorname{arctg} \pi x - \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x.$$

Integrál můžeme spočítat přímo pomocí metody per-partes a pomocného výpočtu

$$\int \operatorname{arctg} Ax \, \mathrm{d}x = x \operatorname{arctg} Ax - \int \frac{Ax}{1 + A^2x^2} \, \mathrm{d}x = x \operatorname{arctg} Ax - \frac{1}{2A} \int \frac{2A^2x}{1 + A^2x^2} \, \mathrm{d}x =$$
$$= x \operatorname{arctg} Ax - \frac{1}{2A} \ln(1 + A^2x^2) + C$$

A tedy dostaneme

$$I = \left[x \operatorname{arctg} \pi x - \frac{1}{2\pi} \ln(1 + \pi^2x^2) - x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) \right]_0^1 = \operatorname{arctg} \pi - \frac{1}{2\pi} \ln(1+\pi^2) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$$

Pokud bychom chtěli využít dvojných integrálů, tak můžeme pozorovat, že platí

$$I = \int_0^1 \operatorname{arctg} \pi x - \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x = \int_0^1 [\operatorname{arctg} xy]_1^\pi \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \int_1^\pi \frac{x}{1 + x^2y^2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x =$$
$$= \int_1^\pi \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_1^\pi \frac{1}{2y^2} \int_0^1 \frac{2y^2x}{1 + x^2y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_1^\pi \frac{1}{2y^2} \left[\ln(1 + x^2y^2) \right]_0^1 \mathrm{d}y =$$
$$= \int_1^\pi \frac{1}{2y^2} \ln(1 + y^2) \, \mathrm{d}y.$$

Dále bychom použili metodu per-partes k získání výsledku

$$\int \frac{1}{y^2} \ln(1 + y^2) \, \mathrm{d}y = -\frac{1}{y} \ln(1 + y^2) + \int \frac{2}{1 + y^2} \, \mathrm{d}y = -\frac{1}{y} \ln(1 + y^2) + 2 \operatorname{arctg} y + C$$

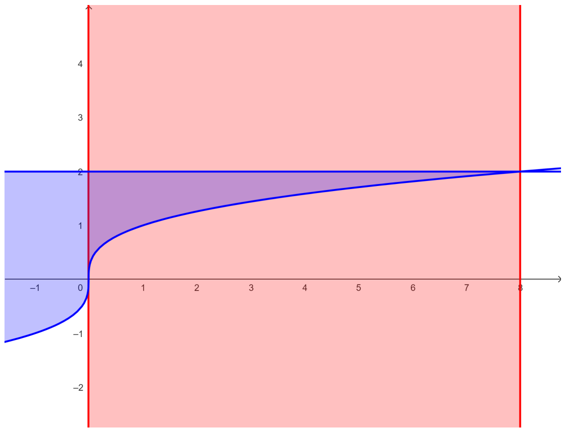
Proto můžeme dostadit

$$I = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{y} \ln(1 + y^2) + 2 \operatorname{arctg} y \right]_1^\pi = -\frac{1}{2\pi} \ln(1 + \pi^2) + \operatorname{arctg} \pi + \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4}.$$

Př. 40 *Zaměňte pořadí integrace v integrálu a integrál spočtěte*

$$I = \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Porovnáním integračních mezí a integračních proměnných dostaneme rozsahy $0 \le x \le 8$ a $\sqrt[3]{x} \le y \le 2$. Množina vypadá následovně



Přitom y-ové rozsahy integrované množiny odpovídají $0 \le y \le 2$, protože pro $0 \le x$ je $0 \le \sqrt[3]{x} \le y$. Z obrázku také vidíme, že dolní ohraničení $y = \sqrt[3]{x}$ se nově mění na horní ohraničení po úpravě jako $x = y^3$. Dostaneme integrál

$$I = \int_0^2 \int_0^{y^3} \frac{1}{y^4+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \frac{y^3}{y^4+1}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{1}{4}\ln(y^4+1)\right]_0^2 = \frac{\ln 17}{4}.$$

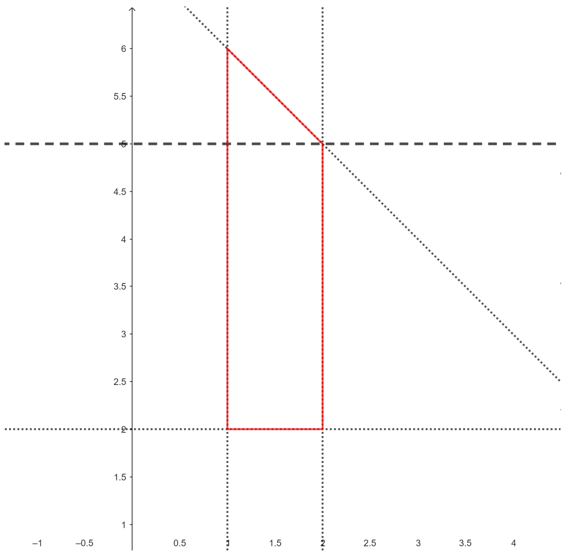
1.3 Obsah plochy a integrály s funkcí $f(x, y) = 1$ přes obecnou množinu

Př. 41 *Vypočtěte dvojný integrál*

$$\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde $M = [1, 2] \times [2, -x + 7]$.

Nejprve si rozmysleme, že množina M je na intervalu $1 \leq x \leq 2$ ohraničená funkcemi $2 \leq y \leq 7 - x$. Můžeme integrál převést pomocí Fubiniho věty. Vykreslíme-li si však množinu M, vidíme že lze M popsat z pohledu osy y.



Vidíme, že z pohledu osy y je množina tvořena obdélníkem a trojúhelníkem. Obdélník je dán pro $y \in [2, 5]$ a $x \in [1, 2]$. Rozsahy pro trojúhelník potom máme $y \in [5, 6]$ a když převedeme $y = 7 - x \Rightarrow x = 7 - y$, tak dostaneme také, že $1 \leq x \leq 7 - y$. Pomocí Fubiniho věty tedy lze převést integrál dvěma způsoby jako

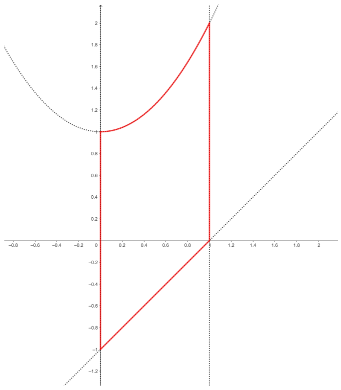
$$\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_2^5 \int_1^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_5^6 \int_1^{7-y} \\ \\ \int_1^2 \int_2^{-x+7} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_1^2 (7 - x - 2)\,\mathrm{d}x = \left[5x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 10 - 2 - 5 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}. \end{cases}.$$

Př. 42 *Vypočtěte dvojný integrál*

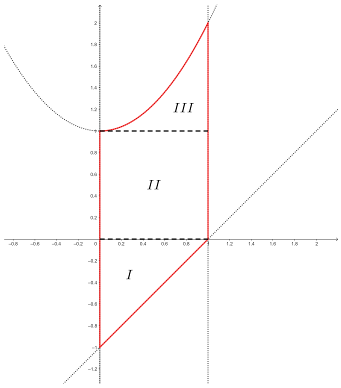
$$\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je omezena křivkami $x = 0$, $x = 1$, $y = x^2 + 1$, $y = x - 1$.

Snadno vidíme, že pro $x \in [0,1]$ platí $x^2 + 1 \geq 0 \geq x - 1$ a tedy dostaneme ihned rozsahy $0 \leq x \leq 1$, $x - 1 \leq y \leq x^2 + 1$. Stejný výsledek dostaneme i pokud si množinu vykreslíme



Nyní bychom mohli aplikovat Fubiniovu větu.
Z pohledu osy y se množina M rozpadne na několik částí.



Pro $y \in [-1, 0]$ se jedná o trojúhelník, kde $0 \leq x \leq y + 1$. Dále pro $y \in [0, 1]$ se jedná o čtverec, kde $0 \leq x \leq 1$. Nakonec na intervalu $y \in [1, 2]$ se změní dolní ohraničení na parabolu a můžeme vyjádřit $x = \pm\sqrt{x-1}$. Protože máme množinu M v polorovině $x \geq 0$, tak bereme $\sqrt{x-1} \leq x \leq 1$.
Nyní převedeme počítaný integrál na dvojnásobný

$$\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_{-1}^{0}\int_{0}^{y+1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_0^1\int_0^1 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_1^2\int_{\sqrt{y-1}}^{1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ \\ \int_0^1\int_{x-1}^{x^2+1} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2 + 1 - x + 1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1 = \frac{2-3+12}{6} = \frac{11}{6}. \end{cases}$$

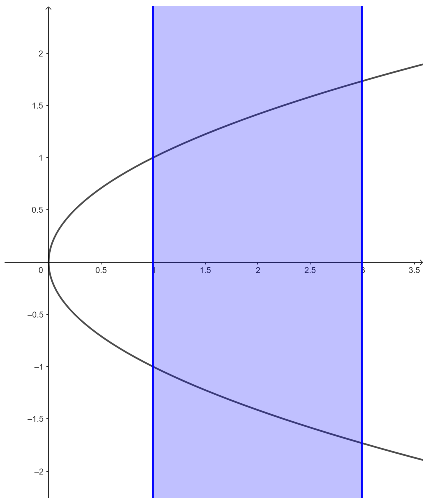
Př. 43 *Vypočtěte dvojný integrál*

$$\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je omezena křivkami a nerovnostmi jako $y^2 = x$, $1 \leq x \leq 3$.

Vidíme, že ohraničení $y^2 = x$ dává obvyklou parabolu pouze se zaměněnými proměnnými. Rozsah $1 \leq x \leq 3$ nám z této paraboly vysekne pás, který je zdola ohraničen dolním ramenem paraboly a shora horním ramenem paraboly. Převedeme tedy počítaný integrál na dvojnásobný

$$\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^3 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_1^3 2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right]_1^3 = \frac{4}{3}\left(\sqrt{27}-1\right).$$



Z pohledu osy y by se množina M rozpadla na 3 oblasti a to:

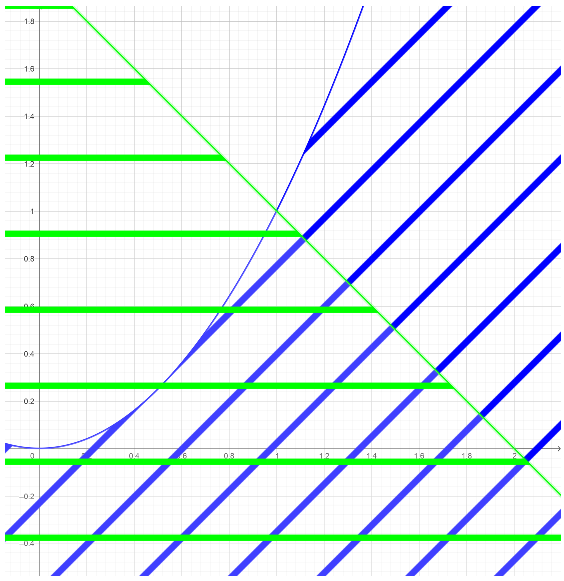
1. $-\sqrt{3} \leq y \leq -1$ a $y^2 \leq x \leq 3$,
2. $-1 \leq y \leq 1$ a $1 \leq x \leq 3$,
3. $1 \leq y \leq \sqrt{3}$ a $y^2 \leq x \leq 3$.

Př. 44 *Vypočtěte dvojný integrál*

$$\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je vymezena nerovnostmi $y \le x^2$, $y \le -x+2$, $y \ge 0$, $x \ge 0$.

Najdeme nejprve průsečík funkcí $y = x^2$ a $y = -x+2$. Dostáváme tak skrze rovnost $x^2 = y = -x+2$ polynom $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$ jehož kořeny jsou $x_1 = 1$ a $x_2 = -2$. Neboť se pohybujeme na kladné poloose x, hledaným průsečíkem je pro $x_1 = 1$ bod $[1,1]$. Průsečíky křivek $y = x^2$ a $y = -x+2$ s kladnou poloosou x pak snadno nalezneme jako body $[0,0]$ a $[2,0]$. Na intervalu $[0,1]$ vidíme, že $0 \le x^2 \le 1 \le -x+2$. Na intervalu $[1,2]$ platí naopak $x^2 \ge 1 \ge -x+2 \ge 0$. Jinde nás situace nezajímá, neboť pak není splněna podmínka $0 \le y \le -x+2$, z níž vyplývá $x \le 2$, nebo není splněna podmínka $x \ge 0$. Nutně musí také platit, že $y \le \min\{x^2, 2-x\}$.
Křivky můžeme také vykreslit na obrázku spolu s uvažovanými množinami



Z těchto úvah vidíme, že množina M je ohraničena pro $x \in [0,1]$ jako $0 \le y \le x^2$ a pro $x \in [1,2]$ je $0 \le y \le 2-x$. Druhým způsobem popisu množiny M vidíme z obrázku, že pro $0 \le y \le 1$ platí $\sqrt{y} \le x \le 2-y$. Nyní převedeme počítaný integrál na dvojnásobný

$$\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_0^1 \int_0^{x^2} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \int_0^{-x+2} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ \\ \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{-y+2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 -y+2-\sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \left[-\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{2}{3}\sqrt{y^3}\right]_0^1 = \frac{-3+12-4}{6} = \frac{5}{6}. \end{cases}$$

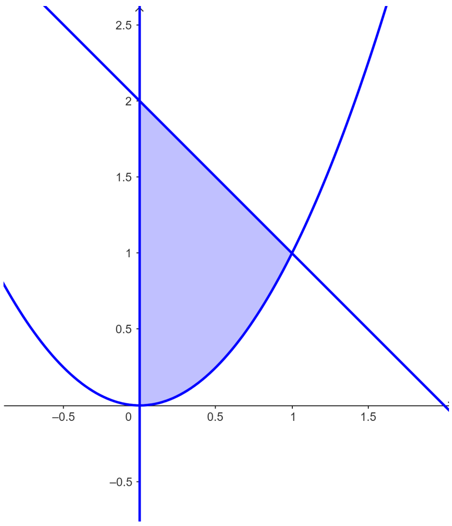
Př. 45 *Vypočtěte dvojný integrál*

$$\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je vymezena jako $y \geq x^2$, $y \leq -x+2$, $x \geq 0$.

Průsečík křivek $y = x^2$ a $y = -x+2$ jsme nalezli již v předchozím příkladě. Můžeme tedy převést počítaný integrál na dvojnásobný

$$\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_{x^2}^{-x+2} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2 - x - x^2\,\mathrm{d}x = \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{12-2-3}{6} = \frac{7}{6}.$$

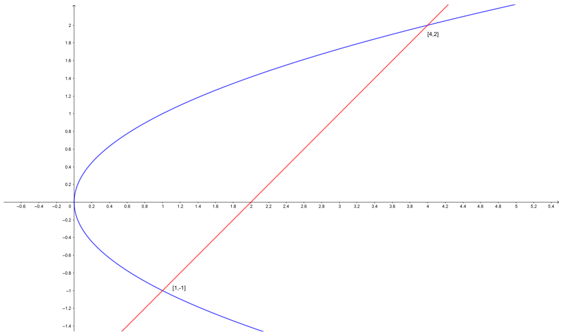


Př. 46 *Vypočtěte dvojný integrál*

$$\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde hranice množiny M *tvoří křivky* $y^2 = x$, $y = x - 2$.

Nejdříve spočítáme průsečíky obou křivek, tj. $y^2 = x = y + 2$. Tedy hledáme kořeny $0 = y^2 - y - 2 = (y-2)(y+1)$. Průsečíky jsou body $[1,-1]$ a $[4,2]$. Vykreslením křivek získáme následující situaci.



Pokud se pohybujeme po ose x, pak se horní ohraničení množiny M nemění a jejím horní rameno paraboly $y = \sqrt{x}$. Dolní hranice se naopak mění a pro $x \in [0,1]$ je to dolní rameno paraboly $y = -\sqrt{x}$ a pro $x \in [1,4]$ je horní hranicí přímky $y = x - 2$. Pokud se pohybujeme po ose y, zůstávají horní a dolní ohraničení stejné a tedy pro $-1 \le y \le 2$ je $y^2 \le x \le y + 2$. Dostaneme tedy

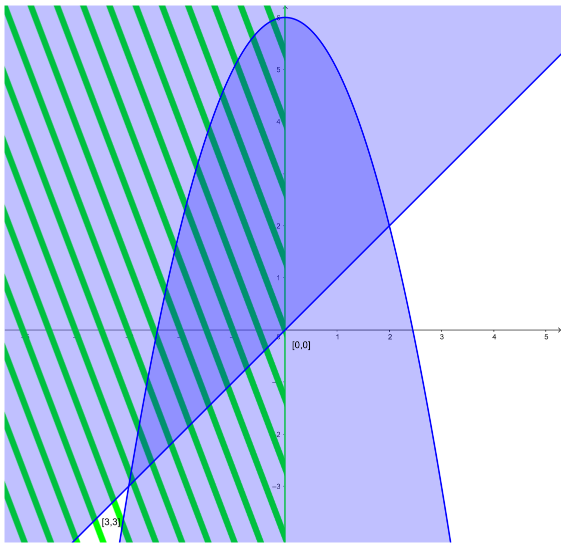
$$I = \iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_1^4 \int_{x-2}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ \\ \int_{-1}^2 \int_{y^2}^{y+2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^2 (y + 2 - y^2)\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^2 = \\ = \frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} = \frac{12+24-16-3+12-2}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}. \end{cases}$$

Př. 47 *Vypočtěte dvojný integrál*

$$\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je tvoří průnik řešení nerovností $y \geq x$, $y \leq 6 - x^2$, $x \leq 0$.

Podmínka $x \leq 0$ nám říká, že se pohybujeme v levé polorovině. Všimneme si, že podmínky můžeme spojit dohromady, tj. $x \leq y \leq 6 - x^2$ a tedy $0 \leq 6 - x - x^2 = -(x+3)(x-2)$. Můžeme si rozmyslet, že tato nerovnost je splněna pouze pro $x \in [-3, 2]$ a spolu s podmínkou $x \geq 0$ dostaneme, že množina M je vymezena tímto intervalem. Přímo ze zadání máme horní a dolní hranice množiny M, protože $x \leq y \leq 6 - x^2$. Situaci si můžeme také vykreslit



Převedeme počítaný integrál na dvojnásobný

$$\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-3}^{0} \int_{x}^{6-x^2} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{0} 6 - x^2 - x\,\mathrm{d}x = \left[6x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{0} =$$

$$= 18 - \frac{27}{3} + \frac{9}{2} = 9 + \frac{9}{2} = \frac{27}{2}.$$

Př. 48 *Vypočtěte dvojný integrál*

$$\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

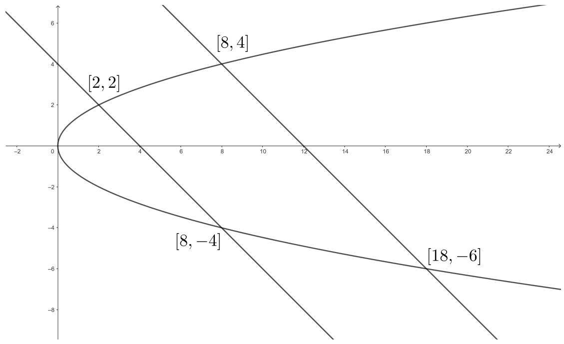
kde M je dána ohraničenými $y \leq \mathrm{e}^x + 1$, $-2 \leq x \leq 1$, $y \geq -2$.

Neboť na intervalu $[-2, 1]$ splňuje funkce $\mathrm{e}^x + 1 > 0 > -2$, máme na intervalu jasně dané horní i dolní ohraničení. Převedeme počítaný integrál na dvojnásobný

$$\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-2}^{1}\int_{-2}^{\mathrm{e}^x+1} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{1} \mathrm{e}^x + 3\,\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x + 3x]_{-2}^{1} =$$
$$= \mathrm{e}^1 + 3 - \mathrm{e}^{-2} + 6 = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{-2} + 9.$$

Př. 49 *Spočtěte* $\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$*, kde* M *je dána skrze* $x+y=4$*,* $x+y=12$ *a* $y^2=2x$*.*

Nejprve nalezneme průsečíky ohraničujících funkcí. Přímky $x+y=4$ a $x+y=12$ jsou rovnoběžné, nemají tedy žádný průsečík. Průsečík křivek $x+y=12$ a $y^2=2x$ dostaneme skrze kořeny polynomu $0=y^2+2y-24=(y+6)(y-4)$ což dává průsečíky $[18,-6]$ a $[8,4]$. Průsečík křivek $x+y=4$ a $y^2=2x$ je obdobně dán skrze kořeny polynomu $0=(y+4)(y-2)$. Průsečíky jsou $[8,-4]$ a $[2,2]$. Musíme si pouze rozmyslet která funkce má větší funkční hodnoty a která menší. To můžeme zjistit analyticky nebo také graficky z obrázku.



Vidíme, že množinu M musíme rozložit na několik částí. Vzhledem k ose x máme

1. $2\le x\le 8$, $4-x\le y\le\sqrt{2x}$
2. $8\le x\le 16$, $-\sqrt{2x}\le y\le 12-x$

A vzhledem k ose y dostáváme varianty

1. $-6\le y\le -4$, $\frac{y^2}{2}\le x\le 12-y$
2. $-4\le y\le 2$, $4-y\le x\le 12-y$
3. $2\le y\le 4$, $\frac{y^2}{2}\le x\le 12-x$

Dostáváme tak integrál

$$\begin{aligned}\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_2^8\int_{4-x}^{\sqrt{2x}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_8^{18}\int_{-\sqrt{2x}}^{12-x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_2^8 \sqrt{2x}+x-4\,\mathrm{d}x + \int_8^{18} 12-x+\sqrt{2x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \left[\frac{2\sqrt{2x^3}}{3}+\frac{x^2}{2}-4x\right]_2^8 + \left[12x-\frac{x^2}{2}+\frac{2\sqrt{2x^3}}{3}\right]_8^{18} = \\ &= \frac{2^6}{3}+2^5-2^5-\frac{2^3}{3}+6+120-2\cdot 3^4+2^3 3^2+2^5-\frac{2^6}{3}=\frac{106}{3}.\end{aligned}$$

Př. 50 *Spočtěte plochu ohraničenou křivkami $y = \mathrm{e}^x$, $y = \mathrm{e}^{-x}$, $x = -4$ a $x = 4$.*

Plochu spočítáme jednoduše integrálem jedné proměnné, nebo pro procvičení skrze dvojný integrál. Přičemž platí, že

$$S = \iint_M 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

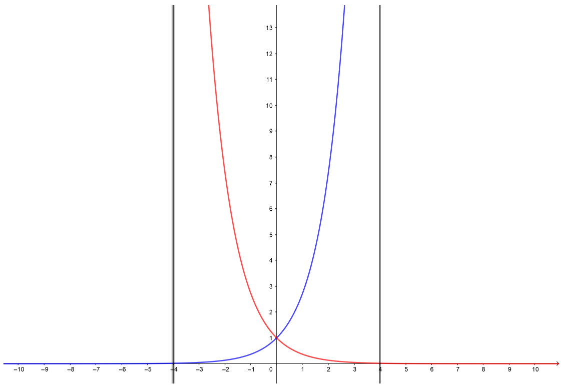
Víme, že křivky $y = \mathrm{e}^x$ a $y = \mathrm{e}^{-x}$ se protínají v bodě $[0, 1]$ a na $x \geq 0$ je $\mathrm{e}^x \geq \mathrm{e}^{-x}$ a pro $x \leq 0$ je $\mathrm{e}^x \leq \mathrm{e}^{-x}$. Proto rozdělíme množinu M na dvě části, čímž dostaneme

1. $x \in [-4, 0]$, $\mathrm{e}^x \leq y \leq \mathrm{e}^{-x}$
2. $x \in [0, 4]$, $\mathrm{e}^{-x} \leq y \leq \mathrm{e}^x$

Počítáme

$$\begin{aligned} S &= \iint_M 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_{-4}^{0} \int_{\mathrm{e}^x}^{\mathrm{e}^{-x}} \mathrm{d}y \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{4} \int_{\mathrm{e}^{-x}}^{\mathrm{e}^{x}} \mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \\ &= 2 \int_{0}^{4} \int_{\mathrm{e}^{-x}}^{\mathrm{e}^{x}} \mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = 2 \int_0^4 \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x = 2 \left[\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right]_0^4 = \\ &= 2 \left(\mathrm{e}^4 + \frac{1}{\mathrm{e}^4} - 2\right). \end{aligned}$$

Křivky můžeme také vykreslit



Necháme se přitom zmást zvláštní podobou množiny.

Př. 51 *Spočtěte plochu ohraničenou křivkami $y = 0$, $y = \cos x$, $x = 0$ a $x = \frac{\pi}{2}$.*

Plochu spočítáme jednoduše integrálem jedné proměnné, nebo pro procvičení skrze dvojný integrál. Přičemž platí, že

$$S = \iint_M 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

kde M udává vyšetřovanou plochu. Víme, že na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ je $0 \leq \cos x$. Snadno tak převedeme dvojný integrál na dvojnásobný a počítáme

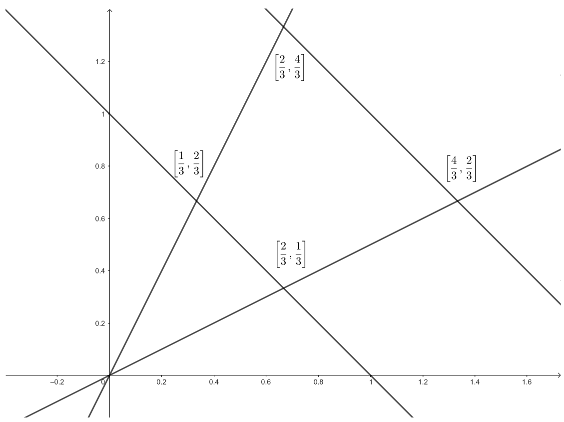
$$S = \iint_M 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos x} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, \mathrm{d}x = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Př. 52 *Spočtěte plochu ohraničenou křivkami $x+y=1$, $x+y=2$, $y=\frac{x}{2}$, $y=2x$.*

Všimněme si, že všechny hraniční křivky jsou přímky, které mají maximálně jeden společný bod. Křivky $x+y=1$, $x+y=2$ jsou rovnoběžné, proto nemají žádný průnik. Přímky $y=\frac{x}{2}$, $y=2x$ mají očividně průnik v bodě $[0,0]$. Další průniky pak dopočítáme jako

$$\begin{aligned} x+y=1 \cap y=\frac{x}{2} &\to \left[\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right], \\ x+y=1 \cap y=2x &\to \left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right], \\ x+y=2 \cap y=\frac{x}{2} &\to \left[\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right], \\ x+y=2 \cap y=2x &\to \left[\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right]. \end{aligned}$$

Mohli bychom si tedy množinu nakreslit. Uvažovaná množina M vypadá jako



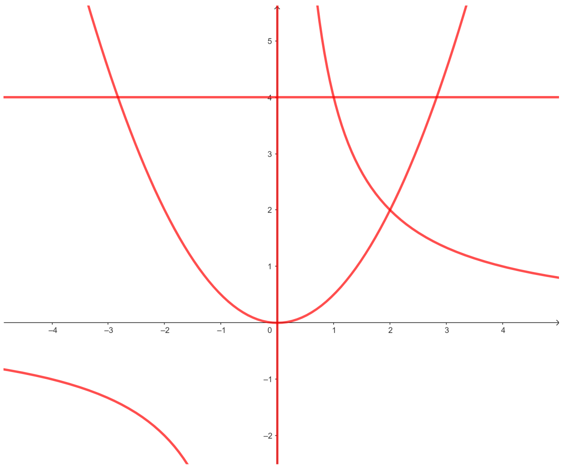
Dáme si pozor, kde se nachází ohraničená množina a nenecháme se zmást trojúhelníkem $[0,0]$, $\left[\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$. Zde vycházíme z předpokladu, že chceme, aby se všechny křivky využily.

Počítáme tedy integrál

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \int_{1-x}^{2x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} \int_{\frac{x}{2}}^{2-x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 3x-1\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} 2-\frac{3x}{2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \left[\frac{3x^2}{2}-x\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} + \left[2x-\frac{3x^2}{4}\right]_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} = \\ &= \frac{2}{3}-\frac{2}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{4}{3}-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Př. 53 *Spočtěte plochu ohraničenou křivkami $xy = 4$, $y = 4$, $x^2 = 2y$, $x = 0$.*

Vzhledem ke komplikovanější souhře křivek plochu nejsnáze analyzujeme, pokud si ji vykreslíme.



Nyní se nabízí několik oblastí, pro něž bychom mohli počítat plochu. Dáme si však pozor, že jen prostřední oblast je omezena všemi křivkami. Vidíme, že chceme nalézt několik průsečíků, jsou to průsečíky křivek $xy = 4$, $y = 4$, což nám dává bod $[1, 4]$ a průsečík křivek $xy = 4$, $x^2 = 2y$, což nám dosazením dává rovnost $x^3 = 8$ a tedy bod $[2, 2]$. Z pohledu osy x dojde ke změně horního ohraničení z křivky $y = 4$ na křivku $y = \frac{4}{x}$. Z pohledu osy y se také mění horní ohraničení a to z paraboly $x = \sqrt{2y}$ na hyperbolu $x = \frac{4}{y}$.
Plochu vyjádříme jako

$$S = \int_0^1 \int_{\frac{x^2}{2}}^4 \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x + \int_1^2 \int_{\frac{x^2}{2}}^{\frac{4}{x}} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2y}} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x + \int_2^4 \int_0^{\frac{4}{x}} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

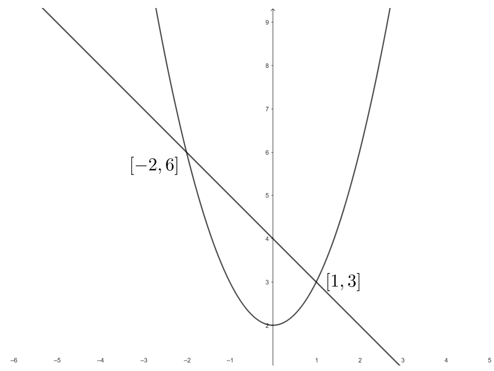
Počítáme jeden z integrálů a máme

$$S = \int_0^1 4 - \frac{x^2}{2} \, \mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{4}{x} - \frac{x^2}{2} \, \mathrm{d}x = \left[4x - \frac{x^3}{6}\right]_0^1 + \left[4 \ln x - \frac{x^3}{6}\right]_1^2 =$$
$$= 4 - \frac{1}{6} + 4 \ln 2 - \frac{8}{6} + \frac{1}{6} = 4 \ln 2 + \frac{8}{3}.$$

1.4 Integrace přes obecnou množinu

Př. 54 *Spočtěte* $\iint_M y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$*, kde* M *je ohraničena křivkami* $x^2 - y + 2 = 0$*,* $x + y - 4 = 0$*.*

Nejprve spočteme průsečík obou křivek. Dostáváme polynom $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$. Průsečíky jsou tedy $[-2,6]$ a $[1,3]$. Můžeme si množinu M zobrazit.



Případně si nic kreslit nemusíme. Stačí si všimnout, že pro $-2 \le x \le 1$ je $0 \ge (x+2)(x-1) = x^2 + x - 2 \Rightarrow 4 - x \ge x^2 + 2$. Případně rovnou můžeme dosadit do nerovnosti jistý bod, např. $x = 0$, pro nějž je nerovnost $4 - x \ge x^2 + 2$ splněna a dále pak víme, že vzhledem k průsečíkům musí tato nerovnost platit na celém intervalu. Dostáváme integrál

$$\iint_M y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-2}^{1}\int_{x^2+2}^{4-x} y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{1}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2+2}^{4-x}\mathrm{d}x = \int_{-2}^{1}\frac{(4-x)^2-(x^2+2)^2}{2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-2}^{1}\frac{16-8x+x^2-(x^4+4x^2+4)}{2}\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{1}\frac{12-8x-3x^2-x^4}{2}\,\mathrm{d}x =$$

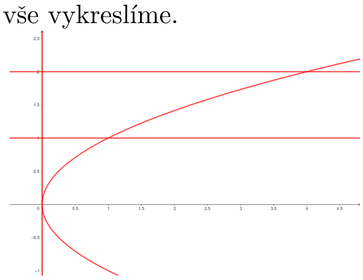
$$= \left[6x - 2x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{10}\right]_{-2}^{1} = 6 - 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{10} + 12 + 8 - 4 - \frac{32}{10} = \frac{162}{10}.$$

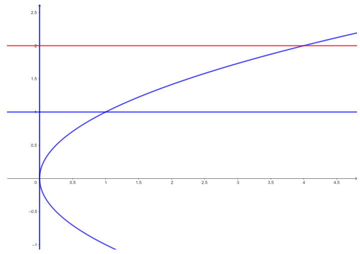
Př. 55 *Spočtěte*

$$\iint_M \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je omezena implicitními funkcemi $x=0$, $y=1$, $y=2$, $y^2=x$.

Vidíme, že na intervalu $1\le y\le 2$ jasně platí $0\le x\le y^2$, tj. hranice množiny M můžeme určit již ze zadání. Obdobně můžeme převést integrál z pohledu osy x, pokud si všimneme, že na intervalu $x\in[0,1]$ je $\sqrt{x}\le 1\le 2$ a pro $x\in[1,4]$ je $1\le\sqrt{x}\le 2$. Snáze se však situace nahlédne, pokud si vše vykreslíme.





Všimněme si, že po vykreslení není zcela jasné, která z ohraničených oblastí udává množinu M. Mohli bychom uvažovat také oblast vymezenou skrze $x=0$, $y=1$, $y^2=x$. Avšak zde bychom jednu z podmínek nevyužili a tedy se nejedná o množinu M.

Počítáme integrál

$$\iint_M \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_1^2\int_0^{y^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\int_1^2\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x+\int_1^4\int_{\sqrt{x}}^2\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Pokud bychom integrovali

$$\int \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\ \mathrm{d}x,$$

pak bereme y jako parametr a máme

$$\int \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\ \mathrm{d}x=y\,\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}+C.$$

Naopak pokud bychom první integrovali

$$\int \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\ \mathrm{d}y,$$

pak nevíme jak. Zde je třeba si rozmyslet správné pořadí integrace.
Vybereme si vhodný integrál k dalšímu výpočtu a máme

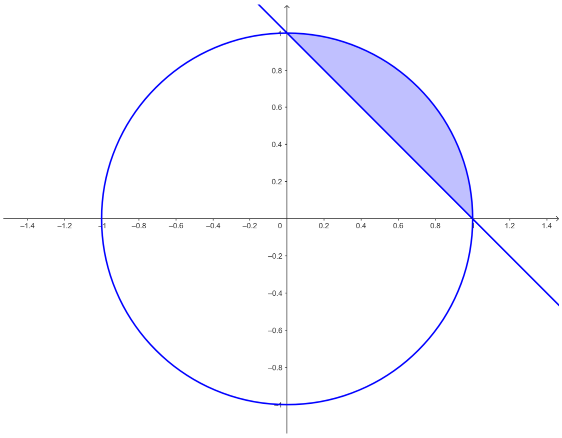
$$\begin{aligned}\iint_M \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_1^2\int_0^{y^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_1^2\left[y\,\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\right]_0^{y^2}\ \mathrm{d}y=\int_1^2 y\,\mathrm{e}^{y}-y\,\mathrm{d}y=\\&=\left[y\,\mathrm{e}^{y}-\frac{y^2}{2}\right]_1^2-\int_1^2\mathrm{e}^{y}\ \mathrm{d}y=2\,\mathrm{e}^2-2-\mathrm{e}^1+\frac{1}{2}-\mathrm{e}^2+\mathrm{e}^1=\mathrm{e}^2-\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Př. 56 *Spočtěte*

$$\iint_M xy^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je dána skrze $x^2+y^2 \le 1$, $x+y \ge 1$.

Vyšetřovanou množinu si můžeme vykreslit



Vidíme tedy, že množina M je stejná z pohledu osy x stejně jako z pohledu osy y, neboť je množina symetrická přes osu $y=x$. Převedeme integrál

$$\iint_M xy^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} xy^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} xy^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Vybereme si vhodný integrál k dalšímu výpočtu a máme

$$\begin{aligned}\iint_M xy^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} xy^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y^2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}y = \\ &= \int_0^1 y^2 \frac{(1-y^2)-(1-y)^2}{2} \,\mathrm{d}y = \\ &= \int_0^1 y^3 - y^4 \,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{20}.\end{aligned}$$

Všimněme si, že pokud bychom integrovali nejprve

$$\int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} xy^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$$

pak bychom museli v integrálu pracovat dále s odmocninami.

Př. 57 *Spočtěte*

$$\iint_M \mathrm{e}^y + 2x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je dána skrze $y \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

Omezení máme již zadané ve správném tvaru. Proto snadno převedeme dojný integrál na dvojnásobný a počítáme

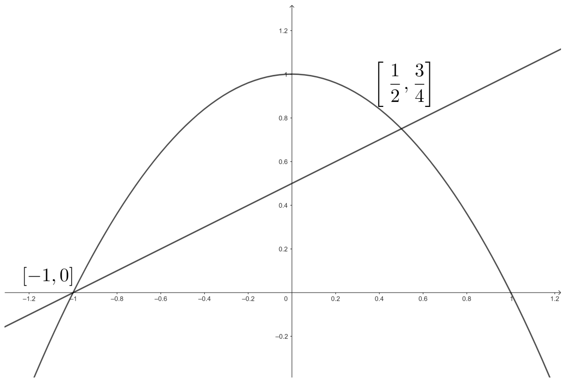
$$\begin{aligned}\iint_M \mathrm{e}^y + 2x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \int_y^1 \mathrm{e}^y + 2x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[x\,\mathrm{e}^y + x^2\right]_y^1 \mathrm{d}y = \\ &= \int_0^1 (1-y)\,\mathrm{e}^y + 1 - y^2 \,\mathrm{d}y = \left[(1-y)\,\mathrm{e}^y\right]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^y \,\mathrm{d}y + \left[y - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \\ &= -1 + \mathrm{e} - 1 + 1 - \frac{1}{3} = \mathrm{e} - \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Př. 58 *Spočtěte*

$$\iint_M x - y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

kde M *je dána skrze* $y = 1 - x^2$, $2y = x + 1$.

Nejdříve nalezneme průsečíky křivek skrze rovnici $2-2x^2 = x+1$, což vede na polynom $2x^2+x-1$ a hledané průsečíky jsou $[-1,0]$ a $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$. Pro $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$ je $\frac{x+1}{2} \leq 1 - x^2$, stačí vše ověřit dosazením $x = 0$ a uvážením, že máme známé průsečíky a mezi nimi se nemůže nerovnost změnit vzhledem ke spojitosti. Obdobně můžeme křivky vykreslit



Počítáme

$$\begin{aligned}
\iint_M x - y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{x+1}{2}}^{1-x^2} x - y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left[xy - \frac{y^2}{2} \right]_{\frac{x+1}{2}}^{1-x^2} \mathrm{d}x = \\
&= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} x - x^3 - \frac{(1-x^2)^2}{2} - \frac{x^2+x}{2} + \frac{(x+1)^2}{8} \, \mathrm{d}x = \\
&= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^{\frac{1}{2}} + \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{-1 + 2x^2 - x^4 - x^2 - x}{2} + \frac{x^2 + 2x + 1}{8} \, \mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{8} - \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \left[-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^2+x}{8} \right]_{-1}^{\frac{1}{2}} = \\
&= \frac{8 - 1 - 32 + 16}{2^6} + \left[\frac{-9x - x^2 + 5x^3}{24} - \frac{x^5}{10} \right]_{-1}^{\frac{1}{2}} = -\frac{153}{320}.
\end{aligned}$$

Výpočet bychom si mohli usnadnit, pokud bychom zavedli vhodnou substituci $t = x + 1$ a máme

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{\frac{1}{2}} -\frac{(1-x)^2(1+x)^2}{2} - \frac{x(x+1)}{2} + \frac{(x+1)^2}{8} \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{3}{2}} -\frac{(t-2)^2 t^2}{2} - \frac{(t-1)t}{2} + \frac{t^2}{8} \, \mathrm{d}t = \\
&= \int_0^{\frac{3}{2}} -\frac{t^4 - 4t^3 + 5t^2 - t}{2} + \frac{t^2}{8} \, \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Můžeme tak ušetřit nějaké členy během integrování.

Př. 59 *Spočtěte integrál* $\iint_M xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$*, kde* M *je ohraničená křivkami* $y = 4 - x$*,* $y^2 = 2x$*.*

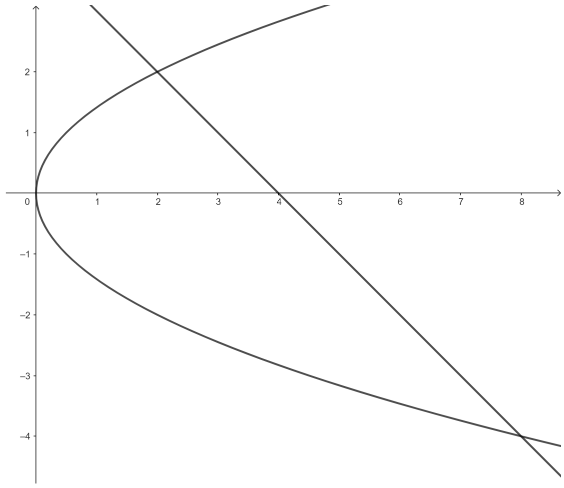
Nalezneme průnik křivek skrze $0 = y^2 + 2y - 8 = (y+4)(y-2)$ což dává body $[2,2]$ a $[8,-4]$. Navíc platí, že je pro $y \in [-4, 2]$

$$\begin{aligned} (y+4)(y-2) = y^2 + 2y - 8 &\le 0 \\ \frac{y^2}{2} &\le 4 - y. \end{aligned}$$

Tj. množina M je z pohledu osy y na intervalu $-4 \le y \le 2$ platí $\frac{y^2}{2} \le x \le 4 - y$. Z pohledu osy x vidíme, že pro $x \in [2, 8]$ je

$$\begin{aligned} (x-8)(x-2) &\le 0 \\ x^2 - 10x + 16 &\le 0 \\ x^2 - 8x + 16 &\le 2x \\ (4-x)^2 &\le 2x \\ 4 - x &\le \sqrt{2x} \end{aligned}$$

Musíme si však dát pozor, abychom tímto postupem získali celou množinu. Pokud si množinu M vykreslíme, dostaneme



Vidíme, že z pohledu osy x nám ještě chybí část $x \in [0, 1]$, kde je $-\sqrt{2x} \le y \le \sqrt{2x}$.

Počítáme integrál

$$\begin{aligned} \iint_M xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-4}^{2} \int_{\frac{y^2}{2}}^{4-y} xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-4}^{2} y \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{y^2}{2}}^{4-y} \mathrm{d}y = \\ &= \int_{-4}^{2} y \left(\frac{16 - 8y + y^2}{2} - \frac{y^4}{8}\right) \mathrm{d}y = \int_{-4}^{2} 8y - 4y^2 + \frac{y^3}{2} - \frac{y^5}{8} \,\mathrm{d}y = \\ &= \left[4y^2 - \frac{4y^3}{3} + \frac{y^4}{8} - \frac{y^6}{48}\right]_{-4}^{2} = 90. \end{aligned}$$

Př. 60 *Vypočtěte integrál* $\iint_M xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, *kde* M *je ohraničená*

a) rovnicemi $x = 0$, $x = A$, $y = 0$, $y = B$.

b) omezením $4x^2 + y^2 \leq 4$.

a) V prvním případě je množina M jednoduše obdélník $[0, A] \times [0, B]$ a tedy

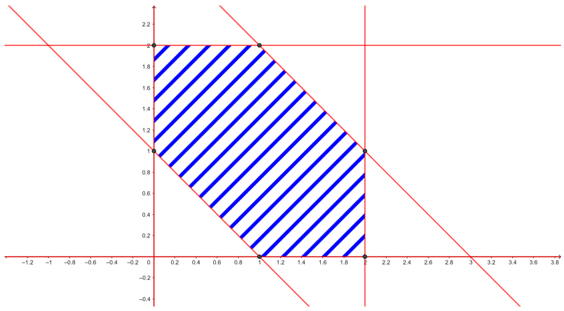
$$\iint_M xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^A \int_0^B xy \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^A x \,\mathrm{d}x \int_0^B y \,\mathrm{d}y = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^A \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^B = \frac{A^2B^2}{4}.$$

b) Vidíme, že omezení $4x^2+y^2 \leq 4$ tvoří elipsu se středem v počátku a s poloosami rovnoběžnými s osami x a y. Položíme-li $y = 0$, dostáváme ohraničení $x^2 \leq 1$ a tedy $-1 \leq x \leq 1$. Z rovnice elipsy zase vyjádříme $y = \pm\sqrt{4 - 4x^2}$ a dostáváme integrál

$$\iint_M xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{4-4x^2}}^{\sqrt{4-4x^2}} xy \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 x \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-\sqrt{4-4x^2}}^{\sqrt{4-4x^2}} \mathrm{d}x =$$
$$= \int_{-1}^1 x\frac{4 - 4x^2 - (4 - 4x^2)}{2} \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 0 \,\mathrm{d}x = 0.$$

Př. 61 *Vypočtěte integrál* $\iint_M 2xy + 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$*, kde* M *je ohraničená* $x = 0$*,* $x = 2$*,* $y = 0$*,* $y = 2$*,* $y = 1 - x$*,* $y = 3 - x$*.*

Vzhledem ke komplikované situaci začneme výpočet vykreslením omezení. Máme



Rohy čtverce do množiny nespadají, neboť chceme množinu, která je ohraničena všemi křivkami. Najdeme průsečíky, které leží na hranicích zkoumané množiny. Z obrázku nebo dopočtem získáme body $[0, 1]$, $[0, 2]$, $[0, 1]$, $[2, 1]$, $[0, 2]$ a $[1, 2]$. Vidíme, že dolní a horní ohraničení se mění z pohledu osy x pro $x = 1$ a z pohledu osy y pro $y = 1$. Vzhledem k ose x tak dostaneme 2 části množiny M jako

1. $0 \leq x \leq 1$ a $1 - x \leq y \leq 2$
2. $1 \leq x \leq 2$ a $0 \leq y \leq 3 - y$

Počítáme integrál

$$\begin{aligned}
\iint_M 2xy + 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \int_{1-x}^2 2xy + 1 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x + \int_1^2 \int_0^{3-x} 2xy + 1 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \left[xy^2 + y\right]_{1-x}^2 \,\mathrm{d}x + \int_1^2 \left[xy^2 + y\right]_0^{3-x} \,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 4x + 2 - x(1 - 2x + x^2) - 1 + x \,\mathrm{d}x + \int_1^2 x(9 - 6x + x^2) + 3 - x \,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 -x^3 + 2x^2 + 4x + 1 \,\mathrm{d}x + \int_1^2 x^3 - 6x^2 + 8x + 3 \,\mathrm{d}x = \\
&= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + 2x^2 + x\right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 + 3x\right]_1^2 = \\
&= \frac{41}{12} + \frac{19}{4} = \frac{49}{6}.
\end{aligned}$$

Př. 62 *Spočtěte integrál*

$$I = \iint_M \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{y}{\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

kde množina M je ohraničená křivkami $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$, $y = \sqrt{x}$.

Hned vidíme z ohraničujících křivek, že $1 \le x \le 4$ a $0 \le y \le \sqrt{x}$. Proto po aplikaci Fubiniovy věty dostaneme

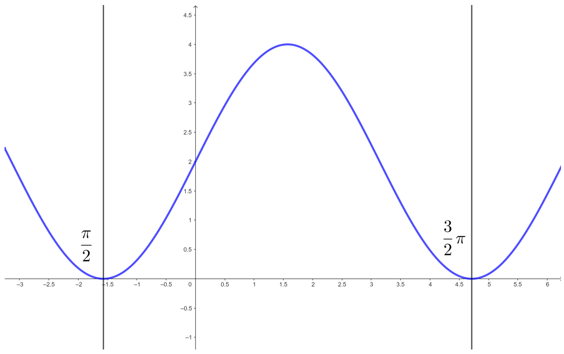
$$I = \int_1^4 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{y}{\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int_1^4 \left[\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{\frac{y}{\sqrt{x}}}\right]_0^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int_1^4 (\mathrm{e}-1)\sqrt{x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{3(\mathrm{e}-1)}{2}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = 7(\mathrm{e}-1).$$

Př. 63 *Spočtěte integrál*

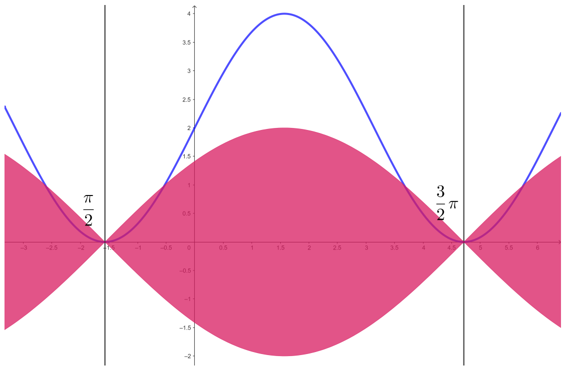
$$I = \iint_M A^2(\sin x + 1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde množina M *splňuje* $\pi \geq x \geq 0$, $\left(\frac{y}{A}\right)^2 \leq 2 + 2\sin x$, *pro parametr* $A > 0$.

Nejprve si rozmysleme, že pro $\frac{3}{2}\pi \geq x \geq \frac{\pi}{2}$ vypadá funkce $2 + 2\sin x$ jako



Potom vidíme, že pro $\left(\frac{y}{A}\right)^2 \leq 2 + 2\sin x$ je $-A\sqrt{2 + 2\sin x} \leq y \leq A\sqrt{2 + 2\sin u}$. Kde si lze promyslet, že pro $A = 1$ bude množina vypadat následovně



Na intervalu toto $\pi \geq x \geq 0$ tak můžeme určit dobře horní a dolní mez, čímž dostaneme integrál

$$I = A^2 \int_0^\pi \int_{-A\sqrt{2+2\sin x}}^{A\sqrt{2+2\sin x}} \sin x + 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{2}A^3 \int_0^\pi \sqrt{(\sin x + 1)^3}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left|\, \sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right| = 2\sqrt{2}A^3 \int_0^\pi \sqrt{\left(\cos 2\frac{2x + \pi}{4} + 1\right)^3}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left|\ \cos^2 x = \tfrac{1 + \cos 2x}{2}\ \right| = 2\sqrt{2}A^3 \int_0^\pi \sqrt{2^3 \cos^6 \frac{2x + \pi}{4}}\,\mathrm{d}x.$$

Při odmocňování si nyní musíme dát pozor, že funkce $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ má na intervalu $\pi \geq x \geq 0$

nulový bod pro $x = \frac{\pi}{2}$ a je tedy na intervalu $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ záporná. Máme

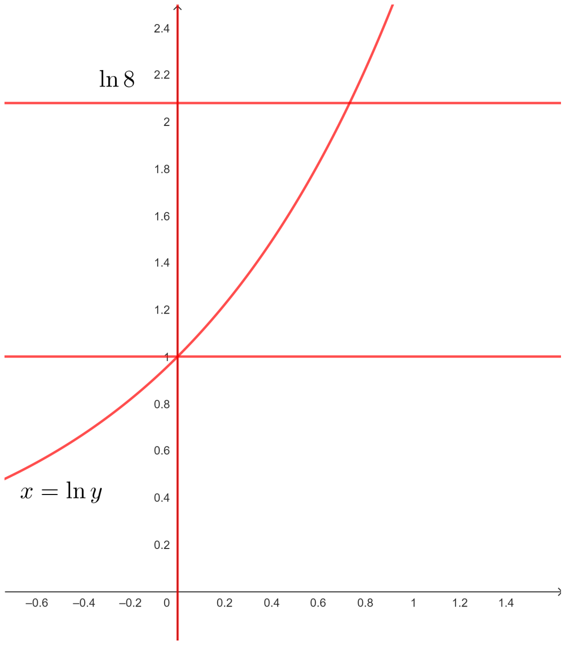
$$
\begin{aligned}
I &= 8A^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\left(\frac{2x+\pi}{4}\right)\,\mathrm{d}x - 8A^3 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3\left(\frac{2x+\pi}{4}\right)\,\mathrm{d}x = \\
&= \left| \begin{array}{c} t = \sin\left(\frac{2x+\pi}{4}\right) \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2x+\pi}{4}\right)\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = 16A^3 \int_{\sin\frac{\pi}{4}}^{\sin\frac{\pi}{2}} 1 - t^2\,\mathrm{d}t - 16A^3 \int_{\sin\frac{\pi}{2}}^{\sin\frac{3\pi}{4}} 1 - t^2\,\mathrm{d}t = \\
&= 16A^3 \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} - 16A^3 \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_{1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 32A^3 \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} = \\
&= \frac{64}{3}A^3 - \frac{40\sqrt{2}}{3}A^3.
\end{aligned}
$$

Př. 64 *Spočtěte integrál*

$$I = \iint_M \mathrm{e}^{x+y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

kde množina M je ohraničená křivkami $y = 1$, $x = 0$, $y = \ln 8$, $x = \ln y$.

Můžeme vyjádřit $y = \mathrm{e}^x$ a vykreslíme si křivky, abychom dostali



Křivky $y = \ln 8$ a $x = \ln y$ mají průnik pro $x = \ln \ln 8$ a tedy $0 \le x \le \ln \ln 8$. Dále také vidíme, že $\mathrm{e}^x \le y \le \ln 8$ a tedy počítáme

$$I = \int_0^{\ln \ln 8} \int_{\mathrm{e}^x}^{\ln 8} \mathrm{e}^{x+y} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^{\ln \ln 8} \left[\mathrm{e}^{x+y}\right]_{\mathrm{e}^x}^{\ln 8} \mathrm{d}x = \int_0^{\ln \ln 8} \mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^x} + \mathrm{e}^{x + \ln 8} \, \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^{\ln \ln 8} \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} + 8 \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} + 8 \, \mathrm{e}^x\right]_0^{\ln \ln 8} = 8 + 8 \ln 8 - \mathrm{e} - 8 = 8 \ln 8 - \mathrm{e}\,.$$

1.5 Pokročilejší příklady

Př. 65 *Z definice ukažte, že integrál splňuje*

$$\iint_M f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = (d-c)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

pro libovolný obdélník $M = [a,b]\times[c,d]$ *a libovolnou spojitou funkci* $f(x)$.

Vyjdeme ze znalosti, že libovolný ohraničený obdélník udává měřitelnou množinu a funkce $f(x)$ je spojitá, tedy ohraničená a integrovatelná. Zvolíme libovolné dělení x_i intervalu $[a,b]$ a libovolné dělení y_j intervalu $[c,d]$, které splňuje pro $i,j = 0,\dots,n$, že $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, a $c = y_0 < y_1 < \dots y_n = d$. Následně pozorujeme, že platí

$$M_{i,j} = \sup\{f(x)|x\in[x_{i-1},x_i], y\in[y_{j-1},y_j]\} = \sup\{f(x)|x\in[x_{i-1},x_i]\} = M_i,$$

Neboť funkce $f(x)$ je integrovatelná, tak platí pro

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} M_{i,j}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}),$$

že

$$\iint_M x\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S(n).$$

Přitom můžeme vytknout

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n}\left(M_i(x_i - x_{i-1})\sum_{j=1}^{n}(y_j - y_{j-1})\right) = |\text{teleskopický princip}| =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(M_i(x_i - x_{i-1})(d-c)\right) = (d-c)\sum_{i=0}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Máme

$$\iint_M x\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S(n) = (d-c)\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = (d-c)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde poslední rovnost platí z definice Riemanova integrálu funkce jedné proměnné.

Př. 66 *Z definice ukažte, že integrál*

$$\iint_M x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2},$$

kde $M = [0,1]^2$.

Mějme $C^n_{i,j}$ čtverce řádu n

$$C^n_{i,j} = \left\{ [x,y] \middle| \frac{i}{2^n} \leq x < \frac{i+1}{2^n}, \frac{j}{2^n} \leq y < \frac{j+1}{2^n} \right\}$$

a mějme pokrytí množiny M řádu n dané jako systém neprázdných množin $D^n_{i,j} = M \cap C^n_{i,j}$. Potom víme vzhledem k tvaru M, že neprázdné jsou jen $D_{i,j} = C^n_{i,j}$, kde $i,j \in \{0,\ldots,2^n-1\}$ (zde ignorujeme hranici s prázdným vnitřkem, ale ta má nulovou míru). Následně učiníme pozorování, že platí

$$\begin{aligned}
M_{i,j} &= \sup\{f(x,y) | [x,y] \in D^n_{i,j}\} = \sup \left\{ f(x,y) \middle| x \in \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right), y \in \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right) \right\} = \\
&= \sup \left\{ x \middle| x \in \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right) \right\} = \frac{i+1}{2^n}, \\
m_{i,j} &= \inf\{f(x,y) | [x,y] \in D^n_{i,j}\} = \inf \left\{ f(x,y) \middle| x \in \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right), y \in \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right) \right\} = \\
&= \inf \left\{ x \middle| x \in \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right) \right\} = \frac{i}{2^n}.
\end{aligned}$$

Víme, že integrál $I = \iint_M x \, \mathrm{d}x$ existuje, pokud platí $\lim_{n\to\infty} S(n) = \lim_{n\to\infty} s(n) = I$, kde

$$\begin{aligned}
S(n) &= \sum_{i=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^n-1} M_{i,j} \cdot m\left(D^n_{i,j}\right), \\
s(n) &= \sum_{i=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^n-1} m_{i,j} \cdot m\left(D^n_{i,j}\right).
\end{aligned}$$

a $m\left(D^n_{i,j}\right)$ značí míru množiny $D^n_{i,j}$. Množina $D^n_{i,j}$ je čtverec, jehož míra je

$$m\left(D^n_{i,j}\right) = \left(\frac{i+1}{2^n} - \frac{i}{2^n}\right)\left(\frac{j+1}{2^n} - \frac{j}{2^n}\right) = \frac{1}{2^{2n}}.$$

Můžeme tak dosadit a dostaneme

$$\begin{aligned}
S(n) &= \sum_{i=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^n-1} \frac{i+1}{2^n} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{3n}} \sum_{i=0}^{2^n-1} (i+1) \sum_{j=0}^{2^n-1} 1 = \frac{1}{2^{3n}} \sum_{i=0}^{2^n-1} (i+1) 2^n = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{i=0}^{2^n-1} i+1, \\
s(n) &= \sum_{i=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^n-1} \frac{i}{2^n} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{3n}} \sum_{i=0}^{2^n-1} i \sum_{j=0}^{2^n-1} 1 = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{i=0}^{2^n-1} i.
\end{aligned}$$

Řada $\sum_{i=0}^{2^n-1} i$ je aritmetická, a proto máme

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} i = \frac{2^n\left(2^n-1\right)}{2}.$$

Proto

$$\begin{aligned} S(n) &= \frac{1}{2^{2n}}\frac{2^n\left(2^n+1\right)}{2} = \frac{\left(2^n+1\right)}{2^{n+1}}, \\ s(n) &= \frac{1}{2^{2n}}\frac{2^n\left(2^n-1\right)}{2} = \frac{\left(2^n-1\right)}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Nyní platí, že

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} S(n) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(2^n+1\right)}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}, \\ \lim_{n\to\infty} s(n) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(2^n-1\right)}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Vskutku integrál existuje a platí $I = \frac{1}{2}$.

Pokud bychom nepracovali se čtvercovou sítí, tak můžeme vzít libovolné ekvidistantní dělení x_i, y_j intervalu $[0,1]$ a $i,j = 0,\dots,n$, že $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$, a $0 = y_0 < y_1 < \dots y_n = 1$, čímž bychom dostali

$$\begin{aligned} D_{i,j} &= [x_{i-1}, x_i) \times [y_{j-1}, y_j), \\ m(D_{i,j}) &= (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}). \end{aligned}$$

Navíc bychom dostali

$$\begin{aligned} M_{i,j} &= \sup\{f(x,y) | x \in [x_{i-1}, x_i), y \in [y_{j-1}, y_j)\} = \sup\{x | x \in [x_{i-1}, x_i)\} = x_i, \\ m_{i,j} &= \inf\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i), y \in [y_{j-1}, y_j)\} = \inf\{x | x \in [x_{i-1}, x_i)\} = x_{i-1}. \end{aligned}$$

A tudíž

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - x_{i-1})\sum_{j=0}^{n}(y_j - y_{j-1}) = \\ &= |\text{ teleskopický princip }| = \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - x_{i-1})(y_n - y_0) = \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - x_{i-1}), \\ s(n) &= \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}(x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Dále platí, že

$$\begin{aligned} S(n) + s(n) &= \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - x_{i-1}) + x_{i-1}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - x_{i-1}^2 = \\ &= |\text{ teleskopický princip }| = x_n^2 - x_0^2 = 1^2 - 0^2 = 1. \end{aligned}$$

Za předpokladu, že integrál existuje, tak musí platit

$$\iint_M x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty} S(n) = \lim_{n\to\infty} s(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{S(n)+s(n)}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

To, že integrál existuje bychom naopak získali z vyjádření

$$S(n) - s(n) = \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - x_{i-1}) - x_{i-1}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})^2$$

Jsou- li však dělení ekvidistantní, pak

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n},$$

pro každé i. Potom je

$$S(n) - s(n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{1}{n^2} \cdot n = \frac{1}{n}.$$

Odkud bychom dostali, že

$$\lim_{n\to\infty} S(n) - s(n) = 0.$$

Tedy integrál existuje a výsledek je správný.

Př. 67 *Z definice ukažte, že integrál*

$$I = \iint_M xy \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \frac{1}{4},$$

kde $M = [0,1]^2$.

Podobně jako v předchozím příkladu máme

$$D^n_{i,j} = \left\{ [x,y] \middle| \frac{i}{2^n} \le x < \frac{i+1}{2^n}, \frac{j}{2^n} \le y < \frac{j+1}{2^n} \right\},$$
$$m\left(D^n_{i,j}\right) = \left(\frac{i+1}{2^n} - \frac{i}{2^n} \right) \left(\frac{j+1}{2^n} - \frac{j}{2^n} \right) = \frac{1}{2^{2n}}.$$

Následně učiníme pozorování, že platí

$$M_{i,j} = \sup\{f(x,y) | [x,y] \in D^n_{i,j}\} = \sup \left\{ xy \middle| x \in \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n} \right), y \in \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n} \right) \right\} =$$
$$= \frac{i+1}{2^n} \frac{j+1}{2^n} = \frac{(i+1)(j+1)}{2^{2n}},$$
$$m_{i,j} = \inf\{f(x,y) | [x,y] \in D^n_{i,j}\} = \inf \left\{ xy \middle| x \in \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n} \right), y \in \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n} \right) \right\} =$$
$$= \frac{ij}{2^{2n}}.$$

Dále bychom určili pomocí součtu aritmetické řady z předchozího příkladu

$$S(n) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^n-1} \frac{(i+1)(j+1)}{2^{2n}} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{4n}} \sum_{i=0}^{2^n-1} (i+1) \sum_{j=0}^{2^n-1} j+1 =$$
$$= \frac{1}{2^{4n}} \sum_{i=0}^{2^n-1} (i+1) \frac{2^n\left(2^n+1\right)}{2} = \frac{2^n+1}{2^{3n+1}} \frac{2^n\left(2^n+1\right)}{2} = \frac{\left(2^n+1\right)^2}{2^{2n+2}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{2n+2}},$$
$$s(n) = \frac{\left(2^n-1\right)^2}{2^{2n+2}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{2n+2}}.$$

Nyní snadno vidíme, že $\lim_{n\to\infty} S(n) = \lim_{n\to\infty} s(n) = \frac{1}{4}$. Vskutku integrál existuje a platí $I = \frac{1}{4}$.

Př. 68 *Z definice ukažte, že integrál*

$$I = \iint_M x + y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \frac{1}{3},$$

kde M se nachází v 1. kvadrantu a splňuje $x + y \leq 1$.

Můžeme si rozmyslet, že množina M je pravoúhlý, rovnoramenný trojúhelník. Pro síť řádu n

$$C_{i,j}^n = \left\{ [x,y] \middle| \frac{i}{2^n} \leq x < \frac{i+1}{2^n}, \frac{j}{2^n} \leq y < \frac{j+1}{2^n} \right\}$$

potom platí, že

$$D_{i,j}^n = M \cap C_{i,j}^n = \begin{cases} C_{i,j}^n, & 0 \leq i + j < 2^n - 1, \\ x \geq \frac{i}{2^n}, y \geq \frac{j}{2^n}, y \leq x + 1, & i + j = 2^n - 1, \\ \emptyset, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Dále si rozmysleme, že čtverců, kde je $D_{i,j}^n = C_{i,j}^n$ máme celkem $2^{n-1}(2^n - 1)$. To platí, protože v první řadě pokrytí jich máme $2^n - 1$, ve druhé $2^n - 2, \ldots$, a v poslední 0. Na diagonále máme zase 2^n pravoúhlých, rovnoramenných trojúhelníků, které označme $\overline{D}_{i,j}^n : x \geq \frac{i}{2^n}, y \geq \frac{j}{2^n}, y \leq x + 1$. Dále si rozmysleme, že jednoduše platí

$$\begin{aligned} m(C_{i,j}^n) &= \frac{1}{2^{2n}}, \\ m(\overline{D}_{i,j}^n) &= \frac{1}{2^{2n+1}}. \end{aligned}$$

Pro suprema zase platí, že

$M_{i,j}(C_{i,j}^n) = \sup\{f(x,y)|x \in [x_{i-1}, x_i), y \in [y_{j-1}, y_j)\} = \sup\{x + y|x \in [x_{i-1}, x_i), y \in [y_{j-1}, y_j)\} =,$
$m_{i,j}(C_{i,j}^n) = \inf\{f(x)|x \in [x_{i-1}, x_i), y \in [y_{j-1}, y_j)\} = \inf\{x|x \in [x_{i-1}, x_i)\} = x_{i-1}.$

$$\begin{aligned} M_{i,j}(C_{i,j}^n) &= \sup\{f(x,y)|[x,y] \in C_{i,j}^n\} = \sup\left\{ x + y \middle| x \in \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right), y \in \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right) \right\} = \\ &= \frac{i+1}{2^n} + \frac{j+1}{2^n} = \frac{i+j+2}{2^n}, \\ m_{i,j}(C_{i,j}^n) &= \inf\{f(x,y)|[x,y] \in C_{i,j}^n\} = \frac{i+j}{2^n}, \\ M_{i,j}(\overline{D}_{i,j}^n) &= \sup\{x + y|[x,y] \in \overline{D}_{i,j}^n\} = 1, \\ m_{i,j}(\overline{D}_{i,j}^n) &= \inf\{x + y|[x,y] \in \overline{D}_{i,j}^n\} = \frac{i+j}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}, \end{aligned}$$

kde využíváme k určení $M_{i,j}(\overline{D}_{i,j}^n)$ povahy trojúhelníku $\overline{D}_{i,j}^n$ u nějž platí $x + y \leq 1$ a vidíme, že supremum funkce $x + y$ zde musí ležet právě na této hranici $x + y = 1$. Můžeme nyní počítat pomocí vzorce na výpočet aritmetické řady

$$\begin{aligned}
S(n) &= \sum_{i=0}^{2^n-1}\sum_{j=0}^{2^n-1} M_{i,j}\cdot m\left(D^n_{i,j}\right) = \sum_{i=0}^{2^n-1}\sum_{j=0}^{2^n-i-2}\frac{i+j+2}{2^n}\frac{1}{2^{2n}} + \sum_{i=0}^{2^n-1} M_{i,2^n-i-1}(\overline{D}^n_{i,2^n-i-1})m(\overline{D}^n_{i,2^n-i-1})\\
&= \frac{1}{2^{3n}}\sum_{i=0}^{2^n-1}(2^n-i-1)\left(i+2+\frac{2^n-i-2}{2}\right) + 2^n\cdot 1\cdot\frac{1}{2^{2n+1}} =\\
&= \frac{1}{2^{3n}}\sum_{i=0}^{2^n-1}(2^n-i-1)\left(\frac{i}{2}+2^{n-1}+1\right)+\frac{1}{2^{n+1}} =\\
&= \frac{1}{2^{3n}}\sum_{i=0}^{2^n-1} -\frac{i^2}{2}-\frac{3}{2}i+(2^n-1)(2^{n-1}+1)+\frac{1}{2^{n+1}} =\\
&= \frac{(2^n-1)(2^{n-1}+1)}{2^{2n}} - \frac{3}{2^{3n+1}}2^n(2^n-1)+\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^{3n+1}}\sum_{i=0}^{2^n-1} i^2
\end{aligned}$$

Zbývá nám sečíst sumu $\sum_{i=0}^{2^n-1} i^2$, ale z teorie sumačního počtu víme, že platí

$$\sum_{i=0}^{k} i^2 = \frac{(k+1)^3}{3}-\frac{(k+1)^2}{2}+\frac{k}{6}+\frac{1}{6}.$$

A proto

$$\begin{aligned}
S(n) &= \frac{2^{2n-1}+2^{n-1}-1}{2^{2n}} - \frac{3(2^n-1)}{2^{2n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^{3n+1}}\left(\frac{2^{3n}}{3}-\frac{2^{2n}}{2}+\frac{2^n-1}{6}+\frac{1}{6}\right),\\
\lim_{n\to\infty} S(n) &= \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n-1}}{2^{2n}}-\frac{2^{3n}}{3\cdot 2^{3n+1}} = \frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Dále musíme ještě určit

$$\begin{aligned}
s(n) &= \sum_{i=0}^{2^n-1}\sum_{j=0}^{2^n-1} m_{i,j}\cdot m\left(D^n_{i,j}\right) = \sum_{i=0}^{2^n-1}\sum_{j=0}^{2^n-i-2}\frac{i+j}{2^n}\frac{1}{2^{2n}} + \sum_{i=0}^{2^n-1} m_{i,2^n-i-1}(\overline{D}^n_{i,2^n-i-1})m(\overline{D}^n_{i,2^n-i-1})\\
&= \frac{1}{2^{3n}}\sum_{i=0}^{2^n-1}(2^n-i-1)\left(i+\frac{2^n-i-2}{2}\right)+2^n\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{2^{2n+1}} =\\
&= \frac{1}{2^{3n}}\sum_{i=0}^{2^n-1}(2^n-i-1)\left(\frac{i}{2}+2^{n-1}-1\right)+\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{2^{n+1}} =\\
&= \frac{1}{2^{3n}}\sum_{i=0}^{2^n-1}\frac{-i^2-i}{2}+2^{2n-1}+3\cdot 2^{n-1}+1+\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{2^{n+1}} =\\
&= \frac{2^{2n-1}+3\cdot 2^{n-1}+1}{2^{2n}} - \frac{1}{2^{3n+1}}\left(\frac{2^{3n}}{3}-\frac{2^{2n}}{2}+\frac{2^n-1}{6}+\frac{1}{6}+2^{n-1}(2^{n-1}-1)\right)+\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{2^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Snadno tak určíme, že i zde platí

$$\lim_{n\to\infty} s(n) = \frac{2^{2n-1}}{2^{2n}}-\frac{2^{3n}}{2^{3n+1}3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

Protože platí $\lim_{n\to\infty} S(n) = \lim_{n\to\infty} s(n)$, tak integrál existuje a je vskutku roven $\frac{1}{3}$.

Př. 69 *Spočtěte integrál*

$$\iint_M \frac{\sin(x+y)}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde $M = [-1,1]^2$.

Budeme-li chtít spočítat tento integrál, všimneme si nejdříve, že funkce $\frac{\sin t}{t^2}$ je symetrická přes počátek, mohli bychom ji zkusit nazvat jako „lichou“ funkci. Přitom platí

$$\int_{-1}^{0}\int_{-1}^{0} \frac{\sin(x+y)}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{c} t=-x \\ s=-y \end{array} \right| =$$
$$= \int_{1}^{0}\int_{1}^{0} \frac{\sin(-t-s)}{(-t-s)^2}(-1)\,\mathrm{d}t(-1)\,\mathrm{d}s = \int_{1}^{0}\int_{1}^{0} \frac{-\sin(t+s)}{(t+s)^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s = -\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} \frac{\sin(t+s)}{(t+s)^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s.$$

Obdobnou situaci získáme pro

$$\int_{-1}^{0}\int_{0}^{1} \frac{\sin(x+y)}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\int_{0}^{1}\int_{-1}^{0} \frac{\sin(t+s)}{(t+s)^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s.$$

Dohromady tak máme, že

$$\iint_M \frac{\sin(x+y)}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{0}\int_{-1}^{0} \frac{\sin(x+y)}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{0}^{1}\int_{0}^{1} \frac{\sin(x+y)}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y +$$
$$+ \int_{-1}^{0}\int_{0}^{1} \frac{\sin(x+y)}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{0}^{1}\int_{-1}^{0} \frac{\sin(x+y)}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

I pro dvojné integrály vidíme, že je-li funkce správně „lichá“, integrál přes symetrickou množinu je nulový.

Př. 70 *Odhadněte shora hodnotu integrálu*

$$I = \iint_M \mathrm{e}^{x^2+y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

kde M *je* $[0,\pi] \times [-\pi,\pi]$.

Vzhledem k vlastnostem funkce e^x můžeme převést integrál do tvaru

$$I = \int_0^\pi \mathrm{e}^{x^2}\, \mathrm{d}x \int_{-\pi}^\pi \mathrm{e}^{y^2}\, \mathrm{d}y.$$

Neboť nevíme jak se vypořádat s transcendentním integrálem $\mathrm{e}^{x^2}\, \mathrm{d}x$, tak nahradíme podle vzorce

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} x^n.$$

Dostaneme

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} x^{2n}\, \mathrm{d}x \int_{-\pi}^\pi \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} y^{2n}\, \mathrm{d}y = \\
&= \sum_{n=0}^\infty \int_0^\pi \frac{1}{n!} x^{2n}\, \mathrm{d}x \sum_{n=0}^\infty 2 \int_0^\pi \frac{1}{n!} y^{2n}\, \mathrm{d}y = \\
&= 2\left(\sum_{n=0}^\infty \int_0^\pi \frac{1}{n!} x^{2n}\, \mathrm{d}x\right)^2 = 2\left(\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^\pi\right)^2 = \\
&= 2\left(\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \frac{\pi^{2n+1}}{2n+1}\right)^2.
\end{aligned}$$

Nyní odhadnou součet nekonečné řady potřebovali spočítat tuto řadu. Nejdřív by se však hodilo určit, zda odhadování má smysl, tj. zda řada vůbec konverguje. Využijeme podílové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi^{2n+3}}{(n+1)!(2n+3)} \frac{(2n+1)n!}{\pi^{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi^2(2n+1)}{(n+1)(2n+3)} = 0 < 1$$

a skutečně je řada konvergentní. Nyní můžeme odhadnout

$$I = 2\left(\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \frac{\pi^{2n+1}}{2n+1}\right)^2 \leq 2\left(\sum_{n=0}^\infty \frac{\pi^{2n+1}}{(n+1)!}\right)^2.$$

Přitom si můžeme uvědomit, že platí

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Proto lze odhadnout

$$I \leq 2\left(\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^\infty \frac{\left(\pi^2\right)^{n+1}}{(n+1)!}\right)^2 = \frac{2}{\pi^2}\left(\mathrm{e}^{\pi^2} - 1\right)^2 = 2\pi^2\, \mathrm{e}^{2\pi^2}.$$

Př. 71 *Odhadněte integrál*

$$I = \iint_M \frac{\sin(x+y+1)}{x+y+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde $M = [0,1]^2$.

Integrujeme funkci v příliš komplikované podobě. Můžeme nahradit pro $t \neq 0$

$$\frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$$

a uvědomíme si, že na množině M platí pro $t = x+y+1 \neq 0$. Dostáváme integrál

$$I = \iint_M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x+y+1)^{2n}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x+y+1)^{2n}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Můžeme se zamyslet, zda můžeme nahradit integrování a sumaci. K tomu stačí, aby byla řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x+y+1)^{2n}$ stejnoměrně konvergentní. Můžeme však ohraničit na množině M

$$\left| \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x+y+1)^{2n} \right| \le \frac{1}{(2n+1)!} 3^{2n}.$$

Dle Weierstrassova kritéria tedy řada konverguje stejnoměrně, protože řada $\sum^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} 3^{2n}$ je absolutně konvergentní dle podílového kritéria. Proto máme

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^1\int_0^1 (x+y+1)^{2n}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^1 \left[\frac{(x+y+1)^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 \mathrm{d}y = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} \int_0^1 (y+2)^{2n+1} - (y+1)^{2n+1}\,\mathrm{d}y = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} \left[\frac{(y+2)^{2n+2}}{2n+2} - \frac{(y+1)^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^1 = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)(2n+1)(2n+1)!} \left(3^{2n+2} - 2^{2n+2} - 2^{2n+2} + 1^{2n+2}\right) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)!} \left(3^{2n+2} - 2^{2n+3} + 1\right).
\end{aligned}$$

Zamysleme se, že platí $3^{2n+2} - 2^{2n+3} + 1 \ge 0$, pro $n \ge 0$. Stačí si uvědomit, že posloupnost 3^{2n} roste rychleji než posloupnost 2^{2n}. Navíc je řada absolutně konvergentní dle podílového kritéria a tedy se jedná o konvergentní, aleternující řadu (která konverguje také podle Leibnizova kritéria). Proto můžeme odhadnout její chybu

$$|R_k| < a_{k+1} = \frac{1}{(2k+3)(2k+4)!}\left(3^{2k+4} - 2^{2k+5} + 1\right).$$

Proto dostaneme omezení integrálu jako

$$I \ge \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)!}\left(3^{2n+2} - 2^{2n+3} + 1\right) - \frac{1}{(2k+3)(2k+4)!}\left(3^{2k+4} - 2^{2k+5} + 1\right),$$

$$I \le \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)!}\left(3^{2n+2} - 2^{2n+3} + 1\right) + \frac{1}{(2k+3)(2k+4)!}\left(3^{2k+4} - 2^{2k+5} + 1\right),$$

kde stačí vzít k dostatečně velké pro potřeby odhadu.

Př. 72 *Víte, že platí*

$$I = \iint_M y \sin x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3,$$

kde množina M je obdélník $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [-a, 2a]$ spolu s parametrem $a \in \mathbb{R}$. Určete hodnotu parametru a.

Spočteme integrál pro obecné a. Množina M je obdélník, a proto máme hned

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,\mathrm{d}x \int_{-a}^{2a} y \,\mathrm{d}y = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-a}^{2a} = \frac{1}{2}(4a^2 - a^2) = \frac{3}{2}a^2.$$

Aby dával interval $[-a, 2a]$ smysl, musíme mít $a \geq 0$ a vyřešením rovnice je

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}a^2 &= 3 \\ a^2 &= 2 \\ a &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Př. 73 *Určete hodnotu parametru A, tak aby platilo*

$$\int_{-1}^{A} \int_0^2 xy + 1 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 4 + 4A.$$

Levý integrál spočteme, abychom dostali

$$\int_{-1}^{A} \int_0^2 xy + 1 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{A} \frac{xy^2}{2} + [y]_0^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{A} 2x + 2 \,\mathrm{d}x = \left[x^2 + 2x\right]_{-1}^{A} = A^2 + 2A - 1 + 2.$$

Mají-li se tyto výrazy rovnat, tak musí platit

$$\begin{aligned} A^2 + 2A + 1 &= 4 + 4A \\ A^2 - 2A - 3 &= 0 \\ (A-3)(A+1) &= 0. \end{aligned}$$

Hodnota $A = -1$ dává integrál přes interval nulové délky.

Př. 74 *Aproximujte integrál*

$$I = \iint_M \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

kde množina M je ohraničená křivkami $y=1$, $y=2$, $x=y^3$, $x=8$.

Hned z křivek vidíme, že platí $1 \le y \le 2$ a na tomto intervalu je $y^3 \le 8$, proto $y^3 \le x \le 8$. Počítáme integrál

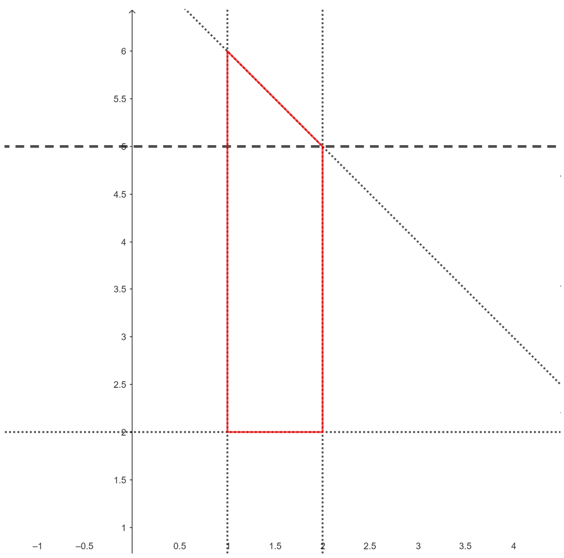
$$I = \int_1^2 \int_{y^3}^8 \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left| t = \frac{x}{y} \right| = \int_1^2 \int_{y^2}^{\frac{8}{y}} \frac{y}{y\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \int_{y^2}^{\frac{8}{y}} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y =$$
$$= |t = \sinh u| = \int_1^2 \int_{t=y^2}^{t=\frac{8}{y}} \frac{\cosh u}{\sqrt{\sinh^2 u + 1}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \int_{t=y^2}^{t=\frac{8}{y}} 1\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}y = \int_1^2 [u]_{t=y^2}^{t=\frac{8}{y}}\,\mathrm{d}y =$$
$$= \int_1^2 [\operatorname{arcsinh} t]_{t=y^2}^{t=\frac{8}{y}}\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \operatorname{arcsinh} y^2 - \operatorname{arcsinh}\frac{8}{y}\,\mathrm{d}y$$

Druhý integrál spočteme pomocí per-partes jako

$$\int_1^2 \operatorname{arcsinh}\frac{8}{y}\,\mathrm{d}y = \left| u = \operatorname{arcsinh}\frac{8}{y}, v' = 1 \right| = \left[y \operatorname{arcsinh}\frac{8}{y} \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{8}{\sqrt{y^2+64}}\,\mathrm{d}y =$$
$$= |y = 8\sinh u| = 2\operatorname{arcsinh} 4 - \operatorname{arcsinh} 1 + \int_{y=1}^{y=2} 1\,\mathrm{d}u =$$
$$= 2\operatorname{arcsinh} 4 - \ln(1+\sqrt{2}) + \left[\operatorname{arcsinh}\frac{y}{8} \right]_{y=1}^{y=2} =$$
$$= 2\operatorname{arcsinh} 4 - \ln(1+\sqrt{2}) + \operatorname{arcsinh}\frac{1}{4} - \operatorname{arcsinh}\frac{1}{8} \approx 3,43.$$

Druhý integrál $\int \operatorname{arcsinh} y^2\,\mathrm{d}y$ ale tak snadno nespočteme. Víme také, že pro velké x lze nahradit $\operatorname{arcsinh} x \approx \ln 2x$, ale graficky ověříme, že pro $x \in [1,2]$ je lepším odhadem

$$\operatorname{arcsinh} x \approx \sqrt{x}.$$



Proto máme

$$\int_1^2 \operatorname{arcsinh} y^2 \,\mathrm{d}y \approx \int_1^2 y \,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left[y^2\right]_1^2 = \frac{3}{2}.$$

A celkový integrál lze aproximovat jako

$$I \approx \frac{3}{2} + 3,43 = 4,93.$$

2 Trojný integrál a integrály obecných řádů

Nechť $M = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ a funkce f je na množině M spojitá, potom platí

$$\iiint_M f \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$$

Integrál se však rovná i ostatním permutacím v pořadí integrálů.

Nechť funkce f je spojitá na množině

$$M = \{[x,y,z] | a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x), G(x,y) \leq z \leq H(x,y,z)\},$$

kde funkce g, h jsou spojité na intervalu $[a,b]$ a funkce G, H jsou spojité na množině

$$\{[x,y] | a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}.$$

Potom platí že

$$\iiint_M f \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \int_{G(x,y)}^{H(x,y)} f \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x.$$

Obdobnou situaci dostaneme uvážíme-li libovolnou permutaci proměnných ve vyjádření.

2.1 Integrace přes kvádr

Př. 75 *Spočtěte integrál*

$$\iiint_V xy^2 z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde $V = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

Jedná se o jednotkovou krychli. Počítáme tedy

$$\iiint_V xy^2 z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 xy^2 z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 x \,\mathrm{d}x \int_0^1 y^2 \,\mathrm{d}y \int_0^1 z \,\mathrm{d}z =$$
$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{12}.$$

Př. 76 *Spočtěte integrál*

$$\iiint_V 6\,\mathrm{e}^{3x+2y+z}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde $V = [0,2] \times [1,3] \times [1,2]$.

Integrujeme přes kvádr, proto převedeme trojný integrál pomocí varianty Fubiniho věty na trojnásobný

$$\begin{aligned}\iiint_V 6\,\mathrm{e}^{3x+2y+z}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= 6\int_0^2\int_1^3\int_1^2 \mathrm{e}^{3x+2y+z}\ \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\ &= 6\int_0^2 \mathrm{e}^{3x}\ \mathrm{d}x \int_1^3 \mathrm{e}^{2y}\ \mathrm{d}y \int_1^2 \mathrm{e}^{z}\ \mathrm{d}z = 6\left[\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}\right]_0^2 \left[\frac{\mathrm{e}^{2y}}{2}\right]_1^3 [\mathrm{e}^z]_1^2 = \\ &= \left(\mathrm{e}^6 - 1\right)\left(\mathrm{e}^6 - \mathrm{e}^2\right)\left(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}\right) \approx 744\,417{,}7.\end{aligned}$$

Př. 77 *Spočtěte integrál*

$$\iiint_V x^2 + y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde $V = [-A, A] \times [-B, B] \times [-C, C]$, *pro* $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$.

Převedeme trojný integrál pomocí Fubiniho věty na trojnásobný

$$\begin{aligned}
\iiint_V x^2 + y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_{-A}^{A}\int_{-B}^{B}\int_{-C}^{C} x^2 + y^2 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 2C\int_{-A}^{A}\left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{-B}^{B} \mathrm{d}x = \\
&= 2C\int_{-A}^{A} 2Bx^2 + \frac{2B^3}{3}\,\mathrm{d}x = 2C\left[2B\frac{x^3}{3} + \frac{2B^3}{3}x\right]_{-A}^{A} = \\
&= 2C\left(\frac{4A^3B}{3} + \frac{4AB^3}{3}\right) = \frac{8}{3}\left(A^3B + AB^3\right).
\end{aligned}$$

Př. 78 *Spočtěte integrál*

$$\iiint_V \frac{1}{1-x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde $V = [0,1] \times [2,5] \times [2,4]$.

Převedeme integrál pomocí verze Fubiniho věty pro kvádr na trojnásobný

$$\begin{aligned}
\iiint_V \frac{1}{1-x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_2^5 \int_0^1 \int_2^4 \frac{1}{1-x-y}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_2^5 \int_0^1 \frac{1}{1-x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= 2\int_2^5 \left[-\ln|1-x-y|\right]_0^1\,\mathrm{d}y = 2\int_2^5 \ln(y-1) - \ln y\,\mathrm{d}y = \\
&= 2\left[(y-1)\ln(y-1) - y - y\ln y + y\right]_2^5 = \\
&= 2\left[(y-1)\ln(y-1) - y\ln y\right]_2^5 = 2\,(4\ln 4 - 5\ln 5 - 2\ln 1 + 2\ln 2) = \\
&= 2\,(10\ln 2 - 5\ln 5) = 10\ln\frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

Př. 79 *Spočtěte integrál*

$$\iiint_V \frac{z\cos y}{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde $V = [1,2]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\times[2,4]$.

Převedeme trojný integrál pomocí Fubiniho věty a dostaneme

$$\iiint_V \frac{z\cos y}{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_1^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_2^4 \frac{z\cos y}{x^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos y\,\mathrm{d}y \int_2^4 z\,\mathrm{d}z =$$
$$= \left[\frac{-1}{x}\right]_1^2 [\sin y]_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{z^2}{2}\right]_2^4 = \frac{1}{2}(1+1)(8-2) = 6.$$

Př. 80 *Spočtěte integrál*

$$\iiint_V x + y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z,$$

kde $V = [0,1] \times [1,2] \times [0,1]$.

Jedná se o krychli. Počítáme tedy

$$\begin{aligned}\iiint_V x + y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \int_1^2 \int_0^1 x + y \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_1^2 (x+y) \,[z]_0^1 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_1^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 2x + 2 - x - \frac{1}{2} \,\mathrm{d}x == \int_0^1 x + \frac{3}{2} \,\mathrm{d}x = \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2.\end{aligned}$$

Př. 81 *Spočtěte integrál*

$$I = \iiint_V \frac{1}{xyz}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde V je dána nerovnostmi $1 \le x \le \mathrm{e}$, $1 \le y \le \mathrm{e}^2$, $1 \le z \le \mathrm{e}^3$.

Konstantní meze proměnných nám udávají množinu V jako kvádr. Počítáme tedy

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{\mathrm{e}} \int_1^{\mathrm{e}^2} \int_1^{\mathrm{e}^3} \frac{1}{xyz}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y \int_1^{\mathrm{e}^3} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \\ &= [\ln x]_1^{\mathrm{e}} [\ln y]_1^{\mathrm{e}^2} [\ln z]_1^{\mathrm{e}^3} = (\ln \mathrm{e} - \ln 1)\big(\ln \mathrm{e}^2 - \ln 1\big)\big(\ln \mathrm{e}^3 - \ln 1\big) = 6. \end{aligned}$$

Př. 82 *Spočtěte integrál*

$$I = \iiint_V \cos(x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde V je dána jako krychle $[0,\pi]^3$.

Množina V je krychle, můžeme rovnou počítat

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \cos(x+y+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \int_0^\pi [\sin(x+y+z)]_0^\pi \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^\pi \int_0^\pi \sin(x+y+\pi) - \sin(x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi [-\cos(x+y+\pi) + \cos(x+y)]_0^\pi \,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^\pi -\cos(x+2\pi) + \cos(x+\pi) + \cos(x+\pi) - \cos(x)\,\mathrm{d}x = [-\sin(x+2\pi) + 2\sin(x+\pi) - \sin(x)]_0^\pi = \\
&= -\sin(3\pi) + 2\sin(2\pi) - \sin(\pi) + \sin(2\pi) - 2\sin(\pi) + \sin(0) = 0.
\end{aligned}$$

Př. 83 *Spočtěte integrál*

$$I = \iiint_V \frac{x\,\mathrm{e}^x \ln y \ln^2 z}{z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde V je dána nerovnostmi jako $0 \leq x \leq 1$, $1 \leq y \leq \sqrt{\mathrm{e}}$, $1 \leq z \leq \mathrm{e}$.

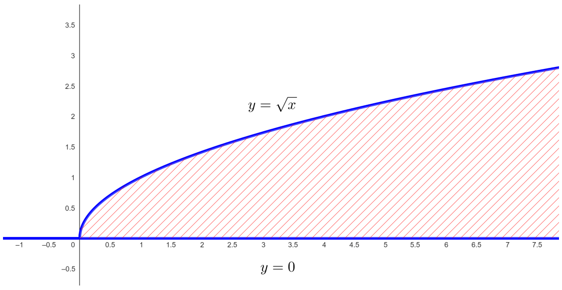
Konstantní meze proměnných nám udávají množinu V jako kvádr. Počítáme tedy

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x\,\mathrm{e}^x \ln y \ln^2 z}{z}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} \ln y\,\mathrm{d}y \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln^2 z}{z}\,\mathrm{d}z = \\
&= |t = \ln z| = \left([x\,\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \right) \left([y \ln y]_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} - \int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} 1\,\mathrm{d}y \right) \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \\
&= [x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x]_0^1 \, [y \ln y - y]_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = [\mathrm{e} - \mathrm{e} + 1]_0^{\mathrm{e}} \left(\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2} - \sqrt{\mathrm{e}} + 1 \right) \frac{1}{3} = \\
&= \frac{2 - \sqrt{\mathrm{e}}}{6}.
\end{aligned}$$

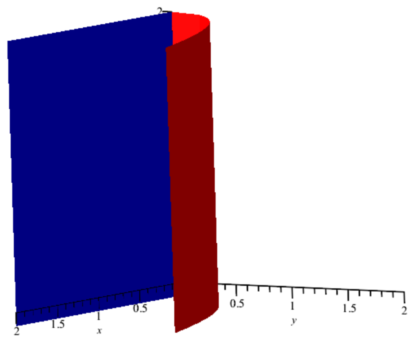
2.2 Fubiniova věta a záměna integračních proměnných

Př. 84 *Převeďte trojný integrál* $\iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, *na trojnásobný, kde* V *je dána* $2x+3y+4z=1$, $y=0$, $y=\sqrt{x}$, $z=0$.

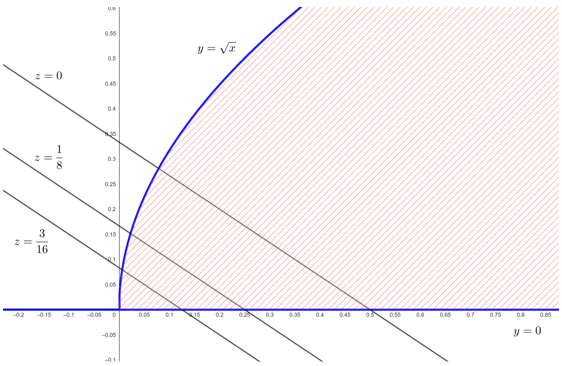
Hranice $y=0$ a $y=\sqrt{x}$ nezávisí na proměnné z. Proto je můžeme vykreslit v půdorysně xy



Protože jsou podmínky nezávislé na proměnné z, tak je můžeme vynést do prostoru kolmo na rovinu xy, čímž nám vymezí množinu V



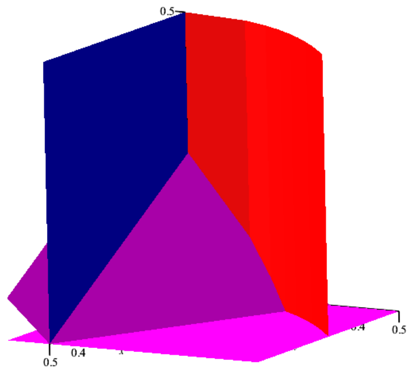
Omezení $z=0$ určuje, že je množina V vymezena půdorysnou. Třetí podmínka $2x+3y+4z=1$ udává rovinu a mohli bychom si její podobu přiblížit pomocí vrstevnic



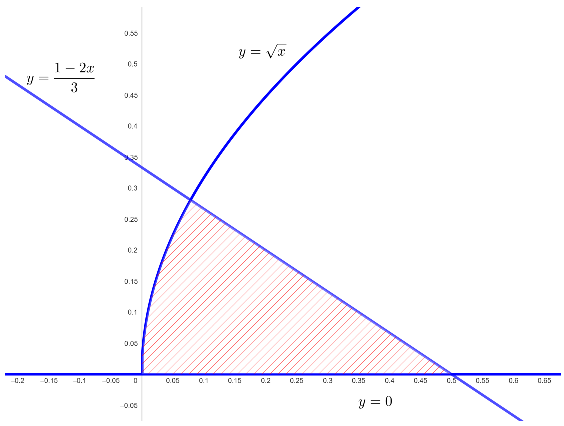
Vidíme, že s rostoucím z se rovnoběžné přímky přibližují počátku. Podobné chování vidíme i pokud bychom se podívali na rovinou zadanou funkci

$$z = \frac{1 - 2x - 3y}{4}.$$

Ta je se zvětšujícím se x a y klesající. Proto nám tato rovina ohraničuje množinu V shora. Množina je tedy vymezena zhruba následovně



Nyní máme představu o podobě množiny a musíme najít její rozsahy. Pokud bychom množinu V promítli do půdorysny xy, dostaneme následující oblast.



Tuto oblast nyní popisujeme vzhledem k x a y a všimneme si, že je množina ohraničená pro $y^2 \leq x \leq \frac{1-3y}{2}$. Když také dopočteme průsečíky křivek $y = \sqrt{x}$ a $y = \frac{1-2x}{3}$, tak dostaneme rozsah pro y jako $0 \leq y \leq \frac{13-3\sqrt{17}}{8}$. Z podoby množiny pak také vidíme, že $0 \leq z \leq \frac{1-2x-3y}{4}$.

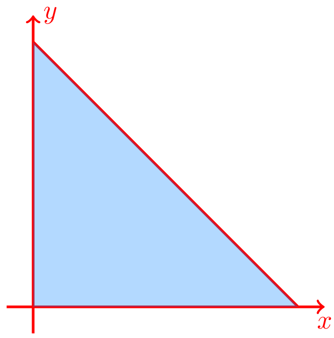
$$\int_0^{\frac{13-3\sqrt{17}}{8}} \int_{y^2}^{\frac{1-3y}{2}} \int_0^{\frac{1-2x-3y}{4}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Př. 85 *Převeďte trojný integrál na trojnásobný integrál:*

$$\iiint_V 2z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z,$$

kde V je dána $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, $x + y = 1$.

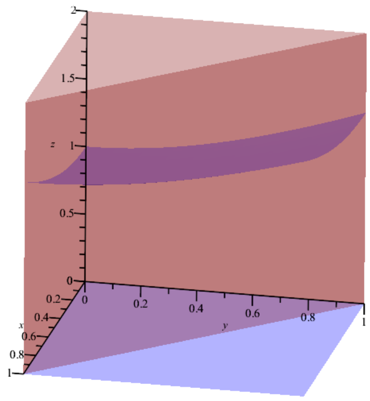
Máme podmínky $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y = 1$ nezávislé na proměnné z. V půdorysně xy je tedy vykreslíme jako



Dále si rozmysleme, že chceme $z \geq 0$, tj. množina V se nachází nad půdorysnou, a z hranice $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ vyjádříme $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 + 1}$. Jediná možná kombinace těchto podmínek je tedy, že $0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ a dostáváme ohraničení shora a zdola. Do půdorysu však tyto podmínky nezasahují. Proto můžeme odvodit, že

$$\begin{aligned} &0 \leq x \leq 1 \\ &0 \leq y \leq 1 - x \\ &0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2 + 1}. \end{aligned}$$

Množina V tak vypadá jako



Výsledný integrál je

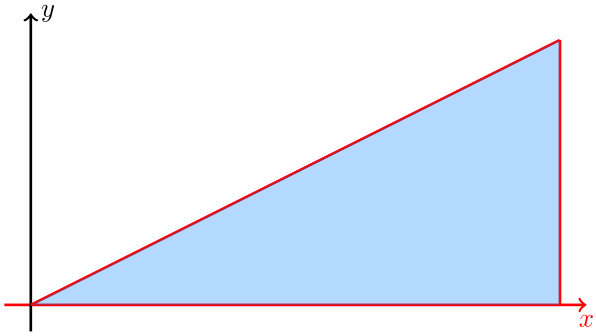
$$\iiint_V 2z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{\sqrt{x^2+y^2+1}} 2z \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$$

Př. 86 *Převeďte trojný integrál na trojnásobný integrál:*

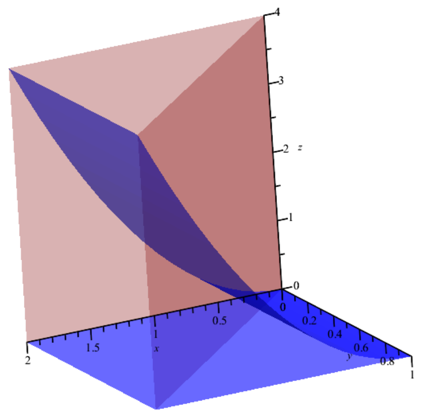
$$\iiint_V \sin(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde V je dána $x=2$, $y=0$, $z=0$, $x=2y$, $z=x^2$.

Podmínky $x=2$, $y=0$, $x=2y$ nezávisí na proměnné z. Můžeme je tedy vykreslit v rovině xy



Dále si můžeme rozmyslet, že plochy $z=0$ a $z=x^2$ ohraničují množinu zdola, respektive shora. Máme tedy kvádr shora seříznutý parabolickým válcem



Tento válec se nám v půdorysně promítá jako trojúhelník vymezený křivkami $x=2$, $y=0$, $x=2y$. Ten popíšeme jako $0 \le x \le 2$ a $0 \le y \le \frac{x}{2}$. Celkem máme

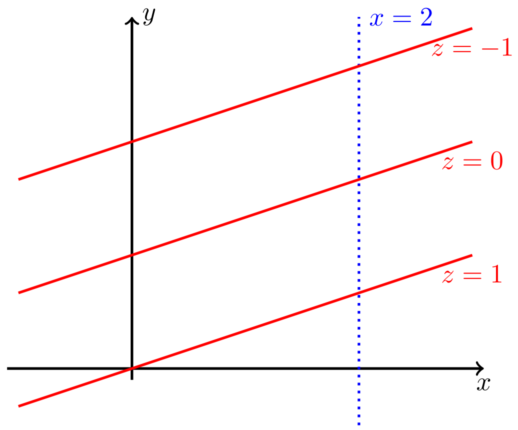
$$\iiint_V \sin(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^2 \int_0^{\frac{x}{2}} \int_0^{x^2} \sin(x+y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Př. 87 *Převeďte trojný integrál na trojnásobný integrál:*

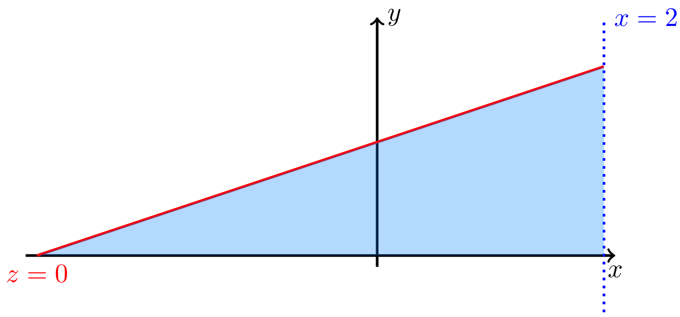
$$\iiint_V z^2 + y^3 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

kde V je dána $y = 0$, $z = 0$, $-x + 3y + 3z = 3$, $x \leq 2$.

Vidíme, že plocha $-x + 3y + 3z = 3$ je rovina. Její vrstevnice dostaneme jako



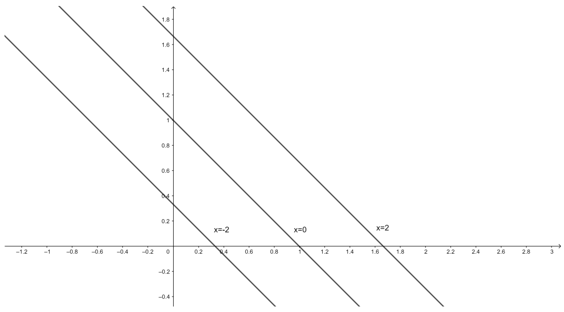
Vidíme, že se zvětšujícím se z se rovnoběžky blíží k ose x. Spolu s podmínkou $x \leq 2$ tak vidíme, že množina je zdola omezena půdorysnou $z = 0$ a shora omezena rovinou $-x + 3y + 3z = 3$. Vzhledem k těmto úvahám vidíme, že promítneme-li množinu V do půdorysny xy, tak dostaneme trojúhelník



Tento trojúhelník snadno popíšeme jako $-3 \leq x \leq 2$ a $0 \leq y \leq \frac{3+x}{3}$. Celkem tak máme integrál

$$\iiint_V z^2 + y^3 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_{-3}^{2} \int_0^{1+\frac{x}{3}} \int_0^{1-y+\frac{x}{3}} z^2 + y^3 \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$$

Další situaci bychom měli, pokud bychom si vrstevnice vykreslili vzhledem k x v bokorysně yz.



Zřejmě největší průmět množiny V dostaneme vzhledem k proměnným yz v rovině $x = 2$. Máme $0 \leq z \leq \frac{5-3y}{3}$ pro $0 \leq y \leq \frac{5}{3}$ nebo obdobně $0 \leq y \leq \frac{5-3z}{3}$ pro $0 \leq z \leq \frac{5}{3}$. Převedeme tedy i vzhledem k vrstevnicím roviny $-x + 3y + 3z = 3$ integrál jako

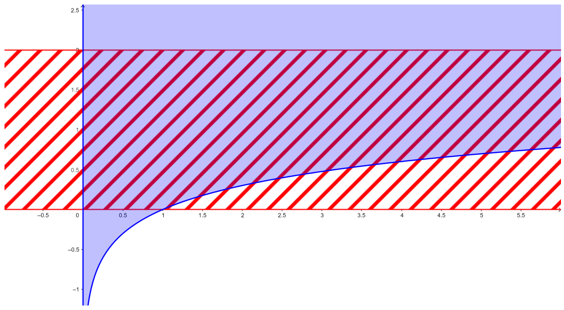
$$\iiint_V z^2 + y^3 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{5}{3}} \int_0^{\frac{5-3y}{3}} \int_{3y+3x-3}^{2} z^2 + y^3 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y.$$

Př. 88 *Převeďte trojný integrál*

$$\iiint_V \frac{\mathrm{Bam}(x)-y}{z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde V je dána $x=0$, $z\geq 0$, $z=4-y^2$, $y\geq 0$, $y\geq \ln x$ na trojnásobný integrál.

Všimneme si, že podmínky $x=0$, $y\geq 0$, $y\geq \ln x$ nezávisí na proměnné z a vykreslíme si tedy tuto situaci v rovině $z=0$. Také plocha $z=4-y^2$ je nezávislá na proměnné x. Platí, že $z\geq 0$ a tedy z omezení $4-y^2\geq 0$ dostáváme také, že $y\leq 2$. Druhá podmínka $-2\leq y$ nás nezajímá, neboť $y\geq 0$. Dostáváme tedy v půdorysně



Podmínky $y\geq 0$, $y\geq \ln x$ vždy na jistém intervalu převáží jedna druhou, budeme tedy mít nově dva trojnásobné integrály a průsečík $\ln x=2$ z něhož plyne $x=\mathrm{e}^2$ nám dává podmínku pro x jako $0\leq x\leq \mathrm{e}^2$. Dostáváme tedy snadno integrál

$$\iiint_V \frac{\mathrm{Bam}(x)-y}{z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1\int_0^2\int_0^{4-y^2}\frac{\mathrm{Bam}(x)-y}{z}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x+$$
$$+\int_1^{\mathrm{e}^2}\int_{\ln x}^2\int_0^{4-y^2}\frac{\mathrm{Bam}(x)-y}{z}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

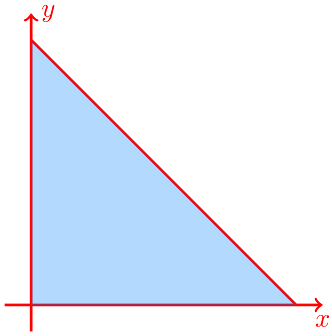
Obdobně můžeme zaměnit pořadí integrace jako

$$\iiint_V \frac{\mathrm{Bam}(x)-y}{z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^2\int_0^{\mathrm{e}^y}\int_0^{4-y^2}\frac{\mathrm{Bam}(x)-y}{z}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$$
$$=\int_0^2\int_0^{4-y^2}\int_0^{\mathrm{e}^y}\frac{\mathrm{Bam}(x)-y}{z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y.$$

Př. 89 *Zaměňte pořadí integrace*

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z^2 \mathrm{Buch}\,(x, y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Z integrálu vidíme, že $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1-x$, $0 \le z \le 1-x-y$. V těchto nerovnostech bychom mohli poznat jednotkový simplex a rovnou podmínky převést. Také si můžeme rozmyslet, že nerovnosti $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1-x$ udávají trojúhelník



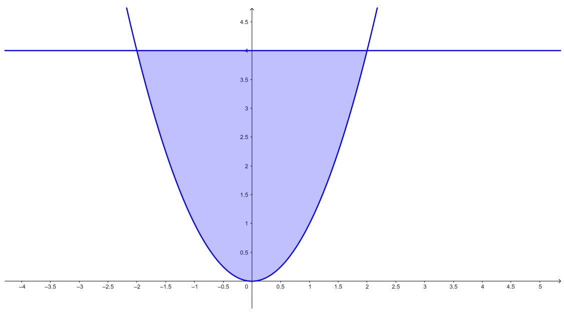
Tento můžeme obdobně popsat rozsahy $0 \le y \le 1$ a $0 \le x \le 1-y$. Dostali bychom tak například integrály

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{1-x-y} z^2 \mathrm{Buch}(x, y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-z-x} z^2 \mathrm{Buch}(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z.$$

Př. 90 *Zaměňte pořadí integrace*

$$\int_{-2}^{2}\int_{y^2}^{4}\int_{0}^{4-z} \mathrm{Bum}\,(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y.$$

Hned z integrálu vidíme podmínky $-2 \le y \le 2$, $y^2 \le z \le 4$, $0 \le x \le 4 - z$. Snadnou záměnu provedeme pokud zaměníme meze prvních dvou integrálů, tj. $\int_{-2}^{2}\int_{y^2}^{4}$. V rovině yz jsou podmínky $-2 \le y \le 2$, $y^2 \le z \le 4$ dány jako



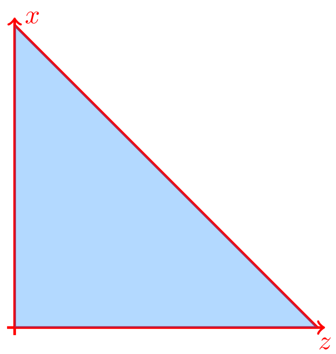
Snadno tak zaměníme pořadí integrálů

$$\int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}\int_{0}^{4-z} \mathrm{Bum}\,(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Dále si můžeme všimnout, že po záměně vnitřní integrály $\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}\int_{0}^{4-z}$ závisí pouze na proměnné z, tj. lze je pro pevné z považovat za konstanty. Proto můžeme rovnou zaměnit také

$$\int_{0}^{4}\int_{0}^{4-z}\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \mathrm{Bum}\,(z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z.$$

Nyní zase ve vnějších integrálech, tj. pro $\int_{0}^{4}\int_{0}^{4-z}$, rozsahy $0 \le z \le 4$, $0 \le x \le 4 - z$. Tyto podmínky znázorníme v rovině xz jako



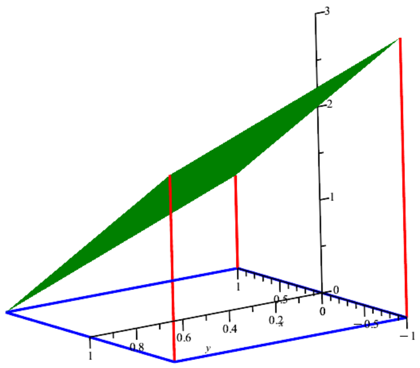
Znovu můžeme zaměnit pořadí integrace proměnných x a z a dostaneme další integrál.

$$\int_{0}^{4}\int_{0}^{4-x}\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \mathrm{Bum}\,(z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x.$$

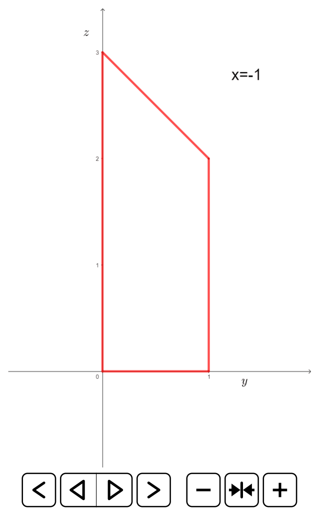
Př. 91 *V následujícím integrálu zaměňte pořadí integrovaných proměnných dle uvedeného pořadí a doplňte integrálu meze:*

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}\int_{0}^{2-x-y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{??}^{??}\int_{??}^{??}\int_{??}^{??} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y.$$

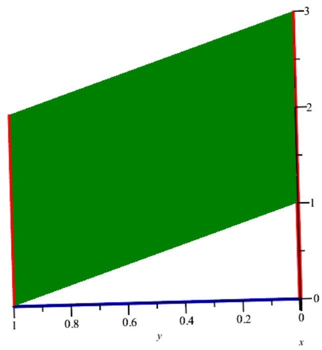
Rozsahy $-1 \le x \le 1$ a $0 \le y \le 1$ v zadaném integrálu určují obdélník. Integrovaná množina je pak zdola omezena $0 \le z$ a shora $z \le 2 - x - y$. Pokud si vykreslíme nad obdélníkem rovinu $z = 2 - x - y$ tak dostaneme:



Jedná se tedy o jakousi zkosenou střechu. Vzhledem k uvedenému pořadí proměnných musíme nyní množinu promítnout do roviny yz. Pokud si vykreslíme řezy množiny V pro pevné x, mohli bychom dostat následující animaci



Průmětem množiny do roviny xy je tedy lichoběžník, kterým máme také v rovině $x = -1$. Popíšeme jej snadno jako $0 \le y \le 1$ a $0 \le z \le 3 - y$. Přímku $z = 3 - y$ jako horní hranici dostáváme například z roviny $z = 2 - x - y$ pro volbu $x = -1$. Nyní zbývá určit rozsah pro x. Při pohledu z boku (stejně jako u animace) však zaznamenáme důležitou věc



Vyšetřovaná množina je vzhledem k x částečně ohraničena rovinou $z = 2 - x - y$ a částečně je ohraničena bočním trojúhelníkem, který vidíme dobře pro $x = 1$ (kde také vidíme rozdělující přímku $z = 1 - y$). Proto musíme množinu rozdělit na dvě části:

1)

$$\begin{aligned} 0 &\leq y \leq 1, \\ 0 &\leq z \leq 1 - y, \\ -1 &\leq x \leq 1, \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} 0 &\leq y \leq 1, \\ 1 - z &\leq z \leq 3 - y, \\ -1 &\leq x \leq 2 - y - z. \end{aligned}$$

Dostaneme tak integrály

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_{-1}^1 f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y + \int_0^1 \int_{1-y}^{3-y} \int_{-1}^{2-y-z} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y.$$

Př. 92 *Mějme trojný integrál transformovaný pomocí Fubiniovy věty*

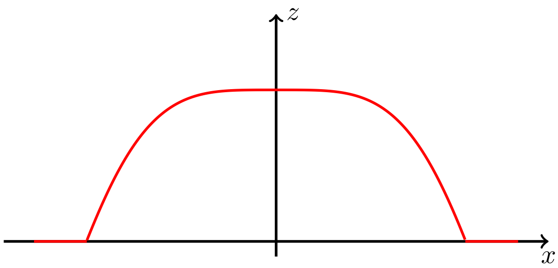
$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{??}^{??}\int_{??}^{??}\int_{??}^{??} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Doplňte integrálu meze a načrtněte podobu množiny V, kde množina V je omezena plochami $z=0$ a $z=\overline{\cos}\,(x^2+y^2)$. Přitom platí, že

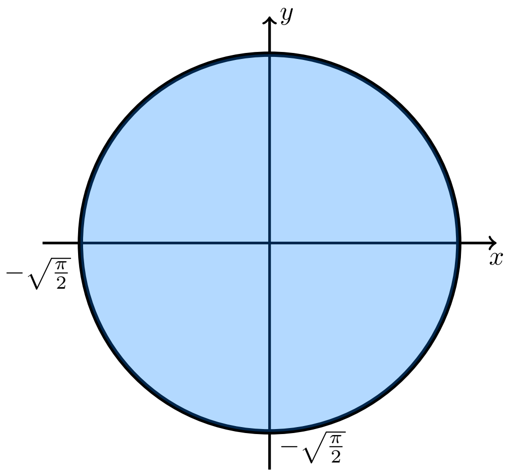
$$\overline{\cos}\,t = \begin{cases} \cos t, & -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \textit{jinak.} \end{cases}$$

Nejprve si udělejme představu o podobě množiny V. Všimněme si, že funkce $z=\overline{\cos}\,(x^2+y^2)$ udává rotační plochu, která rotuje okolo osy z. Její vrstevnice pro pevné z jsou $x^2+y^2=\arccos z$, tj. kružnice. Funkci $z=\overline{\cos}\,(x^2+y^2)$ můžeme vykreslit v řezu rovinou, která prochází osou rotace. Například rovinou $y=0$.

Když zafixujeme $y=0$, tak dostaneme funkci $z=\overline{\cos}\,(x^2)$, která vypadá následovně



Spolu s podmínkou $z \ge 0$ vidíme, že množina je zdola a shora ohraničena jako $0 \le z \le \overline{\cos}\,(x^2+y^2)$, přičemž jediná v podstatě neprázdná část je určena $0 \le z \le \cos(x^2+y^2)$. Z obrázku také vidíme, že pokud bychom si množinu V promítli do roviny xy, tak dostaneme kruh jehož hranice je vymezena průnikem ploch $z=\cos(x^2+y^2)$ a $z=0$, tj. $\cos(x^2+y^2)=0$. Tento kruh je očividně dán $x^2+y^2 \le \frac{\pi}{2}$.



Tento kruh pak můžeme rovnou popsat rozsahy $-\sqrt{\frac{\pi}{2}} \le x \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ a $-\sqrt{\frac{\pi}{2}-x^2} \le y \le \sqrt{\frac{\pi}{2}-x^2}$. Dostaneme tedy integrál

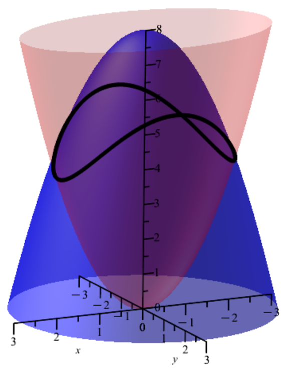
$$\int_{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\int_{-\sqrt{\frac{\pi}{2}-x^2}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}-x^2}}\int_0^{\cos(x^2+y^2)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Př. 93 *Převeďte následující trojný integrál na trojnásobný*

$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$$

kde množina V je ohraničená plochami $z = x^2 + 3y^2$ a $z = 8 - x^2 - y^2$.

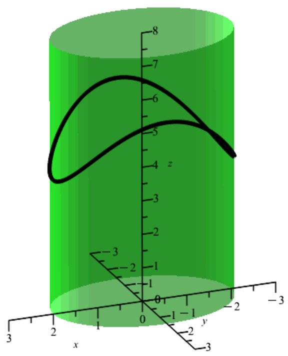
Nejprve si rozmysleme podobu obout ploch. Vrstevnice plochy $z = x^2 + 3y^2$ pro pevné z tvoří elipsy. Vrstevnice plochy $z = 8 - x^2 - y^2$ pro pevné z zase tvoří kružnice. Jedné se tedy o rotační, respektive eliptický paraboloid. Vykreslíme-li je oba paraboloidy dohromady se zvýrazněným průnikem, tak dostaneme:



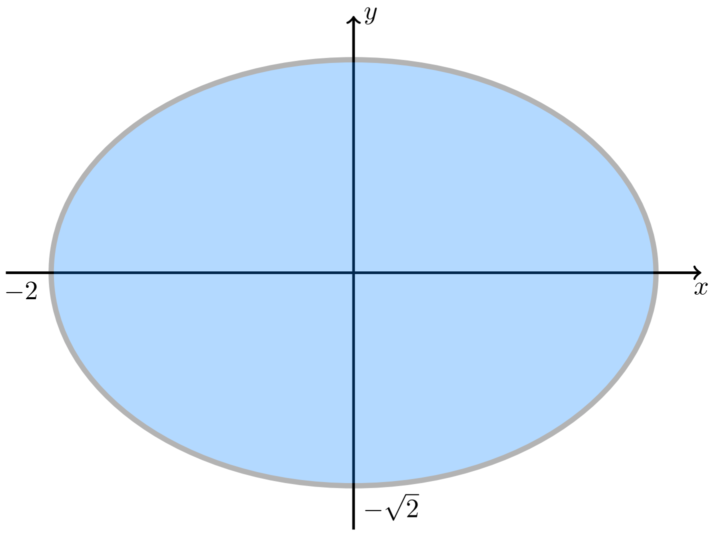
Z průnik paraboloidů můžeme určit

$$x^2 + 3y^2 = z = 8 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + 2y^2 = 4.$$

Rovnice $x^2 + 2y^2 = 4$ popisuje eliptický válec, na němž průnik leží. Můžeme to také vidět vykreslením



Množina V leží uvnitř tohoto válce a dotýká se jej. Z těchto argumentů vidíme, že pokud ji promítneme do půdorysny xy, tak dostaneme právě elipsu $x^2 + 2y^2 = 4$



Elipsu popíšeme nyní snadno jako $-2 \leq x \leq 2$ pro $-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}} \leq y \leq \sqrt{\frac{4-x^2}{2}}$. Z průniku ploch také vidíme, že $x^2 + 3y^2 \leq z \leq 8 - x^2 - y^2$. Dostaneme integrál

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} f(x, y, z)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x.$$

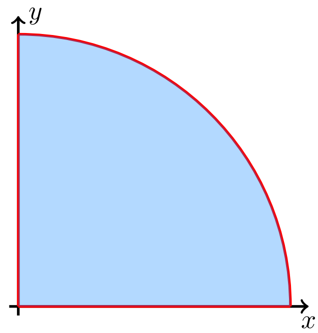
Př. 94 *V zadaném integrálu zaměňte pořadí integrovaných proměnných*

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Přepíšeme-li z mezí podmínky, pak dostaneme

$$\begin{aligned} &0 \le x \le 3, \\ &0 \le y \le \sqrt{9-x^2}, \\ &0 \le z \le x^2+y^2. \end{aligned}$$

Protože není specifikované, které proměnné máme nahradit, mohli bychom zaměňovat například proměnné x a y. První dvě podmínky nyní máme



Hned tedy vidíme, že čtvrtinu kruhu můžeme také převést jako $0 \le y \le 3$ a $0 \le x \le \sqrt{9-y^2}$. Dostaneme integrál

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Př. 95 *Mějme integrál*

$$I = \int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^{y^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

V uvedeném integrálu zaměňte pořadí integračních proměnných ve všech možných kombinacích.

Nejprve si rozmysleme, že pokud máme 3 proměnné, tak můžeme mít $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ kombinací pořadí. Jednu máme danou v zadání a tedy zbývá dořešit ještě 5 variant.

1. Vzhledem ke konstantním mezím můžeme ihned brát

$$I = \int_{-1}^0 \int_0^1 \int_0^{y^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

2. Pokud si uvědomíme, že pro pevné y je také y^2 konstanta, tak můžeme brát vnitřní integrály jako s konstantními mezemi. Platí

$$I = \int_0^1 \int_0^{y^2} \int_{-1}^0 f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y.$$

3. Podobně jako u předchozího bodu můžeme zaměnit meze ve variantě integrálu 1. Tím bychom dostali

$$I = \int_{-1}^0 \int_0^{y^2} \int_0^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x.$$

4. Pokud máme u varianty 2. podmínky vyjádřené jako $0 \leq y \leq 1$ a $0 \leq z \leq y^2$, tak je také můžeme převést do podoby $0 \leq z \leq 1$ a $\sqrt{z} \leq y \leq 1$. Tím dostaneme

$$I = \int_0^1 \int_{\sqrt{z}}^1 \int_{-1}^0 f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

5. Ve variantě 4. můžeme opět uvažovat z jako pevné a tedy můžeme vnitřní integrály prohodit

$$I = \int_0^1 \int_{-1}^0 \int_{\sqrt{z}}^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z.$$

Tímto jsme dostali všechny možné varianty popisu.

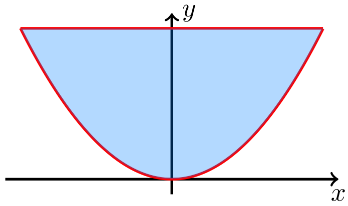
Př. 96 *Mějme integrál*

$$I = \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} \int_{0}^{1-y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

V uvedeném integrálu zaměňte pořadí integračních proměnných ve všech možných kombinacích.

Jednu kombinaci proměnných již máme, musíme nalézt ještě zbývajících 5 variant.

1. Vnější integrály udávají podmínky $-1 \le x \le 1$ a $x^2 \le y \le 1$. Mohli bychom si podmínky vykreslit



Hned tak odvodíme $0 \le y \le 1$ a $-\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}$ a převedeme

$$I = \int_{0}^{1} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \int_{0}^{1-y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

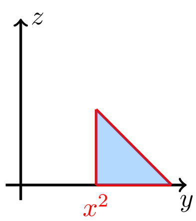
2. U varianty 1. máme vnitřní meze vyjádřené pouze vzhledem k y, které zde ale můžeme brát konstantní. Dostáváme

$$I = \int_{0}^{1} \int_{0}^{1-y} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y.$$

3. Varianta 2. nabízí meze $0 \le y \le 1$ a $0 \le z \le 1-y$. Jedná se trojúhelník, jehož meze snadno převedeme jako

$$I = \int_{0}^{1} \int_{0}^{1-z} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

4. Rozmysleme si, že v původním integrálu jsou vnitřní meze $x^2 \le y \le 1$ a $0 \le z \le 1-y$. Pro pevné x tak máme následující situaci



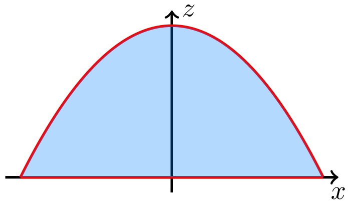
Tuto množinu můžeme lehce převést jako $0 \le z \le 1-x^2$ a $x^2 \le y \le 1-z$. Dostaneme integrál

$$I = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1-x^2} \int_{x^2}^{1-z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x.$$

5. Poslední varianta, která nám chybí je

$$\int_{??}^{??} \int_{??}^{??} \int_{??}^{??} f(x, y, z)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}z.$$

Všimněme si, že ji dostaneme pokud ve variantě 4. zaměníme vnější integrály. Zde je $-1 \leq x \leq 1$ a $0 \leq z \leq 1 - x^2$, což můžeme namalovat jako



Hned tak můžeme převést $0 \leq z \leq 1$ a $-\sqrt{1-z} \leq x \leq \sqrt{1-z}$. Dostaneme integrál

$$\int_{0}^{1} \int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}} \int_{x^2}^{1-z} f(x, y, z)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}z.$$

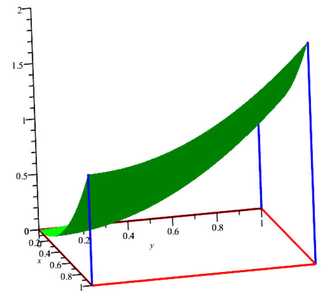
Tímto jsme dostali všechny možné varianty převodu.

Př. 97 *Mějme integrál*

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x.$$

V uvedeném integrálu zaměňte pořadí integračních proměnných ve všech možných kombinacích.

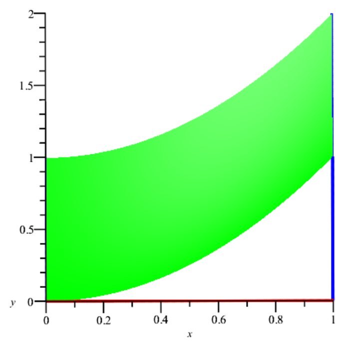
Jednu kombinaci proměnných již máme, musíme nalézt ještě zbývajících 5 variant. Můžeme si také udělat představu o podobě integrované množiny. Pro $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ a $0 \le z \le x^2 + y^2$ vidíme, že se jedná o čtverec a množinu nad ním shora ohraničenou paraboloidem.



1. Vzhledem ke konstantním vnějším mezím můžeme ihned zaměnit

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

2. Pokusme se nyní zaměnit další proměnné. Pokud promítneme množinu V do roviny xz, tak dostaneme následující situaci



Plocha $z = x^2 + y^2$ se promítne na zelenou oblast a bílá vyznačená oblast je tvořena boční stěnou množiny V, pro $y = 0$. Bílá oblast je tedy shora ohraničena plochou $z = x^2 + y^2$ v rovině $y = 0$, tj. $z = x^2 + y^2|_{y=0} = x^2$. Zelená oblast je zase omezena (jak vidíme také z 1. obrázku) plochou $z = x^2 + y^2$ v rovině $y = 1$, tj. $z = x^2 + y^2|_{y=1} = x^2 + 1$. Množinu V rozdělíme na dvě části

- $0 \le x \le 1$, $0 \le z \le x^2$. Zde je množina ohraničena stěnami V, a proto $0 \le y \le 1$.
- $0 \le x \le 1$, $x^2 \le z \le x^2 + 1$. Zde je V ohraničena plochou $z = x^2 + y^2$ a boční stěnou (z 1. obrázku vidíme, že stěnou $y = 1$). Z plochy vyjádříme $y = \pm\sqrt{z - x^2}$, a protože máme V pro $y \ge 0$, tak volíme omezení $y = \sqrt{z - x^2}$. Celkem je tedy $\sqrt{z - x^2} \le y \le 1$.

Dostaneme integrál

$$I = \int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \int_{x^2}^{x^2+1} \int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x.$$

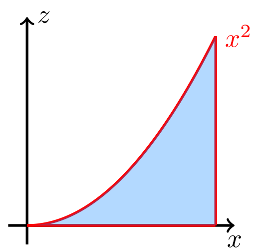
3. Množina V je symetrická vůči záměně $x \leftrightarrow y$ a proto můžeme stejně jako v předchozím bodu převést

$$I = \int_0^1 \int_0^{y^2} \int_0^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y + \int_0^1 \int_{y^2}^{y^2+1} \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y.$$

4. Nyní jsme popsali situace, kde vystupuje z ve vnitřních integrálech a v prostředních integrálech. Zbývá popsat situace, kdy z vystupuje ve vnějším integrálu. Vezměme integrál:

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

Vidíme, že platí $0 \le x \le 1$ a $0 \le z \le x^2$, tj. popisujeme množinu

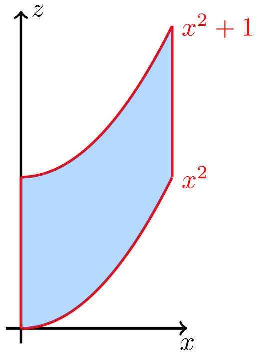


Snadno převedeme $0 \le z \le 1$ a $\sqrt{z} \le x \le 1$.

Nyní se zaměříme na druhý integrál

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x^2+1} \int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x.$$

Zde je $0 \le x \le 1$ a $x^2 \le z \le x^2 + 1$, tj. popisujeme množinu



Pokud nyní zaměníme pořadí proměnných x a z, tak opět musíme množinu rozdělit na dvě části. Máme:

- $0 \le z \le 1$ a $0 \le x \le \sqrt{z}$.
- $1 \le z \le 2$ a $\sqrt{z-1} \le x \le 1$.

Celkem tak dostaneme integrály

$$I = \int_0^1 \int_{\sqrt{z}}^1 \int_0^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \int_0^1 \int_0^{\sqrt{z}} \int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z +$$
$$+ \int_1^2 \int_{\sqrt{z-1}}^1 \int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z.$$

5. Opět si všimneme, že množina V je symetrická vůči záměně $x \leftrightarrow y$. Poslední popis tedy dostaneme jako

$$I = \int_0^1 \int_{\sqrt{z}}^1 \int_0^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \int_0^1 \int_0^{\sqrt{z}} \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z +$$
$$+ \int_1^2 \int_{\sqrt{z-1}}^1 \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

2.3 Integrace přes obecnou množinu

Př. 98 *Spočtěte integrál*

$$\iiint_V xy \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána* $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 4 - 2x - 2y.$

Převedeme integrál pomocí fubiniho věty na trojnásobný

$$\begin{aligned}
\iiint_V xy \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z &= \int_0^1 x \int_0^1 y \int_0^{4-2x-2y} \mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 x \int_0^1 4y - 2xy - 2y^2 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 x \left[2y^2 - xy^2 - \frac{2y^3}{3}\right]_0^1 \mathrm{d}x = \int_0^1 2x - x^2 - \frac{2}{3}x \,\mathrm{d}x = \\
&= \left[x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}x^2\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Př. 99 *Spočtěte integrál*

$$\iiint_V \frac{1}{(x+y+z+1)^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána* $x=y$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

Vyšetřovaná množina V je jednotkový simplex. Můžeme tedy hned psát

$$\iiint_V \frac{1}{(x+y+z+1)^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(x+y+z+1)^3}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{-1}{2(x+y+z+1)^2}\right]_0^{1-x-y} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{-1}{8} + \frac{1}{2(x+y+1)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{-1}{2(x+y+1)} - \frac{y}{8}\right]_0^{1-x} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{4} + \frac{x-1}{8}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{x}{4} + \frac{x^2-2x}{16}\right]_0^1 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}.$$

Př. 100 *Spočtěte integrál*

$$\iiint_V (x+y)z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána* $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leq 1.$

Neboť $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ je vnitřek koule a ostatní podmínky nám vymezují 1. oktant. V půdorysně xy je V určena $x \geq 0$, $y \geq 0$ a $x^2+y^2 \leq 1$. Máme hned zápis

$$\iiint_V (x+y)z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x+y) \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x+y) \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x+y-x^3-y^3-x^2y-xy^2}{2} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{12xy+6y^2-12x^3y-3y^4-6x^2y^2-4xy^3}{24}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \frac{12x(1-x)+6(1-x)^2-12x^3(1-x)-3(1-x)^4-6x^2(1-x)^2-4x(1-x)^3}{24} \,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \frac{12(x-x^2)+6(1-2x+x^2)-12(x^3-x^4)-3(1-4x+6x^2-4x^3+x^4)}{24} +$$

$$+ \frac{-6(x^2-2x^3+x^4)-4(x-3x^2+3x^3-x^4)^3}{24} \,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \frac{12x-12x^2+6-12x+6x^2-12x^3+12x^4-3+12x-18x^2+12x^3-3x^4}{24} +$$

$$+ \frac{-6x^2+12x^3-6x^4-4x+12x^2-12x^3+4x^4}{24} \,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \frac{3+7x^4+8x-6x^2}{24} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{24}\left[3x+\frac{7x^5}{5}+4x^2-2x^3\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{24}\cdot\frac{32}{5} = \frac{4}{15}.$$

Př. 101 *Spočtěte integrál*

$$\iiint_V y^2 z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z,$$

kde V je dána $0 \le x \le \pi/2$, $0 \le y \le 2\cos x$, $0 \le z \le 1$.

Snadno máme

$$\iiint_V y^2 z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos x} \int_0^1 y^2 z \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos x} y^2 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 \mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{2\cos x} \mathrm{d}x =$$

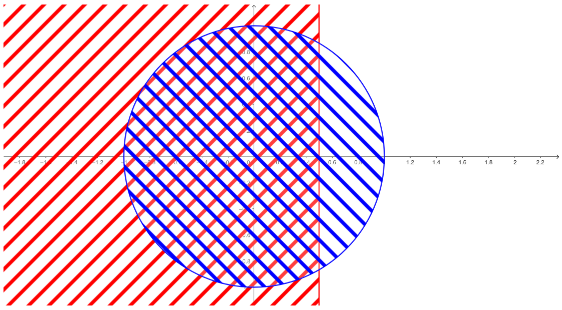
$$= \frac{8}{6} \int_0^{\pi/2} \cos^3 x \,\mathrm{d}x = \frac{8}{6} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x) \cos x \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x) \cos x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ \mathrm{d}t = \cos x \,\mathrm{d}x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^1 1 - t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{4}{3} \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{8}{9}.$$

Př. 102 *Převeďte trojný integrál* $\iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, *na trojnásobný, kde* V *je dána* $z \geq 0$, $x \leq 1/2$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Podmínka $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ udává vnitřek koule. V rovině $z = 0$ je pak podmínka omezena na $x^2 + y^2 \leq 1$, kde musíme navíc uvážit podmínku $x \leq 1/2$. Dohromady vypadají podmínky v půdorysně xy takto



Vykreslíme-li si vrstevnice koule, vidíme, že největšího rozsahu dosahuje množina V vzhledem k proměnným x a y právě v půdorysně. Proto je největší možný rozsah pro x dán jako $x \in [-1, 1/2]$. V závislosti na x je pak největší možný rozsah pro y dán jako $y \in [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]$. Ohraničení pro z plyne také přímo z rovnice koule. Integrál je tvaru

$$\int_{-1}^{1/2} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Př. 103 *Spočtěte integrál*

$$\iiint_V z^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

kde V je dána $y = 0$, $z = 0$, $x = 2$, $y = 5$, $x + z = 6$.

V půdorysně $z = 0$ je množina ohraničena rovnostmi $y = 0$, $x = 2$, $y = 5$, a z plochy $x + z = 6$ máme omezení $x = 6$. V půdorysně je tedy vyšetřovaná množina obdélník. Plocha $z = 6 - x$ je nad tímto obdélníkem kladná. Víme, že množina V má vzhledem k xy největší rozsah v rovině $z = 0$. To vidíme díky k vrstevnicím nebo díky faktu, že $f(x) = 6 - x$ je klesající funkce. Dostaneme integrál

$$\begin{aligned}
\iiint_V z^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z &= \int_2^6 \int_0^5 \int_0^{6-x} z^2 \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \\
&= \int_0^5 \mathrm{d}y \int_2^6 \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{6-x} \mathrm{d}x = \frac{5}{3} \int_2^6 6^3 - 3 \cdot 36x + 18x^2 - x^3 \, \mathrm{d}x = \\
&= \frac{5}{3} \left[6^3 x - 3 \cdot 18x^2 + 6x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_2^6 = \\
&= \frac{5}{3} \left(4 \cdot 6^3 - 3 \cdot 18 \cdot 36 + 6^4 - \frac{6^4}{4} + 12 \cdot 18 - 48 + 4\right) = \\
&= 5\,(36 - 16) + 20/3 = \frac{320}{3}.
\end{aligned}$$

Př. 104 *Spočtěte integrál*

$$\iiint_V z^4 \cos^2 y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z,$$

kde V je dána $0 \leq x \leq \pi/2$, $0 \leq y \leq \pi/2$, $0 \leq z \leq \sin x \cos y$.

Z popisu množiny V můžeme hned převést integrál na trojnásobný.

$$\iiint_V z^4 \cos^2 y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 y \int_0^{\sin x \cos y} z^4 \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 y \left[\frac{z^5}{5}\right]_0^{\sin x \cos y} \mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \frac{1}{5} \int_0^{\pi/2} \sin^5 x \,\mathrm{d}x \int_0^{\pi/2} \cos^7 y \,\mathrm{d}y =$$
$$= -\frac{1}{5} \int_0^1 (1-t^2)^2 \,\mathrm{d}t \int_1^0 (1-s^2)^3 \,\mathrm{d}s = \frac{1}{5} \int_0^1 1 - 2t^2 + t^4 \,\mathrm{d}t \int_0^1 1 - 3s^2 + 3s^4 - s^6 \,\mathrm{d}s =$$
$$= \frac{1}{5} \left[t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\right]_0^1 \left[s - \frac{3s^3}{3} + \frac{3s^5}{5} - \frac{s^6}{6}\right]_0^1 =$$
$$= \frac{1}{5} \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) \left(1 - 1 + \frac{3}{5} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{15 - 10 + 3}{15} \cdot \frac{18 - 5}{30} = \frac{104}{225}.$$

Př. 105 *Spočtěte integrál*

$$\iiint_V xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde V je dána $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$, $0 \leq z \leq x^2 + y^2 + 1$.

Snadno vidíme, že podmínku $x+y \leq 1$ můžeme přepsat jako $y \leq 1 - x$ ale také z ní získáme pro $y = 0$ odhad $x \leq 1$.

$$\begin{aligned}
&\iiint_V xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1+x^2+y^2} xy \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} xy(1 + x^2 + y^2) \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x \int_0^{1-x} y + x^2 y + y^3) \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{y^4}{4} \right]_0^{1-x} \mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 x \left(\frac{1 - 2x + x^2}{2} + \frac{x^2 - 2x^3 + x^4}{2} + \frac{1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4}{4} \right) \mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \frac{3x - 8x^2 + 10x^3 - 8x^4 + 3x^5}{4} \,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{4} \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{8x^3}{3} + \frac{10x^4}{4} - \frac{8x^5}{5} + \frac{x^6}{2} \right]_0^1 = \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3} + \frac{10}{4} - \frac{8}{5} + \frac{1}{2} \right) = \frac{10}{16} - \frac{68}{120} = \frac{7}{120}.
\end{aligned}$$

Př. 106 *Spočtěte integrál*

$$\iiint_V x^2yz^3 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána* $z \leq xy$, $y \geq x \geq 0$, $y \leq 1$, $z \geq 0$.

Spojíme-li nerovnosti dohromady, dostaneme $0 \leq z \leq xy$, $0 \leq x \leq y \leq 1$. Počítáme tedy integrál

$$\begin{aligned}
\iiint_V x^2yz^3 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \int_x^1 \int_0^{xy} x^2yz^3 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \int_x^1 x^2y \left[\frac{z^4}{4}\right]_0^{xy} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^1 x^6 \int_x^1 y^5 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 x^6 \left[\frac{y^6}{6}\right]_x^1 \mathrm{d}x = \frac{1}{24}\int_0^1 x^6 - x^12 \,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{24}\left[\frac{x^7}{7} - \frac{x^{13}}{13}\right]_0^1 = \frac{1}{24} \cdot \frac{13-7}{91} = \\
&= \frac{1}{364}.
\end{aligned}$$

Př. 107 *Spočtěte integrál*

$$\iiint_V y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána* $y = 1$, $y = \sqrt{x^2 + z^2}$.

Plocha $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ je dána po řezech pro fixované y jako kružnice. S největším poloměrem v rovině $y = 1$. Jedná se tedy o otočený jehlan. Máme tedy integrál

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+z^2}}^{1} y \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{\sqrt{x^2+z^2}}^{1} y \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}z.$$

Můžeme tedy pro jednu volbu počítat

$$\begin{aligned}
&\iiint_V y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left[\frac{y^2}{2}\right]_{\sqrt{x^2+z^2}}^{1} \mathrm{d}z \,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 - x^2 - z^2 \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left[(1-x^2)z - \frac{z^3}{3}\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} 2(1-x^2)\sqrt{1-x^2} - \frac{2\sqrt{(1-x^2)^3}}{3} \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{2\sqrt{(1-x^2)^3}}{3} \,\mathrm{d}x \\
&= \left| \begin{array}{c} \sin t = x \\ \cos t \,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{array} \right| = \frac{2}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos^6 t} \cos t \,\mathrm{d}t = \frac{2}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 t \,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{2}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{6} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t \,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{6} \left[t + \sin 2t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{6} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 4t}{2} \,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{12} \left[t + \frac{\sin 4t}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Př. 108 *Spočtěte integrál*

$$\iiint_V 7x + 2z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána* $0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x,\ 0 \leq z \leq xy.$

Množina V je dána postupnými ohraničeními, můžeme tedy rovnou převést

$$\begin{aligned}
\iiint_V 7x + 2z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \int_{x^2}^x \int_0^{xy} 7x + 2z \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_{x^2}^x \left[7xz + z^2\right]_0^{xy} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \int_{x^2}^x 7x^2 y + x^2 y^2 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[7x^2 \frac{y^2}{2} + x^3 \frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^x \,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \frac{7x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{7x^6}{2} - \frac{x^9}{3} \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{7x^4}{2} - \frac{19x^6}{6} - \frac{x^9}{3} \,\mathrm{d}x = \\
&= \left[\frac{7x^5}{10} - \frac{19x^7}{42} - \frac{x^10}{30}\right]_0^1 = \frac{7}{10} - \frac{19}{42} - \frac{1}{30}.
\end{aligned}$$

Př. 109 *Spočtěte integrál*
$$\iiint_V x^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z,$$
kde V je ohraničena plochami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ a $x + y + z = 1$.

Množina V je tvořena jednotkovým simplexem. Proto víme, že můžeme integrál zapsat jako

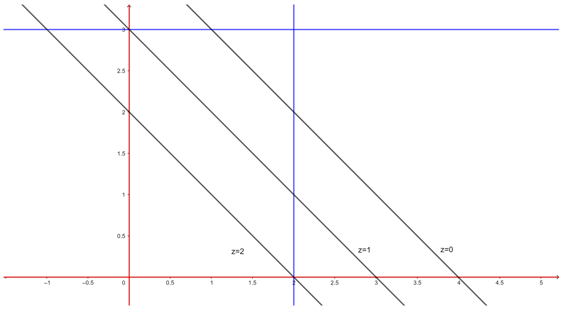
$$\begin{aligned}\iiint_V x^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x^2 \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{1-x-y} x^2 \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-x-z} x^2 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

Vybereme si jeden z možných zápisů a počítáme

$$\begin{aligned}\iiint_V x^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z &= \int_0^1 x^2 \int_0^{1-x} 1 - x - y \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \left[(1-x)y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} \mathrm{d}x = \\ &= \int_0^1 x^2 \left((1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2}\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2 - 2x^3 - x^4}{2} \,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} - \frac{1}{5}\right).\end{aligned}$$

Př. 110 *Spočtěte objem množiny V, která je dána $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x = 2$, $y = 3$, $x + y + z = 4$.*

Nejdříve musíme určit tvar množiny V. Vidíme, že plochy $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$, $y = 3$ udávají obdélník. Vzhledem k vrstevnicím vidíme, že množina V má největší rozsah vzhledem k proměnným x a y v půdorysně xy.



Objem tedy dostáváme jako integrál

$$
\begin{aligned}
O &= \iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^3 \int_0^{4-x-y} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \int_0^{4-x} \int_0^{4-x-y} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \int_0^3 4 - x - y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \int_0^{4-x} 4 - x - y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \left[(4-x)y - \frac{y^2}{2}\right]_0^3 \mathrm{d}x + \int_1^2 \left[(4-x)y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{4-x} \mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 3(4-x) - \frac{9}{2}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (4-x)^2 - \frac{(4-x)^2}{2}\,\mathrm{d}x = \left[12x - \frac{3x^2}{2} - \frac{9x}{2}\right]_0^1 + \int_1^2 \frac{16 - 8x + x^2}{2}\,\mathrm{d}x = \\
&= 12 - \frac{3}{2} - \frac{9}{2} + \frac{1}{2}\left[16x - 4x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = 6 + \frac{1}{2}\left(32 - 16 + \frac{8}{3} - 16 + 4 - \frac{1}{3}\right) = \\
&= 12 + \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Př. 111 *Spočtěte integrál*
$$\iiint_V xy + z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z,$$
kde V *je dána* $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x,\ 0 \leq z \leq 2 - x - 2y.$

Neboť máme podmínky zadané v dostatečné podobě, můžeme hned počítat

$$\iiint_V xy + z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-x-2y} xy + z \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[xyz + \frac{z^2}{2} \right]_0^{2-x-2y} \mathrm{d}y \,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[xy(2 - x - 2y) + \frac{(2 - x - 2y)^2}{2} \right]_0^{2-x-2y} \mathrm{d}y \,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} 4xy - x^2y - 2xy^2 + 2 - 2x - 4y + \frac{x^2}{2} + 2y^2 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 \left[2xy^2 - \frac{x^2y^2}{2} - \frac{2xy^3}{3} + 2y - 2xy - 2y^2 + \frac{x^2y}{2} + \frac{2y^3}{3} \right]_0^{1-x} \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 2x(1-x)^2 - \frac{x^2(1-x)^2}{2} - \frac{2x(1-x)^3}{3} + 2 - 2x - 2x(1-x) -$$
$$- 2(1-x)^2 + \frac{x^2(1-x)}{2} + \frac{2(1-x)^3}{3} \,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 2x - 4x^2 + 2x^3 - \frac{x^2 - 2x^3 + x^4}{2} - \frac{2x - 6x^2 + 6x^3 - 2x^4}{3} +$$
$$+ \frac{x^2 - x^3}{2} + \frac{2 - 6x + 6x^2 - 2x^3}{3} \,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 2x - 2x^2 + x^3 + \frac{-x^3 - x^4}{2} + \frac{2 - 8x + 6x^2 - 2x^3 + 2x^4}{3} \,\mathrm{d}x =$$
$$= \left[x^2 - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{10} + \frac{2x - 4x^2 + 2x^3}{3} \frac{-2x^4}{12} + \frac{2x^5}{15} \right]_0^1 =$$
$$= 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{2}{12} + \frac{2}{15} = \frac{24 - 16 + 3 - 4}{24} + \frac{4 - 3}{30} = \frac{7}{24} + \frac{1}{30}.$$

Př. 112 *Spočtěte integrál*
$$\iiint_V y\cos(x+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$
kde V *je dána* $y=0$, $z=0$, $x+z=\frac{\pi}{2}$, $y=\sqrt{x}$.

v rovině $z=0$ máme ohraničení $y=0$, $y=\sqrt{x}$ a $x=\frac{\pi}{2}$. Dostáváme tedy jednoduše integrál

$$\begin{aligned}
\iiint_V y\cos(x+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{x}}\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} y\cos(x+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{x}} [y\sin(x+z)]_0^{\frac{\pi}{2}-x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{x}} y\left(\sin(\frac{\pi}{2})-\sin x\right)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{2}(1-\sin x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{x}{2}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

2.4 Vícerozměrné integrály

Př. 113 *Vypočtěte n-rozměrný integrál*

$$\int \cdots \int_V \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n,$$

a $V = [0,1]^n$.

Neboť je množina V tvořena n-rozměrnou krychlí, máme

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)\, \mathrm{d}x_n \ldots \mathrm{d}x_1 = \sum_{i=1}^n \int_0^1 \cdots \int_0^1 x_i^2\, \mathrm{d}x_n \ldots \mathrm{d}x_1 =$$
$$= \sum_{i=1}^n \int_0^1 x_i^2\, \mathrm{d}x_i = \sum_{i=1}^n \left[\frac{x_i^3}{3}\right]_0^1 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{3} = \frac{n}{3}.$$

Př. 114 *Vypočtěte n-rozměrný integrál*

$$\int \cdots \int_V \left(x_1 + x_2^2 + \cdots + x_n^n\right) \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n,$$

a V je omezena nerovnostmi $0 \le x_k \le k$, pro $k = 1, \ldots, n$.

Množina V je udána nerovnostmi, a proto můžeme ihned aplikovat Fubiniovu Větu

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^2 \cdots \int_0^n \left(x_1 + x_2^2 + \cdots + x_n^n\right) \, \mathrm{d}x_n \ldots \mathrm{d}x_1 = \\
&= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \int_0^2 \cdots \int_0^n x_i^i \, \mathrm{d}x_n \ldots \mathrm{d}x_1 = \\
&= \sum_{i=1}^n 1 \cdot 2 \ldots (i-1)(i+1) \ldots n \int_0^i x_i^i \, \mathrm{d}x_i = \\
&= \sum_{i=1}^n 1 \cdot 2 \ldots (i-1)(i+1) \ldots n \left[\frac{x_i^{i+1}}{i+1}\right]_0^i = \\
&= \sum_{i=1}^n 1 \cdot 2 \ldots (i-1)(i+1) \ldots n \frac{i^{i+1}}{i+1} = n! \sum_{i=1}^n \frac{i^i}{i+1}.
\end{aligned}$$

Př. 115 *Vypočtěte n-rozměrný integrál*

$$\int \cdots \int_V x_1 \ldots x_n \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n,$$

a V *je omezena* $0 \le x_1 \le 1$, $0 \le x_2 \le x_1$, $\ldots$, $0 \le x_n \le x_{n-1}$.

Vzhledem k tvaru V můžeme hned počítat

$$\int_0^1 \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_{n-1}} x_1 \ldots x_n \, \mathrm{d}x_n \ldots \mathrm{d}x_1 = \int_0^1 x_1 \int_0^{x_1} x_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} x_n \, \mathrm{d}x_n \ldots \mathrm{d}x_1 =$$
$$= \int_0^1 x_1 \int_0^{x_1} x_2 \cdots \int_0^{x_{n-2}} x_{n-1} \left[\frac{x_n^2}{2} \right]_0^{x_{n-1}} \mathrm{d}x_{n-1} \ldots \mathrm{d}x_1 = \int_0^1 x_1 \int_0^{x_1} x_2 \cdots \int_0^{x_{n-2}} \frac{x_{n-1}^3}{2} \, \mathrm{d}x_{n-1} \ldots \mathrm{d}x_1 =$$
$$= \int_0^1 x_1 \int_0^{x_1} x_2 \cdots \int_0^{x_{n-3}} x_{n-2} \left[\frac{x_{n-1}^4}{2 \cdot 4} \right]_0^{x_{n-2}} \mathrm{d}x_{n-2} \ldots \mathrm{d}x_1 = \int_0^1 x_1 \int_0^{x_1} x_2 \cdots \int_0^{x_{n-3}} \frac{x_{n-2}^5}{2 \cdot 4} \, \mathrm{d}x_{n-2} \ldots \mathrm{d}x_1 =$$
$$= \int_0^1 x_1 \int_0^{x_1} x_2 \cdots \int_0^{x_{n-4}} x_{n-3} \left[\frac{x_{n-2}^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right]_0^{x_{n-3}} \mathrm{d}x_{n-3} \ldots \mathrm{d}x_1 =$$
$$= \int_0^1 x_1 \int_0^{x_1} x_2 \cdots \int_0^{x_{n-4}} \frac{x_{n-2}^7}{2 \cdot 4 \cdot 6} \, \mathrm{d}x_{n-3} \ldots \mathrm{d}x_1 = \cdots = \int_0^1 \frac{x_1^{2n-1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n-2)} \, \mathrm{d}x_1 = \frac{1}{(2n)!!} \left[x_1^{2n} \right]_0^1 =$$
$$= \frac{1}{(2n)!!} = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n} = \frac{1}{2^n n!}.$$

Př. 116 *Vypočtěte n-rozměrný integrál*

$$\int \cdots \int_V (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n,$$

a V je omezena $0 \leq x_k \leq 1$, pro $k = 1, \ldots, n$.

Neboť je množina V tvořena n-rozměrnou krychlí, máme

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 (x_1 + \cdots + x_n)^2 \, \mathrm{d}x_n \ldots \mathrm{d}x_1 = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n x_i x_j \, \mathrm{d}x_n \ldots \mathrm{d}x_1 =$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_0^1 x_i^2 \, \mathrm{d}x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \int_0^1 \int_0^1 x_i x_j \, \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j = \sum_{i=1}^n \left[\frac{x_i^3}{3} \right]_0^1 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \int_0^1 x_i \, \mathrm{d}x_i \int_0^1 x_j \, \mathrm{d}x_j =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{3} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{1}{4} = \frac{n}{3} + \sum_{i=1}^n \frac{n-1}{4} = \frac{n}{3} + \frac{n(n-1)}{4} = \frac{3n^2 + n}{12}.$$

2.5 Pokročilejší příklady

Př. 117 *Mějte n-rozměrný integrál daný jako*

$$I_n = \int \cdots \int_V \frac{1}{(1+x_n)^{n+1}} \, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n,$$

kde množina V je omezena $0 \leq x_k \leq x_{k-1}$, pro $k = 2, \dots, n$ a $0 \leq x_1 \leq 1$. Určete hodnotu integrálu pokud bychom uvažovali limitní hodnotu $n \to \infty$.

Nejprve musíme integrál spočítat. Rozsahy máme dané, a proto rovnou počítáme

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \cdots \int_0^{x_{n-1}} \frac{1}{(1+x_n)^{n+1}} \, \mathrm{d}x_n \dots \mathrm{d}x_1 = \\
&= \int_0^1 \cdots \int_0^{x_{n-2}} \left[\frac{1}{-n\,(1+x_n)^n} \right]_0^{x_{n-1}} \mathrm{d}x_{n-1} \dots \mathrm{d}x_1 = \\
&= -\frac{1}{n} \int_0^1 \cdots \int_0^{x_{n-2}} \frac{1}{(1+x_{n-1})^{n-1}} - 1 \, \mathrm{d}x_{n-1} \dots \mathrm{d}x_1 = \\
&= -\frac{1}{n} I_{n-1} + \frac{1}{n} \int_0^1 \cdots \int_0^{x_{n-2}} 1 \, \mathrm{d}x_{n-1} \dots \mathrm{d}x_1 .
\end{aligned}$$

Dále spočteme integrál

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \cdots \int_0^{x_{n-2}} 1 \, \mathrm{d}x_{n-1} \dots \mathrm{d}x_1 &= \int_0^1 \cdots \int_0^{x_{n-3}} [x_{n-1}]_0^{x_{n-2}} \, \mathrm{d}x_{n-2} \dots \mathrm{d}x_1 = \\
&= \int_0^1 \cdots \int_0^{x_{n-3}} x_{n-2} \, \mathrm{d}x_{n-2} \dots \mathrm{d}x_1 = \int_0^1 \cdots \int_0^{x_{n-4}} \frac{x_{n-3}^2}{2} \, \mathrm{d}x_{n-3} \dots \mathrm{d}x_1 = \\
&= \int_0^1 \cdots \int_0^{x_{n-5}} \frac{x_{n-4}^3}{2 \cdot 3} \, \mathrm{d}x_{n-4} \dots \mathrm{d}x_1 = \frac{1}{(n-2)!} \int_0^1 x_1^{n-2} \, \mathrm{d}x_1 = \frac{1}{(n-1)!} .
\end{aligned}$$

Proto vidíme, že pro integrál I_n platí

$$I_n = \frac{1}{n!} - \frac{1}{n} I_{n-1} .$$

Přitom platí, že je posloupnost I_n ohraničená a dokonce platí, že $|I_n| \leq 1$. Vždyť platí

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{(1+x_1)^2} \, \mathrm{d}x_1 = \left[-\frac{1}{1+x_1} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} .$$

Potom pokud je $|I_{n-1}| \leq 1$, pak je také

$$\begin{aligned}
|I_n| &= \left| \frac{1}{n!} - \frac{1}{n} I_{n-1} \right| = \frac{1}{n!} \left| 1 - (n-1)! I_{n-1} \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{n!} \left(1 + (n-1)! |I_{n-1}| \right) \leq \frac{1}{n!} \left(1 + (n-1)! \right) \leq \frac{1}{n!} \left((n-1)(n-1)! + (n-1)! \right) = 1 .
\end{aligned}$$

A tedy dle indukce je skutečně tato posloupnost ohraničená. Potom pro její limitu platí

$$\lim_{n\to\infty} |I_n| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} + \frac{1}{n} |I_{n-1}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} + \frac{1}{n} = 0 .$$

Př. 118 *Určete hodnotu $A > 0$ tak aby platilo*

$$\iiint_V xy^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z > \frac{4}{35},$$

kde množina V je ohraničená plochami $z = x^2 + y^2$, $z = A$ a nerovností $x \geq 0$.

Paraboloid $z = x^2 + y^2$ je omezen rovinou $z = A$, která tak tvoří jeho podstavu kruhem $x^2 + y^2 \leq A$. Proto také máme spolu s podmínkou $x \geq 0$, že $x \in [0, \sqrt{A}]$, $-\sqrt{A - x^2} \leq y \leq \sqrt{A - x^2}$ a nakonec také $x^2 + y^2 \leq z \leq A$. Dohromady tak máme integrál

$$\begin{aligned}
\iiint_V xy^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z &= \int_0^{\sqrt{A}} \int_{-\sqrt{A-x^2}}^{\sqrt{A-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{A} xy^2 \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^{\sqrt{A}} \int_{-\sqrt{A-x^2}}^{\sqrt{A-x^2}} xy^2(A - x^2 - y^2) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = |\text{ sudá vzhledem k } y| \\
&= 2 \int_0^{\sqrt{A}} \int_0^{\sqrt{A-x^2}} xy^2(A - x^2 - y^2) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \\
&= 2 \int_0^{\sqrt{A}} \left[\frac{x(A - x^2)y^3}{3} - \frac{xy^5}{5} \right]_0^{\sqrt{A-x^2}} \mathrm{d}x = \\
&= 2 \int_0^{\sqrt{A}} \frac{x(A - x^2)^{1+\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x(A - x^2)^{\frac{5}{2}}}{5} \,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{4}{15} \int_0^{\sqrt{A}} x(A - x^2)^{\frac{5}{2}} \,\mathrm{d}x = |t = A - x^2| = \frac{2}{15} \int_0^{A} t^{\frac{5}{2}} \,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{4}{15 \cdot 7} \left[t^{\frac{7}{2}} \right]_0^A = \frac{4}{105} A^{\frac{7}{2}}.
\end{aligned}$$

Nyní hledáme hodnotu A tak aby platilo

$$\begin{aligned}
\frac{4}{105} A^{\frac{7}{2}} &\geq \frac{4}{35} \\
A^{\frac{7}{2}} &\geq 3 \\
A &\geq 3^{\frac{2}{7}}.
\end{aligned}$$

Příklad takové hodnoty nyní snadno nalezneme.

3 Transformace dvojného integrálu

Následující shrnutí teorie je prezentováno v různých zdrojích různým způsobem. My budeme používat základní verzi, kterou lze nadále zobecnit. V následující části tedy předpokládejme, že množina $M \subset \mathbb{R}^2$ je kompaktní, tj. ohraničená a uzavřená.

Mějme zobrazení $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané po složkách jako $F(u,v) = [g(u,v), h(u,v)]$, tj. zobrazení přiřazující bodu $[u,v]$ bod $[g(u,v), h(u,v)]$. Nechť jsou funkce g, h spojitě diferencovatelné na M, tj. mají na M spojité parciální derivace. Poté definujeme Jakobián zobrazení F jako determinant

$$J_F(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Všimněme si, že pokud je množina M kompaktní, tak z uvedených předpokladů plyne, že je Jakobián $J_F(u,v)$ spojitá a ohraničená funkce na M. Tento determinant je zjednodušeně označován také jako J. Jako Jacobiho matice se pak obvykle označuje matice jejíž determinant počítáme.

[9] Nechť, F, G jsou spojitě diferencovatelné funkce (tj. jejich složky jsou spojitě diferencovatelné). Potom zobrazení $G \circ F$ je také spojitě diferencovatelné a platí

$$J_{G\circ F}(u,v) = J_G(F(u,v)) \cdot J_F(u,v)$$

Navíc Jacobiho matici složeného zobrazení $G \circ F$ lze počítat jako součin Jacobiho matic zobrazení G a F (v tomto pořadí). Důsledkem tohoto tvrzení je následující vztah.

Nechť, F je spojitý difeomorfismus, tj. jedná se o bijekci, kde jsou F i F^{-1} spojitě diferencovatelné, tj. existují jejich Jakobiány. Potom platí

$$J_F J_{F^{-1}} = 1 \Rightarrow J_{F^{-1}} = \frac{1}{J_F}.$$

Tvrzení lze také nalézt zapsané jako

$$J_F(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad J_{F^{-1}}(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

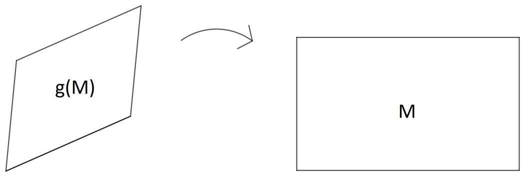
Následující tvrzení lze najít v různých podobách, kde jsou si různé podoby často ekvivalentní, porovnejte definici v [7], [6], [3], [5].

Nechť F je spojitě diferencovatelná a prostá funkce do roviny x, y, tj. $[x,y] = [g(u,v), h(u,v)] = F(u,v)$ a nechť je Jakobián $J_F(u,v)$ na množině M nenulový. Předpokládejme dále, že funkce $f(x,y)$ je spojitá na množině $F(M)$ (což je obraz množiny M v zobrazení F) a že množina M je měřitelná. Potom platí vztah

$$\iint_{F(M)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_M f(g(u,v), h(u,v)) \cdot |J_F(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Toto tvrzení platí i pokud je Jakobián nenulový skoro všude, tj. pokud je nenulový až na množinu nulové míry. Kniha [10] nabízí větu s mnohem jednoduššími předpoklady, kde je uvažována pouze situace, kdy je injektivní F spojitě diferencovatelná pouze na otevřené množině M. Tuto verzi tvrzení nenabízíme, protože není jisté, zda tvrzení v této podobě platí.

Podstata principu transformace spočívá v tom, že chceme množinu do tvaru, kde je pro nás její podoba výhodnější. Například pokud bychom dokázali množinu transformovat na trojúhelník.



Jiný důvod proč využít transformaci je, pokud by se funkce $f(g(u,v),h(u,v)) \cdot |J_F(u,v)|$ integrovala snáze než funkce původní.

1. Příkladem transformace v $\mathbb{R}^2$ máme

$$x = au + c,$$
$$y = bv + d,$$

kde $a > 0$, $b > 0$, která je kombinace translace a přeškálování. Její Jakobián je

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab.$$

Podívejme se navíc, jak se změní po transformaci vektory standardní báze $e_1 = (1,0)_{uv} = \overrightarrow{0_{uv}A_{uv}}$, $e_2 = (0,1)_{uv} = \overrightarrow{0_{uv}B_{uv}}$, pro body $A_{uv} = [1,0]$, $B_{uv} = [0,1]$, $O_{uv} = [0,0]$. Dostaneme nové body $A_{xy} = [a+c,d]$, $B_{xy} = [c,b+d]$, $O_{xy} = [c,d]$. Obrazem vektorů po transformaci souřadnic je $F(e_1) = \overrightarrow{0_{xy}A_{xy}} = (a,0)$, $F(e_2) = \overrightarrow{0_{xy}B_{xy}} = (0,c)$. Matice přechodu lineárního zobrazení F by tak byla

$$P = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

tj. Jacobiho matice zobrazení F.

2. Mezi obvyklé transformace patří transformace do polárních souřadnic:

$$x = \rho \cos \varphi,$$
$$y = \rho \sin \varphi,$$

kde $\rho \in [0,\infty)$ je vzdálenost bodu $B = [x,y]$ od počátku $O = [0,0]$ (tj. poloměr kružnice se středem v O na níž bod B leží) a $\varphi \in [0,2\pi]$ je odchylka (úhel) úsečky OB od kladné poloosy x v kladném smyslu, tj. proti směru hodinových ručiček. Transformace má Jakobián

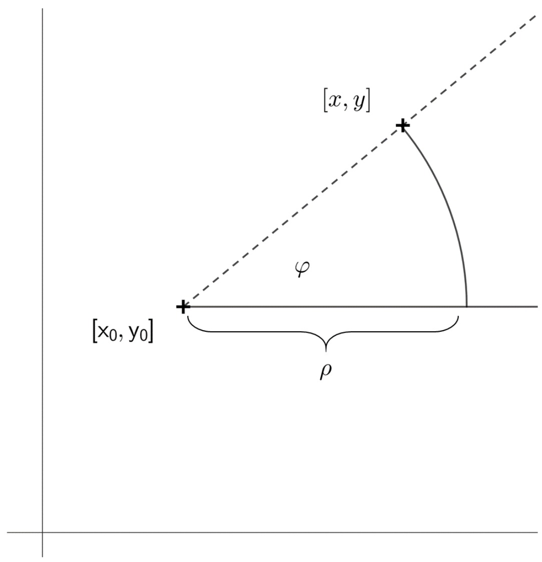
$$J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \rho.$$

Všimneme si, že v počátku O máme nulový poloměr, tj. $\rho = 0$ a tedy je zde Jakobián nulový. Jedná se však pouze o jeden bod, tj. o množinu nulové míry a uvažovanou větu lze použít.

Transformace se nejlépe hodí k popisu bodů uvnitř kruhu (se středem v O) nebo části kruhu, ale lze ji použít i v jiných případech. Pokud bychom popisovali body v kruhu s obecným středem $S = [x_0,y_0]$, tak bychom dostali souřadnice

$$x = x_0 + \rho \cos \varphi,$$
$$y = y_0 + \rho \sin \varphi,$$

které mají stejný Jakobián. Proměnná ρ nyní popisuje vzdálenost bodu $[x, y]$ od středu S a úhel φ nyní měříme od polopřímky, která začíná v bodě S a je rovnoběžná s kladnou poloosou x.



3. Dalším příkladem je transformace do eliptických souřadnic

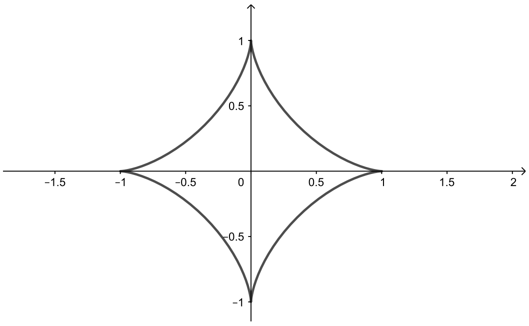
$$x = a\rho \cos \varphi,$$
$$y = b\rho \sin \varphi,$$

kde a, b jsou pevně zvolené kladné koeficienty. Proměnné ρ, φ stále splňují stejné podmínky, tj. $\rho \geq 0$ a $\varphi \in [0, 2\pi]$ avšak jejich interpretace je nyní odlišná. Proměnná ρ nyní popisuje vzdálenost bodu $[x, y]$ od počátku přeškálovanou o výraz $\sqrt{a^2 + b^2}$. Proměnná φ zase popisuje odhylku spojnice bodu $[x, y]$ s počátkem $[0, 0]$ od kladné poloosy x v kladném smyslu, ale tato odchylka je navíc "pozměněna"přeškálováním $\frac{a}{b}$. Jakobián tohoto zobrazení je

$$J(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = ab\rho.$$

Všimněme si, také, že se jedná o kombinaci dvou zobrazení, tj. přeškálování $G : x = au$, $y = bv$ a polárních souřadnic $F : x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Vskutku tedy vidíme, že výsledný Jakobián je součinem jednotlivých Jakobiánů.

4. Z polárních souřadnic a z kružnic se můžeme inspirovat k získání dalších transformací. Z definice asteroidy můžeme obdobně dostat podobnou transformaci. Asteroida je křivka zadaná implicitně jako $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}$, pro kladný "poloměr"$r > 0$. Tato křivka vypadá pro $r = 1$ následovně



Křivku můžeme také parametrizovat jako $x = r\sin^3 t$, $y = r\sin^3 t$, pro $t \in [0, 2\pi]$. Vnitřek množiny vymezené uvnitř astroidy lze popsat analogicky jako vnitřek kružnice v polárních souřadnicích. Popisujeme množinu $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq r^{\frac{2}{3}}$ a mějme asteroidové souřadnice dané jako:

$$x = \rho\cos^3\varphi,$$
$$y = \rho\sin^3\varphi,$$

kde $\rho \in [0, r]$ a $\varphi \in [0, 2\pi]$. Jakobián tohoto zobrazení dopočteme

$$J = 3\rho\sin^2\varphi\cos^2\varphi.$$

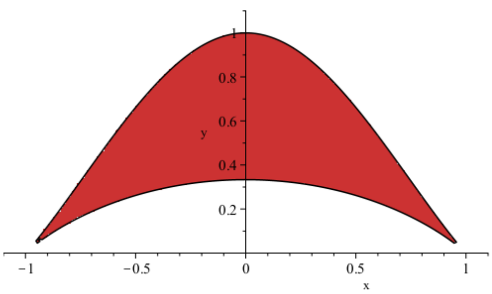
5. Když se nám podařilo odvodit asteroidové souřadnice, odvoďme také další možné transformace. Vnitřek kardiody o poloměru $r > 0$ dostaneme jako $(x^2+y^2-2rx)^2-4r^2(x^2+y^2) \leq 0$. Souřadnice pak můžeme zavést jako

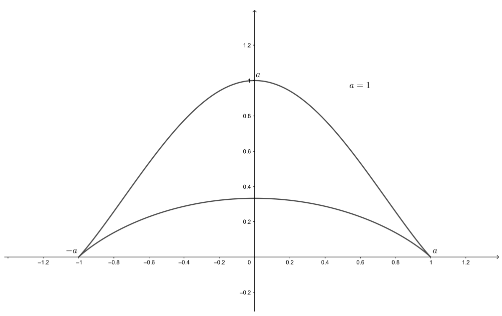
$$x = 2\rho(\cos\varphi - 1)\cos\varphi,$$
$$y = 2\rho(1 - \cos\varphi)\sin\varphi,$$

pro $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\rho \in [0, r]$. Jakobián tohoto zobrazení pak máme

$$J = 4\rho(\cos\varphi - 1)^2.$$

6. Obdobně dostaneme množinu danou nerovností $y^2(a^2-x^2) \geq (x^2+2ay-a)^2$, která vypadá pro $a = 1$ následovně





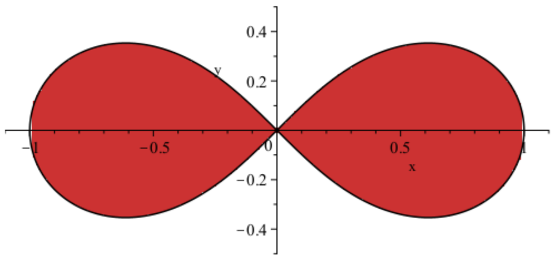
Druhý obrázek zde reprezentuje křivku ohraničující množinu neboť software má problém s dopočtením rohových bodů množiny. Tuto množinu můžeme popsat v rohových souřadnicích

$$x = \rho \sin\varphi,$$
$$y = \rho \frac{\cos^2\varphi}{2-\cos\varphi},$$

pro $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\rho \in [0, a]$. Jakobián tohoto zobrazení je pak

$$J = \frac{\rho\left(4 - 2\cos^2\varphi - \cos\varphi\right)\cos\varphi}{(-2+\cos\varphi)^2}.$$

7. Nakonec zaveďme ještě lemniskatové souřadnice pro množinu $(x^2+y^2)^2 \le r^2(x^2-y^2)$ která vypadá následujícím způsobem



Tuto množinu můžeme popsat v lemniskatových souřadnicích jako

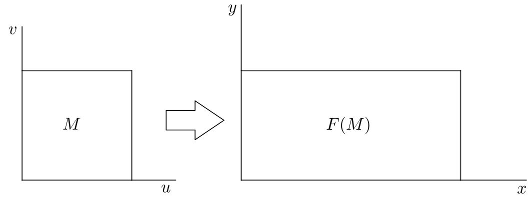
$$x = \rho \frac{\cos\varphi}{1+\sin^2\varphi},$$
$$y = \rho \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{1+\sin^2\varphi},$$

pro $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\rho \in [0, r]$. Jakobián této transformace je

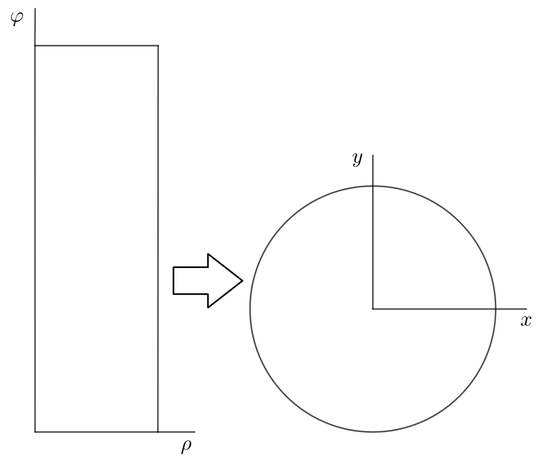
$$J = \frac{\rho\cos^3\varphi}{(\cos^2\varphi - 2)^2}$$

Pro bližší vysvětlení principu Jakobiánu lze uvážit následující transformaci $F : x = 2u$, $y = v$, jejíž Jakobián je $J = 2$. Tato transformace přetransformuje čtverec $M = [0, 1]^2$ v rovině uv na obdélník $F(M) = [0, 2] \times [0, 1]$ v rovině xy. Pro obsahy těchto útvarů pak platí

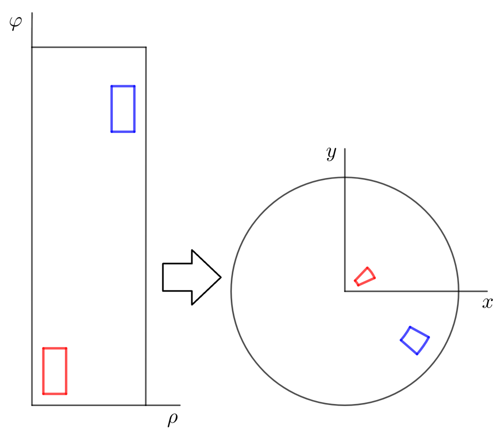
$$S_{F(M)} = J \cdot S_M.$$



Tento fakt je pak významem Jakobiánu, který popisuje poměr obsahů $J = \frac{S_{F(O)}}{S_O}$, kde O je malý obdélník v množině M. Kdybychom naopak uvážili polární souřadnice jako naše zobrazení, F : $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, tak ty zobrazí obdélník $M = [0, 2] \times [0, 2\pi]$ na kruh o poloměru 2, tj $F(M) : x^2 + y^2 \leq 4$. Máme situaci



Nyní pokud zobrazíme malý obdélník o rozměrech $\mathrm{d}\rho$, $\mathrm{d}\varphi$, tak dostaneme malou výseč z kruhu. Pokud bychom však vzali jiný obdélník v množině M, tak jeho obraz bude mít výrazně jiné rozměry. Navíc čím blíže středu kruhu, tj. čím menší bude poloměr, tím menší část dostaneme.



Z těchto důvodů je poměr obsahů obdélníků $J = \frac{S_{F(O)}}{S_O}$, tj. Jakobián, závislý na poloměru. Vskutku pak máme pro polární souřadnice $J = \rho$.

3.1 Transformace množiny a popis principu

Př. 119 *Transformujte integrál vhodnou transformací*

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $x^2+y^2 \leq 2$, $y \geq x$.

Neboť podmínka $x^2+y^2 \leq 2$ udává kruh, volíme transformaci do polárních souřadnic $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, kde proměnné φ, ρ musí splňovat $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\rho \geq 0$. Nyní chceme množinu M popsat v nových souřadnicích a k tomu můžeme využít dva různé přístupy, nebo jejich vhodnou kombinaci.

Začneme nejprve **analytickým** přístupem. Dosazením do nerovnic dostaneme

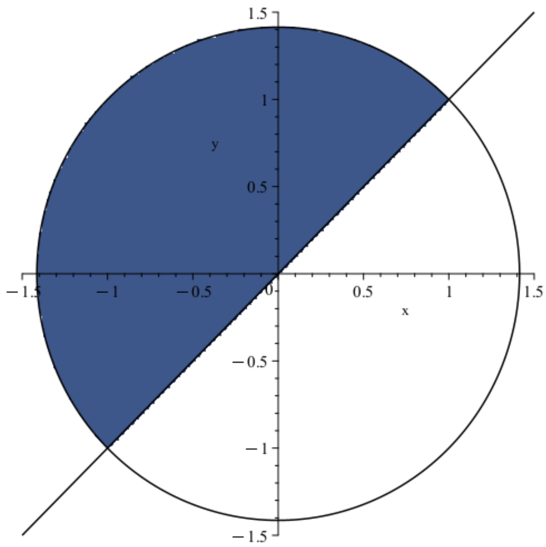
$$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = \rho^2 \leq 2.$$

Proto máme $\rho \in [0, \sqrt{2}]$. Dosazením do druhé nerovnosti dostaneme

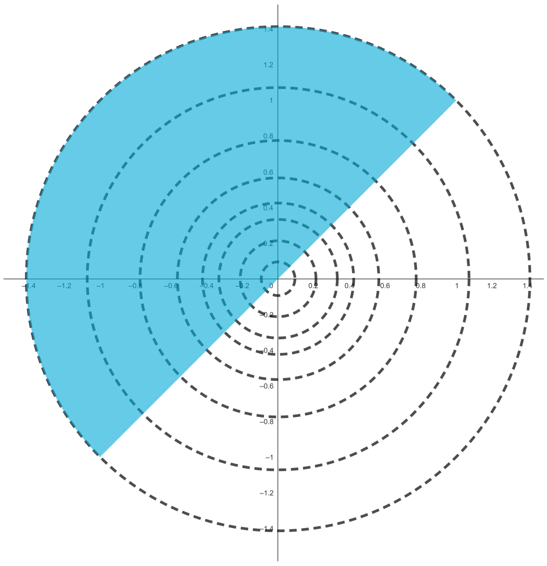
$$\begin{aligned}\rho\sin\varphi &\geq \rho\cos\varphi\\ \sin\varphi &\geq \cos\varphi.\end{aligned}$$

Vykreslíme-li si grafy funkcí $\sin x$, $\cos x$ na intervalu $[0, 2\pi]$, dostaneme ze znalosti jejich průsečíků, že $\varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

Druhý způsob jak rozsahy odvodit je **grafický** přístup, kde si množinu nakreslíme a pokusíme se ji rozebrat. Množinu M dostaneme jako následující modře vyznačenou oblast.

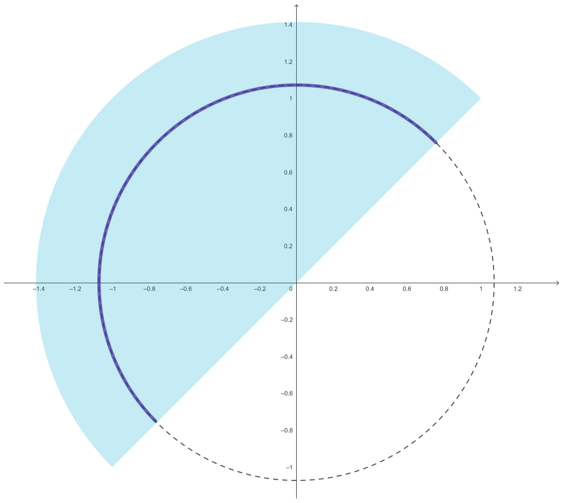


Nyní můžeme množinu začít popisovat vzhledem k poloměrům ρ nebo k úhlům φ. Začneme-li popisem poloměrů ρ, tak chceme určit rozsah všech poloměrů kružnic, které nám překryjí množinu M.



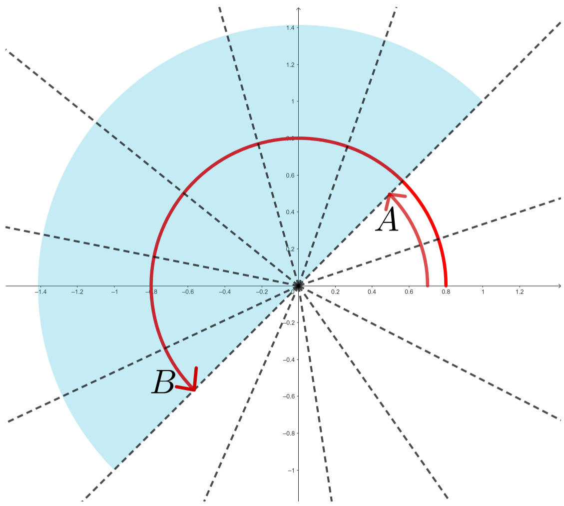
Vidíme, že nejmenší taková kružnice má poloměr 0 a největší leží na hranici kružnice $x^2 + y^2 = 2$ a tedy poslední kružnice, která nám ještě překryje množinu M má poloměr $\sqrt{2}$. Máme tudíž $0 \leq \rho\sqrt{2}$. Kružnice s větším poloměrem již neprotnou množinu M, protože by byly příliš daleko od počátku. Tento rozsah je kompletní a nic nám v něm nechybí.

Nyní si představme, že máme poloměr pevný a sledujeme pouze jednu kružnici a její průnik s množinou M. Dostaneme fialově zvýrazněný oblouk kružnice O.

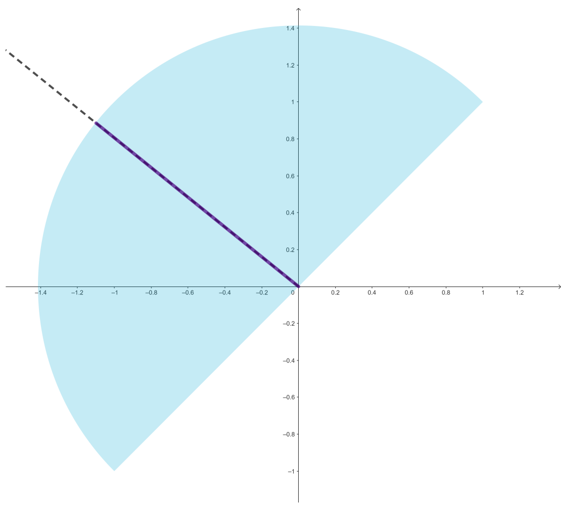


Pro pevný poloměr ρ nyní chceme určit rozsah úhlů φ, pro něž máme nějaký bod oblouku O. Začneme na kladné poloose x, která má úhel 0. Zde nenalezneme žádný bod oblouku O a tedy pokračujeme a úhly zvětšujeme dokud nám polopřímka odpovídající úhlu nenarazí na nějaký bod oblouku O. Vidíme, že první průnik nastane pro úhel A a následně procházíme množinou pro zvětšující se úhly, dokud nedostaneme koncový úhel B. Úhel A i B odpovídají přímce $y = x$, která svírá s kladnou poloosou x úhel $45°$, tj. $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}$. Tento rozsah jsme našli pro pevně zvolený poloměr ρ, všimneme si však, že tento rozsah dostaneme pro libovolnou volbu ρ a tedy i z obrázku získáme rozsahy $\rho \in [0, \sqrt{2}]$ a $\varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

V předchozí části jsme začali popisem poloměrů ρ avšak můžeme stejně začít popisem poloměrů φ. Budeme-li pokračovat úhly φ, chceme zjistit, pro které odchylky od kladné poloosy x narazíme na množinu M. Dostaneme následující situaci.



Vidíme, že jen pro některé úhly na množinu narazíme a to poprvé pro úhel A a naposledy pro úhel B. I zde bychom dostali rozsah $\varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$. Nyní bychom uvážili pevný úhel φ a podíváme se jaké vzdálenosti od počátku mají body na úsečce U, která vznikne průnikem množiny M a polopřímky příslušné zvolenému úhlu φ. Situace může vypadat jako na následujícím obrázku, kde je úsečka U vyznačena fialově.



Vidíme, že bod nejblíže počátku má vzdálenost 0 a úsečka končí na hranici kružnice $x^2 + y^2 = 2$, tj. dostaneme všechny vzdálenosti $0 \leq \rho \leq \sqrt{2}$. Navíc si všimneme, že tento rozsah nezávisí na volbě φ a tedy i tentokrát dostaneme stejný výsledek jako v předchozích úvahách.

Rozsahy již máme, zbývá integrál převést do nových souřadnic. Jakobián transformace je $|J| = \rho$ a počítaný integrál má tedy po transformaci tvar

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}\rho.$$

Př. 120 *Transformujte integrál vhodnou transformací*

$$\iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $x^2 + y^2 \leq 1$, $x + y \geq 1$.

Neboť podmínka $x^2+y^2 \leq 1$ udává kruh, volíme transformaci do polárních souřadnic $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, kde nové proměnné musí splňovat $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\rho \geq 0$. Dosazením do nerovnice získáme

$$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2 \leq 1.$$

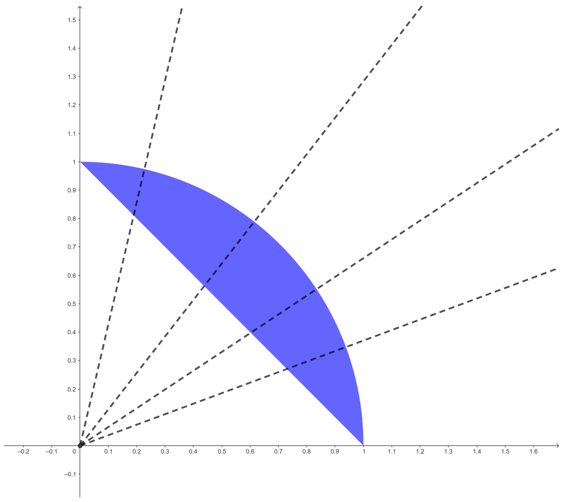
Proto víme, že poloměry mohou splňovat nejvýše $\rho \in [0, 1]$. Dosazením do druhé nerovnosti pak dostaneme

$$\begin{aligned} \rho\sin\varphi + \rho\cos\varphi &\geq 1 \\ \rho &\geq \frac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi}, \end{aligned}$$

tedy poloměr ρ je ohraničen ještě více a to v závislosti na úhlu φ. Všimněme si zde, že platí $\sin\varphi + \cos\varphi \geq 0$ a tedy je úprava skutečně správně. Ze stejné rovnice můžeme totiž například získat, že

$$\sin\varphi + \cos\varphi \geq \frac{1}{\rho} > 0.$$

Dále chceme určit rozsah pro proměnnou φ. Vykreslením obdržíme snadno, že $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Vskutku množina vypadá jako



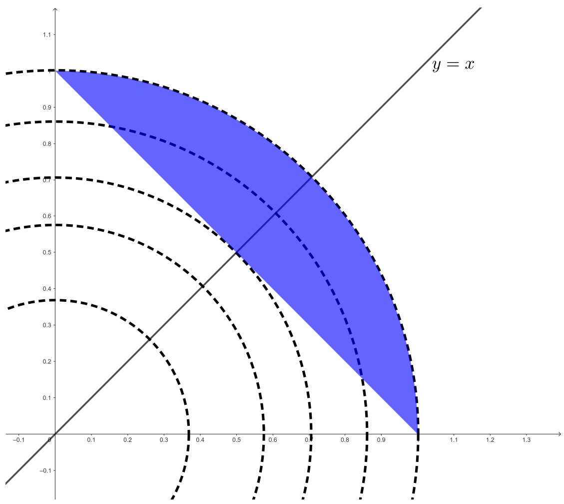
Zvětšujeme-li tedy úhly od nuly, tak na první bod množiny M narazíme ihned na kladné poloose x, tj pro $\varphi = 0$ a na poslední bod narazíme na kladné poloose y, tj. pro $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Pro všechny úhly mezi těmito hraničními případy máme nějaký bod množiny M a rozsah je tedy správně. Stejný rozsah získáme, pokud uvážíme, že

$$\begin{aligned}
\sin\varphi + \cos\varphi &\geq \frac{1}{\rho} \geq 1 \\
\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi &\geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\sin\varphi\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos\varphi &\geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) &\geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\frac{3\pi}{4} \geq \varphi + \frac{\pi}{4} &\geq \frac{\pi}{4} \\
\frac{\pi}{2} \geq \varphi &\geq 0.
\end{aligned}$$

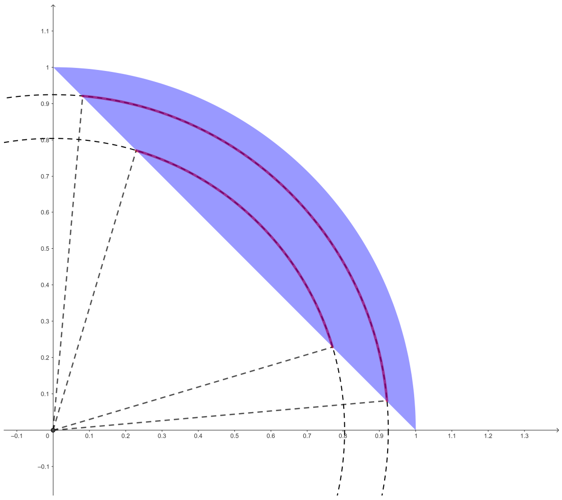
Jakobián $|J| = \rho$. Dostáváme tedy integrál

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}}^1 \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi.$$

Nicméně to je pouze varianta, kdy jsme nejprve získali rozsahy pro φ a poloměry ρ jsme vyjádřili v závislosti na nich. Pokud bychom chtěli integrovat integrál v opačném pořadí, můžeme opět vyjít z obrázku.



Bod množiny M, který je nejblíže počátku leží očividně na přímce $y = x$ (která je kolmá na přímku $y = 1 - x$ a prochází bodem $[0, 0]$, tj. leží na ní bod přímky $y = 1 - x$ s nejmenší vzdáleností od počátku) a získáme jej jako průsečík přímek $y = x$ a $y = 1 - x$. Jedná se o bod $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, jehož vzdálenost od počátku spočteme jako $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Uvážíme-li tedy kružnice, které se protnou s množinou M, tak rozsah jejich poloměrů bude $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \rho \leq 1$. Nyní si však všimněme, že pro různé kružnice (a tedy pro různé ρ) dostaneme různé rozsahy pro úhly.



Také úhly budou nyní záviset na poloměru ρ avšak tato závislost není z obrázku zrovna vidět. Všimněme si nicméně, že vždy končíme na přímce $x+y=1$ a tedy i zde můžeme omezení dostat z nerovnosti

$$\begin{aligned}
\rho\sin\varphi+\rho\cos\varphi &\geq 1\\
\sin\varphi+\cos\varphi &\geq \frac{1}{\rho}\\
\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi &\geq \frac{\sqrt{2}}{2\rho}\\
\sin\varphi\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos\varphi &\geq \frac{\sqrt{2}}{2\rho}\\
\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right) &\geq \frac{\sqrt{2}}{2\rho}\\
\varphi &\geq \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2\rho}-\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

V poslední nerovnosti jsme však získali pouze dolní odhad pro φ. Z obrázku vidíme, že uvažované φ musí ležet v intervalu $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Vztah $\arcsin\sin x=x$ plyne z inverzní podstaty funkcí, zde je však vztah platný pouze pro $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, což pro $\varphi+\frac{\pi}{4}$ splňují pouze hodnoty $\varphi\leq\frac{\pi}{4}$. Pro ostatní φ musíme využít funkci $\pi-\arcsin x$, která je navíc klesající a tudíž druhá část nerovnosti dopadne jako

$$\begin{aligned}
\varphi+\frac{\pi}{4} &\leq \pi-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2\rho}\\
\varphi &\leq \frac{3\pi}{4}-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2\rho}.
\end{aligned}$$

Druhou variantu převodu integrálu tak budeme mít v podobě

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\int_{\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2\rho}-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2\rho}}\rho f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho.$$

Př. 121 *Transformujte integrál vhodnou transformací*

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $x^2+y^2 \le y$, $y \ge x$, $x \ge 0$.

Všimneme si, že nerovnost $x^2+y^2 \le y$ udává kuželosečku ve které můžeme poznat kruh. Abychom ji dostali do kanonického tvaru, tak musíme výraz upravit na čtverec a dostaneme $x^2+\left(y-\frac{y}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$. Jedná se tedy o kružnici s posunutým středem do bodu $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ a s poloměrem $\frac{1}{2}$. Pro body uvnitř kruhu bychom mohli použít polární souřadnice, ale máme dvě možné varianty. Můžeme se rozhodnout pro standardní transformaci se popisující body z počátku, tj. pro 1) $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ nebo můžeme body množiny M popisovat přímo ze středu kruhu posunem polárních souřadnic 2) $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi+\frac{1}{2}$. Začněme první variantou. Vyzkoušíme-li první možnost, dostáváme dosazením do nerovností

$$\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=\rho^2 \le \rho\sin\varphi$$

což nám dá horní omezení pro poloměr $\rho \le \sin\varphi$. Dosazením do nerovnosti $y \ge x$ získáme

$$\begin{aligned}\rho\sin\varphi &\ge \rho\cos\varphi\\ \sin\varphi &\ge \cos\varphi.\end{aligned}$$

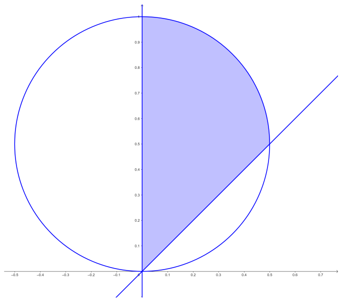
Což je nerovnost, která je na základním intervalu pro φ splněna pouze pro $\varphi \in I_1 = \left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$. Třetí nerovnost $x \ge 0$ pak je

$$\begin{aligned}\rho\cos\varphi &\ge 0\\ \cos\varphi &\ge 0,\end{aligned}$$

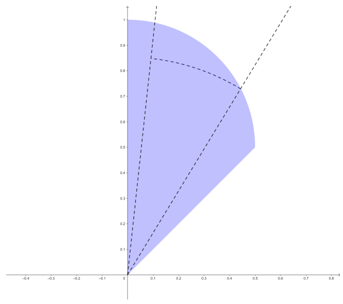
jejíž řešení vymezuje interval $I_2=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Průnikem intervalů $I_1 \cap I_2$ získáme výsledné omezení pro φ, neboť další podmínku nemáme. Transformovaný integrál je

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sin\varphi}\rho f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi.$$

Integrál můžeme popsat také z obrázku, který je

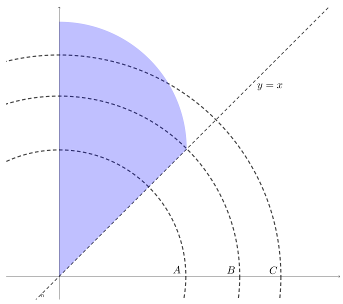


Všimněme si, že pokud začneme vše popisovat z pohledu úhlů φ a budeme je zvětšovat od nuly, tak první body množiny získáme na přímce $y=x$ a tedy pro $\varphi=\frac{\pi}{4}$. Poslední body množiny bychom zase měli na kladné poloose y a tudíž pro $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Z obrázku tedy hned plyne, že $\varphi \in \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$. Pro pevný úhel φ si dále všimneme, že průnik polopřímky odpovídající danému úhlu s množinou M tvoří úsečku, jejíž délka závisí na volbě φ. Můžeme to také vidět na obrázku



Počáteční bod je vždy stejný a množina začíná hned v počátku, tedy nutně $\rho \geq 0$. Koncový bod je však problematický a závisí na φ. Nyní bychom potřebovali tuto závislost odvodit. Nejsnáze ji však získáme, pokud si všimneme z obrázku, že pro pevný úhel φ je poloměr ρ shora omezen kružnicí (na ní úsečka končí) a tedy ji získáme znovu dosazením do rovnice kružnice $x^2 + y^2 \leq y$ čímž bychom získali již odvozenou nerovnost a mohli bychom transformovat integrál jako prvně.

Pokud bychom popisovali množinu M nejprve pro poloměry ρ, tak na obrázku vidíme, že body M nejblíže počátku mají vzdálenost 0 a nejvzdálenější body mají vzdálenost 1. Dostali bychom tak $\rho \in [0, 1]$ a úhly φ by byly závislé na poloměru. Podívejme se na následující situaci



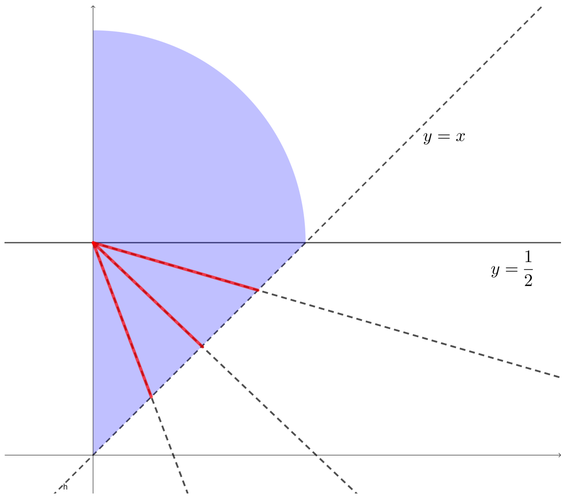
Pro pevně zvolený poloměr A a jemu příslušnou kružnici vidíme, že body začínají na přímce $y = x$ a končí na ose y, tj. $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Pro poloměr C je však situace odlišná a to že úhly začínají až na kružnici $x^2 + y^2 = y$. Musíme zde tedy odlišit dva případy, kdy k přechodu dojde na poloměru B, jehož velikost musíme určit. Jedná se o průnik kružnice $x^2 + y^2 = y$ a přímky $y = x$, tj. průnik dostaneme jako řešení rovnice

$$
\begin{aligned}
2x^2 &= x \\
x(2x-1) &= 0 \\
&\Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Hledaný bod má souřadnice $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ a jeho vzdálenost od počátku je $B = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Zlomový okamžik již známe, zbývá nám již pouze určit dolní ohraničení pro úhly φ v okamžiku, kdy je $\rho \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, neboť z obrázku vidíme, že horní odhad pro úhly φ nám stále poskytuje osa y. Úhly jsou zdola omezeny kružnicí, můžeme tedy do ní dosadit transformaci, což nám znova dá $\rho \leq \sin\varphi$. Z tohoto vztahu bychom však tentokrát chtěli omezit úhly φ. Funkce $\arcsin x$ je inverzní k funkci $\sin\varphi$, pokud máme $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, což je ale splněno (stačí se podívat znovu do obrázku). Navíc víme, že funkce $\arcsin x$ je rostoucí a tedy zachovává znaménko nerovnosti. Tudíž $\arcsin\rho \leq \varphi$. Druhá varianta jak transformovat integrál tedy je

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \int_{\arcsin\rho}^{\frac{\pi}{2}} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho.$$

Uvažujme nyní druhou z možných transformací, tj. $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi + \frac{1}{2}$. Úhly tentokrát neměříme od kladné poloosy x, ale od příslušné polopřímky $y = \frac{1}{2}$. Z obrázku si můžeme rozmyslet, že horní čtvrtkružnici popíšeme snadno jako $\rho \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Dolní část čtvrtkružnice dostaneme pro úhly $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. Pro pevně zvolené úhly dostaneme takovouto situaci.



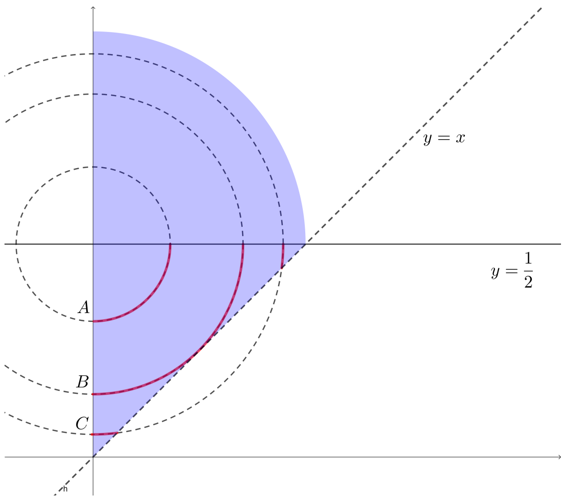
Průniky polopřímek příslušných úhlům s množinou M tvoří úsečky, které budou začínat ve středu kružnice a končit na přímce $y = x$. Rozsah pro poloměry tedy odvodíme dosazením zvolené transformace do nerovnosti $y \leq x$. Máme

$$\rho\cos\varphi \leq \rho\sin\varphi + \frac{1}{2}$$
$$\rho \leq \frac{1}{2(\cos\varphi - \sin\varphi)}.$$

Posunuté polární souřadnice mají stále stejný jakobián $|J| = \rho$ a můžeme integrál transformovat jako

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \rho f\left(\rho\cos\varphi, \frac{1}{2} + \rho\sin\varphi\right)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \int_0^{\frac{1}{2(\cos\varphi - \sin\varphi)}} \rho f\left(\rho\cos\varphi, \frac{1}{2} + \rho\sin\varphi\right)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi.$$

Předchozí převod jsme dostali tak, že jsme začali popisem úhlů φ a určili rozsah pro ρ. Avšak analogicky bychom mohli začít určením poloměrů ρ. Všimněme si, že v takovém případě by horní čtvrtkružnice dopadla stejně. Změna při popisování by nastala až ve spodní čvrtkružnici. Dále si rozmysleme následující situaci



Vidíme, že pro poloměr A a jemu příslušnou kružnici jdou úhly přes celý rozsah $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, ale pro poloměr C tomu tak již není. Pro poloměr C leží v kružnici jen dvě části a ke změně dojde právě v poloměru B, který musíme určit. Vzdálenost B dostaneme jako vzdálenost přímky $y = x$ od středu kruhu $S = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, tj. chceme minimalizovat vzdálenosti

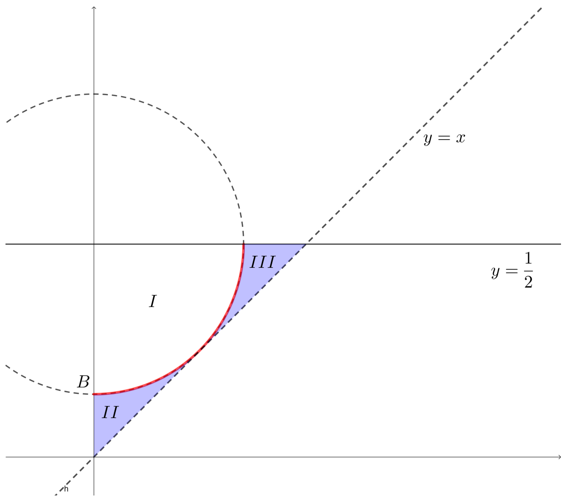
$$\rho(S, y = x) = (x - 0)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \overset{y=x}{=} x^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \to MIN.$$

Minimalizujeme funkci jedné proměnné a tedy hledáme její stacionární body

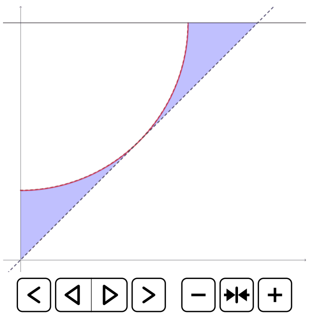
$$\begin{aligned} \overbrace{4x - 1}^{\rho(S,y=x)'} &= 0 \\ x &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Z geometrické podstaty se musí jednat o globální minimum a vzdálenost je tedy realizovaná v bodě $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, který má vzdálenost od středu S danou $B = \frac{1}{\sqrt{8}}$. Jiný způsob jak vzdálenost určit bychom měli, pokud bychom si všimli na obrázku rovnoramenného, pravoúhlého trojúhelníku jehož výška má délku právě B. Z osy symetrie trojúhelníka $y = \frac{1}{2} - x$ bychom pak dostali, že její průsečík s přímkou $y = x$ udává právě bod $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, kde dochází k realizaci vzdálenosti B.

Ať tak nebo onak, vzdálenost B nám rozděluje dolní čtvrtkruh na tři podsituace. Situaci I), kde je $0 \leq \rho \leq B$ a $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. Situaci II) a III), kde je $B \leq \rho \leq \frac{1}{2}$ a dostáváme dvě symetrické oblasti



Pokud bychom zvětšovali postupně poloměry, dostaneme následující úseky



Pro obě oblasti nyní musíme určit rozsah úhlů φ. Zaměřme se nejprve na část II), kde vidíme, že úhly musí splňovat $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq 0$. Jejich přesné vymezení dostaneme, když znovu uvážíme dosazení do nerovnosti $y \geq x$, která je vymezuje svou podmínkou. Upravujeme

$$\begin{aligned}
\cos\varphi - \sin\varphi &\leq \frac{1}{2\rho} \\
\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi &\leq \frac{\sqrt{2}}{4\rho} \\
\sin\frac{\pi}{4}\cos\varphi - \cos\frac{\pi}{4}\sin\varphi &\leq \frac{\sqrt{2}}{4\rho} \\
\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) &\leq \frac{\sqrt{2}}{4\rho} \\
\frac{\pi}{4} - \varphi &\leq \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4\rho} \\
\varphi &\geq \frac{\pi}{4} - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4\rho}.
\end{aligned}$$

Zde si rozmysleme, kde se pohybujeme při aplikaci inverze a zda se znaménko nerovnosti nezměnilo.

To platí, pokud je

$$
\begin{aligned}
-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4} - \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\
-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}
\end{aligned}
$$

a to je skutečně splněno. Stejné odvození můžeme uvážit na části III), kde je již z obrázku vymezeno $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{4}$, což můžeme upravit do tvaru

$$
\begin{aligned}
-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{4} \\
\frac{\pi}{4} \leq -\varphi \leq \frac{\pi}{2} \\
\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4} - \varphi \leq \frac{3\pi}{4}
\end{aligned}
$$

a tudíž nelze vzít inverzi v základním tvaru a předchozí odvození upravíme po správně vzaté inverzi (která je nyní klesající čímž změní znaménko nerovnosti) jako

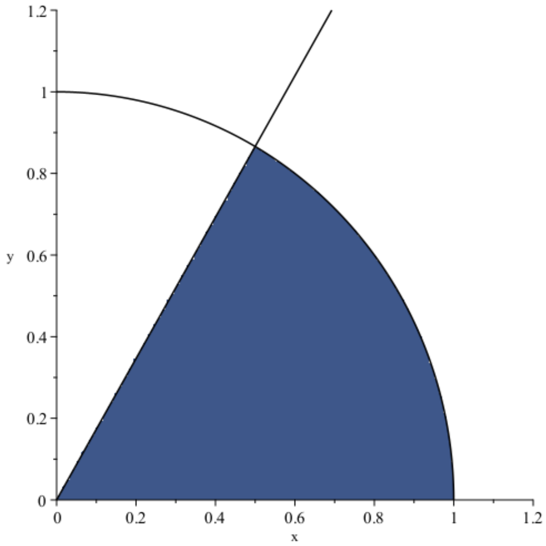
$$
\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) &\leq \frac{\sqrt{2}}{4\rho} \\
\frac{\pi}{4} - \varphi &\geq \pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4\rho} \\
\varphi &\leq -\frac{3\pi}{4} + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4\rho}.
\end{aligned}
$$

Máme již vše určeno a finální integrál je

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \rho f\left(\rho\cos\varphi, \frac{1}{2} + \rho\sin\varphi\right) \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{8}}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \rho f\left(\rho\cos\varphi, \frac{1}{2} + \rho\sin\varphi\right) \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho + \\
&+ \int_{\frac{1}{\sqrt{8}}}^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{\pi}{4} - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4\rho}}^{0} \rho f\left(\rho\cos\varphi, \frac{1}{2} + \rho\sin\varphi\right) \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho + \int_{\frac{1}{\sqrt{8}}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{3\pi}{4} - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4\rho}}^{0} \rho f\left(\rho\cos\varphi, \frac{1}{2} + \rho\sin\varphi\right) \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho.
\end{aligned}
$$

Př. 122 *Množina M je daná po transformaci do polárních souřadnic jako $\rho \in [0,1]$ a $\varphi \in [0,1]$. Určete jak vypadala množina M před transformací a následně spočtěte její obsah. Integrálem ověřte, že je tento obsah v pořádku.*

Množina M je po transformaci tvořena čtvercem, takže pro každý pevně zvolený úhel φ leží poloměr v intervalu $0 \leq \rho \leq 1$ a tedy se jedná o část kruhu s poloměrem $r = 1$. Jak vypadají úhly? Úhly φ začínají na hodnotě 0, a protože tento úhel reprezentuje odchylku od kladné poloosy x, tak vidíme, že počáteční odchylka je nulová (tj. začínáme na kladné části osy x). Dále úhly rostou až na hodnotu $\varphi = 1 \approx \frac{\pi}{3}$, který odpovídá zhruba $60°$. Množina M vypadá zhruba následovně



Jedná se tedy o kruhovou výseč. Její obsah spočteme jako poměrnou část obsahu celého kruhu, tj.

$$S = \pi r^2 \frac{u}{360°},$$

kde poloměr máme daný pevně jako $r = 1$ a úhel u určíme jako úhel kruhové výseče (tj, délka intervalu pro φ). Víme, že tento úhel u je zhruba $60°$ a tedy touto aproximací bychom měli obsah

$$S \approx \pi \frac{60}{360} = \frac{\pi}{6}.$$

Avšak tento vzorec nemusíme odhadovat, protože jeho přesnou hodnotu známe. Naše část kruhové výseče odpovídá v radiánech hodnotě $u = 1$. Pokud následně dosadíme tento úhel do vzorce a převedeme stupně na radiány, pak dostaneme zcela přesně

$$S = \pi \frac{u}{2\pi} = \pi \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2}.$$

Kdybychom si obsah chtěli ověřit, dostaneme z transformace

$$S = \iint_M 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^1 \rho \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi = 1 \cdot \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Nesmíme zapomenout na jakobián transformace a vidíme, že potom obsahy skutečně souhlasí.

Př. 123 *Transformujte integrál vhodnou transformací*

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $y = x$, $y = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$.

Transformujeme rovnost $x^2 + y^2 = 4x$ úpravou na čtverec na rovnost $(x-2)^2 + y^2 = 4$ a rovnost $x^2 + y^2 = 8x$ na $(x-4)^2 + y^2 = 16$. Vzhledem k tomu, že jedna kružnice je očividně obsažena ve druhé (první kružnice má střed $S_1 = [2,0]$ a poloměr 2 zatímco druhá kružnice má střed $S_2 = [4,0]$ a poloměr 4. Pokud bychom hledali jejich průnik, dostaneme $4x = x^2 + y^2 = 8x$, kterážto rovnice má jediné řešení a to $x = 0$. Jinde se kružnice neproniknou), dostaneme nerovnosti $(x-2)^2 + y^2 \geq 4$ a $(x-4)^2 + y^2 \leq 16$. Vzhledem ke kružnicím také vidíme, že $x \geq 0$ (porovnáním poloměrů a jejich středů). Přímky $y = x$, $y = 2x$ se protínají v počátku a vzhledem k podmínce $x \geq 0$ musí být množina M vymezena jako $x \leq y \leq 2x$. Mohli bychom uvažovat o posunutých polárních souřadnic, neboť však uvažujeme dvě kružnice s různým posunutím, vyzkoušíme nejprve obyčejné polární souřadnice. Dosazením polárních souřadnic do nerovnost $4x \leq x^2 + y^2 \leq 8x$ dostaneme

$$\begin{aligned} 4\rho\cos\varphi \leq &\rho^2 \leq 8\rho\cos\varphi \\ 4\cos\varphi \leq &\rho \leq 8\cos\varphi, \end{aligned}$$

tj. ohraničení úhlů v závislosti na poloměru. Z nerovnosti $x \leq y \leq 2x$ pak zase máme

$$\begin{aligned} \rho\cos\varphi \leq \rho\sin\varphi \leq 2\rho\cos\varphi \\ \cos\varphi \leq \sin\varphi \leq 2\cos\varphi. \end{aligned}$$

Levá nerovnost $\cos\varphi \leq \sin\varphi$ je splněna pouze na intervalu $\varphi \in I_1 = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$. Naopak pravou nerovnost $\sin\varphi \leq 2\cos\varphi$ lze rozdělit na dva případy. Případ 1) $\cos\varphi > 0$, což vede na ohraničení

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi \leq 2,$$

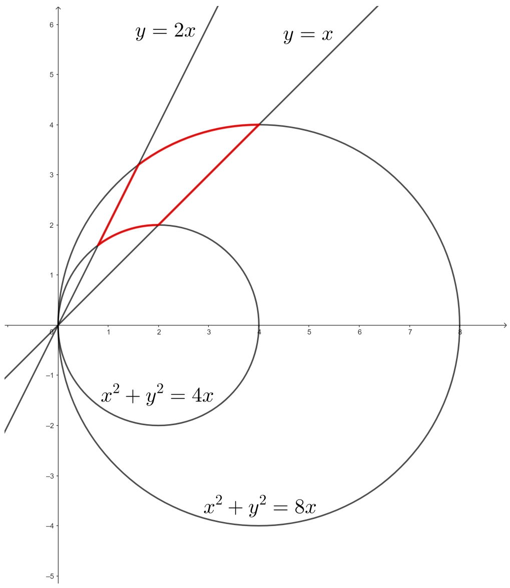
tj. ohraničení $\varphi \leq \operatorname{arctg} 2 < \frac{\pi}{2}$. Druhá varianta 2) $\cos\varphi < 0$ dává stejným způsobem nerovnost

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi \geq 2.$$

Avšak na intervalu $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right]$, kde $\cos\varphi < 0$ je $\operatorname{tg}\varphi \leq 1$ a zde podmínka nemůže být splněna. Celkově tedy máme interval

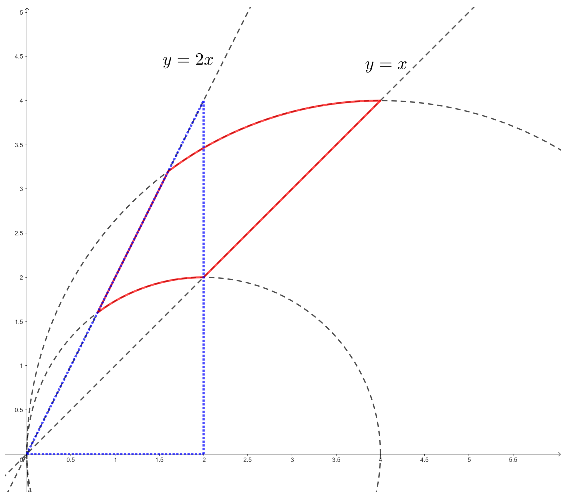
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2} \int_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi.$$

Vyšetřovaná množina vypadá následovně.



Obrázek 1: Řada jiných oblastí si lze splést s množinou M, ale ostatní varianty využívají vždy jen některá ohraničení a tedy pokud se nemůžeme rozhodnout, tak volíme takovou oblast, která využívá veškerá ohraničení.

I z obrázku vidíme, že patrně $\varphi \geq \frac{\pi}{4}$ a že horní rozsah musíme dopočítat z přímky $y = 2x$, což můžeme dostat také z trojúhelníku:

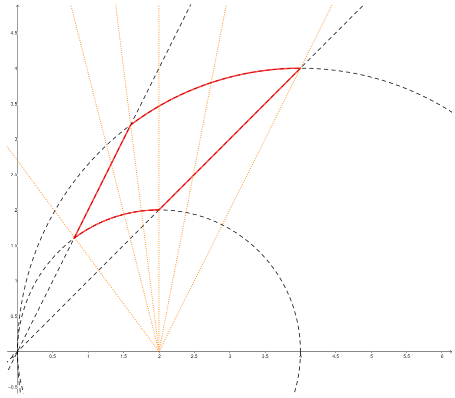


Zde vidíme, že $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \frac{2x}{x} = 2$.

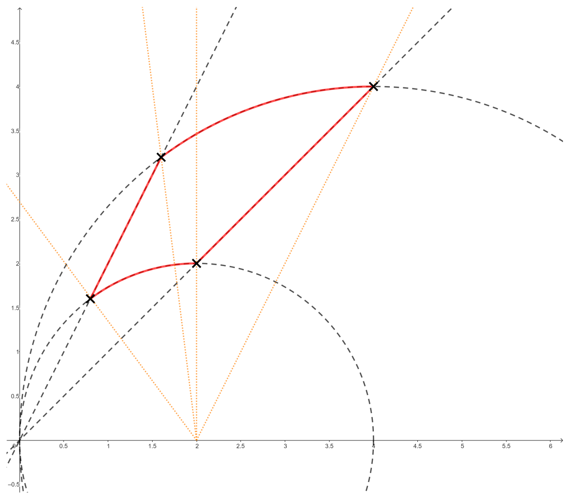
Uvedený postup popisuje body kružnice z počátku. Mohli bychom také zkusit popisovat body z jiného bodu. Nabízí se také použít polární souřadnice vzhledem ke středům kružnic, které vymezují množinu. Další způsob jak bychom mohli situaci popsat je z posunutého středu kruhu, např. z bodu $S_1 = [2, 0]$. To vede na transformaci:

$$x = 2 + \rho \cos \varphi,$$
$$y = \rho \sin \varphi.$$

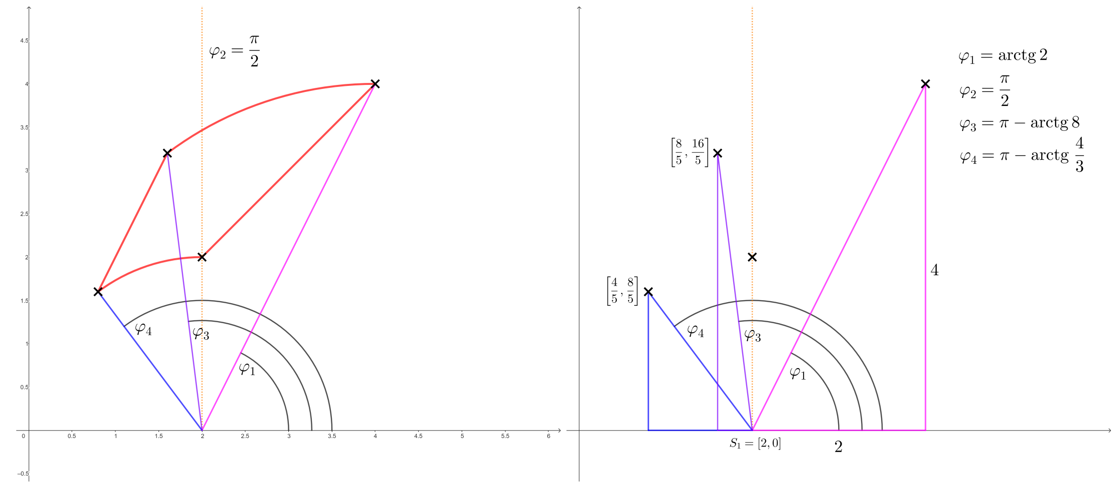
Úhly φ měří nyní odchylku od poloosy $y = 0$, $x \geq 2$ a z obrázku stejně jako z podmínky $y \geq x \geq 0 \Rightarrow y \geq 0$ máme, že φ musí patřit do intervalu $[0, \pi]$. Také však vidíme, že tento interval bude vymezen ještě více. Další pozorování můžeme udělat, pokud si rozebereme situaci ještě více na obrázku:



Vidíme, že pro měnící se úhly se také mění dolní a horní ohraničení množiny. Jednou množina končí na kružnici, jindy zase na přímce. Chtěli bychom určit úhly, pro které k této změně dojde. Mohli bychom začít spočítáním bodů průniků, kde se přechod realizuje. Dostaneme po spočítání 4 průniků následující situaci:



a máme úhly, které můžeme napočítat ze 3 pravoúhlých trojúhelníků a jeden úhel, který je zřejmý:



Nyní jsme si ujasnili, pro jaké úhly dochází ke změnám a můžeme také sledovat, pro jaké intervaly úhlů máme jaké ohraničení množiny. Například na intervalu $[\varphi_2, \varphi_3]$ je množina vymezena dále jako $4x \leq x^2 + y^2 \leq 8x$. Pokud do této nerovnosti dosadíme naši transformaci, tak dostaneme po úpravě

$$4 \leq \rho^2 \leq 12 + 4\rho \cos \varphi.$$

Levá strana nerovnosti je jasná. Pravá strana nerovnosti pak vede na vymezení

$$\begin{aligned} \rho^2 - 4\rho \cos \varphi + 4 \cos^2 \varphi &\leq 12 + 4 \cos^2 \varphi \\ (\rho - 2 \cos \varphi)^2 &\leq 12 + 4 \cos^2 \varphi \\ 2 \cos \varphi - \sqrt{12 + 4 \cos^2 \varphi} \leq \rho &\leq 2 \cos \varphi + \sqrt{12 + 4 \cos^2 \varphi}, \end{aligned}$$

kde nás zajímá horní ohraničení poloměru. Můžeme si také rozmyslet, že platí nerovnost $2 \cos \varphi - \sqrt{12 + 4 \cos^2 \varphi} \leq 0$ a tato část výsledné nerovnosti nás také nezajímá.

Toto odvození jsme dostali pro interval $[\varphi_2, \varphi_3]$, ale můžeme jich využít i pro jiné intervaly, neboť například i na intervalu $[\varphi_1, \varphi_2]$ je množina shora vymezena kružnicí $x^2 + y^2 \leq 8x$. Zdola je množina zase vymezena jako $x \leq y$ a z něj vyplývá

$$\begin{aligned} 2 + \rho \cos \varphi &\leq \rho \sin \varphi \\ 2 &\leq \rho(\sin \varphi - \cos \varphi) \\ \rho &\geq \frac{2}{\sin \varphi - \cos \varphi}. \end{aligned}$$

Rozmysleme si, že $\varphi_1 = \operatorname{arctg} 2 \geq \frac{\pi}{4}$ a tedy na intervalu $[\varphi_1, \varphi_2]$ je skutečně $\sin \varphi - \cos \varphi \geq 0$, tedy uvedené podělení bylo korektní. Na intervalu $[\varphi_3, \varphi_4]$ dostaneme pomocí analogických argumentů vymezení $\rho \leq \frac{4}{\sin \varphi - 2 \cos \varphi}$.

Nakonec si ještě uvědomme, že posunutím středu se Jakobián nezmění a tedy stále $|J| = \rho$. Integrál tedy máme po transformaci, kde symbol 本 $= \rho f(2 + \rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$:

$$\int_{\operatorname{arctg} 2}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{2}{\sin \varphi - \cos \varphi}}^{2 \cos \varphi + \sqrt{12 + 4 \cos^2 \varphi}} \text{本} \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \operatorname{arctg} 8} \int_{2}^{2 \cos \varphi + \sqrt{12 + 4 \cos^2 \varphi}} \text{本} \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi +$$

$$+ \int_{\pi - \operatorname{arctg} 8}^{\pi - \operatorname{arctg} \frac{4}{3}} \int_{2}^{\frac{4}{\sin \varphi - 2 \cos \varphi}} \text{本} \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi.$$

Třetí variantu polárních souřadnic ze středu $S_2 = [4, 0]$ vynecháme. Výpočet by jistě probíhal podobnými úvahami na základě podobných výpočtů.

Př. 124 *Transformujte integrál vhodnou transformací*

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $x^2+y^2 \leq Ax$, $A > 0$.

Ohraničení $x^2+y^2 \leq Ax$ převedeme úpravou na čtverec na $\left(x-\frac{A}{2}\right)^2+y^2 \leq \frac{A}{4}$. Vidíme, že se jedná o kružnici s posunutým středem mimo počátek a nabízí se dvě možné transformace. S posunutým středem nebo standardní polární souřadnice. Zaveďme polární souřadnice s posunutým středem $x = \rho\cos\varphi + \frac{A}{2}$, $y = \rho\sin\varphi$. Dosazením do omezení dostáváme

$$\rho^2 \leq \frac{A}{4}.$$

A tedy $\rho \in \left[0, \frac{A}{2}\right]$. Neboť další podmínku nemáme, je $\varphi \in [0, 2\pi]$. Jakobián zůstává posunutím stejný, a proto $|J| = \rho$.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{A}{2}} \rho f\left(\rho\cos\varphi + \frac{A}{2}, \rho\sin\varphi\right)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi.$$

Pokud využijeme standardní polární souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, získáme dosazením do nerovnosti

$$\begin{aligned} \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2 &\leq A\rho\cos\varphi \\ \rho &\leq A\cos\varphi. \end{aligned}$$

Neboť je $\rho \geq 0$, je také $\cos\varphi \geq 0$ a proto $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Tímto získáme integrál

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{A\cos\varphi} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi.$$

Pokud bychom zde chtěli zaměnit pořadí integrace vzhledem k proměnným ρ a φ, tak můžeme uvážit v nerovnosti $\rho \leq A\cos\varphi$, že je $\cos\varphi \leq 1$ a tudíž $\rho \leq A$. Navíc aplikací vhodné inverzní funkce vyplyne, že

$$\varphi \leq \arccos\frac{\rho}{A},$$

kde musíme obrátit znaménko nerovnosti, protože funkce $\arccos x$ je klesající. Navíc si všimněme, že funkce $\arccos x$ pracuje na základním intervalu $[0, \pi]$ a tedy zde předpokládáme při výpočtu, že je $\varphi \geq 0$. Ze symetrické podstaty úlohy přes osu x získáme druhé omezení a to $varphi \geq 2\pi - \arccos\frac{\rho}{A} = -\arccos\frac{\rho}{A}$, pokud uvažujeme periodické využití úhlu φ. Třetí variantu integrálu tak máme také

$$\int_0^A\int_{-\arccos\frac{\rho}{A}}^{\arccos\frac{\rho}{A}} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho.$$

Př. 125 *Transformujte integrál vhodnou transformací*

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M *je ohraničená nerovnostmi* $x^2+y^2 \geq A^2$, $x^2+y^2 \leq B^2$, $y \geq 0$, $y \leq x$, $0 < A < B$.

Neboť máme množinu M omezenou kružnicemi se středem v počátku, zavedeme obvyklé polární souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Tímto získáme

$$\begin{aligned} A^2 \leq& \rho^2 \leq B^2 \\ A \leq& \rho \leq B. \end{aligned}$$

Dosazením do dalších omezení dostáváme $\rho\sin\varphi \geq 0$ což vede na interval $\varphi \in I_1 = [0,\pi]$. Další omezení

$$\begin{aligned} \rho\sin\varphi &\leq \rho\cos\varphi \\ \sin\varphi &\leq \cos\varphi. \end{aligned}$$

Tato nerovnost je splněna na intervalu $I_2 \in [0,\pi/4] \cup [5\pi/4, 2\pi]$. Dohromady je tak úhel φ vymezen jako $\varphi \in I_1 \cap I_2 = [0,\pi/4]$. Proto

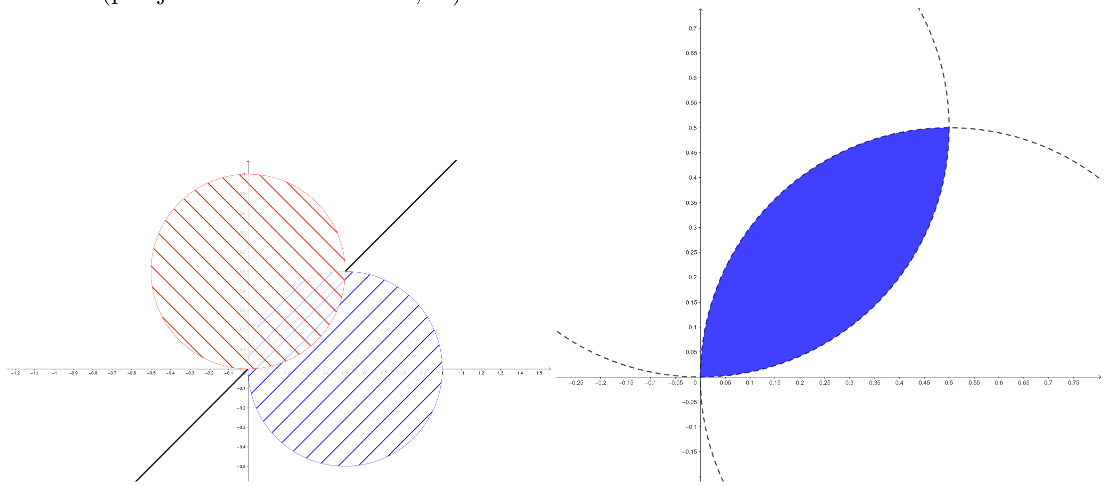
$$\int_0^{\pi/4}\int_A^B \rho f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi.$$

Př. 126 *Transformujte integrál vhodnou transformací*

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená podmínkami $x^2+y^2 \le Ax$, $x^2+y^2 \le By$, $A>0$, $B>0$.

Ihned vidíme, že nerovnosti $x^2+y^2 \le Ax$ a $x^2+y^2 \le By$ udávají kruhy. Úpravou na čtverec bychom navíc dostali, že kruh $x^2+y^2 \le Ax$ má střed v bodě $S_1 = \left[\frac{A}{2}, 0\right]$ s poloměrem $\frac{A}{2}$. Druhý kruh $x^2+y^2 \le By$ má zase střed v bodě $S_2 = \left[0, \frac{B}{2}\right]$ a poloměr $\frac{B}{2}$. Situace by tak vypadala následovně (pro jistou volbu hodnot A, B):



Integrál chceme transformovat, mohli bychom tedy vyzkoušet polární souřadnice. Zde se nabízí varianty standardních polárních souřadnic, nebo souřadnic posunutých do jednoho ze středů kružnic. Můžeme vyzkoušet nejprve standardní polární souřadnice.

Z nerovnic vymezujících množinu M dostaneme zavedením pro polární souřadnice podmínky

$$\begin{aligned} 0 \le \rho \le A\cos\varphi, \\ 0 \le \rho \le B\sin\varphi. \end{aligned}$$

Porovnáním nerovnic nejprve vidíme, že platí $\cos\varphi \ge 0$ a $\sin\varphi \ge 0$. Tyto nerovnosti jsou dohromady splněny pouze na intervalu v prvním kvadrantu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, což také můžeme vidět z obrázku. Pro zmenšující se poloměr ρ dojdeme až do nuly a tedy tento interval nebude již dále omezen. Horní rozsah pro poloměr pak je $\rho \le A\cos\varphi$ a $\rho \le B\sin\varphi$. Nicméně poloměr nemůže být vymezen skrze dvě omezení a vskutku pro jisté volby φ, A, B platí $A\cos\varphi \ge B\sin\varphi$ a pro jiné volby zase platí $A\cos\varphi \le B\sin\varphi$. Z obrázku si můžeme rozmyslet, že k této změně dojde v okamžiku, kdy se vymezení hranice množiny M mění z jedné kružnice na druhou. Děje se tak v bodech průsečíků kružnic.

Porovnáním rovnic kružnic $x^2+y^2 = Ax$ a $x^2+y^2 = By$ dostaneme hledané průsečíky. Vztah vede na rovnost $Ax = By$ a tudíž průsečík leží na přímce $y = \frac{Ax}{B}$. Úhel přímky $y = \frac{Ax}{B}$ dostaneme jako derivaci $\operatorname{tg}\varphi = \left(\frac{Ax}{B}\right)' = \frac{A}{B}$. Samotný bod nás nezajímá neboť se nám jedná pouze o úhel, kdy ke změně dojde.

Obdobně bychom mohli analyzovat situaci, kde je na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ splněna nerovnost $A\cos\varphi \ge$

$B \sin\varphi$ a to nastává pro

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} &\geq \operatorname{tg}\varphi \\ \operatorname{arctg}\frac{A}{B} &\geq \varphi. \end{aligned}$$

Z obrázku stejně jako úvahou tak vidíme, že úhel $\operatorname{tg}\varphi = \frac{A}{B}$ dělí interval $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ na dvě části, kde je poloměr ρ shora vymezen různými podmínkami. Transformovaný integrál je pak

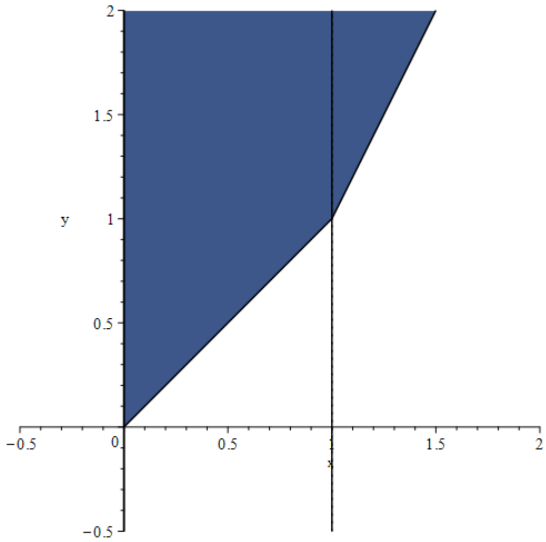
$$\int_0^{\operatorname{arctg}\frac{A}{B}} \int_0^{A\cos\varphi} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi + \int_{\operatorname{arctg}\frac{A}{B}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{B\sin\varphi} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi.$$

Př. 127 *Transformujte integrál do polárních souřadnic*

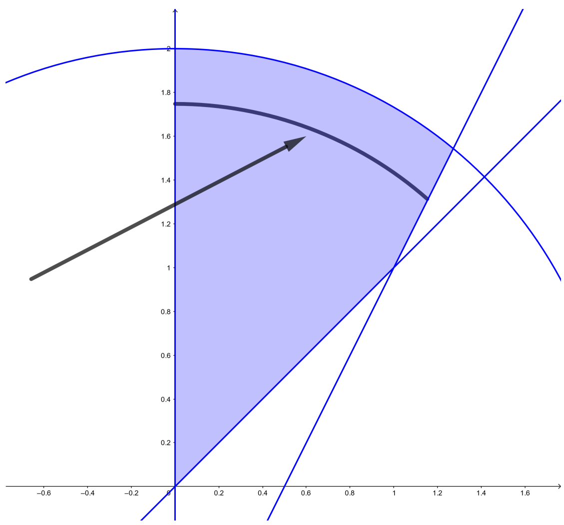
$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená nerovnostmi $x \geq 0$, $y \geq \max\{x, 2x-1\}$, $x^2+y^2 \leq 4$.

Nejkomplikovanější hranicí množiny M je nerovnost $y \geq \max\{x, 2x-1\}$, neboť ostatní nerovnosti jsou pro nás dostatečně průhledné. Máme dvě přímky $y = x$ a $y = 2x - 1$, které si snadno namalujeme. Spolu s nerovností $x \geq 0$ pak situace vypadá následovně



Máme již nějakou představu o podobě množiny M. Zaveďme tedy polární souřadnice. Kružnice nám dá nerovnost $\rho \leq 2$. Navíc z obrázku vidíme, že až do bodu $[1,1]$ je množina vymezena rovností $y = x$, která následně přejde v rovnost $y = 2x-1$. Bod $[1,1]$ má vzdálenost od počátku $\sqrt{2}$. Tudíž pro $\rho \in [0, \sqrt{2}]$ je jednoduše $\varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. Pro tyto poloměry jsme totiž omezeni jen nerovnostmi $x \geq 0$ a $y \geq x$. Vezmeme-li větší poloměr, tj. $\rho \in [\sqrt{2}, 2]$ tak vidíme, že se zastavíme s úhlem φ a s našimi body na nerovnosti $y \geq 2x - 1$



Jak tedy dále? Dosadíme-li do této nerovnosti polární souřadnice dostaneme

$$\begin{aligned} \rho \sin\varphi &\geq 2\rho\cos\varphi - 1 \\ 2\cos\varphi - \sin\varphi &\leq \frac{1}{\rho}. \end{aligned}$$

Nahraďme tuto nerovnost rovností a vyřešme ji. Ale jak? Pokud použijeme vhodnou substituci a položíme $t = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, tak také odvodíme

$$\sin\varphi = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Tyto vztahy můžeme dosadit do rovnice a pro zjednodušení položme také $2A = \frac{1}{\rho}$ čímž máme

$$\begin{aligned} \frac{2-2t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2} &= 2A \\ 1 - t^2 - t &= A + At^2 \\ (A+1)t^2 + t + A - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Tato rovnice má dvě řešení a to

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5-4A^2}}{2A+2}.$$

My chceme určit hraniční φ vymezené poloměrem, kde φ je svázáno s t a ρ s A. Navíc vidíme z povahy úlohy a obrázku, že pro vyšetřovanou část množiny M musí platit $\varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, tj. φ musí patřit do horní poloviny 1. kvadrantu. Převedením přes vztah $t = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ zjistíme, že tomuto intervalu odpovídá $t \in \left[\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}, 1\right] \approx [0,41; 1]$. Hranici množiny M tak tvoří takové t_i, které splňuje $t_i \in \left[\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}, 1\right]$. Navíc nám stačí určit vše pro jisté ρ neboť pro ostatní bude vše platit stejně. Například v bodě $[1,1]$ máme $\rho = \sqrt{2}$ a také z obrázku vidíme, že zde hraniční φ splňuje $\varphi = \frac{\pi}{4} \to t \approx 0,41$. Tyto informace využijeme k dosazení pro $A = \frac{1}{2\rho} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5 - \frac{1}{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}} + 2} = \begin{cases} t_1 \approx 0,41 \\ t_2 \approx -1,15. \end{cases}$$

Vskutku vidíme, že požadovaná hodnota nastává v t_1 a tedy hranici množiny M tvoří φ“ $\geq$ ”t_1. Analogicky si stejný výsledek můžeme rozmyslet, pokud uvážíme, že $t_2 < 0$ a že hledané $t > 0$. Pokud propojíme t_1 zpátky s φ vztahem $t = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ tak dostaneme hraniční φ jako

$$\varphi_H = 2\operatorname{arctg}\frac{-1 + \sqrt{5 - \frac{1}{\rho^2}}}{\frac{1}{\rho} + 2} = 2\operatorname{arctg}\frac{-\rho + \sqrt{5\rho^2 - 1}}{1 + 2\rho}.$$

Horní vymezení pro φ bychom dostali z obrázku stále jako $\frac{\pi}{2}$. Transformovaný integrál tak bude

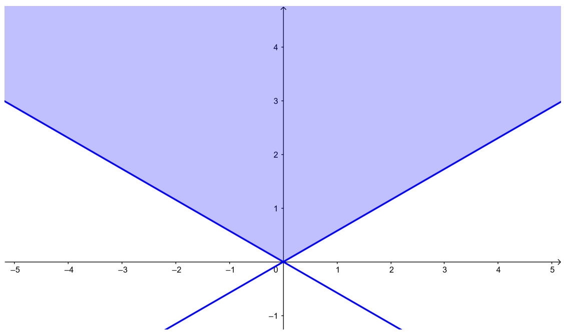
$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho + \int_{\sqrt{2}}^{2} \int_{2\operatorname{arctg}\frac{-\rho+\sqrt{5\rho^2-1}}{1+2\rho}}^{\frac{\pi}{2}} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho.$$

Př. 128 *Mějte transformovaný dvojnásobný integrál*

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \int_{\frac{a}{\sin\varphi}}^{2a} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi,$$

pro $a > 0$. *Určete podobu množiny* M *před transformací a následně v tomto dvojnásobném integrálu zaměňte pořadí integrovaných proměnných* ρ *a* φ.

Z dvojnásobného integrálu vidíme hned na první pohled, že k transformaci byly použity polární souřadnice. Interval pro úhel je $\varphi \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$. Úhly se pohybují mezí 30° a 150°. Tedy jen z úhlů vidíme, že množina M bude ležet ve výřezu



Další omezení dostaneme z rozsahu pro poloměr

$$2a \geq \rho \geq \frac{a}{\sin\varphi}.$$

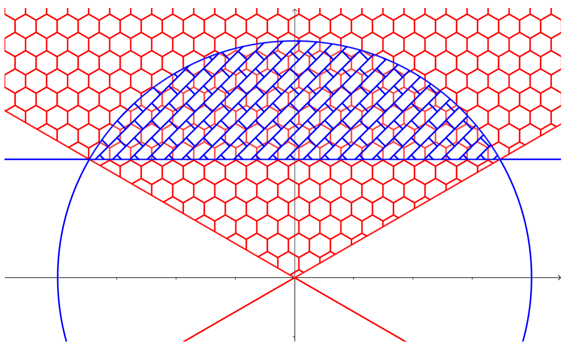
Víme, že pokud je poloměr ohraničen konstantou, tak se musí jednat a kruh s daným poloměrem, nebo bychom si mohli také odvodit

$$4a^2 \geq \rho^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow 4a^2 \geq x^2 + y^2.$$

Druhé ohraničení nám pak udá

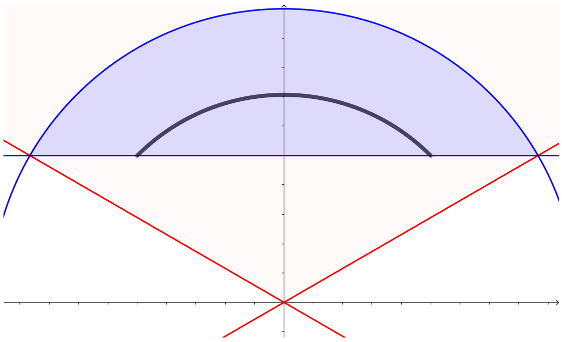
$$\rho \geq \frac{a}{\sin\varphi} \Rightarrow \underbrace{\rho\sin\varphi}_{=y} \geq a.$$

Při úpravě nerovnosti bychom se mohli bavit o tom, zda nedojde k obrácení znaménka nerovnosti, avšak víme, že na intervalu $\varphi \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$ je $\sin\varphi > 0$. Přidáme-li tyto informace k výřezu dostaneme množinu M jako průnik vyznačených oblastí



Nyní máme představu o podobě množiny M, ale ještě musíme zaměnit pořadí integrovaných proměnných. Všimněme si nejprve z obrázku, že množina M se v rámci poloměrů nachází na intervalu $\rho \in [a, 2a]$. To můžeme například vidět, pokud bychom si všechny body množiny přenesli, kružítkem zabodnutým v počátku, na osu x, kde by nám vznikl právě interval $[a, 2a]$. Nebo analogickým argumentem vidíme, že první kružnice, která narazí na množinu M bude mít poloměr a a poslední kružnice, která ještě protne množinu M má poloměr $2a$.

Jak ale určit rozsah pro úhly φ? Všimněme si nejprve, že pro pevně zvolený poloměr $\rho = a$ máme jediný bod na ose y a tomu odpovídá $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Zvětšíme-li poloměr ρ, dostaneme nějakou část kružnice, která může vypadat například takto



Vidíme, že kružnice již zabírá větší interval úhlů a že když budeme poloměr zvětšovat až dorazíme na $\rho = 2a$, tak budeme mít již známý rozsah $\varphi \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$. Jak ale určit hodnoty úhlů? Víme, že úhly se zastaví vždy na nerovnosti $y \geq a$, pojďme se na ni podívat

$$y \geq a \Rightarrow \rho \sin\varphi \geq a \Rightarrow \sin\varphi \geq \frac{a}{\rho}.$$

Nyní bychom na nerovnost mohli aplikovat inverzní funkci, kde si uvědomíme, že je funkce $\arcsin x$ rostoucí a tedy platí

$$\varphi \geq \arcsin\frac{a}{\rho}.$$

Zde nám to však trochu nesedí. Máme jen dolní odhad pro φ, co s tím uděláme? Uvědomme si, že funkce $\arcsin x$ je inverzní k funkci $\sin x$ jen pro hodnoty $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Takto dostaneme v nerovnosti dolní odhad jen pro $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Známe-li však dolní úhel, známe ze znalosti úhlů (nebo ze symetrie problému), že také musí platit

$$\varphi \leq \pi - \arcsin\frac{a}{\rho},$$

což nám dá horní odhad. Jsme hotovi. Můžeme zkontrolovat, že

$$\begin{aligned}
\rho = a &\Rightarrow \arcsin 1 \leq \varphi \leq \pi - \arcsin 1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},\\
\rho = 2a &\Rightarrow \arcsin\frac{1}{2} \leq \varphi \leq \pi - \arcsin\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \pi - \frac{\pi}{6},
\end{aligned}$$

tj. i pro známé rozsahy nerovnost souhlasí. Můžeme tedy převést

$$I = \int_a^{2a} \int_{\arcsin\frac{a}{\rho}}^{\pi - \arcsin\frac{a}{\rho}} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho.$$

Př. 129 *Mějte dvojný integrál*

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \int_{\frac{1}{\sin\varphi}}^{2\sin\varphi} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi,$$

určete nerovnosti, které vymezují transformovanou množinu M.

Z dvojnásobného integrálu vidíme hned na první pohled, že k transformaci byly použity polární souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Začněme jendodušší částí a to je vymezení úhlu φ. Zřejmě lze vyjádřit $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$, pro $x > 0$, $y > 0$. Protože měříme úhel od kladné poloosy x, je pak také $\operatorname{tg}(\pi - \varphi) = \frac{y}{-x}$, pro $x < 0$, $y > 0$ (což je zase relevantní pro hodnoty $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$).

$$\begin{aligned} \varphi &\geq \frac{\pi}{4} \\ \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi &\geq \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 \\ y &\geq x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &\leq \frac{3}{4}\pi \\ -\varphi &\geq -\frac{3}{4}\pi \\ \pi - \varphi &\geq \frac{1}{4}\pi \\ \frac{y}{-x} = \operatorname{tg}(\pi - \varphi) &\geq \operatorname{tg}\frac{1}{4}\pi = 1 \\ y &\geq -x \end{aligned}$$

(uvažujeme $x < 0 \Rightarrow -x > 0$).

Máme tedy pro $x > 0$ podmínku $y \geq x$ a pro $x < 0$ podmínku $y \geq -x$. Vidíme tedy, že množina M je v tomto ohledu vymezena podmínkou $y \geq |x|$.

Ve druhé části se chceme podívat ještě na podmínky vymezující poloměr ρ. Máme

$$\begin{aligned} \rho &\geq \frac{1}{\sin\varphi} \\ \overbrace{\rho\sin\varphi}^{=y} &\geq 1 \\ y &\geq 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho &\leq 2\sin\varphi \\ \rho^2 &\leq 2\overbrace{\rho\sin\varphi}^{=y} \\ x^2 + y^2 &\leq 2y. \end{aligned}$$

Množina M je tedy vymezena podmínkami $y \geq |x|$, $y \geq 1$ a $x^2 + y^2 \leq 2y$.

Pokud bychom se na problém podívali blíže, tak si rozmysleme, že podmínka $x^2 + y^2 \leq 2y \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 \leq 1$ nemůže být splněna pro $x > 1$. Avšak pro $|x| \leq 1$ je podmínka $y \geq |x|$ splněna rovnou podmínkou $y \geq 1$. Proto množinu M stačí ohraničit pouze nerovnostmi $y \geq 1$ a $x^2 + y^2 \leq 2y$. Stejné pozorování bychom učinili, pokud bychom si celou situaci namalovali.

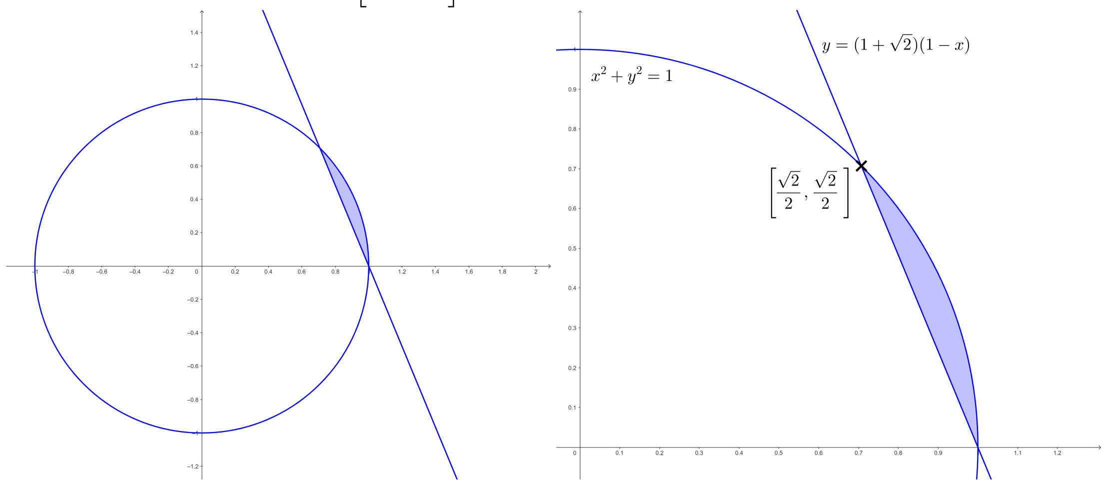
Př. 130 *Transformujte množinu M omezenou podmínkami $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq (1+\sqrt{2})(1-x)$ do polárních souřadnic. Uvažujte integrál*

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Mohli bychom začít tím, že si množinu M vykreslíme, kde vidíme, že máme kruh a polorovinu nad přímkou. Zajímalo by nás tedy, kde dojde k protnutí přímky a kružnice. Dostáváme postupně

$$\begin{aligned}
x^2 + (1+\sqrt{2})^2(1-x)^2 - 1 &= 0\\
(4+2\sqrt{2})x^2 - (6+4\sqrt{2})x + 2 + 2\sqrt{2} &= 0\\
(2+\sqrt{2})x^2 - (3+2\sqrt{2})x + 1 + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow x_{1,2} &= \frac{3+2\sqrt{2}\pm 1}{4+2\sqrt{2}},\\
x_1 &= 1,\\
x_2 &= \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

Průsečíky jsou tedy body $[1,0]$ a $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. Tedy dostaneme množinu



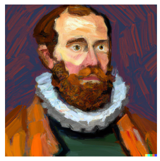
Nyní máme představu o podobě množiny a zbývá nalézt vhodnou transformaci. Z obrázku však vidíme, že úhly φ začínají na ose x, tj. pro $\varphi = 0$ a končí na polopřímce procházející bodem $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, která má úhel $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Stejně tak poloměr je shora omezen kružnicí, tj. $\rho \leq 1$ a zdola je vymezen přímkou, kde je již závislost složitější. Můžeme ji však vyjádřit dosazením do nerovnosti jako

$$\begin{aligned}
\rho \sin\varphi &\geq (1+\sqrt{2})(1-\rho\cos\varphi)\\
\rho &\geq \frac{1+\sqrt{2}}{\sin\varphi + (1+\sqrt{2})\cos\varphi}.
\end{aligned}$$

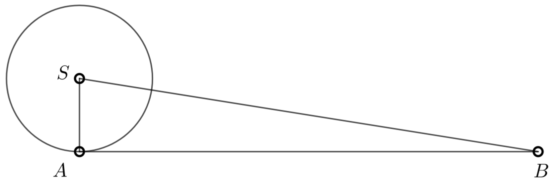
Transformovaný integrál tedy je

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{1+\sqrt{2}}{\sin\varphi+(1+\sqrt{2})\cos\varphi}}^{1} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho.$$

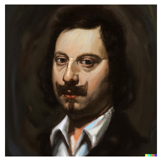
Následující historické poznámky vycházejí z [8]. Johann Kepler uvažoval následující úlohu. Máme-li kruh o nějakém poloměru, který valíme po rovné podložce, dokud se celý nepřetočí, tak dostaneme na podložce úsečku o délce poloměru kruhu. Spojíme-li počáteční bod úsečky se středem kruhu, dostaneme trojúhelník ABS naznačený na následujícím obrázku.



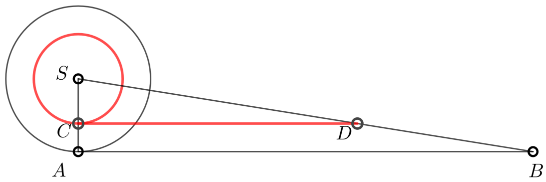
Johann Kepler (1571-1630) byl matematik a astronom (mimo jiné), který je znám především kvůli jeho zákonům popisujícím pohyb planet.



Následně Kepler ukázal, že trojúhelník ABS má stejný obsah jako uvažovaný kruh na základě výpočtu obsahu trojúhelníka a hypotetického limitního přechodu.
Evangelista Torricelli uvažoval na základě Keplerovy práce následující úlohu. Pokud bychom vzali kruh se stejným středem a menším poloměrem a vhodnou úsečku CD jako na následujícím obrázku, dostaneme na základě podobnosti trojúhelníků, že délka úsečky CD odpovídá obvodu menšího kruhu.



Evangelista Torricelli (1608-1647) byl fyzik a matematik, který je znám jako vynálezce barometru.



Takto Torricelli uvažoval systém kruhů s libovolným poloměrem, které nám vyplní kruh a jim odpovídající přímky, které vyplní trojúhelník. Z těchto důvodů tedy musí platit, že obsah kruhu je stejný jako obsah trojúhelníka, tj. Torricelli získal stejný výsledek jako Kepler na základě nových úvah.
My víme, že obsah $S_\triangle$ trojúhelníka o základně délky obvodu kruhu $o = 2\pi r$ s výškou rovnající se poloměru $v = r$ splňuje

$$S_\triangle = \frac{o \cdot v}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2 = S_\circ.$$

Tudíž vztah skutečně platí.
Všimněme si, že Torricelli uvažoval transformaci do "polárních"souřadnic

$$x = \rho \cos \frac{u}{\rho},$$
$$y = \rho \sin \frac{u}{\rho},$$

kde proměnná u splňuje $u = \rho\varphi$, pro obvyklé φ. Interpretace souřadnic je jednoduchá, neboť ρ popisuje poloměr kružnice ne níž bod $[x, y]$ leží a u popisuje délku oblouku na kružnici mezi bodem $[x, y]$ a kladnou poloosou x. Potom pro $0 \leq \rho \leq r$ a $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ platí $0 \leq u \leq 2\pi\rho$, tj. transformace převede kruh skutečně na trojúhelník. Pokud bychom následně spočítali Jakobián této transformace, tak dostaneme $J = 1$.

3.2 Obvyklé transformace

Př. 131 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $x^2+y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Neboť množina M je tvořena čtvrtinou kruhu v 1. kvadrantu, zavedeme tedy polární souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Dosazením do omezení dostaneme popořadě

$$\begin{aligned} \rho &\leq 1, \\ \rho\cos\varphi &\geq 0, \\ \rho\sin\varphi &\geq 0. \end{aligned}$$

Z těchto nerovností získáme $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\rho \in [0,1]$, což přesně reprezentuje již zmíněnou čtvrtinu kruhu v 1. kvadrantu. Analogicky bychom si mohli z obrázku rozmyslet, že v 1. kvadrantu jsou úhly $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ a jedná se body o všechny body uvnitř kruhu s poloměrem 1 a to je vskutku splněno pro $\rho \leq 1$.

Proto počítáme integrál

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi \overset{\text{int. neobsahuje } \varphi}{=} \frac{\pi}{2}\int_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho = \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho = \left| \begin{array}{c} t = \rho^2 \\ \mathrm{d}t = 2\rho\,\mathrm{d}\rho \end{array} \right| = \frac{\pi}{4}\int_0^1 \sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{\pi}{4}\left[-\frac{2\sqrt{1-t}}{3}\right]_0^1 = 0 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Př. 132 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M x + y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Neboť množina M je tvořena čtvrtinou kružnice, zavedeme tedy polární souřadnice $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Dosazením do omezení dostaneme popořadě

$$\begin{aligned} \rho &\leq 1, \\ \rho \cos \varphi &\geq 0, \\ \rho \sin \varphi &\geq 0. \end{aligned}$$

Z těchto nerovností získáme $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\rho \in [0, 1]$. Proto počítáme integrál

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \rho \left(\rho \cos \varphi + \rho \sin \varphi\right) \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi + \sin \varphi \, \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \rho^2 \, \mathrm{d}\rho = \\ &= \left[\sin \varphi - \cos \varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left(1 - 0 - 0 + 1\right) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Př. 133 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $x^2+y^2 \le 1$, $x \ge 0$.

Neboť množina M je tvořena pravou polovinou kružnice, tudíž zavedeme polární souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Stejné rozhodnutí nám napovídá tvar integrované funkce, kde víme, že standardní polární souřadnice dobře upraví výraz x^2+y^2, který zde vystupuje. Dosazením do omezení dostaneme postupně

$$\begin{aligned} \rho &\le 1, \\ \rho\cos\varphi &\ge 0. \end{aligned}$$

Druhá nerovnost je musí platit pro φ, které patří do rozsahu $[0, 2\pi]$. To je splněno pouze pro $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$. Abychom nemuseli uvažovat sjednocení intervalů, což by vedlo na dva dvojnásobné integrály, tak využijeme periodičnost funkcí $\cos x$ a $\sin x$ a uvážíme $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, což dává stejnou transformaci. Poloměr je vymezen $\rho \in [0, 1]$. Proto počítáme integrál

$$\begin{aligned} &\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \rho\,\mathrm{e}^{-\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi}\ \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \rho\,\mathrm{e}^{-\rho^2}\ \mathrm{d}\rho = \\ &= \left| \begin{array}{c} t = \rho^2 \\ \mathrm{d}t = 2\rho\,\mathrm{d}\rho \end{array} \right| = \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}+1\right). \end{aligned}$$

Př. 134 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $x^2+y^2 \le Ax$, $y \ge 0$, $A > 0$.

Nerovnost $x^2+y^2 \le Ax$ upravíme na čtverec do tvaru $\left(x-\frac{A}{2}\right)^2+y^2 \le \frac{A^2}{4}$. Vzhledem k tomu, že se jedná o posunutou kružnici, zavedeme posunuté polární souřadnice $x = \rho\cos\varphi + \frac{A}{2}$, $y = \rho\sin\varphi$. Dosazením do první nerovnice $x^2+y^2 \le Ax$ dostaneme $\rho \le \frac{A}{2}$. Ze druhé nerovnice $y \ge 0$ poté máme $\rho\sin\varphi \ge 0$, což vede na omezení $\varphi \in [0,\pi]$. Posunutím se jakobián transformace nezmění, máme tedy

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{A}{2}} \rho^2 \sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{A}{2}} \rho^2\,\mathrm{d}\rho =$$
$$= [-\cos\varphi]_0^{\pi}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{\frac{A}{2}}\,\mathrm{d}\rho = 2\cdot\frac{A^3}{24} = \frac{A^3}{12}.$$

Př. 135 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M x\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $x^2+y^2 \leq 4$, $y \geq 0$.

Neboť množina M je tvořena horní polovinou kružnice a zavedeme polární souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Dosazením do omezení dostaneme popořadě

$$\begin{aligned} \rho^2 &\leq 4, \\ \rho\sin\varphi &\geq 0. \end{aligned}$$

Neboť na intervalu $\varphi \in [0, 2\pi]$ je podmínka splněna $\sin\varphi \geq 0$ splněna pouze pro $\varphi \in [0, \pi]$. Druhé omezení je jasné a to $\rho \in [0, 2]$. Proto počítáme integrál

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \int_0^1 \rho^2 \cos\varphi \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \int_0^\pi \int_0^1 \rho^3 \cos\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^\pi \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \int_0^1 \rho^3\,\mathrm{d}\rho = \\ &= [\sin\varphi]_0^\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = 0. \end{aligned}$$

Př. 136 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M x^2 + y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $(x-A)^2 + y^2 \leq A^2$, $A > 0$.

V tomto případě se musíme rozhodnout mezi transformacemi 1) $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, která je vhodná vzhledem k tvaru integrované funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$. Druhou možností je 2) $x = \rho\cos\varphi + A$, $y = \rho\sin\varphi$, která je vhodná vzhledem k tvaru integrované množiny M. Vyzkoušíme-li variantu 2) popisujeme body uvnitř kruhu a tak tedy $\rho \in [0, A]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Počítáme

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_0^A \rho\left((\rho\cos\varphi + A)^2 + \rho^2\sin^2\varphi\right)\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^A \rho\left(\rho^2 + 2A\rho\cos\varphi + A^2\right)\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^A \rho^3 + 2A\rho^2\cos\varphi + A^2\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^4}{4} + \frac{2A\rho^3}{3}\cos\varphi + \frac{A^2\rho^2}{2}\right]_0^A \mathrm{d}\varphi = \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{A^4}{4} + \frac{2A^4}{3}\cos\varphi + \frac{A^4}{2}\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{3A^4}{2}\pi + \frac{2A^4}{3}\left[\sin\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{3A^4}{2}\pi.
\end{aligned}$$

Varianta 1) vede dosazením na omezení

$$\begin{aligned}
\rho^2\cos^2\varphi - 2A\rho\cos\varphi + A^2 + \rho^2\sin^2\varphi &\leq A^2 \\
\rho^2 &\leq 2A\rho\cos\varphi \\
\rho &\leq 2A\cos\varphi.
\end{aligned}$$

Z omezení $\rho \geq 0$ dostaneme také $\cos\varphi \geq 0$. Poloměry jsou tudíž vymezeny jako $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\rho \in [0, 2A\cos\varphi]$.

$$\begin{aligned}
&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2A\cos\varphi} \rho^3\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{2A\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi = \\
&= 4A^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 4A^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2\mathrm{d}\varphi = \\
&= A^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= A^4\left[\varphi + \sin 2\varphi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + A^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= A^4\pi + A^4\left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 4\varphi}{8}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = A^4\pi + A^4\frac{\pi}{2} = \frac{3A^4}{2}\pi.
\end{aligned}$$

Př. 137 *Vypočtěte integrál*
$$\iint_M \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
kde M je ohraničená $x^2+y^2\geq 1$, $x^2+y^2\leq 3$, $\frac{x}{\sqrt{3}}\leq y\leq \sqrt{3}x$.

Neboť množina M je tvořena částí mezikruží, zavedeme tedy polární souřadnice $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Dosazením do prvních dvou omezení dostaneme
$$1\leq \rho^2\leq 3,$$
a vidíme, že se vskutku jedná o část mezikruží vymezeného kružnicemi o poloměrech 1 a $\sqrt{3}$. Naopak omezení $\frac{x}{\sqrt{3}}\leq y\leq\sqrt{3}x$ odpovídá výseku mezi dvěmi přímkami a pokud zde dosadíme transformaci, tak získáme
$$\begin{aligned}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{3}}&\leq \sin\varphi\leq\sqrt{3}\cos\varphi\\ \frac{1}{\sqrt{3}}&\leq \operatorname{tg}\varphi\leq\sqrt{3},\end{aligned}$$
pokud je $\cos\varphi>0$. Tato nerovnost je pak splněna na intervalu $[\pi/6,\pi/3]$. Pokud bychom uvážili situaci, kde je $\cos\varphi<0$, dostaneme nerovnost $\frac{1}{\sqrt{3}}\geq\sqrt{3}$, což nemůže být splněno a tato část nám nic nepřidá. Máme tedy interval $\varphi\in[\pi/6,\pi/3]$ a $\rho\in[1,\sqrt{3}]$. Počítáme
$$\begin{aligned}&\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\int_1^{\sqrt{3}}\rho\operatorname{arctg}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi=\\ &=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_1^{\sqrt{3}}\rho\,\mathrm{d}\rho=\left[\frac{\varphi^2}{2}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_1^{\sqrt{3}}=\\ &=\left(\frac{\pi^2}{18}-\frac{\pi^2}{72}\right)\cdot\frac{3-1}{2}=\frac{4\pi^2-\pi^2}{72}=\frac{\pi^2}{24}.\end{aligned}$$

Př. 138 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $x^2+y^2\le A^2$, $y\ge 0$, $x>0$, $A>0$.

Neboť množina M je tvořena čtvrtinou kruhu, zavedeme polární souřadnice $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. První nerovnost vymezuje body uvnitř kruhu o poloměru A a vskutku je

$$\rho^2\le A^2.$$

Zbývající podmínky udávají, že

$$\begin{aligned}\rho\sin\varphi&\ge 0,\\ \rho\cos\varphi&>0.\end{aligned}$$

Kteréžto nerovnosti nám omezí pouze rozsah pro φ. Celkově tak získáme $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\rho\in[0,A]$ a počítáme integrál

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^A\rho\operatorname{arctg}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi=\\ &=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^A\rho\,\mathrm{d}\rho=\left[\frac{\varphi^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^A=\frac{A^2\pi^2}{16}.\end{aligned}$$

Př. 139 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $x^2+y^2 \le 1$, $y \ge 0$, $x \ge 0$.

Neboť množina M je tvořena čtvrtinou kruhu, zavedeme tedy polární souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Dosazením do omezení dostaneme popořadě

$$\begin{aligned} \rho^2 &\le 1, \\ \rho\sin\varphi &\ge 0, \\ \rho\cos\varphi &\ge 0. \end{aligned}$$

Z těchto nerovností získáme $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\rho \in [0,1]$. Proto počítáme integrál

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \rho\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \rho\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\,\mathrm{d}\rho = \\
&= \left| \begin{array}{c} t = \sqrt{1+\rho^2} \\ \mathrm{d}t = \frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}}\,\mathrm{d}\rho \end{array} \right| = \frac{\pi}{2}\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-t^2}\,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} t = \sqrt{2}\sin s \\ \mathrm{d}t = \sqrt{2}\cos s\,\mathrm{d}s \end{array} \right| = \\
&= \frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\cos s\sqrt{2-2\sin^2 s}\,\mathrm{d}s = \pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 s\,\mathrm{d}s = \\
&= \pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2s}{2}\,\mathrm{d}s = \frac{\pi}{2}\left[s + \frac{\sin 2s}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Př. 140 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M x^2 + y^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $x^2 + y^2 \leq A^2$, $y \geq 0$, $x \geq 0$, $A > 0$.

Neboť množina M je tvořena čtvrtinou kruhu, zavedeme polární souřadnice $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Dosazením do podmínek získáme

$$\begin{aligned} \rho^2 &\leq A^2, \\ \rho \sin \varphi &\geq 0, \\ \rho \cos \varphi &\geq 0. \end{aligned}$$

Nerovnosti jsou splněny, pokud platí $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\rho \in [0, A]$, což si také můžeme rozmyslet ze znalosti, že se jedná o čtvrtinu kružnice v 1.kvadrantu. Proto počítáme integrál

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^A \rho^3 \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^A = \frac{A^4}{8} \pi.$$

Př. 141 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $x^2+y^2 \leq A^2$, $A>0$.

Neboť množina M je tvořena kruhu, zavedeme polární souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Dosazením do omezení dostaneme $\rho \leq A$. Neboť nemáme další podmínky, které by omezily rozsah pro φ, tak patří φ do celého svého základního intervalu. Po transformaci tudíž máme $\varphi \in [0,2\pi]$, $\rho \in [0,A]$. Počítáme

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_0^A \rho\sqrt{\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\int_0^A \rho^2\,\mathrm{d}\rho = \\
&= 2\pi\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^A = \frac{2A^3}{3}\pi.
\end{aligned}$$

Př. 142 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M \frac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $\frac{\pi^2}{36} \leq x^2+y^2 \leq \frac{\pi^2}{4}$, $y \geq 0$.

Neboť množina M je tvořena polovinou mezikruží, zavedeme polární souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Dosazením do omezení dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{36} \leq &\rho^2 \leq \frac{\pi^2}{4}, \\ \rho\sin\varphi &\geq 0. \end{aligned}$$

Po transformaci je množina $\varphi \in [0,\pi]$, $\rho \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$. Počítáme

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \rho\frac{\cos\sqrt{\rho^2}}{\sqrt{\rho^2}}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \int_0^\pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \pi\left[\sin\rho\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Př. 143 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M 2xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $0 \le y \le x$, $x^2 + y^2 \le 9$.

Neboť množina M je tvořena částí kruhu, zavedeme polární souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Dosazením do omezení $x^2 + y^2 \le 9$ dostaneme

$$\rho^2 \le 9,$$

tj. máme vskutku body uvnitř kruhu o poloměru 3. Zbylé omezení znamenají, že

$$\begin{aligned} 0 \le \sin\varphi \le \cos\varphi, \\ 0 \le \operatorname{tg}\varphi \le 1, \end{aligned}$$

kde podělení je v pořádku neboť z první nerovnosti také vidíme, že je $\cos\varphi \ge 0$. Celkově tak máme $\rho \in [0, 3]$ a $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ a počítáme

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^3 2\rho^3 \cos\varphi \sin\varphi \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi \overset{t=\sin\varphi}{=} 2\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^3 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t\,\mathrm{d}t = \frac{3^4}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3^4}{2}\cdot\frac{2}{8} = \frac{3^4}{8}.$$

Př. 144 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M 15x^2 y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}$, $x \geq 0$.

Množina M je částí kruhu, proto zavedeme polární souřadnice $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Dosazením do omezení dostaneme popořadě

$$\begin{aligned} \rho^2 &\leq 4, \\ \sin \varphi &\geq \frac{\cos \varphi}{\sqrt{3}}, \\ 0 &\leq \cos \varphi, \end{aligned}$$

kde můžeme prostřední nerovnost podělit, neboť je $\cos \varphi \geq 0$ a máme $\operatorname{tg} \varphi \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$, kterýžto rozsah dovede snadno určit. Dohromady máme $\rho \in [0, 2]$ a $\varphi \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ a počítáme

$$\begin{aligned} &15 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \rho^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi = 15 \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} t^2 \, \mathrm{d}t = \\ &= 2^5 3 \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2^5 \frac{3\sqrt{3}}{2^3} = 12\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Př. 145 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M x^2 - y^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $0 \leq y \leq x$, $x^2 + y^2 \leq 5$, $x^2 + y^2 \geq 3$.

Vyšetřovaná množina tvoří část mezikruží, proto zavedeme polární souřadnice $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Dosazením do omezení dostaneme

$$\begin{aligned} 3 \leq \rho^2 \leq 5, \quad & 0 \leq \sin \varphi \leq \cos \varphi \\ & 0 \leq \operatorname{tg} \varphi \leq 1. \end{aligned}$$

Proto $\rho \in [\sqrt{3}, \sqrt{5}]$ a $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Počítáme

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \rho \left(\rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi\right) \mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \rho^3 \left(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi\right) \mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \frac{25 - 9}{4} \left[\frac{\sin 2\varphi \,\mathrm{d}\varphi}{2}\right]_0^{\pi/4} = 2.$$

Př. 146 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{2-x^2-y^2}},$$

kde M je ohraničená $0 \le y \le \frac{x}{\sqrt{3}}$, $x^2+y^2 \le 1$.

Vyšetřovaná množina tvoří část kruhu, proto zavedeme polární souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Dosazením do omezení dostaneme

$$\rho^2 \le 1, \quad 0 \le \sin\varphi \le \frac{\cos\varphi}{\sqrt{3}}$$
$$0 \le \operatorname{tg}\varphi \le \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Proto je $\rho \in [0,1]$ a $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$. Počítáme

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{2-\rho^2}}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \left| \begin{array}{c} t = \rho^2 \\ \mathrm{d}t = 2\rho\,\mathrm{d}\rho \end{array} \right|$$
$$= \frac{\pi}{12} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-t}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{12}\left[-2\sqrt{2-t}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Př. 147 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $\pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2$.

Vyšetřovaná množina tvoří mezikruží, proto zavedeme polární souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Dosazením do omezení dostaneme $\pi \leq \rho \leq 2\pi$. Vzhledem k tomu, že další omezení nemáme, je $\varphi \in [0, 2\pi]$. Počítáme

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_\pi^{2\pi} \rho\sin\sqrt{\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\int_\pi^{2\pi} \rho\sin\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \left|\begin{array}{cc} u=\rho & u'=1 \\ v'=\sin\rho & v=-\cos\rho \end{array}\right| = 2\pi\left[-\rho\cos\rho\right]_\pi^{2\pi} + 2\pi\int_\pi^{2\pi}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= 2\pi(-2\pi-\pi) + 2\pi\left[\sin\varphi\right]_\pi^{2\pi} = -6\pi^2.
\end{aligned}$$

Všimněme si, že integrujeme $\sin\rho$, pro $\rho \in [\pi, 2\pi]$. Vskutku bychom očekávali, že daný integrál musí vyjít jako záporná hodnota.

Př. 148 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $A > 0, B > 0$.

Vyšetřovaná množina je čtvrtinou elipsy, proto volíme eliptické souřadnice $x = A\rho\cos\varphi$, $y = B\rho\sin\varphi$. Dosazením do nerovnic máme popořadě

$$\begin{aligned} \frac{A^2\rho^2\cos^2\varphi}{A^2} + \frac{B^2\rho^2\sin^2\varphi}{B^2} &= \rho^2 \le 1, \\ A\rho\cos\varphi &\ge 0, \\ B\rho\sin\varphi &\ge 0. \end{aligned}$$

Vyšetřovaná množina se transformuje na $\rho \in [0,1]$ a $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Jakobián zobrazení je $|J| = AB\rho$. Počítáme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 A^2B^2\rho^3 \cos\varphi \sin\varphi \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi \overset{t=\sin\varphi}{=} A^2B^2 \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \int_0^1 t \, \mathrm{d}t = \frac{A^2B^2}{4} \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 =$$
$$= \frac{A^2B^2}{8}.$$

Př. 149 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} \leq 1$, $A > 0, B > 0$.

Vyšetřovaná množina je elipsa, proto volíme eliptické souřadnice $x = A\rho\cos\varphi$, $y = B\rho\sin\varphi$. Dosazením do nerovnice máme $\rho^2 \leq 1$. Jakobián zobrazení je $|J| = AB\rho$. Počítáme

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 AB\rho\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi \overset{t=\rho^2}{=}$$

$$= \pi AB\int_0^1 \sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t = \pi AB\left[-\frac{2\sqrt{(1-t)^3}}{3}\right]_0^1 = \frac{2AB}{3}\pi.$$

Př. 150 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} \geq 1$, $\frac{x^2}{4A^2} + \frac{y^2}{4B^2} \leq 1$, $x \leq 0$, $y \geq 0$.

Vyšetřovaná množina je tvořena elipsovým mezikružím, proto volíme eliptické souřadnice $x = A\rho\cos\varphi$, $y = B\rho\sin\varphi$. Dosazením do nerovnic máme

$$\begin{aligned} 1 \leq & \rho^2 \leq 4, \\ A\rho\cos\varphi & \leq 0, \\ B\rho\sin\varphi & \geq 0. \end{aligned}$$

Z těchto podmínek vidíme, že $\rho \in [1, 2]$, $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Jakobián zobrazení je $|J| = AB\rho$.

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_1^2 A^2B^2\rho^3 \cos\varphi \sin\varphi \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi \overset{t=\sin\varphi}{=} A^2B^2 \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_1^2 \int_1^0 t \, \mathrm{d}t = \\ & = -A^2B^2 \frac{16-1}{4} \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = -A^2B^2 \frac{15}{8}. \end{aligned}$$

Př. 151 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M 2x + y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $x^2 + 4y^2 \leq 4$.

Upravíme podmínku do tvaru $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$, což je vnitřek elipsy. Volíme eliptické souřadnice $x = 2\rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Dosazením do nerovnic máme $\rho^2 \leq 1$. Další podmínku nemáme, je tedy $\rho \in [0, 1]$ a $\varphi \in [0, 2\pi]$. Jakobián zobrazení je $|J| = AB\rho$. Počítáme

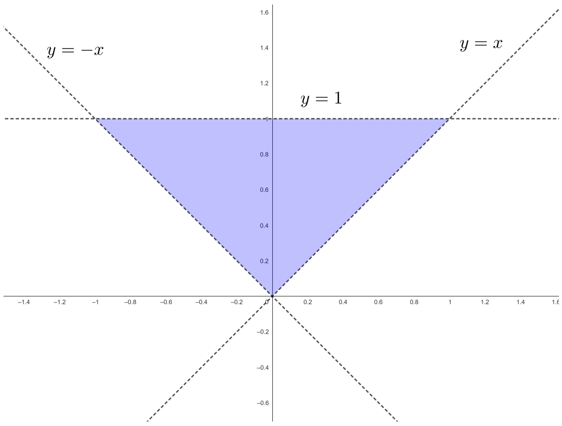
$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \int_0^1 AB\rho \left(4\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi\right) \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= AB \int_0^{2\pi} 4\cos\varphi + \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \int_0^1 \rho^2 \,\mathrm{d}\rho = \\
&= AB \left[4\sin\varphi - \cos\varphi\right]_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 = \\
&= AB \left(0 - 0\right) \frac{1}{3} = 0.
\end{aligned}$$

Př. 152 *Spočtěte integrál*

$$I = \iint_M x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

kde množina M je ohraničená křivkami $y = 1$, $y = x$, $y = -x$.

Pokud si vykreslíme množinu M dostaneme následující situaci



Potom tuto množinu můžeme popsat v polárních souřadnicích, kde hned vidíme, že $\varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$ a také hned vidíme, že $\rho \geq 0$. Horní hranici ρ dostaneme, když si uvědomíme, že průnik polopřímky vycházející z počátku a množiny M je kromě prázdné množiny úsečka, která končí na křivce $y = 1$.Tato hranice je vymezena jako $y \leq 1$ a pokud dosadíme polární souřadnice, tak máme

$$\begin{aligned} y &\leq 1 \\ \rho \sin\varphi &\leq 1 \\ \rho &\leq \frac{1}{\sin\varphi}. \end{aligned}$$

Můžeme tedy dosadit do integrálu jako

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \int_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} \rho\cos\varphi \cdot \rho \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \cos\varphi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} \mathrm{d}\varphi = \\ &= \frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \cos\varphi \frac{1}{\sin^3\varphi} \,\mathrm{d}\varphi = |t = \sin\varphi| = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2\sin^2\varphi}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} = 0. \end{aligned}$$

3.3 Obecné transformace a jejich využití, Jakobián

Př. 153 *Transformujte čtverec $[0,1]^2$ v rovině xy pomocí transformace $x = u^n$, $y = v$, kde $n > 0$ je parametr. Spočtěte také jeho obsah.*

Je-li $0 \leq y \leq 1$, je pak také $0 \leq v \leq 1$. Podobně pokud je $0 \leq x \leq 1$, tak máme $0 \leq u^n \leq 1$ a tudíž je stejně $0 \leq u \leq 1$. Transformace tedy zachovává podobu čtverce. Pokud bychom počítali obsah, tak máme

$$1 = \iint_{[0,1]^2} 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_{[0,1]^2} J \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v,$$

kde J je Jakobián zobrazení. Ten získáme jako

$$J = \begin{vmatrix} nu^{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = nu^{n-1}.$$

Potom máme obsah

$$\iint_{[0,1]^2} J \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \int_0^1 nu^{n-1} \, \mathrm{d}u = [u^n]_0^1 = 1.$$

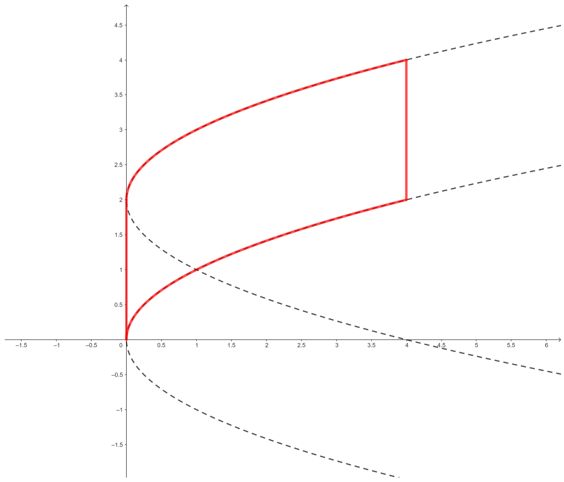
Zde však musíme uvážit, že porušujeme předpoklady používané věty, neboť Jakobián na vyšetřované množině není ohraničený. Zatímco integrovaná množina zůstala čtvercem, rozmysleme si jaký zde vliv měl Jakobián, neboť transformace $x = u^n$ převede pro $a > 0$ interval $[0, a]_x$ na interval $[0, \sqrt[n]{a}]_u$ a interval $[a, 1]_x$ na $[\sqrt[n]{a}, 1]_u$, tj. zatímco celková množina se nezmění, tak sekce vyšetřované množina se buď zvětší, nebo zmenší. Obdobnou situaci bychom dostali také pro $y = \sin \frac{\pi}{2} v$.

Př. 154 *Nakreslete množinu M v rovině xy, kde $M : x = u^2$, $y = v + u$, pro $[u, v] \in [0, 2]^2$.*

K problému se můžeme postavit různými způsoby. Funkce x, y jsou spojité funkce proměnné u, v a tedy lze očekávat spojitý přechod mezi body. Určeme si tedy, jak vypadají hranice čtverce $[0, 2]^2$ po transformaci.

1. $u = 0$ a $v \in [0, 2]$ dává body ve tvaru $[x, y] = [0, v]$, tj. úsečku.
2. $u \in [0, 2]$ a $v = 0$ dává body ve tvaru $[x, y] = [u^2, u]$, tj. body paraboly $x = y^2$, kde $y \in [0, 2]$.
3. $u = 2$ a $v \in [0, 2]$ dává body ve tvaru $[x, y] = [4, v + 2]$, tj. úsečku.
4. $u \in [0, 2]$ a $v = 2$ dává body ve tvaru $[x, y] = [u^2, u+2]$, tj. po převodu $y = u+2 \Rightarrow u = y-2$ body paraboly $x = (y - 2)^2$, kde $y \in [2, 4]$.

Hranice množiny M v rovině xy tak tvoří dvě paraboly a dvě úsečky. Množina pak vypadá následovně:



Vzhledem ke spojitosti lze očekávat, že množinu M pak tvoří vnitřek této oblasti. Obdobný výsledek bychom dostali, pokud bychom vyjádřili pro $u \geq 0$, že $x = \sqrt{u}$. Z čehož nyní plyne vztah $y = \sqrt{x} + v$, kde víme, že $v \in [0, 2]$ je parametr udávající nám systém parabol a $x = u^2 \Rightarrow x \in [0, 4]$.

Př. 155 *Transformujte množinu M omezenou jako $x = 1$, $x = 2$, $y = x$, $y = x + 2$.*

Zde se nabízí jednoduchá transformace, pokud si všimneme, že množina M je daná jako $1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y - x \leq 2$. Potom lze zvolit $u = x$ a $v = y - x$, což je lineární transformace a platí $1 \leq u \leq 2$, $0 \leq v \leq 2$. Její Jakobián je

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

tj. z vlastnosti Jakobiánů je $J = 1$. Rozmysleme si ještě, že je transformace injektivní, tj. zda jednomu bodu $[u, v]$ připadne pouze jeden bod $[x, y]$. To je však splněno jasně, neboť se jedná o 2 systémy nerovnoběžných přímek.

Př. 156 *Transformujte množinu M omezenou jako $x \leq y \leq x+1$, $2x-2 \leq y \leq 2x$.*

Zde se nabízí jednoduchá transformace, pokud si všimneme, že množina M je daná jako $0 \leq y-x \leq 1$, $-2 \leq y-2x \leq 0$. Potom lze zvolit $u = y-x$ a $v = y-2x$, což je lineární transformace a platí $0 \leq u \leq 1$, $-2 \leq v \leq 0$. Její Jakobián je

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1+2 = 1,$$

tj. z vlastnosti Jakobiánů je $J = 1$. Rozmysleme si ještě, že je transformace injektivní, tj. zda jednomu bodu $[u, v]$ připadne pouze jeden bod $[x, y]$. To je však splněno jasně, neboť se jedná o 2 systémy nerovnoběžných přímek.

Př. 157 *Transformujte množinu M omezenou jako $-\sin x \leq \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$.*

Potřebujeme transformovat množinu mezi dvěma sinusoidami. Mohli bychom zvolit polární souřadnice, ale je otázka, zda je tato volba rozumná. Jakou jinou transformaci ale zvolit? Protože popisujeme část mezi sinusoidami, co kdybychom vyšetřovanou množinu procházeli právě po sinusoidách? Chceme každý bod množiny dostat tak, že bude ležet na právě jedné sinusoidě. Například pokud bychom volili $y = v \sin x$, pro $v \in [-1, 1]$ tak tento požadavek bude splněn. Takto nyní popíšeme body na sinusoidě, my ale dále potřebujeme také specifikovat, kde bod na sinusoidě leží. Toho bychom dosáhli například pomocí přímek $x = u$, pro $u \in [0, \pi]$. Čímž jsme získali hledanou transformaci. Její Jakobián je:

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v \cos u & \sin u \end{vmatrix} = \sin u.$$

Nemusíme však volit přímky $x = u$, můžeme také volit přímky $y = x - u$ nebo $y = ux$. Volba $y = ux$ však není dobrá, neboť tato přímka může vymezit více než jeden bod sinusoidy, např pro $v = 0 \Rightarrow y = v \sin x = 0$ a tu pokrývá zcela přímka $y = ux = 0$. Tedy se nejedná o injektivní zobrazení. Pokud bychom vzali první volbu, tak přímky $y = x - u$ potkají množinu M poprvé pro $u = 0$ a naposledy pro $u = \pi$, tj. rozsah pro u bychom mohli volit jako $0 \leq u \leq \pi$, avšak to má za důsledek, že $v \notin [-1, 1]$. To protože pro pevné u přímka $y = x - u$ neprotne všechny sinusoidy $y = v \sin x$, ale jen jejich část. Rozmysleme si však, že zde se již jedná o injektivní zobrazení.

Př. 158 *Transformujte integrál*

$$\iint_M \sqrt{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad M : y^2 = x, y^2 = 2x, xy = 1, xy = 2$$

za pomoci transformace $u = xy$, $v = \frac{y^2}{x}$.

Všimněme si, že můžeme první dvě podmínky upravit do tvaru $\frac{y^2}{x} = 1$, $\frac{y^2}{x} = 2$. Dosazením zadané transformace dostaneme postupně $v = 1$, $v = 2$, $u = 1$, $u = 2$ a tudíž po transformaci množina M čtvercem. Máme nestandardní transformaci, a tak potřebujeme vyjádřit její Jakobián, ten dostaneme skrze

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix} = \frac{2y^2}{x} + \frac{y^2}{x} = \frac{3y^2}{x} = 3v.$$

Neboť se jedná o Jakobián inverzního zobrazení, dostaneme ze znalosti determinantů samotný determinant jako $J = \frac{1}{3v}$. Pro dosazení do integrálu potřebujeme ještě vyjádřit x, y pomocí nových proměnných u, v. Vyjádříme $x = \frac{u}{y}$ a následně ze druhého vztahu $v = \frac{y^2}{x}$ získáme $v = \frac{y^2}{\frac{u}{y}} = \frac{y^3}{u}$. Což vede na vztah $y = \sqrt[3]{vu}$ a následně $x = \frac{\sqrt[3]{u^2}}{\sqrt[3]{v}}$. Nyní tedy transformujeme integrál

$$\int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{3v} \sqrt{\frac{\sqrt[3]{u^2}}{\sqrt[3]{v}} \cdot \sqrt[3]{vu}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{3v} \sqrt{u}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Vyjádření x a y pomocí u, v si však můžeme odpustit, pokud si rovnou všimneme, že platí $\sqrt{xy} = \sqrt{u}$, což jsme také v integrálu dostali.

Př. 159 *Transformujte integrál*

$$\iint_M xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y, \quad M : xy = 1, x + y = 5/2,$$

za pomoci transformace $u = xy$, $v = x$.

Transformujeme podmínky pomocí zadané transformace čímž dostaneme (po vyjádření $y = \frac{u}{x} = \frac{u}{v}$), že $u = 1$, $v + \frac{u}{v} = 5/2$. Křivka $v + \frac{u}{v} = 5/2$ vede na parabolu $u = \frac{5v}{2} - v^2 = \frac{25}{16} - \left(\frac{5}{4} - v\right)^2$ a tyto ohraničující křivky můžeme vykreslit jako Chceme určit omezení množiny M, musíme tedy nalézt průsečíky těchto dvou křivek, neboť vidíme, že množina M je ohraničená shora parabolou a zdola přímkou pro neznámý rozsah v. Dostáváme

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{25}{16} - \left(\frac{5}{4} - v\right)^2 \\ \frac{9}{16} &= \left(v - \frac{5}{4}\right)^2 \\ \pm\frac{3}{4} &= v - \frac{5}{4} \\ v &= \frac{5}{4} \pm \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Tudíž máme průsečíky o souřadnicích $[v, u]$ jako body $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ a $[2, 1]$. Chceme určit rozsah pro v a na obrázku je tedy vidět, že nějaký bod množiny M dostaneme pouze pro $v \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, kde již bylo řečeno platí omezení $1 \le u \le \frac{5v}{2} - v^2$. Jakobián dostaneme skrze vztah

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -x = -v$$

Tudíž máme $|J| = 1/v$. Obdobně bychom jej mohli dostat přímo, pokud bychom vyjádřili $x = v$ a $y = u/v$. Integrovaná funkce $f(x, y) = xy = u$ a máme integrál

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \int_{1}^{\frac{5v}{2} - v^2} u \cdot \frac{1}{v} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v,$$

nebo pokud bychom dosadili do funkce vztahy

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \int_{1}^{\frac{5v}{2} - v^2} \frac{1}{v} \cdot v \cdot \frac{u}{v} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \int_{1}^{\frac{5v}{2} - v^2} \frac{u}{v} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v.$$

Př. 160 *Transformujte integrál*

$$\iint_M x^2 - y + 2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y, \quad M : xy = 1, xy = 4, y = 4x, y = x/4$$

za pomoci transformace $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$.

Druhé dvě podmínky lze přepsat jako $\frac{y}{x} = 4$, $\frac{y}{x} = \frac{1}{4}$, tj. do výhodnějšího vztahu. Transformujeme tedy podmínky pomocí zadané transformace čímž dostaneme $u = 1$, $u = 2$, $v = 4$ a $v = \frac{1}{4}$a po transformaci získáme obdélník. Jakobián dostaneme skrze

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 2\frac{y}{x} = 2v.$$

Podobně bychom mohli vyjádřit $x = \frac{u}{y}$, což dosazením do podmínky $v = \frac{y}{x}$ vede na $v = \frac{y^2}{u} \Rightarrow y^2 = vu$, a proto máme $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$ a $y = \sqrt{uv}$ a vypočíst Jakobián přímo jako

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v^3}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v}\right) = \frac{1}{2v}.$$

Po transformaci dostaneme

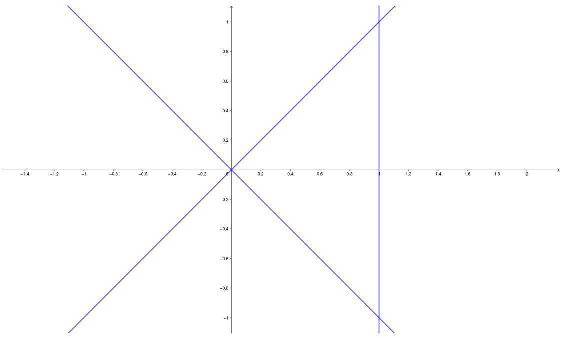
$$\int_1^2 \int_{\frac{1}{4}}^4 \frac{1}{2v}\left(\frac{u}{v} - \sqrt{uv} + 2\right) \mathrm{d}v \,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_1^2 \int_{\frac{1}{4}}^4 \frac{u}{v^2} - \sqrt{\frac{u}{v}} + \frac{2}{v} \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}u.$$

Př. 161 *Transformujte integrál*

$$\iint_M \mathrm{e}^{-\frac{x-y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad M: x=0, y=0, x+y=1$$

za pomoci transformace $u = x+y$, $v = x-y$.

Vidíme, že integrovaná funkce je komplikovaná, zavedeme tedy zadanou transformaci, abychom tento výpočet zjednodušili, i když se tím může integrovaná množina M zkomplikovat. Abychom transformovali omezení $x=0$, $y=0$, vyjádříme nejprve x, y pomocí proměnných u, v. Snadno dostaneme sečtením $x = \frac{u+v}{2}$ a odečtením $y = \frac{u-v}{2}$. Proto transformujeme omezení na $u+v=0$, $u-v=0$ a $u=1$. Jedná se o tři přímky, které mají průsečíky v bodech $[0,0]$, $[-1,1]$ a $[1,1]$. Vzhledem k vzájemné poloze nových přímek



dostaneme $u \in [0,1]$, $v \in [-u,u]$. Dále musíme určit jakobián zobrazení. Máme

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

Tudíž vzhledem ke známé inverzi je $|J| = \frac{1}{2}$. Můžeme si také vypočíst

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2},$$

tj. Jakobián je správný. Po transformaci získáme

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \int_{-u}^{u} \mathrm{e}^{-\frac{v}{u}}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u.$$

Př. 162 *Určete jakobiány zobrazení $x = uv$, $y = u + v$.*

Počítáme
$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = v - u.$$

Př. 163 *Určete jakobiány zobrazení $x = uv$, $y = u/v$.*

Počítáme
$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \end{vmatrix} = -2\frac{u}{v}.$$

Př. 164 *Určete jakobiány zobrazení $x = uv$, $y = v^2/u$.*

Počítáme
$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ -\frac{v^2}{u^2} & \frac{2v}{u} \end{vmatrix} = 3\frac{v^2}{u}.$$

Př. 165 *Určete jakobiány zobrazení $x = u + v$, $y = v/(u + v)$.*

Počítáme
$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{v}{(u+v)^2} & \frac{u}{(u+v)^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{(u+v)^2} + \frac{v}{(u+v)^2} = \frac{1}{u+v}.$$

Př. 166 *Určete jakobiány zobrazení $x = u/(u^2 + v^2)$, $y = v/(u^2 + v^2)$.*

Počítáme
$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2} & -\frac{2uv}{(u^2+v^2)^2} \\ -\frac{2uv}{(u^2+v^2)^2} & \frac{u^2-v^2}{(u^2+v^2)^2} \end{vmatrix} = \frac{(v^2-u^2)(u^2-v^2)}{(u^2+v^2)^4} - \frac{4u^2v^2}{(u^2+v^2)^4} =$$
$$= \frac{-u^4+2u^2v^2-v^4}{(u^2+v^2)^4} - \frac{4u^2v^2}{(u^2+v^2)^4} = \frac{-u^4-2u^2v^2-v^4}{(u^2+v^2)^4} = -\frac{(u^2+v^2)^2}{(u^2+v^2)^4} = -\frac{1}{(u^2+v^2)^2}.$$

Př. 167 *Určete jakobiány zobrazení $x = u/v$, $y = v/u$.*

Počítáme
$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{vmatrix} = \frac{1}{uv} - \frac{1}{uv} = 0.$$

Př. 168 *Určete jakobiány zobrazení $x = u\cos A - v\sin A$, $y = u\sin A + v\cos A$, pro konstantu A.*

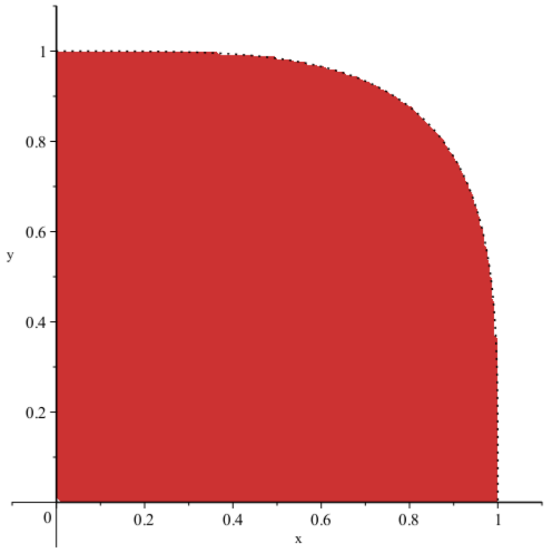
Počítáme
$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos A & -\sin A \\ \sin A & \cos A \end{vmatrix} = \cos^2 A + \sin^2 A = 1.$$

Př. 169 *Vypočtěte integrál*

$$I = \iint_M x^3 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y,$$

kde M je dána nerovnostmi $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x^4 + y^4 \leq 1$.

Tato množina vypadá následujícím způsobem:



Hned z obrázku vidíme, že množinu lze dostat pro ohraničení $0 \leq x \leq 1$ a $0 \leq y \leq \sqrt[4]{1-x^4}$. Stačí si jen uvědomit, jak vypadá zobecněná kružnice $x^4 + y^4 = 1$ a že funkce vyjádřená z její horní poloviny nám ohraničujeme množinu shora. Dostaneme tak integrál

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt[4]{1-x^4}} x^3 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^3 \sqrt[4]{1-x^4} \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = 1 - x^4 \\ \mathrm{d}t = -4x^3 \,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \frac{1}{4} \int_0^1 \sqrt[4]{t} \,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{\sqrt[4]{t^5}}{\frac{5}{4}} \right]_0^1 = \frac{1}{5}.$$

Tato množina však popisuje také část zobecněné kružnice a mohli bychom ji vhodně parametrizovat pomocí souřadnic $x = \rho\sqrt{\sin\varphi}$, $y = \rho\sqrt{\cos\varphi}$, pro $\rho \in [0,1]$ a $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Všimněme si však několika detailů. Tato transformace nemá spojité parciální derivace. Jakobián bychom dostali jako

$$J = \left| \begin{array}{cc} \frac{\cos\varphi}{2\sqrt{\sin\varphi}}\rho & \sqrt{\sin\varphi} \\ \frac{-\sin\varphi}{2\sqrt{\cos\varphi}}\rho & \sqrt{\cos\varphi} \end{array} \right| = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\cos\varphi\sqrt{\cos\varphi}}{\sqrt{\sin\varphi}} + \frac{\sin\varphi\sqrt{\sin\varphi}}{\sqrt{\cos\varphi}} \right) = \frac{\rho}{2\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}}.$$

Hned tak vidíme problematické hodnoty $\varphi = 0$ a $\varphi = \frac{\pi}{2}$, kde Jakobián není ohraničený. Pokud bychom však přesto pokračovali výpočtem přes tuto transformaci, dostaneme

$$\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^4 \sqrt{\sin^3\varphi}}{2\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}} \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\rho = \int_0^1 \rho^4 \,\mathrm{d}\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi}{2\sqrt{\cos\varphi}} \,\mathrm{d}\varphi = \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^1 \left[-\sqrt{\cos\varphi}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5}(0+1) = \frac{1}{5}.$$

V tomto případě nám integrály tedy vyšly stejně i když naše transformace nesplňuje požadavky věty o transformacích.

Př. 170 *Vypočtěte integrál*

$$I = \iint_M x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

kde množina M je dána ohraničeními $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq 4$, $y \geq x$, $x \geq 0$.

Nejdříve si uvědomme, jak vypadá množina M. Nerovnost $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq 4$ nám udává vnitřek asteroidy se středem v počátku a poloměrem $r^{\frac{2}{3}} = 4$. Snadno odvodíme, že je $r = 4^{\frac{3}{2}} = 8$. Další nerovnosti $y \geq x$, $x \geq 0$ nám určí o kterou část této množiny se jedná. K popisu vnitřku asteroidy vhodně využijeme asteroidové souřadnice

$$x = \rho \cos^3 \varphi,$$
$$y = \rho \sin^3 \varphi.$$

Odsud vidíme po dosazení do nerovnosti $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq 4$ podmínku $\rho^{\frac{2}{3}} \leq 4 \Rightarrow \rho \leq 8$, což jsme již viděli. Pokud se jedná o celou asteroidu, leží parametr $\varphi \in [0, 2\pi]$. My máme ještě navíc podmínku $x \geq 0$, $y \geq x$ což nám po dosazení dá

$$\begin{aligned} \rho \cos^3 \varphi &\geq 0 \\ \cos^3 \varphi &\geq 0 \\ \cos \varphi &\geq 0, \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \rho \sin^3 \varphi &\geq \rho \cos^3 \varphi \\ \sin^3 \varphi &\geq \cos^3 \varphi \\ \sin \varphi &\geq \cos \varphi. \end{aligned}$$

Kde využíváme, že třetí mocnina je rostoucí funkcí, a tak můžeme tuto nerovnost přepsat jako $\sin \varphi \geq \cos \varphi$. Máme tak pouze interval $\varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. Jakobián těchto souřadnic je $3\rho \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi$. Integrujeme

$$\begin{aligned} I &= \int_0^8 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 3\rho \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \cdot \rho \cos^3 \varphi \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\rho = 3 \int_0^8 \rho^2 \, \mathrm{d}\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos^5 \varphi \, \mathrm{d}\varphi = \\ &= \left| \begin{array}{c} t = \sin \varphi \\ \mathrm{d}t = \cos \varphi \, \mathrm{d}\varphi \end{array} \right| = 3 \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^8 \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 t^2 (1 - t^2)^2 \, \mathrm{d}t = 8^3 \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 t^2 - 2t^4 + t^6 \, \mathrm{d}t = \\ &= 8^3 \left[\frac{t^3}{3} - 2\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = 8^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6\sqrt{2}} + \frac{1}{10\sqrt{2}} - \frac{1}{56\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Př. 171 *Vypočtěte integrál*

$$I = \iint_M x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

kde množina M je dána nerovnostmi $\left(x^2+y^2\right)^2 \leq 4x^2-4y^2$, $y \geq 0$.

Nejdříve si uvědomme, jak vypadá množina M. Nerovnost $\left(x^2+y^2\right)^2 \leq 4x^2-4y^2$ nám udává vnitřek lemniscaty s poloměrem $r^2 = 4$. K popisu této množiny můžeme vhodně využít lemniscatové souřadnice

$$x = \rho \frac{\cos\varphi}{1+\sin^2\varphi},$$
$$y = \rho \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{1+\sin^2\varphi},$$

pro $\rho \in [0,r] = [0,2]$. Základní rozsah pro celý vnitřek lemniscaty je $\varphi \in [0,2\pi]$. naše množina je však vymezena také nerovností $y \geq 0$ kde po dosazení a úpravě dostaneme

$$\rho\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{1+\sin^2\varphi} \geq 0$$
$$\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{1+\sin^2\varphi} \geq 0$$
$$\sin\varphi\cos\varphi \geq 0.$$

Tato nerovnost je splněna pouze pro $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$. Jakobián naší transformace je pak

$$J = \frac{\rho\cos^3\varphi}{\left(\cos^2\varphi-2\right)^2}.$$

Dostaneme výsledek

$$I = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2\cos^4\varphi}{\left(\cos^2\varphi-2\right)^2\left(1+\sin^2\varphi\right)} \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\rho + \int_0^2 \int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\rho^2\cos^4\varphi}{\left(\cos^2\varphi-2\right)^2\left(1+\sin^2\varphi\right)} \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\rho =$$
$$= 2\int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2\cos^4\varphi}{\left(\cos^2\varphi-2\right)^2\left(1+\sin^2\varphi\right)} \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\rho,$$

vzhledem k sudým mocninám u funkcí $\sin\varphi$ a $\cos\varphi$, tj. ze symetričnosti funkce.
Spočtěme si bokem pomocný integrál

$$\int \frac{\cos^4 t}{(\cos^2 t-2)^2(1+\sin^2 t)} \, \mathrm{d}t = \int \frac{\cos^4 t}{(-\sin^2 t-1)^2(1+\sin^2 t)} \, \mathrm{d}t = \int \frac{\cos^4 t}{(\sin^2 t+1)^3} \, \mathrm{d}t =$$
$$= \int \frac{1}{\cos^2 t \frac{(\sin^2 t+1)^3}{\cos^6 t}} \, \mathrm{d}t = \int \frac{1}{\cos^2 t \left(\frac{\sin^2 t+1}{\cos^2 t}\right)^3} \, \mathrm{d}t = \int \frac{1}{\cos^2 t \left(\frac{\sin^2 t+\sin^2 t+\cos^2 t}{\cos^2 t}\right)^3} \, \mathrm{d}t =$$
$$= \int \frac{1}{\cos^2 t \left(2\,\mathrm{tg}^2 t+1\right)^3} \, \mathrm{d}t = |z = \mathrm{tg}\, t| = \int \frac{1}{\left(2z^2+1\right)^3} \, \mathrm{d}z \overset{\text{red. formule}}{=}$$
$$= \frac{z}{4(2z^2+1)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{1}{\left(2z^2+1\right)^2} \, \mathrm{d}z \overset{\text{stejná red. formule}}{=} \frac{z}{4(2z^2+1)^2} + \frac{3}{8}\frac{z}{2z^2+1} + \frac{3}{8}\int \frac{1}{2z^2+1} \, \mathrm{d}z =$$
$$= \frac{z}{4(2z^2+1)^2} + \frac{3}{8}\frac{z}{2z^2+1} + \frac{3}{8\sqrt{2}} \mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}z\right) + C.$$

Ve výpočtu využíváme redukční formuli

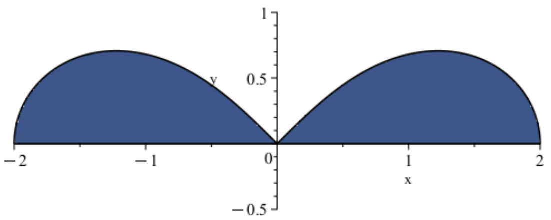
$$\int \frac{1}{(ax^2+b)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2b(n-1)(ax^2+b)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2b(n-1)}\int \frac{1}{(ax^2+b)^{n-1}}\,\mathrm{d}x,$$

pro $n \geq 2$ k jejímuž výpočtu lze použít metodu per-partes.

Integrál proto dostaneme jako

$$\begin{aligned} I &= 2\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2 \left[\frac{z}{4(2z^2+1)^2} + \frac{3}{8}\frac{z}{2z^2+1} + \frac{3}{8\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}z\right)\right]_0^\infty = \\ &= \frac{16}{3}\lim_{z\to\infty}\left(\frac{z}{4(2z^2+1)^2} + \frac{3}{8}\frac{z}{2z^2+1} + \frac{3}{8\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}z\right)\right) = \frac{16}{3}\frac{3}{8\sqrt{2}}\frac{\pi}{2} = \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Nicméně integrovaná množina vypadá následovně:



Všimněme si, že je symetrická přes osu y. Navíc integrovaná funkce je lichá přes osu y a tedy vidíme, že správná hodnota je $I = 0$, tj. ve výpočtu jsme museli udělat chybu. Nicméně všimněme si, že funkce $\cos\varphi$ je záporná na intervalu $\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$. Tudíž bychom do integrálu měli správně dosadit

$$|J| = \frac{\rho|\cos\varphi|^3}{\left(\cos^2\varphi - 2\right)^2}$$

a počítáme

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2\cos\varphi|\cos\varphi|^3}{\left(\cos^2\varphi-2\right)^2\left(1+\sin^2\varphi\right)}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho + \int_0^2\int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\rho^2\cos\varphi|\cos\varphi|^3}{\left(\cos^2\varphi-2\right)^2\left(1+\sin^2\varphi\right)}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = \\ &= \int_0^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2\operatorname{sgn}\cos\varphi\cos^4\varphi}{\left(\cos^2\varphi-2\right)^2\left(1+\sin^2\varphi\right)}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho + \int_0^2\int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\rho^2\operatorname{sgn}\cos\varphi\cos^4\varphi}{\left(\cos^2\varphi-2\right)^2\left(1+\sin^2\varphi\right)}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = \\ &= \int_0^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2\cos^4\varphi}{\left(\cos^2\varphi-2\right)^2\left(1+\sin^2\varphi\right)}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho - \int_0^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2\cos^4\varphi}{\left(\cos^2\varphi-2\right)^2\left(1+\sin^2\varphi\right)}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = 0 \end{aligned}$$

Zvolená transformace prochází množinu pro různé poloměry ρ následujícím způsobem:

4 Transformace trojného integrálu, integrály obecných řádů

Princip transformace trojného integrálu je stejný jako pro dvojné integrály. Pouze nyní uvažujeme pro transformaci $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ Jakobián

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Analogicky můžeme princip transformace rozšířit na integrály vyšších řádů.
Obvyklé transformace

1. Příkladem transformace v $\mathbb{R}^3$ je změna měřítka spojená s posunutím

$$\begin{aligned} x &= au + d, \\ y &= bv + e, \\ z &= cw + f, \end{aligned}$$

   kde $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Jakobián tohoto zobrazení je

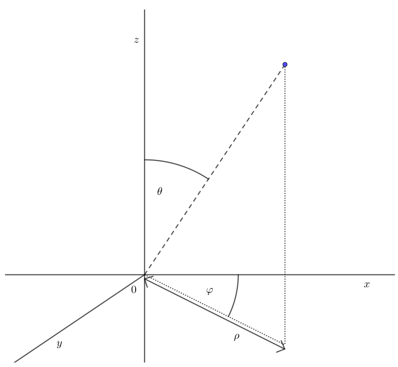
$$J(u, v, w) = abc$$

2. Transformace do válcových souřadnic je

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, \\ y &= \rho \sin \varphi, \\ z &= z, \end{aligned}$$

   kde $\rho \in [0, \infty)$ a $\varphi \in [0, 2\pi]$. Princip transformace je, že popíšeme průmět bodu $[x, y, z]$ v půdorysně, tj. bod $[x, y, 0]$ pomocí polárních souřadnic a poslední proměnná z nadále popisuje výšku bodu nad půdorysnou. Transformace popisuje dobře body válce, neboť válec dostaneme jako kruh v půdorysně, který lze vhodně popsat pomocí polárních souřadnic a pomocí jeho výšky. Navíc lze ρ uvažovat jako poloměr pláště rotačního válce s osou rotace z na němž bod $[x, y, z]$ leží, tj. vzdálenost bodu $[x, y, z]$ od osy z. Úhel φ odpovídá polorovině vycházející z osy z mající odchylku od poloroviny xz (pro $x > 0$) φ. Jakobián tohoto zobrazení je

$$J(\rho, \varphi, z) = \rho.$$

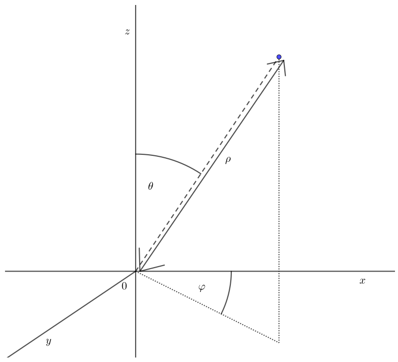


3. Transformace do sférických souřadnic je

$$x = \rho \cos \varphi \sin \theta,$$
$$y = \rho \sin \varphi \sin \theta,$$
$$z = \rho \cos \theta,$$

kde $\rho \in [0, \infty)$ je vzdálenost bodu od počátku, $\varphi \in [0, 2\pi]$ je odchylka bodu od osy x v kladném smyslu v projekci do půdorysny xy. Proměnná $\theta \in [0, \pi]$ je odchylka od kladné poloosy z. Jakobián tohoto zobrazení je

$$J(\rho, \varphi, \theta) = \rho^2 \sin \theta$$



Transformace dobře popisuje body koule, neboť ρ lze uvažovat jako poloměr kulové plochy na níž bod $[x, y, z]$ leží. Úhel θ zase měří úhel, který svírá polopřímka spojující bod $[x, y, z]$ s počátkem od kladné poloosy z. Úhel φ má stejnou interpretaci v polárních, válcových i sférických souřadnicích. Transformace dobře popisuje body koule, neboť ta se skládá ze systému kulových ploch s poloměrem ρ, kde poloměry procházejí přes jistý interval.

Všimněme si také, že Jakobián $J(\rho, \varphi, \theta) = \rho^2 \sin \theta$ je nulový v počátku, kde je $\rho = 0$ (tj. v bodě), ale také pro $\theta = 0$ nebo $\theta = \pi$, což odpovídá celé ose z. Avšak tato osa má prostorovou míru 0 a tedy je zde vše v pořádku.

4. Transformace do zobecněných válcových souřadnic je

$$x = a\rho \cos \varphi,$$
$$y = b\rho \sin \varphi,$$
$$z = z,$$

kde $a > 0$, $b > 0$. Proměnná $\varphi \in [0, 2\pi]$ je zobecněná odchylka vzhledem k eliptickým souřadnicím a $\rho \in [0, \infty)$ je poloměr válce, tj. vzdálenost bodů válce od osy z v upravené metrice. Jakobián tohoto zobrazení je

$$J(\rho, \varphi, z) = ab\rho$$

Zde se opět jedná o kombinaci dvou transformací, kde první je změna měřítka vzhledem k proměnným x, y a druhá transformace jsou válcové souřadnice.

5. Transformace do zobecněných sférických souřadnic je

$$\begin{aligned} x &= a\rho\cos\varphi\sin\theta, \\ y &= b\rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z &= c\rho\cos\theta, \end{aligned}$$

kde $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Stále platí, že $\varphi \in [0, 2\pi]$ je zobecněná odchylka (vzhledem k eliptickým souřadnicím) bodu od osy x v kladném smyslu v projekci do půdorysny xy a proměnná $\theta \in [0, \pi]$ je odchylka od kladné poloosy z. Proměnná $\rho \in [0, \infty)$ je vzdálenost bodu od počátku v upravené metrice. Jakobián tohoto zobrazení je

$$J(\rho, \varphi, \theta) = abc\rho^2 \sin\theta$$

Integrály vyšších řádů

1. Změna měřítka a posunutí v $\mathbb{R}^n$ je

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1u_1 + b_1, \\ x_2 &= a_2u_2 + b_2, \\ x_3 &= a_3u_3 + b_3, \\ &\vdots \\ x_n &= a_nu_n + b_n, \end{aligned}$$

kde $a_i > 0$ jsou nová měřítka. Jakobián zobrazení je

$$J = \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

2. Transformace do hypersférických souřadnic v $\mathbb{R}^n$ je

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho\cos\varphi\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}, \\ x_2 &= \rho\sin\varphi\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}, \\ x_3 &= \rho\cos\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}, \\ x_4 &= \rho\cos\theta_2\sin\theta_3\ldots\sin\theta_{n-2}, \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \rho\sin\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2}, \\ x_n &= \rho\sin\theta_{n-2}. \end{aligned}$$

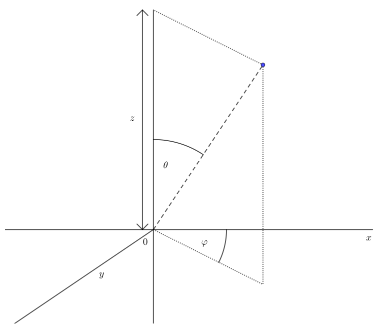
Tentokrát je $\rho \in [0, \infty)$ je vzdálenost bodu od počátku, $\varphi \in [0, 2\pi]$ je odchylka bodu od osy x v kladném smyslu v projekci do půdorysny xy a $\theta_i \in [0, \pi]$ je úhel který svírá bod s kladnou poloosou x_{i+2}. Jakobián tohoto zobrazení je

$$J = \rho^{n-1}\sin\theta_1\sin^2\theta_2\ldots\sin^{n-2}\theta_{n-2}$$

3. Obdobně můžeme definovat transformaci do hyperválcových souřadnic v E^n jako
$$\begin{aligned}x_1 &= \rho\cos\varphi,\\ x_2 &= \rho\sin\varphi,\\ x_3 &= x_3,\\ &\vdots\\ x_n &= x_n.\end{aligned}$$
Charakter proměnných odpovídá obvyklým válcovým souřadnicím. Jakobián zobrazení je opět
$$J = \rho.$$

Nestandardní transformace

1. K popisu některých množin by se nám mohly hodit další souřadnice. Například bod $[x, y, z]$ můžeme výhodně popsat pomocí jeho výšky z, úhlu v půdorysně φ a odchylky θ od osy z. Tím bychom dostali kuželové souřadnice, které výhodně popisují body uvnitř kužele
$$\begin{aligned}x &= \frac{z}{\cos\theta}\cos\varphi,\\ y &= \frac{z}{\cos\theta}\sin\varphi,\\ z &= z.\end{aligned}$$
Tímto způsobem popisujeme body pro $z > 0$, kde je $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ abychom se vyhnuli nevhodné nule ve jmenovateli. Úhel $\varphi \in [0, 2\pi]$ má obvyklou interpretaci. Interpretace jednotlivých složek je následující



Analogicky lze uvažovat transformaci pro $z < 0$ pro $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
Jakobián tohoto zobrazení bychom potom dostali jako determinant
$$J = \begin{vmatrix} -\frac{z}{\cos\theta}\sin\varphi & \frac{z}{\cos^2\theta}\sin\theta\cos\varphi & \frac{\cos\varphi}{\cos\theta}\\ \frac{z}{\cos\theta}\cos\varphi & \frac{z}{\cos^2\theta}\sin\theta\sin\varphi & \frac{\sin\varphi}{\cos\theta}\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = -\frac{z^2\sin\theta}{\cos^3\theta}.$$

2. Mezi-válcovo-sférické souřadnice bychom dostali jako kombinaci válcových a sférických souřadnic
$$\begin{aligned}x &= \sqrt{\rho^2 - z^2}\cos\varphi,\\ y &= \sqrt{\rho^2 - z^2}\sin\varphi,\\ z &= z,\end{aligned}$$

kde z popisuje vzdálenost bodu od půdorysny a φ popisuje odchylku od kladné poloosy x v půdorysně. Parametr ρ je nyní vzdálenost bodu $[x, y, z]$ od počátku (válcové souřadnice měří vzdálenost bodu $[x, y, 0]$ od počátku). Dostali bychom stejný systém poledníků jako pro sférické souřadnice, ale rovnoběžky by získaly novou interpretaci jako vzdálenost od roviny rovníku. Jakobián zůstává stejný jako pro válcové souřadnice $J = \rho$.

3. Reinterpretace válcových/sférickcýh souřadnic dostaneme, pokud bychom využili vztahů

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

kde platí vztah $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, tj. $x = 2 \operatorname{arctg} t$. Což bychom mohli využít třeba způsobem

$$x = \rho \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y = \rho \frac{2t}{1+t^2}, \qquad z = z.$$

$$x = \rho \cos \varphi \frac{2t}{1+t^2}, \qquad y = \rho \sin \varphi \frac{2t}{1+t^2}, \qquad z = \rho \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

kde pro sférické souřadnice dostaneme $-\infty < t < \infty$, což ale znamená, že nemůžeme dostat body na záporné poloose y. Avšak pro sférické souřadnice máme $-1 \leq t \leq 1$.

4. Válec s pokřivenou osou získáme pomocí transformace

$$x = f(z) + \rho \cos \varphi, \qquad y = g(z) + \rho \sin \varphi, \qquad z = z,$$

kde funkce $f(z)$, $g(z)$ jsou hladké funkce. Pro danou transformaci osa válce není tvořena přímkou, ale parametricky zadanou křivkou $[f(z), g(z), z]$. Pro funkci $f(z) = \sin z$, $g(z) = \cos z$ dostaneme například Jakobián tohoto zobrazení je stále $J = \rho$. Mezi tuto transformaci jsou zahrnuty i zkosené válce, kde je osa válce pootočena, pro volbu $f(z) = \operatorname{cotg} A \cos Bz$, $g(z) = \operatorname{cotg} A \sin Bz$, kde A a B odpovídá úhlům zkosení.

5. Anuloidové souřadnice dostaneme jako

$$x = (R + \rho \cos \theta) \cos \varphi, \qquad y = (R + \rho \cos \theta) \sin \varphi, \qquad z = \rho \sin \theta,$$

kde R je pevný parametr, ρ splňuje $0 \leq \rho < R$ a popisuje vzdálenost bodu $[x, y, z]$ od kružnice $x^2 + y^2 = R^2$. Úhly patří do rozsahu φ, $\theta \in [0, 2\pi]$ a úhel φ má obvyklou interpretaci. Naopak úhel θ popisuje odchylku v rovině dané úhlem φ. Měříme zde odchylku mezi bodem $[R \cos \varphi, R \sin \varphi, 0]$ a bodem $[x, y, z]$. Transformace nejlépe popisuje body uvnitř anuloidu, kde ρ je poloměr popisující vnitřek trubice anuloidu a R je obvod kruhu okolo kterého anuloid obíhá. Úhel φ popisuje oběh po velké kružnici a úhel θ zase oběh kružnic tvořících plášť anuloidu.

Jakobián této transformace je $J = \rho(R + \rho \cos \theta)$. I zde máme Jakobián nulový pro $\rho = 0$, což odpovídá kružnici $x^2 + y^2 = R^2$. Jedná se však o množinu prostorové míry 0 a tedy je zde vše v pořádku.

6. Spirálově-Anuloidové souřadnice bychom měli pokud bychom uvážili transformaci

$$\begin{aligned} x &= (R + \rho\cos\theta)\cos\varphi, \\ y &= (R + \rho\cos\theta)\sin\varphi, \\ z &= \varphi + \rho\sin\theta, \end{aligned}$$

kde nyní $\theta \in \mathbb{R}$ není omezeno. Oproti předchozím variantě dostaneme válec navinutý na spirálu, tj. drát o nenulové tloušťce. Jakobián je stále $J = \rho(R + \rho\cos\theta)$.

7. Další zobecnění bychom měli například pro varianta

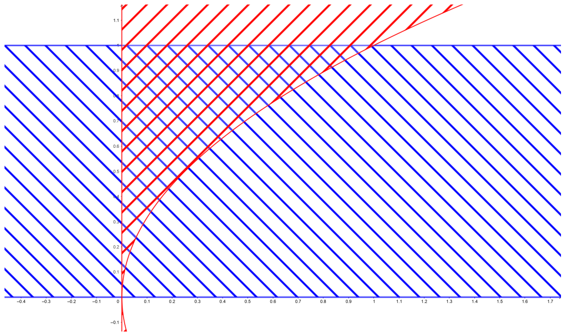
$$\begin{aligned} x &= (R(\varphi,\theta) + \rho(\varphi,\theta)\cos\theta)\cos\varphi, \\ y &= (R(\varphi,\theta) + \rho(\varphi,\theta)\cos\theta)\sin\varphi, \\ z &= \rho(\varphi,\theta)\sin\theta, \end{aligned}$$

tj. pokud bychom uvažovali poloměry R, ρ závislé na úhlech θ, ρ za předpokladu, že stále platí $\rho(\varphi,\theta) \leq R(\varphi,\theta)$.

4.1 Transformace množiny a popis principu

Př. 172 *Převeďte trojný integrál* $\iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ *do válcových souřadnic, kde* V *je dána omezeními* $x = 0,\ y = 1,\ z = 0,\ z = A,\ x = y^2,\ A > 0.$

Válcové souřadnice jsou dány transformací $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$. Jakobián je zde $|J| = \rho$. Z omezení dostaneme snadno tvar množiny V jako $0 \le x \le y^2$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le A$. Proměnná z zůstane nezměněna a vidíme, že nezávisí na proměnných x, y. Vidíme, že se jedná o část válce s různým dolním a horním omezením. V půdorysně je množina zobrazena jako



Převedeme nerovnosti pro x a y jako

$$\begin{aligned} 0 \le &\rho\sin\varphi \le 1 \\ 0 \le &\rho\cos\varphi \le \rho^2\sin^2\varphi \end{aligned}$$

Z první podmínky dostaneme $\rho \le \frac{1}{\sin\varphi}$, ale také $\sin\varphi \ge 0$, což vede na interval $\varphi \in [0, \pi]$. Ze druhé podmínky získáme

$$0 \le \rho\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi\sin\varphi} \le \rho$$

Neboť je $\sin\varphi \ge 0$ máme také požadavek aby $\operatorname{tg}\varphi > 0$ což je splněno na intervalu $(0, \pi/2]$. Další omezení vznikne v důsledku omezení $\rho\sin\varphi \le 1$ že

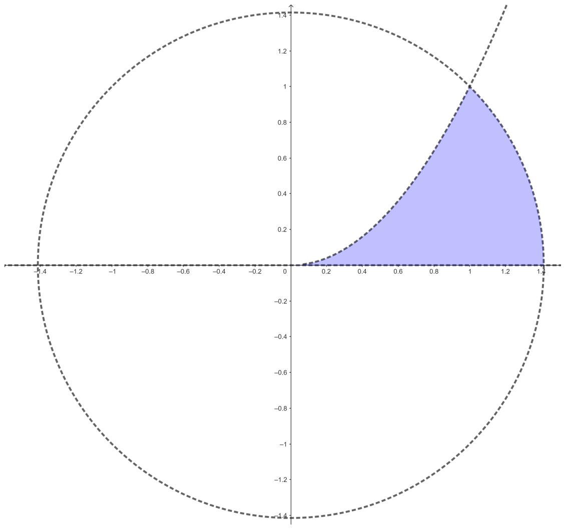
$$\rho\cos\varphi \le \rho^2\sin^2\varphi \le \rho\sin\varphi$$

a dostaneme po upravení $\operatorname{tg}\varphi \ge 1$. Transformovaný integrál je tedy

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_{\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi\sin\varphi}}^{\frac{1}{\sin\varphi}}\int_0^A \rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi.$$

Př. 173 *Převeďte trojný integrál* $\iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ *do válcových souřadnic, kde* V *je dána omezeními* $x = \sqrt{y}$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 2$, $x^2 + y^2 = 2$.

Proměnná z nezávisí na proměnných x, y a naopak podmínky obsahující proměnné x, y nezávisí na proměnné z. Analýzou množiny V v půdorysně dostaneme nerovnosti $x \geq \sqrt{y}$, $y \geq 0$, $x^2+y^2 \leq 2$, které popisují právě množinu



Nalezneme průsečíky křivek v půdorysně xy, což jsou body $[0,0]$, $[\sqrt{2},0]$, $[1,1]$. Dosazením polárních souřadnic $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ získáme

$$\begin{aligned} \rho^2\cos^2\varphi &\geq \rho\sin\varphi \\ \rho^2 &\leq 2 \\ \rho\sin\varphi &\geq 0 \end{aligned}$$

Z první podmínky vyplyne $\rho \geq \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$. Ze třetí podmínky pak máme omezení $\varphi \in [0,\pi]$. Avšak z obrázku vidíme, že φ má největší úhel na přímce $y = x$, což odpovídá průsečíku $[1,1]$. Tedy musíme zúžit interval na $\varphi \in [0,\pi/4]$. Transformujeme

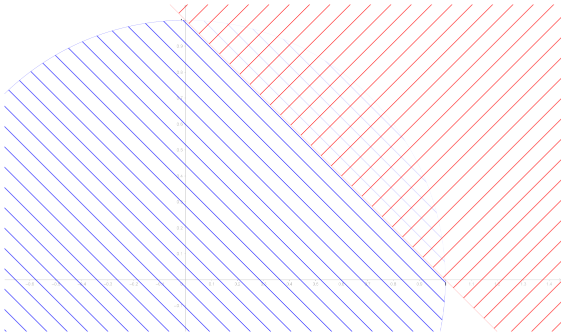
$$\int_0^{\pi/4} \int_{\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\varphi}}^{\sqrt{2}} \int_0^2 \rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi.$$

Př. 174 *Převeďte trojný integrál* $\iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ *do válcových souřadnic, kde* V *je dána omezeními* $x^2+y^2 \le A^2$, $y \ge A-x$, $z=0$, $z=A$, $A>0$.

Proměnná z nezávisí na proměnných x, y a naopak podmínky obsahující proměnné x, y nezávisí na proměnné z. Dosazením polárních souřadnic $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ do omezení získáme

$$\begin{gathered}\rho^2 \le A^2\\ \rho\sin\varphi \ge A-\rho\cos\varphi\end{gathered}$$

Neboť se jedná o válec, můžeme vykreslit situaci v půdorysně xy



Vidíme skrze vyjádření z druhé nerovnosti, že

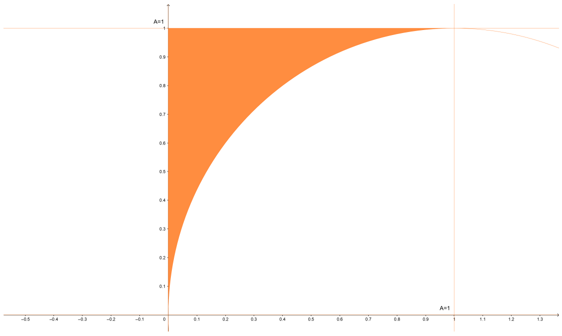
$$\rho \ge \frac{A}{\sin\varphi+\cos\varphi}$$

Navíc vidíme, že $\varphi\in[0,\pi/2]$. Transformujeme

$$\int_0^{\pi/2}\int_{\frac{A}{\sin\varphi+\cos\varphi}}^{A}\int_0^{A}\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi.$$

Př. 175 *Převeďte trojný integrál* $\iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ *do válcových souřadnic, kde* V *je dána omezeními* $x = 0$*,* $y = A$*,* $z = 0$*,* $z = 2A$*,* $(x - A)^2 + y^2 = A^2$*,* $A > 0$*.*

Proměnná z nezávisí na proměnných x, y a naopak podmínky obsahující proměnné x, y nezávisí na proměnné z. Analýzou množiny V v půdorysně xy určíme nerovnosti jako $x \geq 0$, $y \leq= A$, $(x - A)^2 + y^2 \geq A^2$. Vykreslením situace v půdorysně xy vidíme



že dolní hranice pro úhel φ je vymezena bodem $[A, A]$, který odpovídá průsečíku křivek $y = A$ a $(x - A)^2 + y^2 = A^2$. Tento bod leží na přímce $y = x$ a tedy dolní hranice je $\varphi \geq \pi/4$. Z obrázku vidíme, že $\varphi \in [\pi/4, \pi/2]$. Dosazením do nerovností dostaneme

$$\begin{aligned} \rho \sin\varphi &\leq A \\ x^2 + y^2 = \rho^2 &\geq 2Ax = 2A\rho\cos\varphi \end{aligned}$$

Což vede na omezení $\rho \in [2A\cos\varphi, \frac{A}{\sin\varphi}]$. Transformujeme

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{2A\cos\varphi}^{\frac{A}{\sin\varphi}} \int_0^{2A} \rho \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi.$$

Př. 176 *Transformujte integrál do nových souřadnic a aplikujte Fubiniovu větu*

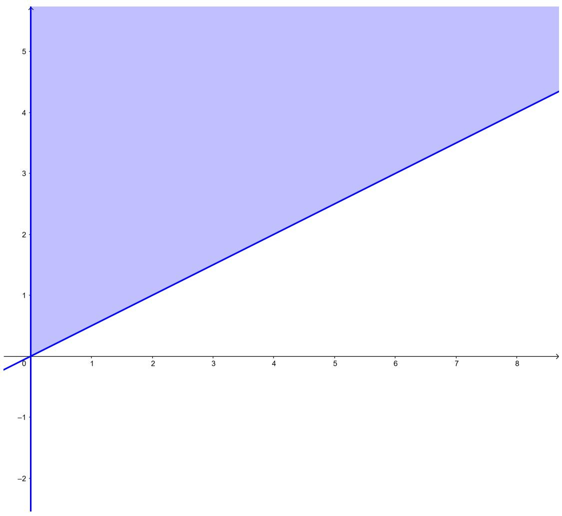
$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde V je dána průnikem těles $x^2+y^2+z^2 \le 1$ a $z \ge \sqrt{(x-z)^2+y^2}$ a aplikujte Fubiniovu větu.

Množina V je tvořena průnikem dvou těles. První je sféra o poloměru $r = 1$ a se středem $S = [0,0,0]$. Druhé těleso je však hůř poznatelné. Zafixujme tedy $y = 0$ čímž reprezentujeme řez tělesa touto rovinou. Druhá nerovnost pak vznikne jako

$$z \ge |x - z|.$$

Pokud je $x \ge z$, pak dostaneme z této nerovnosti, že $z \ge x - z$ a tedy $z \le x \le 2z$. Pokud je naopak $x < z$, pak se nerovnost upraví jako $z \ge z - x \Rightarrow x \ge 0$. Dostali bychom takovýto trojúhelník



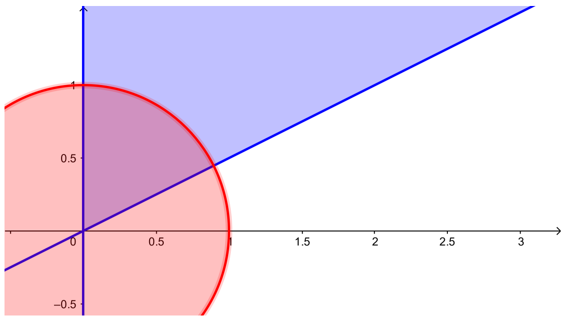
Uvažujme nyní vrstevnice ve výšce $z = C$ čímž bychom dostali

$$C^2 = (x - C)^2 + y^2,$$

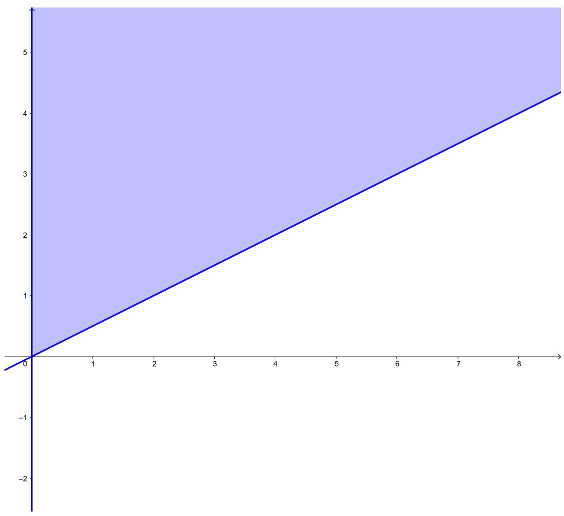
což jsou kružnice s poloměrem $r = C$ a středem $S = [C, 0]$. Takovouto kružnici bychom dostali pro libovolné $C > 0$. Máme nyní představu o podobě druhého tělesa. Zaveďme nyní sférické souřadnice, neboť máme body nacházející se uvnitř sféry

$$\begin{aligned}
x &= \rho\cos\varphi\sin\theta,\\
y &= \rho\sin\varphi\sin\theta,\\
z &= \rho\cos\theta.
\end{aligned}$$

Hned vidíme z rovnice sféry, že je $\rho \le 1$. Naopak z druhého tělesa jsme si mohli rozmyslet, že nám žádné omezení na poloměr nedávají. V řezu $y = 0$ by například situace vypadala následovně



Pojďme se nyní podívat na rozsah pro úhel θ. Jaký je největší možný takovýto rozsah? Z kružnic $C^2 = (x - C)^2 + y^2$ vidíme, že pokud bychom zobrazili kolmo body druhého tělesa do roviny xz, tak dostane stejnou množinu jakou jsme již měli při položení $y = 0$, tj. kružnice mají nejdelší tětivu rovnoběžnou s osou x právě její průměr.



Z této množiny bychom chtěli popsat úhel θ. Hranici množiny tvoří přímky $z = \frac{x}{2}$ a tedy dostaneme derivací úhel α mezi touto přímkou a osou x jako

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}.$$

Protože nás však zajímá odchylka od osy z, dostaneme komplementárně hraniční úhel θ jako

$$\theta_H = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{2},$$

tj. máme rozsah $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{2}\right]$ neboť vidíme, že úhel θ začíná hned na ose z, která tvoří druhou hranici množiny. Nakonec potřebujeme ještě vyjádřit rozsah pro φ. Vidíme, že tento úhel bude výrazně limitován nerovností $z \geq \sqrt{(x-z)^2+y^2}$. Tohohle můžeme využít, když dosadíme

$$\begin{aligned}
\rho^2\cos^2\theta &\geq \rho^2(\cos\varphi\sin\theta-\cos\theta)^2+\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta \\
\cos^2\theta &\geq \cos^2\varphi\sin^2\theta-2\cos\varphi\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\varphi\sin^2\theta \\
0 &\geq \sin^2\theta-2\cos\varphi\sin\theta\cos\theta \\
2\cos\varphi\sin\theta\cos\theta &\geq \sin^2\theta \\
\cos\varphi &\geq \frac{\operatorname{tg}\theta}{2} \\
\varphi &\leq \arccos\frac{\operatorname{tg}\theta}{2},
\end{aligned}$$

kde musíme uvážit, že funkce $\arccos x$ je klesající, a proto se nám změní znaménko. Funkce $\arccos\varphi$ může nabývat jen hodnot na intervalu $[0,\pi]$. Z kružnic $C^2=(x-C)^2+y^2$ vidíme, že rozsah pro φ bude končit nějakou kladnou hodnotou v intervalu $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ a bude pokračovat. Avšak rozsah pro φ je symetrický přes osu x a tedy odvodíme interval

$$-\arccos\frac{\operatorname{tg}\theta}{2}\leq\varphi\leq\arccos\frac{\operatorname{tg}\theta}{2}.$$

Pokud je $\theta=0$ dostaneme interval $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ což vidíme, že odpovídá. Pokud bychom měli hraniční $\theta_H=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{2}$, tak numericky dostaneme, že

$$\arccos\frac{\operatorname{tg}\theta_H}{2}=\arccos\frac{2}{2}=\arccos 1=0.$$

Tedy i tento rozsah z obrázku sedí. Máme náš výsledek. Transformovaný integrál vyjde

$$\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{2}}\int_{-\arccos\frac{\operatorname{tg}\theta}{2}}^{\arccos\frac{\operatorname{tg}\theta}{2}}\rho^2\sin\theta f(\rho\cos\varphi\sin\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\theta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho.$$

Př. 177 *Transformujte integrál* $\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ *pomocí sférických souřadnic, kde* V *je dána podmínkami* $x^2+y^2+z^2 \leq A^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Vidíme hned, že se jedná o sféru s poloměrem A v prvním oktantu. Proto je dosazením do první podmínky $\rho \in [0,A]$ a vykreslením vidíme, že $\varphi \in [0,\pi/2]$, $\theta \in [0,\pi/2]$. Transformujeme

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{A} \rho^2 \sin\theta f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho.$$

Př. 178 *Transformujte integrál* $\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ *pomocí sférických souřadnic, kde* V *je dána podmínkami* $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^+z^2 \leq 1$.

Zavedeme sférické souřadnice $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$. Dosazením do podmínek získáme

$$\begin{aligned} \rho\cos\theta &\geq \sqrt{\rho^2\sin^2\theta} = \rho\sin\theta \\ \rho^2 &\leq 1 \end{aligned}$$

Z první podmínky vidíme, že $\theta \in [0, \pi/4]$ a ze druhé podmínky, že $\rho \in [0,1]$. Další podmínku nemáme, a proto $\varphi \in [0, 2\pi]$. Transformujeme

$$\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^2\sin\theta f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta.$$

Př. 179 *Transformujte integrál* $\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ *pomocí sférických souřadnic, kde* V *je dána podmínkami* $(x^2+y^2+z^2)^3 \le A^2 z^4$, $A > 0$.

Zavedeme sférické souřadnice $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$ a dosazením do podmínek získáme

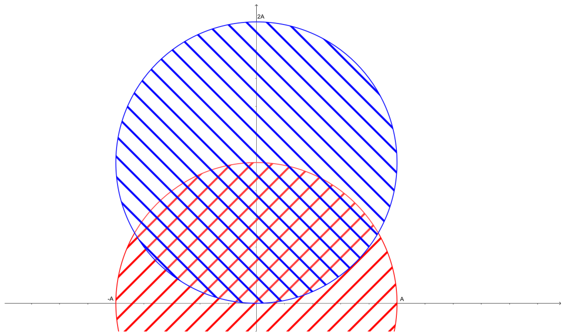
$$\begin{aligned} \rho^6 &\le A^2\rho^4\cos^4\theta \\ \rho^2 &\le A^2\cos^4\theta \\ \rho &\le A\cos^2\theta \end{aligned}$$

Vyplývající podmínka $\cos^2\theta \ge 0$ je splněna triviálně, máme tedy

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{A\cos^2\theta} \rho^2\sin\theta f(\rho\cos\varphi\sin\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\theta)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta.$$

Př. 180 *Transformujte integrál* $\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ *pomocí sférických souřadnic, kde* V *je dána podmínkami* $x^2+y^2+z^2 \le A^2$, $x^2+y^2+(z-A)^2 \le A^2$, $A>0$.

Zavedeme sférické souřadnice $x=\rho\cos\varphi\sin\theta$, $y=\rho\sin\varphi\sin\theta$, $z=\rho\cos\theta$. Vzhledem k symetričnosti okolo osy z máme $\varphi\in[0,2\pi]$ a celou situaci můžeme analyzovat pouze v nárysně xz.



Vykreslením situace vidíme, že se uvažovaná situace rozpadne na dva případy. Musíme nejprve nalézt průsečík kružnic $x^2+z^2=A^2$ a $x^2+(z-A)^2=A^2$. Máme tak bod $[\sqrt{3}A/2, A/2]$ a musíme určit velikost úhlu přímky $z=\frac{x}{\sqrt{3}}$, která prochází nalezeným bodem a počátkem. Ze znalostí derivací víme, že tento úhel je $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$, tj. $\alpha=\pi/6$. Neboť tento úhel svírá přímka s osou x, dopočteme úhel s osou y jako $\pi/2-\alpha=\pi/3$. Proto z obrázku vidíme, že pro $\theta\in[0,\pi/3]$ je $\rho\in[0,A]$. Pro $\theta\in[\pi/3,\pi/2]$ pak platí omezení

$$x^2+y^2+z^2=\rho^2\le 2Az=2A\rho\cos\theta$$

Transformujeme tedy integrál jako

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^{A}\rho^2\sin\theta f(\rho\cos\varphi\sin\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\theta)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi+$$
$$+\int_0^{2\pi}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\int_0^{2A\cos\theta}\rho^2\sin\theta f(\rho\cos\varphi\sin\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\theta)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

4.2 Obvyklé transformace

Př. 181 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde V je dána omezeními $x^2+y^2 \le 9$, $y \ge 0$, $0 \le z \le 2$.

Proměnná z nezávisí na proměnných x, y a naopak podmínky obsahující proměnné x, y nezávisí na proměnné z. Navíc v půdorysně xy je množina tvořena polovinou kružnice. Zavedeme tedy válcové souřadnice. Dosazením $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ do nerovností dostaneme

$$\begin{aligned} \rho^2 &\le 9 \\ \rho\sin\varphi &\ge 0 \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že $\rho \in [0,3]$ a $\varphi \in [0,\pi]$. Jakobián transformace je $|J| = \rho$. Transformujeme integrál

$$\int_0^3 \int_0^\pi \int_0^2 \rho z\sqrt{\rho^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = \pi \int_0^2 z\,\mathrm{d}z \int_0^3 \rho^2\,\mathrm{d}\rho = \pi \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^2 \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^3 = 18\pi$$

Př. 182 *Spočtěte objem kužele o poloměru podstavy $r = 1$ a výšce $h = 1$ pomocí trojného integrálu.*

Nejdříve chceme určit množinu V udávající kužel. Kužel postavený na špici bychom mohli dostat jako $z = A\sqrt{x^2 + y^2}$, pro $A > 0$. Ve výšce $h = 1$ chceme, aby kužel končil podstavou o poloměru $r = 1$, tj. pro $z = 1$ chceme aby platilo $x^2 + y^2 = 1$. Dosazením těchto hodnot do rovnice dostaneme $A = 1$. Rovnost $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ popisuje pouze plášť kužele. Celý kužel bychom dostali z nerovností $1 \geq z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ a to je tedy naše množina V. Začněme na ose z. Pokud bychom zobrazili body množiny V na osu z dostali bychom interval $z \in [0, 1]$. Máme tedy rozsah pro první proměnnou. Nemusíme se divit vždyť kužel á výšku $h = 1$ a tedy jiný rozsah pro z ani mít nebudeme.

Kužel je rotační objekt, takže zde platí $\varphi \in [0, 2\pi]$ neboť popisujeme kolem dokola všech 360°. V rovině $y = 0$ bychom dostali z nerovnosti, že $z \geq \sqrt{x^2 + y^2} = |x|$. Nás bude zajímat jen polorovina $x \geq 0$, což odpovídá pevně zvolenému $\varphi = 0$. Z rotačnosti tělesa V je situace stejná pro všechny další úhly φ. Vyšetřujeme tedy body nad přímkou $z \geq x$. Odchylka θ těchto bodů začíná na kladné poloose z (kde je $\theta = 0$) a potom se odchylka těchto zvětšuje dokud nedorazíme na přímku $z = x$ za kterou už se další body nenacházejí. Přímka $z = x$ má od kladné poloosy z odchylku $\frac{\pi}{4}$ což bychom mohli odvodit různě (například z pravoúhlých trojúhelníků). Rozmysleme se tedy, že pro pevné $z \in [0, 1]$ dostaneme kruh splňující $\varphi \in [0, 2\pi]$, kde pro pevné φ dostaneme úsečku jejíž odchylky θ od osy z budou splňovat $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Můžeme tedy transformovat množinu V do kuželových souřadnic a rovnou aplikovat Fubiniho větu, máme

$$\begin{aligned}
\text{objem} &= \iiint_V 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{z^2 \sin\theta}{\cos^3\theta} \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\theta = \\
&= 2\pi \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta} \,\mathrm{d}\theta = |t = \cos\theta| = \\
&= \frac{2\pi}{3} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{1}{t^3} \,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{3} \left[-\frac{t^{-2}}{2}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = \frac{\pi}{3}(2 - 1) = \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Pokud bychom spočítali objem kužele pomocí vzorce, tak víme, že

$$\text{objem} = \frac{1}{3} h S_p = \frac{1}{3} h \pi r^2.$$

Pro $h = 1$ a $r = 1$ máme rovnou objem $= \frac{\pi}{3}$.

Př. 183 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V z(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde V je dána omezeními $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$, $0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}$.

Vzhledem k omezením si všimneme, že omezení $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ udává sféru. Také podmínka $y = \sqrt{1-x^2}$ v půdorysně udává kružnici. Využijeme tedy transformaci do sférických souřadnic $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$. Jakobián této transformace je $J = -\rho^2\sin\theta$. Dosazením do nerovností dostaneme

$$\begin{aligned}
0 \le{}& \rho\cos\varphi\sin\theta \le 1\\
0 \le{}& \rho\sin\varphi\sin\theta \le \sqrt{1-\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta}\\
0 \le{}& \rho\cos\theta \le \sqrt{1-\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta-\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta}
\end{aligned}$$

Analýza těchto nerovností není příliš jednoduchá, pokud si však situaci vykreslíme, vidíme, že se jedná o čtvrtinu kružnice. Dostaneme tedy omezení $\rho \in [0,1]$, $\varphi \in [0,\pi/2]$, $\theta \in [0,\pi/2]$. Transformujeme

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\rho^3\sin\theta\cos\theta\left(\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta+\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta\right)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho=\\
&=\int_0^1\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\rho^3\sin\theta\cos\theta\left(\rho^2\sin^2\theta\right)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho=\\
&=\int_0^1\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\rho^5\sin^3\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2}\int_0^1\rho^5\,\mathrm{d}\rho\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=\\
&=\frac{\pi}{2}\left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^1\int_0^1 t^3\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{12}\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1=\frac{\pi}{48}
\end{aligned}$$

Př. 184 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V \frac{xy}{(4+z)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde V je dána omezeními $x^2 + y^2 \leq 4z \leq 16$.

Vidíme, že pro pevné z je podmínka $x^2 + y^2 \leq 4z$ tvořena kružnicí. Zavedeme tedy cylindrické souřadnice a dosadíme do omezení, čímž získáme

$$\rho^2 \leq 4z \leq 16$$

Z těchto podmínek vidíme, že $\rho \in [0, 4]$ a $z \in [\rho^2/4, 4]$. Další omezení nemáme, je tedy $\varphi \in [0, 2\pi]$. Jakobián této transformace je $|J| = \rho$. Transformujeme

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_0^4\int_{\rho^2/4}^4 \rho\frac{\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}{(4+z)^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \int_0^{2\pi}\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^4\int_{\rho^2/4}^4 \frac{\rho^3}{(4+z)^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho = \\
&= \left[\frac{\sin^2\sin\varphi}{2}\right]_0^{2\pi}\int_0^4\int_{\rho^2/4}^4 \frac{\rho^3}{(4+z)^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho = \\
&= 0\cdot\int_0^4\int_{\rho^2/4}^4 \frac{\rho^3}{(4+z)^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho = 0.
\end{aligned}$$

Př. 185 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V xyz \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

kde V je dána omezeními $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Vidíme, že množina tvoří osminu koule v prvním oktantu o poloměru 1, a proto $\rho \in [0,1]$, $\varphi \in [0, \pi/2]$, $\theta \in [0, \pi/2]$. transformujeme

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \rho^5 \sin^3\theta \cos\theta \sin\varphi \cos\varphi \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\rho = \\
&= \int_0^1 \rho^5 \, \mathrm{d}\rho \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cos\varphi \, \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta \cos\theta \, \mathrm{d}\theta = \\
&= \left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^1 \int_0^1 t \, \mathrm{d}t \int_0^1 s^3 \, \mathrm{d}s = \frac{1}{6} \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 \left[\frac{s^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{48}
\end{aligned}$$

Př. 186 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V x^2 + y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $x^2 + y^2 + z^2 \le A^2$, $z \ge 0$, $A > 0$.

Množina V je polokoule o poloměru A. Zavedeme sférické souřadnice $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$ a určíme $\rho \in [0, A]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, \pi/2]$. Jakobián této transformace je $|J| = \rho^2 \sin\theta$. Transformujeme

$$\begin{aligned}
&\int_0^A \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \rho^2 \sin\theta \left(\rho^2 \cos^2\varphi \sin^2\theta + \rho^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta\right) \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = \\
&= \int_0^A \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \rho^4 \sin^3\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = 2\pi \int_0^A \rho^4 \,\mathrm{d}\rho \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta \,\mathrm{d}\theta = \\
&= 2\pi \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^A \int_0^1 1 - t^2 \,\mathrm{d}t = 2\pi \frac{A^5}{5} \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{15} A^5 \pi
\end{aligned}$$

Př. 187 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V 3z^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2$.

Omezující podmínky jsou doplněny funkcemi $x^2 + y^2$, tyto dobře kooperují spolu s polárními souřadnicemi, zavedeme tedy transformaci do cylindrických souřadnic $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$, $z = z$. Dosazením do nerovnosti máme

$$\rho^2 \leq z \leq 1 - \rho^2$$

Musíme určit rozsah pro ρ. Již z definice vidíme, že $\rho \geq 0$. Horní ohraničení pak vyplývá z nerovnosti $\rho^2 \leq 1 - \rho^2$ dostaneme $\rho \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Neboť nemáme ohraničení pro φ, je $\varphi \in [0, 2\pi]$. Jakobián této transformace je $|J| = \rho$ Transformujeme

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_0^{2\pi} \int_{\rho^2}^{1-\rho^2} \rho 3z^2 \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\rho = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \rho \int_0^{2\pi} \left[z^3\right]_{\rho^2}^{1-\rho^2} \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\rho =$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \rho \int_0^{2\pi} (1-\rho^2)^3 - \rho^6 \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\rho = 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \rho \left(1 - 3\rho^2 + 3\rho^4 - \rho^6 - \rho^6\right) \mathrm{d}\rho =$$

$$= 2\pi \left[\frac{\rho^2}{2} - 3\frac{\rho^4}{4} + 3\frac{\rho^6}{6} - 2\frac{\rho^8}{8}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\pi \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{16} + \frac{3}{48} - \frac{1}{64}\right) = \frac{7}{32}\pi$$

Př. 188 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V 2z \, dx \, dy \, dz,$$

kde V je dána omezeními $0 \le z \le y$, $x^2 + y^2 \le 1$, $x \ge 0$.

V půdorysně je množina tvořena polovinou kružnice. Další omezení omezují rozsah z, vidíme tedy, že se jedná o seříznutý válec. Zavedeme válcové souřadnice $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$. Jakobián této transformace je $|J| = \rho$. Dosazením do nerovnic získáme

$$\begin{aligned} \rho^2 &\le 1 \\ \rho \cos \varphi &\ge 0 \\ 0 \le & z \le \rho \sin \varphi \end{aligned}$$

Máme tedy $\rho \in [0, 1]$ a $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$. Transformujeme

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\rho \sin \varphi} \rho z \, dz \, d\varphi \, d\rho = 2 \int_0^1 \rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{\rho \sin \varphi} d\varphi \, d\rho = \\ & = 2 \int_0^1 \rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\rho^2 \sin^2 \varphi}{2} \, d\varphi \, d\rho = \int_0^1 \rho^3 \, d\rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \varphi \, d\varphi = \\ & = \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \, d\varphi = \frac{1}{4} \left[\frac{2\varphi - \sin 2\varphi}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

Př. 189 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V 1 + 2x - y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $x^2 + y^2 \leq 2z \leq 4$.

Omezující podmínky jsou doplněny funkcí $x^2 + y^2$, tato dobře kooperuje spolu s polárními souřadnicemi, zavedeme tedy transformaci do cylindrických souřadnic $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$. Jakobián této transformace je $|J| = \rho$. Dosazením do nerovnosti máme

$$\rho^2 \leq 2z \leq 4$$

Z tohoto důvodu je $\rho \in [0, 2]$ a $z \in [\rho^2/2, 2]$. Neboť další podmínky nemáme, je $\varphi \in [0, 2\pi]$. Vidíme, že se jedná o seříznutý válec. transformujeme

$$\begin{aligned}
&\int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{\rho^2/2}^2 \rho \left(1 + 2\rho \cos \varphi - \rho \sin \varphi\right) \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\rho = \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(\rho + 2\rho^2 \cos \varphi - \rho^2 \sin \varphi\right) [z]_{\rho^2/2}^2 \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\rho = \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} 2\rho + 4\rho^2 \cos \varphi - 2\rho^2 \sin \varphi - \frac{\rho^3}{2} - \rho^4 \cos \varphi + \frac{\rho^4}{2} \sin \varphi \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\rho = \\
&= \int_0^2 \left[2\rho\varphi + 4\rho^2 \sin \varphi + 2\rho^2 \cos \varphi - \frac{\rho^3}{2}\varphi - \rho^4 \sin \varphi - \frac{\rho^4}{2} \cos \varphi\right]_0^{2\pi} \mathrm{d}\rho = \\
&= \int_0^2 4\pi\rho - \pi\rho^3 \, \mathrm{d}\rho = \left[2\pi\rho^2 - \pi\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 \mathrm{d}\rho = 8\pi - 4\pi = 4\pi
\end{aligned}$$

Př. 190 *Spočtěte integrál*

$$I = \iiint_V x^2 + y^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

kde V je tvořena průnikem kužele $1 \geq z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ a poloprostoru $y \geq -x$.

Již víme, že na popis kužele bychom mohli výhodně využít válcové souřadnice

$$\begin{aligned} x &= \frac{z}{\cos\theta} \cos\varphi, \\ y &= \frac{z}{\cos\theta} \sin\varphi, \\ z &= z, \end{aligned}$$

pro $z \in [0,1]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ a $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. To by však platilo, pokud bychom měli jenom kužel. Doplňující podmínka $y \geq -x$ nám dá

$$\begin{aligned} \frac{z}{\cos\theta} \sin\varphi &\geq -\frac{z}{\cos\theta} \cos\varphi \\ \sin\varphi &\geq -\cos\varphi. \end{aligned}$$

Tato nerovnost je splněna pokud $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$. Stačí si například namalovat nerovnost v rovině nebo si vše pořádně rozmyslet. Jakobián transformace splňuje

$$|J| = \frac{z^2 \sin\theta}{\cos^3\theta}.$$

Navíc platí vztah

$$x^2 + y^2 = \frac{z^2}{\cos^2\theta} \cos^2\varphi + \frac{z^2}{\cos^2\theta} \sin^2\varphi = \frac{z^2}{\cos^2\theta}.$$

Máme tedy integrál

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{z^4 \sin\theta}{\cos^5\theta} \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}z = |t = \cos\theta| \\ &= 2\pi \left[\frac{z^5}{5}\right]_0^1 \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{1}{t^5} \, \mathrm{d}t = \frac{2\pi}{5} \left[-\frac{1}{4t^4}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = \frac{\pi}{10} \left(-1 + \frac{1}{\frac{1}{4}}\right) = \\ &= \frac{3\pi}{10}. \end{aligned}$$

Př. 191 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde V je dána omezeními $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le \sqrt{2x-x^2}$, $0 \le z \le A$, $A > 0$.

Vidíme, že proměnná z neovlivňuje podmínky vzhledem k proměnným x, y a naopak. Upravíme podmínku

$$\begin{aligned} y &\le \sqrt{2x-x^2} = \sqrt{1-1+2x-x^2} \\ y^2 &\le 1-(x-1)^2 \\ (x-1)^2+y^2 &\le 1 \end{aligned}$$

Vidíme, že se jedná o posunutou kružnici a tudíž zavedeme cylindrické souřadnice $x = \rho\cos\varphi + 1$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$. Jakobián této transformace je stále $|J| = \rho$. Z nerovnic máme $\rho\sin\varphi \ge 0$, a proto $\varphi \in [0, \pi]$. Z nerovnice $(x-1)^2+y^2 \le 1$ dostaneme $\rho \in [0, 1]$. Již ze zadání pak máme $z \in [0, A]$. Transformujeme

$$\begin{aligned} &\int_0^A \int_0^1 \int_0^\pi \rho z\sqrt{(1+\rho\cos\varphi)^2+\rho^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z = \\ &\int_0^A z\,\mathrm{d}z \int_0^1 \int_0^\pi \rho\sqrt{1+2\rho\cos\varphi+\rho^2}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho \end{aligned}$$

Výpočet tohoto integrálu není jednoduchý, vyzkoušíme tedy obvyklé polární souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Dosazením do nerovnosti $y \ge 0$ a $0 \le y^2 \le 2x - x^2$ dostaneme $0 \le x^2 \le x^2 + y^2 \le 2x$. Máme tedy $\rho \in [0, 2\cos\varphi]$, $\varphi \in [0, \pi/2]$. Dosadíme

$$\begin{aligned} &\int_0^A \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\varphi} \rho z\sqrt{\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \int_0^A z\,\mathrm{d}z \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\varphi} \rho^2\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^A \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{2\cos\varphi} \mathrm{d}\varphi = \frac{A^2}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{8\cos^3\varphi}{3}\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \frac{4A^2}{3}\int_0^1 1-t^2\,\mathrm{d}t = \frac{4A^2}{3}\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{8A^2}{9} \end{aligned}$$

Př. 192 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V x^2 + y^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z,$$

kde V je dána omezeními $x^2 + y^2 \le 2z$, $z \le 2$.

Omezující podmínky jsou doplněny funkcí $x^2 + y^2$, tato dobře kooperuje spolu s polárními souřadnicemi, zavedeme tedy transformaci do cylindrických souřadnic $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$. Jakobián této transformace je $|J| = \rho$. Dosazením do nerovnosti dostaneme $\rho^2 \le 2z \le 4$ a proto je $\rho \in [0, 2]$, $z \in [\rho^2/2, 2]$. Další podmínky nemáme, proto je $\varphi \in [0, 2\pi]$. Vidíme, že se jedná o seříznutý válec. Transformujeme

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{\rho^2/2}^2 \rho^3 \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^3 \left(2 - \frac{\rho^2}{2}\right) \mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^2 2\rho^3 - \frac{\rho^5}{2} \,\mathrm{d}\rho = 2\pi \left[\frac{2\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{12}\right]_0^2 = 2\pi \left(8 - \frac{64}{12}\right) = \frac{16}{3}\pi$$

Př. 193 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V \frac{x+y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde V je dána omezeními $(x-1)^2+y^2 \geq 1$, $y \leq 3-x$, $x > 0$, $y \leq x$, $y \geq 0$, $0 \leq z \leq 2$.

Vidíme, že integrovaná funkce obsahuje výraz x^2+y^2. Podobně je ohraničení tvořeno po úpravě na čtverec posunutou kružnicí jako $x^2+(y-1)^2 \leq 1$. Rozhodujeme se mezi obvyklými válcovými souřadnicemi a posunutými válcovými souřadnicemi. Vzhledem k obtížnému výpočtu integrovaných funkcí zavedeme nejprve $x = \rho\cos\varphi$ a $y = \rho\sin\varphi$. Dosadíme postupně do nerovností čímž dostáváme

$$\begin{aligned}
x^2+y^2 = \rho^2 &\geq 2x = 2\rho\cos\varphi \\
\rho\sin\varphi &\leq 3-\rho\cos\varphi \\
\rho\sin\varphi &\leq \rho\cos\varphi \\
\rho\sin\varphi &\geq 0 \\
\rho\cos\varphi &> 0
\end{aligned}$$

Z první nerovnosti získáme $\rho \geq 2\cos\varphi$, ze druhé nerovnosti máme $\rho \leq \frac{3}{\sin\varphi+\cos\varphi}$. Třetí nerovnost nás vede na omezení $\sin\varphi \leq \cos\varphi$, což nám dává $[0,\pi/4]\cup[5\pi/4,2\pi]$. 4tvrtá nerovnost $\sin\varphi > 0$ nás vede na $\varphi \in (0,\pi]$. Společně pak třetí a čtvrtá podmínka dávají $\varphi \in (0,\pi/4]$. Poslední nerovnost nám nic nového nepřináší. Jakobián transformace je $|J| = \rho$. Transformujeme

$$\begin{aligned}
&\int_0^2 \int_0^{\pi/4} \int_{2\cos\varphi}^{\frac{3}{\sin\varphi+\cos\varphi}} \rho\frac{\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi}{\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \\
&= \int_0^2 \int_0^{\pi/4} \int_{2\cos\varphi}^{\frac{3}{\sin\varphi+\cos\varphi}} \cos\varphi+\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \\
&= \int_0^2 \int_0^{\pi/4} (\cos\varphi+\sin\varphi)\left(\frac{3}{\sin\varphi+\cos\varphi} - 2\cos\varphi\right)\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \\
&= \int_0^2 \int_0^{\pi/4} 3-2\cos^2\varphi - 2\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \\
&= \int_0^2 [3\varphi]_0^{\pi/4} - 2\int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi - 2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z = \\
&= \int_0^2 \frac{3\pi}{4} - 2\left[\frac{2\varphi+\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{\pi/4} - 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}z = \\
&= \int_0^2 \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi+2}{4} - \frac{1}{2}\,\mathrm{d}z = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi+2}{2} - 1 = \pi - 2
\end{aligned}$$

Př. 194 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V 8y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

kde V je dána omezeními $-1 + 2\sqrt{x^2 + z^2} \leq y \leq \sqrt{x^2 + z^2}$.

Vzhledem k výskytu funkce $x^2 + z^2$ v ohraničující podmínce, zavedeme upravené cylindrické souřadnice $x = \rho \cos \varphi$, $y = y$ a $z = \rho \sin \varphi$. Dosazením získáme

$$-1 + 2\rho = -1 + 2\sqrt{\rho^2} \leq y \leq \sqrt{\rho^2} = \rho$$

Z podmínky $-1 + 2\rho \leq \rho$ získáme $\rho \leq 1$. Úhel není nijak ohraničen, dostaneme tedy $\varphi \in [0, 2\pi]$. Jakobián transformace je stále $|J| = \rho$, neboť záměna proměnných y a z v transformaci jej neovlivní. Transformujeme

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-1+2\rho}^{\rho} 8\rho y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\rho = 16\pi \int_0^1 \rho \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-1+2\rho}^{\rho} \mathrm{d}\rho = \\
&= 8\pi \int_0^1 \rho \left(\rho^2 - (2\rho - 1)^2 \right) \mathrm{d}\rho = 8\pi \int_0^1 \rho \left(\rho^2 - (2\rho - 1)^2 \right) \mathrm{d}\rho = \\
&= 8\pi \int_0^1 -3\rho^2 + 4\rho - 1 \, \mathrm{d}\rho = 8\pi \left[-\rho^3 + 2\rho^2 - \rho \right]_0^1 = 0
\end{aligned}$$

Př. 195 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V 8y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z,$$

kde V je dána omezeními $-1 + 2\sqrt{x^2 + z^2} \leq y \leq \sqrt{x^2 + z^2}$, $y \geq 0$.

Vzhledem k výskytu funkce $x^2 + z^2$ v ohraničující podmínce, zavedeme upravené cylindrické souřadnice $x = \rho \cos \varphi$, $y = y$ a $z = \rho \sin \varphi$. Dosazením získáme

$$-1 + 2\rho = -1 + 2\sqrt{\rho^2} \leq y \leq \sqrt{\rho^2} = \rho$$

Z podmínky $-1 + 2\rho \leq \rho$ získáme $\rho \leq 1$. Další podmínkou je $y \geq 0$. Musíme určit, za jakých podmínek je $-1+2\sqrt{x^2 + z^2} < 0$. Toto je splněno na kružnici $x^2+z^2 \leq 1/4$. rozdělíme integrál na dva případy 1)$\rho \in [0, 1/2]$, kde je $y \in [0, \rho]$. Ve druhém případě pak $\rho \in [1/2, 1]$ a $y \in [-1+2\rho, \rho]$. Úhel není nijak ohraničen, dostaneme tedy $\varphi \in [0, 2\pi]$. Jakobián transformace je stále $|J| = \rho$, neboť záměna proměnných y a z v transformaci jej neovlivní. Transformujeme

$$\begin{aligned}
&\int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho} 8\rho y \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\rho + \int_{1/2}^{1} \int_0^{2\pi} \int_{-1+2\rho}^{\rho} 8\rho y \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\rho = \\
&= 16\pi \int_0^{1/2} \rho \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\rho} \mathrm{d}\rho + 16\pi \int_{1/2}^{1} \rho \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-1+2\rho}^{\rho} \mathrm{d}\rho = \\
&= 8\pi \int_0^{1/2} \rho^3 \,\mathrm{d}\rho + 8\pi \int_{1/2}^{1} \rho \left(\rho^2 - (2\rho - 1)^2\right) \,\mathrm{d}\rho = \\
&= 8\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{1/2} + 8\pi \int_{1/2}^{1} \rho \left(\rho^2 - 4\rho^2 + 4\rho - 1\right) \,\mathrm{d}\rho = \\
&= \frac{\pi}{8} + 8\pi \int_{1/2}^{1} -3\rho^3 + 4\rho^2 - \rho \,\mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{8} + 8\pi \left[-\frac{3\rho^4}{4} + \frac{4\rho^3}{3} - \frac{\rho^2}{2}\right]_{1/2}^{1} = \\
&= \frac{\pi}{8} + \left(-\frac{3}{4} + \frac{4}{3} - \frac{1}{2} + \frac{3}{64} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right) 8\pi = \frac{\pi}{8} + \frac{17}{24}\pi = \frac{5}{6}\pi
\end{aligned}$$

Př. 196 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V 24x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z,$$

kde V je dána omezeními $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2x$, $x \leq y^2 + z^2$.

Podmínku $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2x$ upravíme na čtverec, abychom dostali $(x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Jedná se tedy o posunutou sféru. Zavedeme tedy posunuté sférické souřadnice $x - 1 = \rho \cos\varphi \sin\theta$, $y = \rho \sin\varphi \sin\theta$, $z = \rho \cos\theta$. Jakobián takto zůstane stále stejný $|J| = \rho^2 \sin\theta$. Dosadíme omezení abychom dostali

$$\begin{aligned}\rho^2 \cos^2\varphi \sin^2\theta + \rho^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta + \rho^2 \cos^2\theta =&\rho^2 \leq 1\\ \rho\cos\varphi\sin\theta + 1 \leq \rho^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta +& \rho^2\cos^2\theta\end{aligned}$$

Vidíme, že třetí podmínku nelze jednoduše upravit. Avšak pokud pozměníme transformaci do sférických souřadnic zaměněním proměnných x, z jako $z = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $x - 1 = \rho\cos\theta$, dostaneme podmínky opět

$$\begin{aligned}\rho^2 &\leq 1\\ \rho\cos\theta + 1 &\leq \rho^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta + \rho^2 \cos^2\varphi \sin^2\theta = \rho^2 \sin^2\theta\end{aligned}$$

Ze druhé podmínky $\rho\cos\theta + 1 \leq \rho^2\sin^2\theta$ vidíme, že ani tato transformace není příliš průhledná. Zkusíme tedy neposunutou transformaci $z = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $x = \rho\cos\theta$, což nám dává podmínky

$$\begin{aligned}\rho^2 &\leq 2\rho\cos\theta\\ \rho\cos\theta &\leq \rho^2\sin^2\theta\end{aligned}$$

Tyto ohraničení nám udávají podmínky $\rho \in [\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}, 2\cos\theta]$ a z podmínky $\rho\cos\theta \geq 0$ vidíme, že $\theta \in [0, \pi/2]$. Z podmínek také dostaneme

$$\begin{aligned}\rho^2 \leq& 2\rho\cos\theta \leq 2\rho^2\sin^2\theta\\ \frac{1}{2} \leq& \sin^2\theta\\ \frac{\sqrt{2}}{2} \leq& \sin\theta\end{aligned}$$

A proto omezíme θ ještě více na interval $\theta \in [\pi/4, \pi/2]$ Jakobián transformace je stále $|J| = \rho^2\sin\theta$. Dostáváme

$$24\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}}^{2\cos\theta}\rho^3\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = 48\pi\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_{\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}}^{2\cos\theta}\mathrm{d}\theta =$$

$$= 12\pi\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\left(16\cos^4\theta - \frac{\cos^4\theta}{\sin^8\theta}\right)\mathrm{d}\theta =$$

$$= 12\pi\int_{\pi/4}^{\pi/2}16\sin\theta\cos^5\theta - \frac{\cos^5\theta}{\sin^7\theta}\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= 12\pi\left[16 - \frac{\cos^6\theta}{6}\right]_{\pi/4}^{\pi/2} - 12\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\frac{(1-t^2)^2}{t^7}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 12\pi\left(16\frac{\pi}{4} - \frac{1}{48}\right) - 12\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\frac{1}{t^7} - \frac{2}{t^5} + \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \pi\left(4\pi - \frac{1}{4}\right) - 12\pi\left[\frac{t^{-6}}{-6} - 2\frac{t^{-4}}{-4} + \frac{t^{-2}}{-2}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} =$$

$$= \pi\left(4\pi - \frac{1}{4}\right) - 12\pi\left[\frac{t^{-6}}{-6} - 2\frac{t^{-4}}{-4} + \frac{t^{-2}}{-2}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} =$$

$$= \pi\left(4\pi - \frac{1}{4}\right) - 12\pi\left(\frac{1}{-6} - 2\frac{1}{-4} + \frac{1}{-2} - \frac{8}{-6} + 2\frac{4}{-4} - \frac{2}{-2}\right) =$$

$$= 4\pi^2 - \frac{\pi}{4} - 12\pi\left(\frac{1}{6}\right) = 4\pi^2 - \frac{\pi}{4} - 2\pi$$

Př. 197 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V 60xz \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

kde V je dána omezeními $\frac{x^2+z^2}{A} \leq y \leq \sqrt{x^2+z^2}$, $x \geq 0$, $z \leq 0$, $A > 0$.

Vzhledem k výskytu funkce $x^2 + z^2$ v ohraničující podmínce, zavedeme upravené cylindrické souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = y$ a $z = \rho\sin\varphi$. Jakobián transformace je stále $|J| = \rho$. Dosazením získáme

$$\begin{aligned} \frac{\rho^2}{A} \leq & y \leq \rho \\ \rho\cos\varphi & \geq 0 \\ \rho\sin\varphi & \leq 0 \end{aligned}$$

Z První nerovnosti vyplyne, že $\rho^2 \leq A\rho$ a tedy $0 \leq \rho \leq A$. Ostatní nerovnosti vedou k omezení $\varphi \in [3\pi/2, 2\pi]$. Transformujeme

$$\begin{aligned} &\int_0^A \int_{3\pi/2}^{2\pi} \int_{\frac{\rho^2}{A}}^{\rho} 60\rho^3 \cos\varphi \sin\varphi \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\rho = \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos\varphi \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi \int_0^A 60\rho^3 \, [y]_{\frac{\rho^2}{A}}^{\rho} \, \mathrm{d}\rho = \\ &= 60 \int_{-1}^{0} t \, \mathrm{d}t \int_0^A \rho^3 \left(\rho - \frac{\rho^2}{A}\right) \mathrm{d}\rho = 60 \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{0} \int_0^A \rho^4 - \frac{\rho^5}{A} \, \mathrm{d}\rho = \\ &= -30 \left[\frac{\rho^5}{5} - \frac{\rho^6}{6A}\right]_0^A = -6A^5 + 5A^5 = -A^5 \end{aligned}$$

Př. 198 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V x^2 y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

kde V je dána omezeními $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, $0 \leq z \leq 3 - y$.

Hned vidíme, že se jedná o seříznutý válec. Zavedeme tedy válcové souřadnice $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ a $z = z$. Dosazením do nerovností máme hned $1 \leq \rho^2 \leq 4$ a $0 \leq z \leq 3 - \rho \sin \varphi$, neboť další omezení nemáme, je $\varphi \in [0, 2\pi]$. Transformujeme

$$\int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{3-\rho \sin \varphi} \rho^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\rho = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \rho^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi (3 - \rho \sin \varphi) \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\rho =$$
$$= \int_1^2 \int_0^{2\pi} 3\rho^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \rho^5 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\rho =$$
$$= \int_1^2 \left[-\rho^4 \cos^3 \varphi \right]_0^{2\pi} - \frac{\rho^5}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\rho = -\frac{1}{4} \int_1^2 \rho^5 \, \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} \, \mathrm{d}\varphi =$$
$$= -\frac{1}{4} \left[\frac{rho^6}{6} \right]_1^2 \left[\frac{4\varphi - \sin 4\varphi}{8} \right]_0^{2\pi} = -\frac{64 - 1}{24} \pi = -\frac{21}{8} \pi$$

Př. 199 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $\frac{B^2}{A^2} \le \frac{x^2+y^2}{A^2} \le z \le 1$, $A > B > 0$.

Vzhledem ke tvaru množiny V zavedeme válcové souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ a $z = z$. Z podmínek dostaneme dosazením $\frac{B^2}{A^2} \le \frac{\rho^2}{A^2} \le z \le 1$. Vidíme, že platí $B^2 \le \rho^2 \le A^2$. Neboť nemáme omezení pro velikost úhlu, je $\varphi \in [0, 2\pi]$. Transformujeme

$$\int_B^A \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\rho^2}{A^2}}^1 \rho \frac{1}{\sqrt{\rho^2}}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = 2\pi \int_B^A 1 - \frac{\rho^2}{A^2}\,\mathrm{d}\rho = 2\pi \left[\rho - \frac{\rho^3}{3A^2}\right]_B^A =$$
$$= 2\pi \left(A - B - \frac{A^3}{3A^2} + \frac{B^3}{3A^2}\right)$$

Př. 200 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V x^2 + y^2 + z^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z,$$

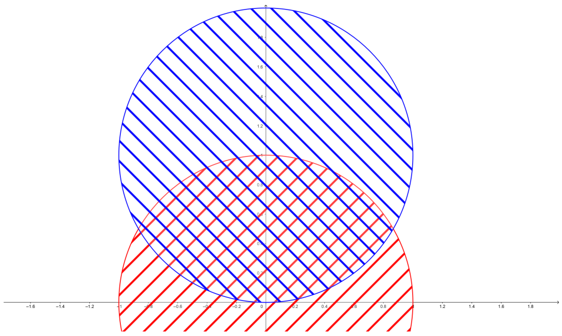
kde V *je dána omezeními* $x^2 + y^2 \le A^2$, $z \ge 0$, $z \le B$, $A > 0$, $B > 0$.

Vzhledem ke tvaru množiny V zavedeme válcové souřadnice $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ a $z = z$. Z podmínek dostaneme dosazením $\rho^2 \le A^2$. Transformujeme

$$\int_0^A \int_0^{2\pi} \int_0^B \rho(\rho^2 + z^2) \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\rho = 2\pi \int_0^A B\rho^3 + \left[\rho \frac{z^3}{3}\right]_0^B \mathrm{d}\rho =$$
$$= 2\pi \int_0^A B\rho^3 + \frac{B^3}{3} \rho \,\mathrm{d}\rho = 2\pi \left(\left[B\frac{\rho^4}{4} + \frac{B^3\rho^2}{6} \right]_0^A + \right) = 2\pi \left(B\frac{A^4}{4} + \frac{A^2B^3}{6} \right)$$

Př. 201 *Vypočtěte integrál*
$$\iiint_V x^2 + y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$
kde V je dána omezeními $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1$.

Množina V je tvořena průnikem dvou sfér, kde jedna má střed posunut mimo počátek. Zavedeme sférické souřadnice $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$. Vzhledem k symetričnosti okolo osy z máme $\varphi \in [0, 2\pi]$ a celou situaci můžeme analyzovat pouze v nárysně xz. Vidíme dvě protínající se kružnice se stejným poloměrem



Uvažovaná situace rozpadne na dva případy. Musíme nejprve nalézt průsečík kružnic $x^2+z^2 = 1$ a $x^2+(z-1)^2 = 1$. Máme tak bod $[\sqrt{3}/2, 1/2]$ a musíme určit velikost úhlu přímky $z = \frac{x}{\sqrt{3}}$, která prochází nalezeným bodem a počátkem. Ze znalostí derivací víme, že tento úhel je $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, tj. $\alpha = \pi/6$. Neboť tento úhel svírá přímka s osou x, dopočteme úhel s osou y jako $\pi/2 - \alpha = \pi/3$. Proto z obrázku vidíme, že pro $\theta \in [0, \pi/3]$ je $\rho \in [0, 1]$. Pro $\theta \in [\pi/3, \pi/2]$ pak platí omezení
$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \leq 2z = 2\rho\cos\theta$$
Transformujeme tedy integrál jako
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^1 \rho^4\sin^3\theta \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi + \int_0^{2\pi}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} \rho^4\sin^3\theta \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi =$$
$$= 2\pi\int_0^{\pi/3}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^4\,\mathrm{d}\rho + 2\pi\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sin^3\theta\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^{2\cos\theta}\mathrm{d}\theta =$$
$$= 2\pi\int_{1/2}^1 1 - t^2\,\mathrm{d}t\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^1 + \frac{64\pi}{5}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sin^3\theta\cos^5\theta\,\mathrm{d}\theta =$$
$$= \frac{2\pi}{5}\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_{1/2}^1 + \frac{64\pi}{5}\int_{\sqrt{3}/2}^1 t^3(1-t^2)^2\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{5}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{24}\right) + \frac{64\pi}{5}\int_{\sqrt{3}/2}^1 t^3 - 2t^5 + t^7\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{2\pi}{5}\cdot\frac{5}{24} + \frac{64\pi}{5}\left[\frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{3} + \frac{t^8}{8}\right]_{\sqrt{3}/2}^1 = \frac{\pi}{12} + \frac{64\pi}{5}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} - \frac{9}{64} + \frac{9}{64} - \frac{81}{2^{11}}\right) =$$
$$= \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{5}\left(\frac{2^3}{3} - \frac{3^4}{2^5}\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{2^8 - 3^5}{96\cdot 5}\pi = \frac{\pi}{12} + \frac{13}{96\cdot 5}\pi = \frac{53}{480}\pi$$

Př. 202 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde V je dána omezeními $0 \le x \le A$, $0 \le y \le \sqrt{A^2-x^2}$, $0 \le z \le \sqrt{A^2-x^2-y^2}$.

Z omezení vidíme, že je množina V tvořena osminou sféry o poloměru A. Zavedeme sférické souřadnice $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$. Z podmínky $z \ge 0$ vidíme, že $\theta \in [0,\pi/2]$. Z podmínky $y \ge 0$ pak vidíme, že $\varphi \in [0,\pi/2]$. Transformujeme tedy integrál jako

$$\begin{aligned}
&\int_0^A \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \rho^2 \sin\theta \sqrt{\rho^2}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^A \rho^3\,\mathrm{d}\rho \int_0^{\pi/2} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \\
&= \frac{\pi}{2}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^A [-\cos\theta]_0^{\pi/2} = \frac{A^4}{8}\pi
\end{aligned}$$

Př. 203 *Vypočtěte integrál*
$$\iiint_V x^2 + y^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z,$$
kde V *je dána omezeními* $x^2 + y^2 + z^2 \geq A^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq B^2$, $z \leq 0$.

Vidíme, že množina je tvořena mezisféřím. Zavedeme tedy sférické souřadnice $x = \rho \cos\varphi \sin\theta$, $y = \rho \sin\varphi \sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$. Neboť $z = \rho\cos\theta \leq 0$, je $\theta \in [\pi/2, \pi]$. Dosazení, do dalších omezení máme
$$A^2 \leq \rho^2 \leq B^2.$$

Transformujeme
$$\int_A^B \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \rho^4 \sin^3\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\rho = 2\pi \int_A^B \rho^4 \,\mathrm{d}\rho \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^3\theta \,\mathrm{d}\theta =$$
$$= 2\pi \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_A^B \int_{-1}^0 1 - t^2 \,\mathrm{d}t = 2\pi \frac{B^5 - A^5}{5} \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^0 = 2\frac{B^5 - A^5}{5}\pi\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 4\frac{B^5 - A^5}{15}\pi.$$

Př. 204 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V 15\sqrt{2}yz \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $x^2 + y^2 + z^2 \leq A^2$, $z \leq -\sqrt{x^2 + y^2}$.

Vidíme, že množina je tvořena částí sféry. Zavedeme tedy sférické souřadnice $x = \rho \cos\varphi \sin\theta$, $y = \rho \sin\varphi \sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$. Neboť $z = \rho\cos\theta \leq 0$, je $\theta \in [\pi/2, \pi]$. Dosazení, do dalšího omezení $\rho\cos\theta \leq -\sqrt{\rho^2 \sin^2\theta} = -\rho\sin\theta$. Nerovnost $\cos\theta \leq -\sin\theta$ je splněna pro $\theta \in [3\pi/4, \pi]$. Ostatní omezení dostaneme jako $\rho \leq A$. Transformujeme

$$\int_0^A \int_0^{2\pi} \int_{3\pi/4}^{\pi} 15\sqrt{2}\rho^4 \sin\varphi \sin^2\theta \cos\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\rho =$$

$$= 15\sqrt{2} \int_0^A \rho^4 \, \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi \int_{3\pi/4}^{\pi} \sin^2\theta \cos\theta \, \mathrm{d}\theta =$$

$$= 15\sqrt{2} \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^A [-\cos\varphi]_0^{2\pi} \left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_{3\pi/4}^{\pi} = 0$$

Př. 205 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $x^2+y^2+z^2 \le z$.

Vzhledem k podmínkám vidíme, že sférické souřadnice mají smysl, zavedeme $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$. Dosazením do podmínek tak máme $0 \le \rho^2 \le \rho\cos\theta$. Vidíme, že $\cos\theta \ge 0$ dává $\theta \in [0, \pi/2]$. Transformujeme tedy

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\cos\theta} \rho^2\sin\theta\sqrt{\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\int_0^{\cos\theta}\rho^3\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta =$$
$$= 2\pi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\cos\theta}\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^4\theta}{4}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta =$$
$$= \frac{1}{2}\pi\int_0^1 t^4\,\mathrm{d}t = \frac{15\sqrt{2}}{2}\pi\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\pi\cdot\frac{1}{5} = \frac{\pi}{10}$$

Př. 206 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde V je dána omezeními $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$, $z^2 \geq x^2 + y^2$.

Nerovnost $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$ lze přepsat skrze úpravu na čtverec do tvaru $x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1$. Uvážíme tedy obvyklé sférické souřadnice, nebo souřadnice posunuté mimo střed. Dostaneme v první možnosti

$$\rho^2 \leq 2\rho\cos\theta$$
$$\rho^2\cos^2\theta \geq \rho^2\sin^2\theta$$

Z první nerovnosti dostaneme $\rho \leq \cos\theta$, ale také, že $\cos\theta \geq 0$. Z druhé podmínky pak máme $\cos\theta \geq \sin\theta$. Proto máme $\theta \in [0, \pi/4]$. Transformujeme

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\cos\theta} \rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_0^{\pi/4}\sin\theta\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{\cos\theta}\mathrm{d}\theta = \\
&= 2\pi\int_0^{\pi/4}\sin\theta\frac{\cos^3\theta}{3}\,\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\sqrt{2}/2} t(1-t^2)\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{2\pi}{3}\left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right) = \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{3}{16} = \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

Př. 207 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V z^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$, $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{2-x^2-y^2}$.

Vidíme, že podmínky $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$ udávají v půdorysně čtvrtinu kružnice. Podmínka $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{2-x^2-y^2}$ ohraničuje proměnnou z, zavedeme tedy válcové souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$. Neboť se jedná o čtvrtinu kružnice a $x \ge 0$, $y \ge 0$, máme $\rho \in [0,1]$ a $\varphi \in [0, \pi/2]$. Z poslední podmínky máme $\rho \le z \le \sqrt{2-\rho^2}$. Ověříme také nerovnost $\rho \le \sqrt{2-\rho^2}$ vede na nerovnost $\rho^2 \le 1$. Transformujeme

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_\rho^{\sqrt{2-\rho^2}} \rho z^2 \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \rho\left[\frac{z^3}{3}\right]_\rho^{\sqrt{2-\rho^2}} \mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \rho\left(\frac{\sqrt{(2-\rho^2)^3}-\rho^3}{3}\right)\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi = \left| \begin{array}{c} \rho = \sqrt{2}\sin t \\ \mathrm{d}\rho = \sqrt{2}\cos t \,\mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4} \sqrt{2}\sin t\left(\frac{\sqrt{(2-2\sin^2 t)^3}-\sqrt{8}\sin^3 t}{3}\right)\sqrt{2}\cos t \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 4\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\left(\frac{\sqrt{(1-\sin^2 t)^3}-\sin^3 t}{3}\right)\sin t\cos t \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\left(\cos^3 t-\sin^3 t\right)\sin t\cos t \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4} \sin t\cos^4 t - \sin^4 t\cos t \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4} \sin t\cos^4 t \,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/4} \sin^4 t\cos t \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^{\pi/2}\left[-\frac{\cos^5 t}{5}\right]_0^{\pi/4} - \left[\frac{\sin^5 t}{5}\right]_0^{\pi/4} \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi\left(-\frac{1}{5\sqrt{2^5}}+\frac{1}{5}-\frac{1}{5\sqrt{2^5}}\right) = \frac{1}{15}\pi\left(\sqrt{2^3}-1\right)$$

Př. 208 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V z\sqrt{x^2-2y+y^2+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde V je dána omezeními $x^2+y^2\le 1$, $z\ge 0$, $z\le 1/2$.

Vidíme, že množina V je část válce, zavedeme tedy válcové souřadnice $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=z$. Transformujeme

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{1/2}\rho z\sqrt{\rho^2-2\rho\sin\varphi}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho$$

Integrovaná funkce je poněkud komplikovaná, pokud ji však upravíme na čtverec, dostaneme $\sqrt{x^2-2y+y^2+1}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$. Zavedeme tedy posunuté cylindrické souřadnice $x=\rho\cos\varphi$, $y-1=\rho\sin\varphi$, $z=z$. Dosazením do podmínky $x^2+y^2\le 1$ dostaneme nerovnost $\rho^2\le -2\rho\sin\varphi$. Neboť navíc $\rho\ge 0$ máme omezení $\sin\varphi\le 0$. Transformujeme

$$\int_0^{1/2}\int_\pi^{2\pi}\int_0^{-2\sin\varphi}\rho z\sqrt{\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z=\int_0^{1/2}z\,\mathrm{d}z\int_\pi^{2\pi}\int_0^{-2\sin\varphi}\rho^2\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi=$$
$$=\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{1/2}\int_\pi^{2\pi}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{-2\sin\varphi}\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{8}\int_\pi^{2\pi}-\frac{8\sin^3\varphi}{3}\,\mathrm{d}\varphi=$$
$$=\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}1-t^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{3}\left(2-\frac{2}{3}\right)=\frac{6-2}{9}=\frac{4}{9}$$

Př. 209 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V z(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $x^2 + y^2 \le 2y$, $z \ge 0$, $z \le 1/2$.

Pokud upravíme podmínku $x^2+y^2 \le 2y$ na čtverec, dostaneme $x^2+(y-1)^2 \le 1$. Zavedeme tedy posunuté cylindrické souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y - 1 = \rho\sin\varphi$, $z = z$. Dosazením do podmínky dostaneme $\rho^2 \le 1$. Transformujeme tedy jednoduše

$$\int_0^{1/2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho z\left(\rho^2 + 2\rho\sin\varphi + 1\right)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z =$$
$$= \int_0^{1/2} z\,\mathrm{d}z \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^3 + 2\rho^2\sin\varphi + \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{1/2}\mathrm{d}z \int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^4}{4} + \frac{2\rho^3\sin\varphi}{3} + \frac{\rho^2}{2}\right]_0^1\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4} + \frac{2\sin\varphi}{3} + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \frac{1}{8}\left[\frac{3\varphi}{4} - \frac{2\cos\varphi}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{8}\cdot\frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}$$

Př. 210 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V \frac{1}{z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $x^2+y^2+z^2 \le A^2$, $z \ge A/2$, $z \ge \sqrt{x^2+y^2}$.

Vidíme, že vyšetřovaná množina tvoří část sféry. Proto zavedeme sférické souřadnice $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$ a dosazením do omezení dostaneme $\rho^2 \le A^2$,

$$\begin{aligned}
&\rho\cos\theta \ge A/2\\
&\rho\cos\theta \ge \sqrt{\rho^2\sin^2\theta} = \rho\sin\theta
\end{aligned}$$

Z podmínky $\cos\theta \ge \sin\theta$ máme $\theta \in [0,\pi/4]$. Počítáme tedy

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_{\frac{A}{2\cos\theta}}^{A} \frac{\rho^2\sin\theta}{\rho\cos\theta}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\int_0^{\pi/4}\operatorname{tg}\theta\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\frac{A}{2\cos\theta}}^{A}\mathrm{d}\theta =\\
&= \pi\int_0^{\pi/4}\left(A^2\operatorname{tg}\theta - \frac{A^2\sin\theta}{4\cos^3\theta}\right)\mathrm{d}\theta =\\
&= \pi A^2\left[-\ln|\cos\theta|\right]_0^{\pi/4} - \frac{\pi A^2}{4}\left[\frac{1}{2\cos^2\theta}\right]_0^{\pi/4} =\\
&= -\pi A^2\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi A^2}{8} - \frac{\pi A^2}{4} = -\frac{\pi A^2}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{\pi A^2}{8}
\end{aligned}$$

Př. 211 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V xy \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z,$$

kde V je dána omezeními $x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4$, $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$.

Vidíme, že vyšetřovaná množina tvoří část sféry. Proto zavedeme sférické souřadnice $x = \rho \cos\varphi \sin\theta$, $y = \rho \sin\varphi \sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$. Dosazením do omezení máme

$$\begin{aligned} \rho^2 &\leq 4\rho\cos\theta \\ \rho\cos\theta &\leq \rho\sin\theta \end{aligned}$$

Z druhého omezení dostaneme $\theta \in [0, \pi/4]$ a z první nerovnosti $\rho \in [0, 4\cos\theta]$. Transformujeme

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{4\cos\theta} \rho^4 \sin^3\theta \cos\varphi \sin\varphi \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos\varphi \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/4} \sin^3\theta \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^{4\cos\theta} \,\mathrm{d}\theta = \\ &= \left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \sin^3\theta \frac{2^1 0\cos^5\theta}{5} \,\mathrm{d}\theta = \\ &= 0 \cdot \int_0^{\pi/4} \sin^3\theta \frac{2^1 0\cos^5\theta}{5} \,\mathrm{d}\theta = 0 \end{aligned}$$

Př. 212 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde V je dána omezeními $(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq 3z$.

Vidíme, že vyšetřovaná množina tvoří část sféry. Proto zavedeme sférické souřadnice $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$. Dosazením do omezení máme

$$\rho^4 \leq 3\rho\cos\theta$$

Tato podmínka vede na nerovnost $\cos\theta \geq 0$ a tudíž $\theta \in [0, \pi/2]$. Dále pak $\rho \in [0, \sqrt[3]{3\cos\theta}]$. Transformujeme

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt[3]{3\cos\theta}} \rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{\sqrt[3]{3\cos\theta}}\mathrm{d}\theta =$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\frac{3\cos\theta}{3}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \pi$$

Př. 213 *Transformujte integrál*

$$\iiint_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde V je dána omezeními $z \geq \frac{x^2}{4} + y^2$, $\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 \leq 6$.

Vidíme, že vyšetřovaná množina připomíná rovnice sféry až na podíl u x^2. Proto zavedeme zobecněné sférické souřadnice $x = 2\rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$. Dosazením do podmínek dostaneme

$$\rho^2 \leq 6$$
$$\rho\cos\theta \geq \rho^2\sin^2\theta$$

Ze druhé nerovnosti dostaneme omezení $\rho \leq \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$. Navíc ze druhého omezení vidíme, že $\cos\theta \geq 0$, a proto $\theta \in [0, \pi/2]$. Vzhledem k měnícímu se hornímu omezení musíme určit úhel při kterém dochází ke změně. Ten lze nalézt více způsoby, například skrze rovnost

$$\sqrt{6} = \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\cos\theta}{1-\cos^2\theta}$$

Také ji můžeme získat jako průsečík ploch $z = \frac{x^2}{4} + y^2$ a $\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 6$. Dosazením jedné rovnosti do druhé získáme polynom $z + z^2 = 6$, jehož kladné řešení je $z = 2$. Tyto body leží na kouli o poloměru $\sqrt{6}$, proto dosazením do transformace $z = \rho\cos\theta$ máme $\sqrt{6}\cos\theta = 2$. Je tedy $\theta = \arccos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Jakobián této transformace je $|J| = 2\rho^2\sin\theta$. Transformujeme

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\arccos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}\int_0^{\sqrt{6}} 2\rho^3\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi + \int_0^{2\pi}\int_{\arccos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}^{\pi/2}\int_0^{\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}} 2\rho^3\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

Př. 214 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

kde V je dána omezeními $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} \leq 1$.

Vidíme, že vyšetřovaná množina je elipsoid, proto zavedeme zobecněné sférické souřadnice $x = A\rho \cos\varphi \sin\theta$, $y = B\rho \sin\varphi \sin\theta$, $z = C\rho \cos\theta$. Dosazením do podmínek dostaneme

$$\rho^2 \leq 1.$$

Jakobián této transformace je $|J| = ABC\rho^2 \sin\theta$. Transformujeme

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{1} ABC\rho^2 \sin\theta \left(\rho^2\right) \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi = 2ABC\pi \int_0^{\pi} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \int_0^{1} \rho^4 \, \mathrm{d}\rho =$$
$$= 2ABC\pi \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \, \mathrm{d}\theta \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4ABC\pi}{5}$$

Př. 215 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z,$$

kde V je dána omezeními $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} \leq 1.$

Vidíme, že vyšetřovaná množina je elipsoid, proto zavedeme zobecněné sférické souřadnice $x = A\rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = B\rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = C\rho\cos\theta$. Dosazením do podmínek dostaneme

$$\rho^2 \leq 1.$$

Jakobián této transformace je $|J| = ABC\rho^2\sin\theta$. Transformujeme

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 ABC\rho^2\sin\theta\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= 2ABC\pi\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \\
&= 2ABC\pi\,[-\cos\theta]_0^{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \\
&= ABC\pi\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,\mathrm{d}t = ABC\pi\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4t}{2}\,\mathrm{d}t = \\
&= ABC\pi\left[\frac{4t-\sin 4t}{8}\right]_0^{\pi/2} = \frac{ABC\pi^2}{4}
\end{aligned}$$

Př. 216 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V \frac{z^2}{13}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $x^2+y^2+z^2 \le A^2$, $z \ge \frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{A}-A$.

Množina V je tvořena částí sféry. Pokud bychom zavedli sférické souřadnice, dostaneme ve druhé podmínce

$$\rho\cos\theta \ge \frac{\rho^2\sin^2\theta}{A} - A$$

Tato nerovnost není příliš průhledná. Pokusíme se tedy zavést spíše cylindrické souřadnice, čímž dostaneme podmínky

$$\begin{aligned} \rho^2+z^2 &\le A^2 \\ z &\ge \frac{\rho^2}{A}-A \end{aligned}$$

Dostaneme tak společně ohraničení $\frac{\rho^2}{A}-A \le z \le \sqrt{A^2-\rho^2}$. Z podmínky $\frac{\rho^2}{A}-A \le \sqrt{A^2-\rho^2}$ navíc po umocnění získáme $\rho^2(\rho^2/A^2-1)\le 0$. Tudíž $\rho \in [0, A]$. Transformujeme

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_0^A\int_{\frac{\rho^2}{A}-A}^{\sqrt{A^2-\rho^2}} \frac{z^2}{13}\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^A \rho\left[\frac{z^3}{39}\right]_{\frac{\rho^2}{A}-A}^{\sqrt{A^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{1}{39}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^A \rho\sqrt{(A^2-\rho^2)^3}-\rho\left(\frac{\rho^2}{A}-A\right)^3\mathrm{d}\rho = \\
&= \frac{2\pi}{39}\left(\int_0^{\pi/2} A\sin t\sqrt{(A^2-A^2\sin^2 t)^3}A\cos t\,\mathrm{d}t - \int_0^A \frac{\rho^7}{A^3}-3\frac{\rho^5}{A}+3A\rho^3-A^3\rho\,\mathrm{d}\rho\right) = \\
&= \frac{2\pi}{39}\left(\int_0^{\pi/2} A^5\sin t\cos^4 t\,\mathrm{d}t - \left[\frac{\rho^8}{8A^3}-3\frac{\rho^6}{6A}+3\frac{A\rho^4}{4}-\frac{A^3\rho^2}{2}\right]_0^A\right) = \\
&= \frac{2\pi}{39}\left(A^5\left[-\frac{\cos^5 t}{5}\right]_0^{\pi/2} - \left(\frac{A^5}{8}-3\frac{A^5}{6}+3\frac{A^5}{4}-\frac{A^5}{2}\right)\right) = \\
&= \frac{2\pi}{39}\left(\frac{A^5}{5}+\frac{A^5}{8}\right) = \frac{\pi}{39}\cdot\frac{8A^5+5A^5}{20} = \frac{A^5}{60}\pi
\end{aligned}$$

Př. 217 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V 2z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z,$$

kde V *je dána omezeními* $x^2 + y^2 \geq 1/4$, $\sqrt{x^2 + y^2} - 1 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

Vzhledem k tvaru množiny V zavedeme válcové souřadnice. Dostáváme nerovnosti $\rho \leq 1/2$ a $\rho - 1 \leq z \leq 1 - \rho$. Ze druhé nerovnosti dostaneme také $\rho - 1 \leq z \leq 1 - \rho$ což vede na nerovnost $\rho \leq 1$. Transformujeme

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} \int_{\rho-1}^{1-\rho} 2z\rho \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} \rho \left[z^2\right]_{\rho-1}^{1-\rho} \mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} \rho \left((1-\rho)^2 - (\rho-1)^2\right) \mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} \rho \cdot 0 \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi = 0$$

Př. 218 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z,$$

kde V je dána omezeními $z \geq \frac{x^2}{4} + y^2$, $z \leq 4$.

Vidíme, že v podmínce vystupuje ohraničení $z \geq \frac{x^2}{4} + y^2$, neboť se jedná pro pevné z o elipsu, zavedeme zobecněné válcové souřadnice jako $x = 2\rho\cos\varphi$, $y - 1 = \rho\sin\varphi$, $z = z$. Dosazením získáme

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = \rho^2 \leq z \leq 4$$

Z nerovnosti také vidíme, že $\rho^2 \leq 4$. Jakobián zobrazení je $|J| = 2\rho$ Máme tedy integrál

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\rho^2}^4 2z\rho \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho \left[z^2\right]_{\rho^2}^4 \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 16\rho - \rho^5 \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\left[8\rho^2 - \frac{\rho^6}{6}\right]_0^2 = 2\pi\left[2^5 - \frac{2^5}{3}\right]_0^2 = \frac{2^7}{3}\pi$$

Př. 219 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde V je dána omezeními $x^2+y^2 \geq 1/4$, $x^2+y^2-1 \leq z \leq 1-x^2-y^2$.

Vzhledem k tvaru množiny V zavedeme válcové souřadnice. Dostáváme nerovnosti $\rho \geq 1/2$ a $\rho^2-1 \leq z \leq 1-\rho^2$. Ze druhé nerovnosti dostaneme také $\rho^2-1 \leq z \leq 1-\rho^2$ což vede na nerovnost $\rho \leq 1$. Transformujeme

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_{1/2}^1\int_{\rho^2-1}^{1-\rho^2} \rho\frac{1}{\rho^4}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= 2\pi\int_{1/2}^1 \frac{1}{\rho^3}\left(1-\rho^2-\rho^2+1\right)\mathrm{d}\rho = 2\pi\int_{1/2}^1 \frac{2}{\rho^3}-\frac{2}{\rho}\,\mathrm{d}\rho = \\
&= 2\pi\left[\frac{2\rho^{-2}}{-2}-2\ln\rho\right]_{1/2}^1 = 2\pi\left(-1+4+2\ln 1/2\right) = 6\pi+4\pi\ln 1/2
\end{aligned}$$

Př. 220 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V \frac{xyz}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde V je dána omezeními $(x^2+y^2+z^2)^2 \le A^2xy$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Vidíme, že vyšetřovaná množina tvoří část sféry. Proto zavedeme sférické souřadnice $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$. Dosazením do omezení máme

$$\rho^4 \le A^2\rho^2\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\theta$$

Což nás vede na nerovnost $\rho \le A\sin\theta\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}$. Navíc máme podmínku $\cos\varphi\sin\varphi \ge 0$ dávají omezení $\varphi \in [0,\pi/2]\cup[\pi,3\pi/2]$. Další omezení udávají nerovnsoti

$$\begin{aligned}\rho\cos\varphi\sin\theta &> 0\\ \rho\sin\varphi\sin\theta &> 0\\ \rho\cos\theta &> 0\end{aligned}$$

Ze třetí nerovnosti máme hned $\theta \in [0,\pi/2)$. Z první nerovnosti pak také $\varphi \in (0,\pi/2)$. Transformujeme

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{A\sin\theta\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}} \rho^2\sin\theta\frac{\rho^3\sin^2\theta\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi}{\rho^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi =\\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{A\sin\theta\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}} \rho^3\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi =\\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{A\sin\theta\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}}\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi =\\
&= \frac{A^4}{4}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sin^5\theta\cos\theta\cos^3\varphi\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi =\\
&= \frac{A^4}{4}\int_0^{\pi/2}\cos^3\varphi\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi\left[\frac{\sin^6\theta}{6}\right]_0^{\pi/2} =\\
&= \frac{A^4}{24}\int_0^1(1-t^2)t^3\,\mathrm{d}t = \frac{A^4}{24}\left[\frac{t^4}{4}-\frac{t^6}{6}\right]_0^1 = \frac{A^4}{24}\cdot\frac{6-4}{24} = \frac{A^4}{288}\end{aligned}$$

4.3 Obecné transformace a jejich využití

Př. 221 *Transformuje integrál*

$$\iiint_V \mathrm{e}^{xyz}\, x^2 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

pomocí transformace $x = u$, $y = (u+v)/u$, $z = (u+v+w)/(u+v)$, *kde* V *je dána omezeními* $x \geq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 1$, $xyz \leq 2$.

Dosadíme zadanou transformaci do podmínek odkud získáme

$$\begin{aligned} u &\geq 1 \\ \frac{u+v}{u} &= 1 + \frac{v}{u} \geq 1 \\ \frac{u+v+w}{u+v} &= 1 + \frac{w}{u+v} \geq 1 \\ u+v+w &\leq 2 \end{aligned}$$

Z první nerovnosti vidíme, že u je kladné. Z druhé a třetí nerovnosti máme tudíž $v \geq 0$, $w \geq 0$. V rovině uv vidíme ohraničení vzhledem k přímce $u + v \leq 2$ jako $u \in [1, 2]$ a $v \in [0, 1]$. Nalezneme Jakobián zobrazení jako

$$\det J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{v}{u^2} & -\frac{w}{(u+v)^2} \\ 0 & \frac{1}{u} & -\frac{w}{(u+v)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{u+v} \end{vmatrix} = \frac{1}{u(u+v)}$$

Můžeme tedy transformovat integrál jako

$$\int_0^1 \int_1^2 \int_0^{2-u-v} \mathrm{e}^{u+v+w}\, u^2 \cdot \frac{u+v}{u} \cdot \frac{1}{u(u+v)} \,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_0^1 \int_1^2 \int_0^{2-u-v} \mathrm{e}^{u+v+w} \,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

4.4 Pokročilejší příklady

Př. 222 *Mějme spojitou, nezápornou funkci $f(x)$ danou na intervalu $[a, b]$. Pomocí vhodné informace odvoďte vzorce pro výpočet objemu rotačního válce, který vznikne rotací funkce f okolo osy x. Tj. ukažte, že platí*

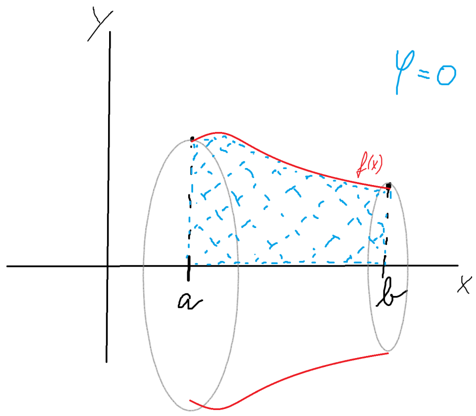
$$V = \pi \int_a^b f^2 \, \mathrm{d}x.$$

Pomocí tohoto výsledku odvoďte jak by vzorce vypadal, kdyby funkce $f(x)$ neopisovala pro pevné x kružnici, ale pokud by opisovala dráhu asteroidy okolo osy x. Předpokládejme, že graf $[x, f(x)]$ tvoří vrcholy vznikajících asteroid.

Uvědomme si, že rotující funkce vytvoří válec a proto můžeme vhodně zavést válcové souřadnice Pro výpočet objemu jako

$$V = \iiint_M 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

Nepoužijeme však standardní souřadnice, ale souřadnice $x = x$, $y = \rho \cos \varphi$, $z = \rho \sin \varphi$, kde rozsah na ose x je dán jednoduše jako $x \in [a, b]$ z geometrické představy. Stejně tak dostaneme rotační objekt rotací okolo osy x a tedy nutně $\varphi \in [0, 2\pi]$. Pro každý úhel φ dostaneme stejný řez jako pro $\varphi = 0$.



Takovýto řez ak rotuje kolem dokola a pro pevné x dostaneme kruh $y^2 + z^2 \leq f^2(x)$. Poloměr kruhu je tedy nutně dán pro pevné x jako $f(x)$ a máme závislý rozsah $\rho \in [0, f(x)]$. Integrál dostaneme spolu s jakobiánem jako

$$V = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^{f(x)} \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}x = 2\pi \int_a^b \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^{f(x)} \mathrm{d}x = \pi \int_a^b f^2 \, \mathrm{d}x.$$

Snadno si tak můžeme rozmyslet, jak by se tento objem změnil, pokud by funkce $f(x)$ při rotaci okolo osy x neobíhala dráhu kružnice, ale například elipsy nebo asteroidy. Pokud bychom zavedli pro asteroidu transformaci $x = \rho \sin^3 \varphi$, $y = \rho \cos^3 \varphi$, dostaneme stejné rozsahy $\rho \in [0, f(x)]$ a $\varphi \in [0, 2\pi]$. Jakobián této transformace je pak $J = 3\rho \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi$. Dostali bychom tak objem

$$V = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^{f(x)} 3\rho \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}x = 3 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \, \mathrm{d}\varphi \int_a^b \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^{f(x)} \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi \, \mathrm{d}\varphi \int_a^b f^2 \, \mathrm{d}x = \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} \, \mathrm{d}\varphi \int_a^b f^2 \, \mathrm{d}x = \frac{3\pi}{8} \int_a^b f^2 \, \mathrm{d}x.$$

Př. 223 *Vypočtěte integrál*

$$I = \iiiint_V \frac{w^2 + y^2}{x^2 + z^2 + 1} \, \mathrm{d}w \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

kde V je dána průnikem čtyřdimenzionálních válců $w^2 + y^2 \leq 4$ a $x^2 + y^2 \leq 1$.

Hned vidíme, že se jedná o průnik dvou válců a jako takový bychom jej mohli zkusit vhodně vyjádřit pomocí válcových souřadnic. Avšak nejedná se o standardní situaci. Vidíme, že máme dva válce jejichž proměnné se vzájemně neovlivňují. Můžeme tedy pro každý válec separátně zavést válcové souřadnice

$$\begin{aligned} w &= \rho \cos \varphi, \\ x &= r \cos u, \\ y &= \rho \sin \varphi, \\ z &= r \sin u, \end{aligned}$$

kde potom máme $\rho \in [0, 2]$, $r \in [0, 1]$ a φ, $u \in [0, 2\pi]$. Jakobián této transformace je potom

$$J = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos u & -r \sin u \\ 0 & 0 & \sin u & r \cos u \end{vmatrix} = r \cdot \rho.$$

Integrál tak dostaneme

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^2 \frac{\rho^2}{r^2 + 1} \cdot r\rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}\varphi = 4\pi^2 \int_0^1 \frac{r}{r^2 + 1} \, \mathrm{d}r \int_0^2 \rho^3 \, \mathrm{d}\rho =$$
$$= 4\pi^2 \left[\frac{1}{2} \ln(r^2 + 1) \right]_0^1 \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^2 = 8\pi^2 \ln 2.$$

5 Aplikace vícerozměrných integrálů

Obsah dvourozměrné rovinné plochy P spočteme jako

$$S = \iint_P \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Pokud by tato plocha neležela v rovině, ale byla by dána jako výřez grafu funkce $z = f(x, y)$, tj. pokud by byla plocha dána jako množina bodů

$$\{[x, y, f(x, y)] | [x, y] \in M\},$$

pak je obsah této plochy dán jako

$$S = \iint_M \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Srovnejte daný integrál s plošným integrálem 1. druhu.

Objem třírozměrného tělesa T spočteme jako

$$V = \iiint_T \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Pokud je těleso dána jako podgraf funkce $f(x, y)$ nad množinou M, dostaneme také snadno

$$V = \iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Hmotnost Hmotnosti dvourozměrné plochy P nebo třírozměrného tělesa T spočteme jako integrály

$$m = \iint_P \rho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
$$m = \iiint_T \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Funkce $\rho(x, y)$ a $\rho(x, y, z)$ zde reprezentují hustotu plochy a tělesa.

Statické momenty Statické momenty dvourozměrné plochy P spočteme jako

$$S_x = \iint_P y\rho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
$$S_y = \iint_P x\rho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Funkce $\rho(x, y)$ je hustota plochy. Známe-li navíc hmotnost plochy m, můžeme spočítat souřadnice jejího těžiště jako

$$x_T = \frac{S_y}{m}, \quad y_T = \frac{S_x}{m}.$$

Statické momenty třírozměrného tělesa T spočteme jako integrály

$$S_{yz} = \iiint_T x\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$
$$S_{xz} = \iiint_T y\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$
$$S_{xy} = \iiint_T z\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Funkce $\rho(x, y, z)$ je hustota tělesa. Známe-li navíc hmotnost tělesa m, můžeme spočítat souřadnice jeho těžiště jako

$$x_T = \frac{S_{yz}}{m}, \quad y_T = \frac{S_{xz}}{m}, \quad z_T = \frac{S_{xy}}{m}.$$

Momenty setrvačnosti Moment setrvačnosti tenkého plátku P (dvourozměrného tělesa) vzhledem k ose x je dán jako

$$I_x = \iint_P y^2 \rho(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Funkce $\rho(x, y)$ udává hustotu tohoto tělesa. Analogicky je moment setrvačnosti vzhledem k ose y dán jako

$$I_y = \iint_P x^2 \rho(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Moment setrvačnosti okolo počátku je pak dán jako $I_O = I_x + I_y$.

Moment setrvačnosti vzhledem k ose z třírozměrného tělesa T spočítáme jako integrál

$$I_z = \iiint_T r(x, y, z)^2 \rho(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

kde funkce $r(x, y, z)$ reprezentuje vzdálenost bodu $[x, y, z]$ od osy z, tj. funkce $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ve sférických souřadnicích je tedy dána tato vzdálenost bodu $[x, y, z]$ od osy z jako $r(x, y, z) = \rho \sin \theta$. Funkce $\rho(x, y, z)$ je hustota tělesa. Výpočet vzhledem k ostatním osám je analogický.

$$I_x = \iiint_T (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$
$$I_y = \iiint_T (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

Moment setrvačnosti vzhledem k rovině xy třírozměrného tělesa T spočítáme jako integrál

$$I_{xy} = \iint_T z^2 \rho(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

Moment setrvačnosti vzhledem k ostatním rovinám získáme analogicky jako

$$I_{yz} = \iiint_T x^2 \rho(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$
$$I_{xz} = \iiint_T y^2 \rho(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

Moment setrvačnosti okolo počátku je dán jako integrál

$$\iiint_T (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

Náboj na desce Celkový náboj na desce P nebo v tělese T spočteme jako integrály

$$Q = \iint_P \sigma(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$
$$Q = \iiint_T \sigma(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

Funkce $\sigma(x, y)$ a $\sigma(x, y, z)$ zde udávají hustotu elektrického náboje.

Geometrická pravděpodobnost Mějme dostatečně hezké množiny $A \subset B \subset \mathbb{R}^2$. Předpokládejme, že chceme spočítat pravděpodobnost jevu A, pokud je prostor elementárních jevů dán množinou B. Potom pokud jsou množina A, B dostatečně hezké aby oba integrál existovali, tak platí

$$P(A) = \frac{\iint_A \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}{\iint_B \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}.$$

Spojitá dvourozměrná náhodná veličiny Mějme spojitou dvourozměrnou náhodnou veličinu (X, Y) s hustotou rozdělení danou jako $f(x, y)$. Pravděpodobnost jevu

$$P(a < X < b \wedge c < Y < d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Marginální pravděpodobnosti takovéto veličiny jsou dány jako

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, \mathrm{d}y,$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, \mathrm{d}x.$$

Střední hodnotu náhodné veličiny dané transformací $Z = h(X, Y)$ dostaneme jako

$$\mathrm{E}\, h(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Kovarianci náhodných veličin X, Y spočteme pomocí vzorce

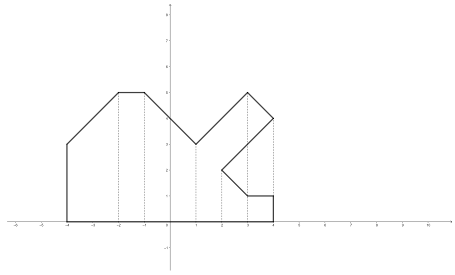
$$\mathrm{Cov}\,(X, Y) = \mathrm{E}\,(XY) - \mathrm{E}\,(X)\mathrm{E}(Y).$$

Laplaceova transformace Podle [?] (nebo podobně v [?]) je Laplaceova transformace funkce $f(x, y)$ dána jako

$$L(s, t) = \lim_{(A,B)\to(\infty,\infty)} \int_0^A \int_0^B \mathrm{e}^{-xs-yt} f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

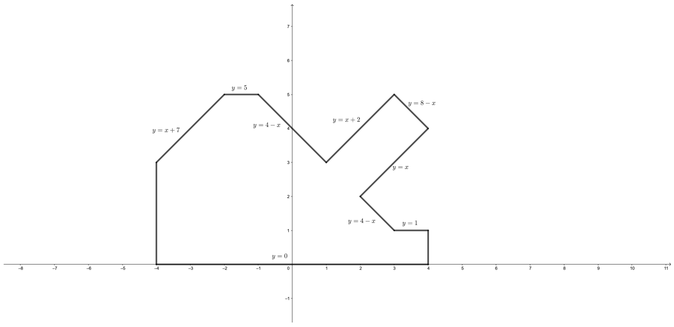
Samozřejmě tyto aplikace jsou často formulovány spíše pro lebegův integrál.

Př. 224 *Je válka a rozhodli jste se opevnit skalní stěnu. Avšak nemáte děla, jen věrohodné makety v podobě desky. Jeřábem potřebujete desky umístit na stěnu, k připevnění desek však potřebujete znát jejich těžiště. Makety vypadají následovně:*



Hustota desek je z různých maskovacích důvodů určena jako $\rho(x, y) = x + y + 4$. Váš velitel na vás spěchá. Pokud vše rychle nespočítáte, budete odesláni k řadovému vojsku. Jaké je těžiště?

Abychom určili těžiště dvourozměrné desky, potřebujeme určit její hmotnost a statické momenty desky. Všimněme si však nejprve, že plochu desky bychom dopočítali snadno na základě ploch obdélníků a trojúhelníků. Toho bychom mohli využít, pokud by byla hustota konstantní a například hmotnost bychom dostali až na násobek jako plochu desky. Doplníme si tedy k obrázku jednotlivé funkce určující hranice desky, abychom vše mohli dopočítat pomocí integrálů.



Dostáváme tedy jednotlivé ohraničení

1. $x \in [-4, -2]$, $0 \leq y \leq x + 7$,
2. $x \in [-2, -1]$, $0 \leq y \leq 5$,
3. $x \in [-1, 3]$, $0 \leq y \leq 4 - x$,
4. $x \in [1, 2]$, $4 - x \leq y \leq x + 2$,
5. $x \in [2, 3]$, $x \leq y \leq x + 2$,
6. $x \in [3, 4]$, $0 \leq y \leq 1$,
7. $x \in [3, 4]$, $x \leq y \leq 8 - x$.

Výpočet bychom si však značně usnadnili, pokud bychom transformovali obdélník ohraničený funkcemi $y = x$, $y = x + 2$, $y = 4 - x$, $y = 8 - x$ jako $u = x + y$, $v = y - x$. Potom je tento obdélník dán jako $u \in [4,8]$, $v \in [0,2]$. Můžeme vyjádřit $x = \frac{u-v}{2}$, $y = \frac{u+v}{2}$ čímž dostaneme Jakobián transformace jako

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Hmotnost dostaneme tedy dle vzorce pro výpočet hmnotnosti jako součet jednotlivých hmotností

$$\begin{aligned} m_1 &= \int_{-4}^{-2} \int_{0}^{x+7} x + y + 4 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_{-4}^{-2} \left[xy + \frac{y^2}{2} + 4y \right]_0^{x+7} \mathrm{d}x = \\ &= \int_{-4}^{-2} x^2 + 7x + \frac{x^2 + 14x + 49}{2} + 4x + 28 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{3x^3}{6} + \frac{18x^2}{2} + \frac{105}{2}x \right]_{-4}^{-2} = \\ &= -4 + 36 - 105 - (-32 + 144 - 210) = 25, \\ m_2 &= \int_{-2}^{-1} \int_{0}^{5} x + y + 4 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} \left[xy + \frac{y^2}{2} + 4y \right]_0^{5} \mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} 5x + 32 + \frac{1}{2} \,\mathrm{d}x = \\ &= \left[\frac{5x^2}{2} + \frac{65}{2}x \right]_{-2}^{-1} = -\frac{60}{2} - (10 - 65) = 25, \\ m_3 &= \int_{-1}^{3} \int_{0}^{4-x} x + y + 4 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{-3} \left[xy + \frac{y^2}{2} + 4y \right]_0^{4-x} \mathrm{d}x = \int_{-1}^{3} -\frac{x^2}{2} - x + 24 \,\mathrm{d}x = \\ &= \left[-\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + 24x \right]_{-1}^{3} = -9 + 72 + 24 + \frac{1}{3} = 87 + \frac{1}{3}, \\ m_4 &= \int_{3}^{4} \int_{0}^{1} x + y + 4 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_{3}^{4} \left[xy + \frac{y^2}{2} + 4y \right]_0^{1} \mathrm{d}x = \int_{3}^{4} x + \frac{9}{2} \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{9}{2}x \right]_3^4 = \\ &= 8 + 18 - \frac{9}{2} - \frac{27}{2} = 8, \\ m_5 &= \int_{4}^{8} \int_{0}^{2} (u+4)\frac{1}{2} \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}u = \int_{4}^{8} u + 4 \,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^2}{2} + 4u \right]_4^8 = 32 + 32 - 8 - 16 = 40. \end{aligned}$$

Celková hmotnost desky je tak

$$m = 185 + \frac{1}{3}.$$

Abychom získali těžiště, musíme určit ještě také statické momenty. Ty získáme ze vzorců

$$\begin{aligned} S_x &= \iint_P y\rho(x,y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y, \\ S_y &= \iint_P x\rho(x,y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Plocha P je složena z menších částí, dostaneme statické momenty součtem integrálů přes jednotlivé části plochy P. Pro moment S_x to jsou

$$S_x^1 = \int_{-4}^{-2}\int_0^{x+7} xy + y^2 + 4y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-4}^{-2}\left[x\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + 4\frac{y^2}{2}\right]_0^{x+7} \mathrm{d}x =$$
$$= \int_{-4}^{-2} \frac{x^3 + 14x^2 + 49x}{2} + \frac{x^3 + 21x^2 + 147x + 343}{3} + 2(x^2 + 14x + 49)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_{-4}^{-2} \frac{5}{6}x^3 + 16x^2 + 101x + \frac{1}{2}x + 212 + \frac{1}{3}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left[\frac{5}{24}x^4 + \frac{16}{3}x^3 + \frac{101}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^2 + 212x + \frac{x}{3}\right]_{-4}^{-2}$$
$$= -\frac{120}{3} - 221 - \left(-\frac{868}{3} - 36\right) = 249 + \frac{1}{3} - 185 = 64 + \frac{1}{3},$$
$$S_x^2 = \int_{-2}^{-1}\int_0^{5} xy + y^2 + 4y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1}\left[x\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + 4\frac{y^2}{2}\right]_0^{5} \mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} \frac{25}{2}x + 91 + \frac{2}{3}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left[\frac{25}{4}x^2 + 91x + \frac{2}{3}x\right]_{-2}^{-1} = \frac{25}{4} - 91 - \frac{2}{3} - \left(25 - 182 - \frac{4}{3}\right) = 73 - \frac{1}{12},$$
$$S_x^3 = \int_{-1}^{3}\int_0^{4-x} xy + y^2 + 4y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{-3}\left[x\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + 4\frac{y^2}{2}\right]_0^{4-x} \mathrm{d}x =$$
$$= \int_{-1}^{3} \frac{16x - 8x^2 + x^3}{2} + \frac{64 - 48x + 12x^2 - x^3}{3} + 2(16 - 8x + x^2)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_{-1}^{3} \frac{x^3}{6} + 2x^2 - 24x + \frac{160}{3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{24} + \frac{2}{3}x^3 - 12x^2 + \frac{160}{3}x\right]_{-1}^{3} = 119 + \frac{1}{3},$$
$$S_x^4 = \int_{3}^{4}\int_0^{1} xy + y^2 + 4y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{3}^{4}\left[x\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + 4\frac{y^2}{2}\right]_0^{1} \mathrm{d}x = \int_{3}^{4} \frac{x}{2} + \frac{7}{3}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left[\frac{x^2}{4} + \frac{7}{3}x\right]_3^4 = 4 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 4 + \frac{1}{12},$$
$$S_x^5 = \int_{4}^{8}\int_0^{2} (u+4)\frac{u+v}{4}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\int_4^8 \left[(u^2 + 4u)v + \frac{u+4}{2}v^2\right]_0^2 \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_4^8 u^2 + 5u + 4\,\mathrm{d}u$$
$$= \left[\frac{u^3}{3} + \frac{5}{2}u^2 + 4u\right]_4^8 = 285 + \frac{1}{3}.$$

Sečtením těchto hodnot dostaneme

$$S_x = 64 + \frac{1}{3} + 73 - \frac{1}{12} + 119 + \frac{1}{3} + 4 + \frac{1}{12} + 285 + \frac{1}{3} = 546.$$

Pro moment S_y máme zase hodnoty

$$
\begin{aligned}
S_y^1 &= \int_{-4}^{-2} \int_0^{x+7} x^2 + xy + 4x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_{-4}^{-2} \left[x^2 y + \frac{x}{2} y^2 + 4xy\right]_0^{x+7} \mathrm{d}x = \\
&= \int_{-4}^{-2} x^3 + 7x^2 + \frac{x^2 + 14x + 49}{2} + 4x^2 + 28x \, \mathrm{d}x = \int_{-4}^{-2} x^3 + \frac{23}{2} x^2 + 35x + \frac{49}{2} \, \mathrm{d}x = \\
&= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{23}{6} x^3 + \frac{35}{2} x^2 + \frac{49}{2} x\right]_{-4}^{-2} \\
&= 204 - \frac{1}{3}, \\
S_y^2 &= \int_{-2}^{-1} \int_0^5 x^2 + xy + 4x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} \left[x^2 y + \frac{x}{2} y^2 + 4xy\right]_0^5 \mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} 5x^2 + 32x + \frac{1}{2} x \, \mathrm{d}x = \\
&= \left[\frac{5}{3} x^3 + 16x^2 + \frac{1}{4} x^2\right]_{-2}^{-1} = -38 + \frac{11}{12}, \\
S_y^3 &= \int_{-1}^{3} \int_0^{4-x} x^2 + xy + 4x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{-3} \left[x^2 y + \frac{x}{2} y^2 + 4xy\right]_0^{4-x} \mathrm{d}x = \\
&= \int_{-1}^{3} -\frac{x^3}{2} - 4x^2 + 24x \, \mathrm{d}x = \left[-\frac{x^4}{8} - \frac{4}{3} x^3 + 12x^2\right]_{-1}^{3} = 49 - \frac{7}{12}, \\
S_y^4 &= \int_3^4 \int_0^1 x^2 + xy + 4x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_3^4 \left[x^2 y + \frac{x}{2} y^2 + 4xy\right]_0^1 \mathrm{d}x = \int_3^4 x^2 + \frac{9}{2} \, \mathrm{d}x = \\
&= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{9}{2} x\right]_3^4 = 17 - \frac{1}{6}, \\
S_y^5 &= \int_4^8 \int_0^2 (u+4) \frac{u-v}{4} \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u = \frac{1}{4} \int_4^8 \left[(u^2 + 4u)v - \frac{u+4}{2} v^2\right]_0^2 \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \int_4^8 u^2 + 3u - 4 \, \mathrm{d}u \\
&= \left[\frac{u^3}{3} + \frac{3}{2} u^2 - 4u\right]_4^8 = 56 + \frac{448}{3} = 205 + \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Sečtením těchto hodnot dostaneme

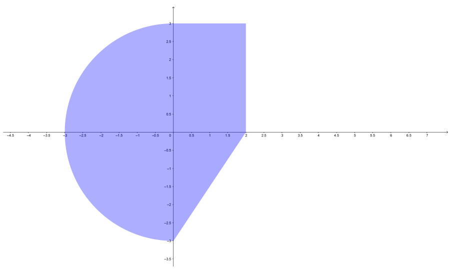
$$
S_y = 204 - \frac{1}{3} - 38 + \frac{11}{12} + 49 - \frac{7}{12} + 17 - \frac{1}{6} + 205 + \frac{1}{3} = 437 + \frac{1}{6}.
$$

Známe-li momenty i hmotnost, můžeme dosadit do vzorce a získat souřadnice těžiště

$$
\begin{aligned}
x_T &= \frac{S_y}{m} = \frac{437 + \frac{1}{6}}{185 + \frac{1}{3}} \approx 2,36, \\
y_T &= \frac{S_x}{m} = \frac{546}{185 + \frac{1}{3}} \approx 2,95.
\end{aligned}
$$

Př. 225 *Během prudkých dešťů spadlo v okolí přehrady značné množství vody za pět minut. Máte zkušenost, že během hodiny steče všechna voda z okolních kopců do přehrady. Spočtěte, kolik napadlo v okolí vaší přehrady vody a o kolik můžete očekávat, že se zvýší hladina přehrady. Okolí přehrady je zhruba vymezeno plochou, která je v prvním kvadrantu dána obdélníkem o stranách* 2 *a* 3*. Ve druhém a třetím kvadrantu je plocha dána jako kruh o poloměru* 3*, ve čtvrtém kvadrantu je pak plocha dána jako trojúhelník spojující počátek s body* $[2,0]$ *a* $[0,-3]$*. Přehrada z této plochy zabírá asi* 15 *procent. Meteorologové spočítali, že výška vodního sloupce srážek je v této oblasti dána zhruba funkcí* $f(x,y) = x^2 + y^2 + \ln(x^2+1) + 2$*, pro* $x \geq 0$ *a funkcí* $f(x,y) = (x^2+y^2)\sinh(\frac{x^2+y^2}{4})$*, pro* $x < 0$*. O kolik se za hodinu zvýší vodní hladina? Nezapomínejte započítat také vodu, která do přehrady spadla přímo.*

Naším primárním úkolem je spočítat objem napršené vody. Výška vodního sloupce odpovídá informaci, kolik vody napadlo na jednom místě $[x,y]$ a odpovídá to rozsahu $0 \leq z \leq f(x,y)$. Avšak tato výška se udává v centimetrech (pokud na ploše metr krát metr napadne vrstva jednoho centrimetru, rovná se to jednomu litru vody na metr čtvreční). Naši oblast je vymezena zhruba plochou



Musíme také uvážit, že vzdálenosti na osách jsou uvedeny v kilometrech. Nakonec tedy budeme muset učinit jistý rozbor jednotek.

Vyšetřovaná plocha se skládá z více částí a jako takovou ji budeme muset vyšetřovat po částech. Celkový objem pak dostaneme jako součet jednotlivých objemů. Začneme první oblastní ve čtvrtém kvadrantu, která je dána rozsahy $0 \leq x \leq 2$ a $\frac{3}{2}x - 3 \leq y \leq 0$.

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \int_0^2 \int_{\frac{3}{2}x-3}^0 x^2 + y^2 + \ln(x^2+1) + 2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} + y\ln(x^2+1) + 2y\right]_{\frac{3}{2}x-3}^0 \mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 -\frac{21}{8}x^3 + \frac{39}{4}x^2 - \frac{33}{2}x + 15 - \left(\frac{3}{2}x - 3\right)\ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

K dopočtení tohoto integrálu si nejprve odvodíme následující vzorec.

$$
\begin{aligned}
&\int (Ax+B)\ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x = \int Ax\ln(x^2+1) + B\ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x = \\
&= \left| \begin{array}{lll} t = x^2+1 & u = \ln(x^2+1) & u' = \frac{2x}{x^2+1} \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & v' = 1 & v = x \end{array} \right| = \\
&= \frac{A}{2}\int \ln t\,\mathrm{d}t + Bx\ln(x^2+1) - B\int \frac{2x^2}{1x^2+1}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{A}{2}(t\ln t - t) + Bx\ln(x^2+1) - 2Bx + 2B\operatorname{arctg} x = \\
&= \frac{A}{2}((x^2+1)\ln(x^2+1) - x^2 - 1) + Bx\ln(x^2+1) - 2Bx + 2B\operatorname{arctg} x.
\end{aligned}
$$

Aplikací tohoto vzorce získáme

$$\begin{aligned}V_1 &= \left[-\frac{21}{32}x^4 + \frac{13}{4}x^3 - \frac{33}{4}x^2 + 15x\right]_0^2 + \\ &+ \left[\frac{3}{4}((x^2+1)\ln(x^2+1) - x^2 - 1) - 3x\ln(x^2+1) + 6x - 6\operatorname{arctg} x\right]_0^2 = \\ &= 22 - \frac{1}{2} - \frac{9}{4}\ln 5 - 6\operatorname{arctg} 2.\end{aligned}$$

Výpočet přes polokruh provedeme skrze polární souřadnice $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$, kde vidíme, že je $\rho \in [0,3]$ a $\phi \in [\pi/2, 3\pi/2]$. na této ploše je dána výška vodního sloupce jako $f(x,y) = (x^2+y^2)\sinh(\frac{x^2+y^2}{4})$. Transformujeme tedy integrál jako

$$\begin{aligned}V_2 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^3 \rho^3 \sinh\frac{\rho^2}{4}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \left| \begin{array}{c} t = \frac{\rho^2}{4} \\ \mathrm{d}t = \frac{\rho}{2}\,\mathrm{d}\rho \end{array} \right| = 8\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int t\sinh t\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi = \left| \begin{array}{cc} u = t & u' = 1 \\ v' = \sinh t & v = \cosh t \end{array} \right| = \\ &= 8\pi\left(t\cosh t - \int \cosh t\,\mathrm{d}t\right) = 8\pi\left[\frac{\rho^2}{4}\cosh\frac{\rho^2}{4} - \sinh\frac{\rho^2}{4}\right]_0^3 = \\ &= 8\pi\left(\frac{9}{4}\cosh\frac{9}{4} - \sinh\frac{9}{4} + \sinh 0\right) = 18\pi\cosh\frac{9}{4} - 8\pi\sinh\frac{9}{4}.\end{aligned}$$

Poslední objem dostaneme analogicky jako V_1.

$$\begin{aligned}V_3 &= \int_0^2 \int_0^3 x^2 + y^2 + \ln(x^2+1) + 2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} + y\ln(x^2+1) + 2y\right]_0^3 \mathrm{d}x = \\ &= \int_0^2 3x^2 + 15 + 3\ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x = |\text{předchozí vzorec} A = 0, B = 2| = \\ &= \left[x^3 + 15x + 3x\ln(x^2+1) - 6x + 6\operatorname{arctg} x\right]_0^2 = 26 + 6\ln 5 + 6\operatorname{arctg} 2.\end{aligned}$$

Celkový objem napršené vody je tedy dán jako

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 48 - \frac{1}{2} + \frac{15}{4}\ln 5 + 18\pi\cosh\frac{9}{4} - 8\pi\sinh\frac{9}{4} \approx 206,873.$$

Musíme se však vypořádat ještě s jednotkami. Abychom převedli osy x a y na metry, musíme vynásobit hodnoty na těchto osách 10^3. Naopak osa z má jednotky v milimetrech a zde bychom museli vše naopak podělit 10^2. Objem vody je tedy $V \approx 2\,068\,730\,\mathrm{m}^3$.

Obsah vymezené plochy dostaneme skrze obsah kruhu, obdélníku a trojúhelníku jako

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 3 + \frac{9}{2}\pi + 6 = 9 + \frac{9}{2}\pi \approx 23,14.$$

Přehrada z této části zabírá jen 45 procent, tedy plocha přehrady je asi

$$S_P = \frac{9}{20}\left(9 + \frac{9}{2}\pi\right) \approx 3,47.$$

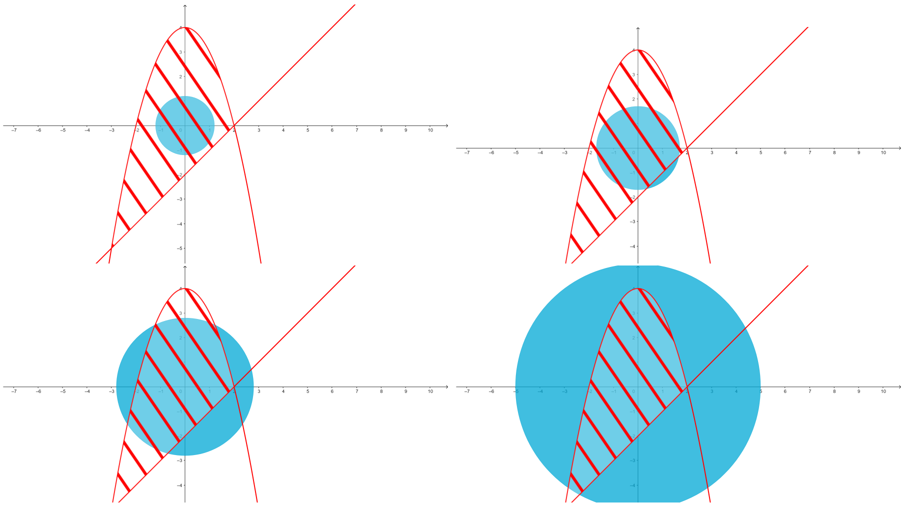
I zde musíme uvážit, že plocha je dána v kilometrech. Po převedení plochy do metrů dostaneme $S_P \approx 3\,470\,000\,\mathrm{m}^2$. O kolik se zvedne hladina můžeme odhadnou pomocí vzorce pro objem válce. Víme, že $V = h \cdot S_P$, kde h je hledaná výška. Tedy

$$h = \frac{V}{S_P} = \frac{2\,068\,730}{3\,470\,000} \approx 0,6.$$

Voda za hodinu stoupne zhruba o 60 cm. Další voda pak bude do přehrady přitékat řekou. Snad nebude pršet déle.

Př. 226 *Kulka vystřelená ze zbraně může zasáhnout libovolné místo v kruhu $x^2 + y^2 \leq R^2$. Spočtěte pravděpodobnost, že se trefíte do terče vymezeného funkcemi $y = 4 - x^2$, $y = x - 2$.*

Jako první si musíme uvědomit, že kruh je zadán s obecným poloměrem R a naše šance na zásah se bude odvíjet od velikosti poloměru. Nastiňme nejprve obrázky různé možné situace.



Obrázek 2: Červená šrafovaná plocha odpovídá terči. Modrou je znázorněn kruh zásahu.

Vidíme, že budeme chtít postupně nalézt průsečíky kruhu s hranicemi terče stejně jako budeme chtít určit průsečíky hranic terče. Průsečíky funkcí $y = 4 - x^2$, $y = x - 2$ dostaneme jako

$$\begin{aligned} x - 2 = y &= 4 - x^2 \\ x^2 + x - 6 &= 0 \\ (x+3)(x-2) &= 0. \end{aligned}$$

Proto máme dva průsečíky $x_1 = -3$ a $x_2 = 2$. Tedy terč je dán nerovnostmi $-3 \leq x \leq 2$ a $x - 2 \leq y \leq 4 - x^2$.

Jako další krok budeme chtít určit průsečíky kruhu $x^2 + y^2 = R^2$ a funkce $y = x - 2$. Dosazením získáme

$$\begin{aligned} x^2 + (x-2)^2 &= R^2 \\ 2x^2 - 4x + 4 &= R^2 \\ x^2 - 2x + 2 - \frac{R^2}{2} &= 0 \end{aligned}$$

Diskriminant dostaneme jako

$$D = 4 - 4\left(2 - \frac{R^2}{2}\right) = 2R^2 - 4$$

Pro $R^2 < 2$ nemáme žádný průsečík a tedy kruh leží zcela nad hranicí terče. Pro $R^2 \geq 2$ dostaneme průsečíky

$$x_{3,4} = \frac{2 \pm \sqrt{2R^2 - 4}}{2} = 1 \pm \sqrt{\frac{R^2}{2} - 1}.$$

Nakonec bychom chtěli spočíst ještě průsečíky kruhu $x^2+y^2 = R^2$ a funkce $y = 4-x^2$. Dosadíme do rovnice a získáme

$$\begin{aligned} x^2 + 16 - 8x^2 + x^4 &= R^2 \\ x^4 - 7x^2 + 16 - R^2 &= 0 \end{aligned}$$

Očividně bychom mohli zavést substituci $z = x^2$ avšak z ní vyplývá to, co bychom si mohli přirozeně všimnout z grafu. Kruh $x^2 + y^2 = R^2$ stejně jako funkce $y = 4 - x^2$ jsou symetrické přes osu y a tedy pro každý průsečík x (jeho x-ovou souřadnici) nutně musíme dostat také průsečík $-x$. Diskriminant této rovnice je

$$D = 49 - 4(16 - R^2) = 49 - 64 + 4R^2 = 4R^2 - 15$$

Pokud je tedy $R^2 < \frac{15}{4}$ tak leží kruh zcela pod hranicí terče a hranice kruhu a horní hranice terče nemají žádný průsečík. Pro $R^2 \geq \frac{15}{4}$ máme průsečíky

$$x_{5,6,7,8} = \pm\frac{7 \pm \sqrt{4R^2 - 15}}{2}.$$

Než budeme pokračovat dál, připomeňme ještě, že kruh $x^2 + y^2 = R^2$ je zadán také pomocí dvou křivek, kde $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ tvoří horní půlkružnici a křivka $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ tvoří dolní půlkružnici.

Samozřejmě je $2 < \frac{15}{4}$ a tedy pro $R^2 < 2$ leží kruh zásahu zcela uvnitř terče. Pravděpodobnost zásahu je tedy $P = 1$. V další části výpočtu budeme pokračovat za předpokladu, že je $R^2 < \frac{15}{4}$, tj. kruh má průsečík pouze s přímkou $y = x-2$. Chtěli bychom dále spočítat plochu kruhu, která leží uvnitř terče. Neboť je celková plocha kruhu πR^2 můžeme také spočítat část kruhu mimo terč a zbytek dopočítat jako komplement. Plochu useknutého srpku spočítáme jako integrál

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{1-\sqrt{\frac{R^2}{2}-1}}^{1+\sqrt{\frac{R^2}{2}-1}} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{x-2} 1 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_{1-\sqrt{\frac{R^2}{2}-1}}^{1+\sqrt{\frac{R^2}{2}-1}} x - 2 + \sqrt{R^2 - x^2} \,\mathrm{d}x = \\ &= |\text{Substituce } x = R\sin t \text{ nebo vzorce.}| = \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{x\sqrt{R^2 - x^2}}{2} + \frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R}\right]_{1-\sqrt{\frac{R^2}{2}-1}}^{1+\sqrt{\frac{R^2}{2}-1}} \end{aligned}$$

Po dosazení do vzorce bychom tak dostali pravděpodobnost

$$P = \frac{\pi R^2 - S_1}{\pi R^2} = 1 - \frac{S_1}{\pi R^2}.$$

Ve třetí části se budeme chtít věnovat situaci, kdy je $2 \leq R^2 < 4$. V tomto případě máme na intervalu $[-3, 2]$ všech 6 psůsečíků kruhu s hranicemi terče. Plocha S z předchozí části zůstává stejná. Avšak část kruhu mimo terč se zvětší o plochu

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{\frac{7-\sqrt{4R^2-15}}{2}}^{\frac{7+\sqrt{4R^2-15}}{2}} \int_{4-x^2}^{\sqrt{R^2-x^2}} 1 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_{\frac{7-\sqrt{4R^2-15}}{2}}^{\frac{7+\sqrt{4R^2-15}}{2}} \sqrt{R^2 - x^2} - 4 + x^2 \,\mathrm{d}x = \\ &= |\text{Substituce } x = R\sin t \text{ nebo vzorce.}| = \\ &= \left[\frac{x\sqrt{R^2 - x^2}}{2} + \frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R} - 4x + \frac{x^3}{3}\right]_{\frac{7-\sqrt{4R^2-15}}{2}}^{\frac{7+\sqrt{4R^2-15}}{2}}. \end{aligned}$$

Neboť jsou plochy symetrické přes osu y, můžeme vše vhodně vynásobit $2x$ a nemusíme dopočítávat druhou plochu. Po dosazení bychom tak i tentokrát dostali pravděpodobnost

$$P = \frac{\pi R^2 - S_1 - 2S_2}{\pi R^2} = 1 - \frac{S_1 + 2S_2}{\pi R^2}.$$

Čtvrtá část bude věnovaná situaci, kde je $4 \leq R^2 < 16$. Tato situace je již o hodně komplikovanější. zatím jsme počítali plochu kruhu, která neležela v terči. v další části naopak zkusíme počítat část terče, která neleží uvnitř kruhu. Pokud navíc spočítáme celkovou plochu terče, dostaneme plochu ležící uvnitř kruhu komplementárně. Začneme plochou terče, kterou bude snazší získat. Je to

$$\begin{aligned} S_T &= \iint_T 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_{-3}^{2} \int_{x-2}^{4-x^2} 1 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{2} 4 - x^2 - x + 2 \,\mathrm{d}x = \left[6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{2} = \\ &= 12 - \frac{4}{2} - \frac{8}{3} - \left(-18 - \frac{9}{2} + \frac{27}{3}\right) = 19 - \frac{8}{3} + \frac{9}{2} = 19 + \frac{27 - 16}{6} = 20 + \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Plochu kruhu mimo terč tvoří dvě části. Symetrická plocha nad kruhem a část useknutého skoro trojúhelníku ve třetím kvadrantu. Polovinu plochy nad kruhem dostaneme na intervalu $[0, x_i]$, kde x_i je průsečík kruhu, který je kladný ale zároveň je to menší z těchto dvou průsečíků. Tedy $x_i = \frac{7-\sqrt{4R^2-15}}{2}$. Stačí si rozmyslet, že pro $R^2 < 16$ je $\sqrt{4R^2 - 15} < 7$. Určili jsme rozsahy plochy na ose x, na ose y je horní useknutá část terče ohraničena zhora parabolou a zdola kruhem. Polovina plochy je tedy dána jako

$$\begin{aligned} S_3 &= \int_0^{\frac{7-\sqrt{4R^2-15}}{2}} \int_{\sqrt{R^2-x^2}}^{4-x^2} 1 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{7-\sqrt{4R^2-15}}{2}} 4 - x^2 - \sqrt{R^2 - x^2} \,\mathrm{d}x = \\ &= |\text{Substituce } x = R \sin t \text{ nebo vzorce.}| = \\ &= \left[4x - \frac{x^3}{3} - \frac{x\sqrt{R^2 - x^2}}{2} - \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{x}{R}\right]_0^{\frac{7-\sqrt{4R^2-15}}{2}} = \\ &= \left[4x - \frac{x^3}{3} - \frac{x\sqrt{R^2 - x^2}}{2} - \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{x}{R}\right]^{\frac{7-\sqrt{4R^2-15}}{2}}. \end{aligned}$$

Dále bychom chtěli spočítat plochu useknutou ve třetím kvadrantu připomínající trochu svým tvarem trojúhelník. Tato plocha je poněkud komplikovanější, neboť si můžeme všimnout, že se zde mění horní ohraničující funkce. Na intervalu $[-3, x_j]$ je plocha shora ohraničena parabolou $4-x^2$. Naopak na intervalu $[x_j, x_k]$ je plocha shora ohraničena dolní půlkružnicí. Zdola je odseknutá plocha vždy ohraničena přímkou $y = x - 2$. Co jsou body x_j a x_k? Z obrázku si můžeme odvodit, že x_j je tvořen záporným průsečíkem kruhu a paraboly a to tím menším z obou těchto záporných průsečíků, tj. $x_j = -\frac{7+\sqrt{4R^2-15}}{2}$. Podobně je x_k záporný průsečík kruhu a přímky, tj.

$x_k = 1 - \sqrt{\frac{R^2}{2} - 1}$. Plochu máme tedy danou jako

$$
\begin{aligned}
S_4 &= \int_{-3}^{-\frac{7+\sqrt{4R^2-15}}{2}} \int_{x-2}^{4-x^2} 1 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x + \int_{-\frac{7+\sqrt{4R^2-15}}{2}}^{1-\sqrt{\frac{R^2}{2}-1}} \int_{x-2}^{-\sqrt{R^2-x^2}} 1 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \\
&= \int_{-3}^{-\frac{7+\sqrt{4R^2-15}}{2}} 6 - x^2 - x \,\mathrm{d}x + \int_{-\frac{7+\sqrt{4R^2-15}}{2}}^{1-\sqrt{\frac{R^2}{2}-1}} 2 - x - \sqrt{R^2 - x^2} \,\mathrm{d}x = \\
&= |\text{Substituce } x = R\sin t \text{ nebo vzorce.}| = \\
&= \left[6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{-\frac{7+\sqrt{4R^2-15}}{2}} + \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x\sqrt{R^2-x^2}}{2} - \frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R}\right]_{-\frac{7+\sqrt{4R^2-15}}{2}}^{1-\sqrt{\frac{R^2}{2}-1}}.
\end{aligned}
$$

Pravděpodobnost zásahu dostaneme jako plochu terče uvnitř kruhu podělenou plochou kruhu. Plochu terče dostaneme jako celkovou plochu terče mínus dvojnásobek plochy S_3 a mínus plochu S_4. Je to tedy

$$P = \frac{20 + \frac{5}{6} - 2S_3 - S_4}{\pi R^2}.$$

Zbývají nám postupně vyřešit ještě 2 hraniční situace. V této předposlední části budeme předpokládat, že je $16 \leq R^2$, ale že terč stále ještě neleží zcela uvnitř kruhu. To nastává pokud je nejmenší průsečík kruhu a paraboly $x_j > -3$. Potřebujeme tedy určit tento průsečík. Pokud je však $16 \leq R^2$, pak je $\sqrt{4R^2 - 15} \geq 7$ a tedy $x_j = \frac{7-\sqrt{4R^2-15}}{2}$. Všimněme si také, že v tomto případě se nám kořeny $x_{5,6,7,8}$ zredukují pouze na dva dvojnásobné kořeny. Řešíme nerovnost

$$
\begin{aligned}
\frac{7 - \sqrt{4R^2 - 15}}{2} &> -3 \\
-\sqrt{4R^2 - 15} &> -13 \\
4R^2 - 15 &< 169 \\
R^2 &< \frac{184}{4} = 46.
\end{aligned}
$$

Tedy v tomto předposledním případě uvažujeme $16 \leq R^2 < 46$. Z terče je nyní odseknuta pouze jedna plocha a to ta odpovídající ploše S_4 v předchozí části. Ohraničující funkce se nám nemění. Pouze průsečík x_j se změnil a tedy bychom analogicky dostali plochu

$$S_5 = \left[6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{\frac{7-\sqrt{4R^2-15}}{2}} + \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x\sqrt{R^2-x^2}}{2} - \frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R}\right]_{\frac{7-\sqrt{4R^2-15}}{2}}^{1-\sqrt{\frac{R^2}{2}-1}}.$$

Pravděpodobnost zásahu nyní dostaneme podobně jako v předchozích případech a tedy

$$P = \frac{20 + \frac{5}{6} - S_5}{\pi R^2}.$$

Poslední část řešení již bude jednoduchá. Nyní uvažujeme situaci, kdy je $46 \leq R^2$ a tedy celý terč leží uvnitř kruhu. Plochu terče jsme již spočítali a plochu kruhu známe. Máme tedy

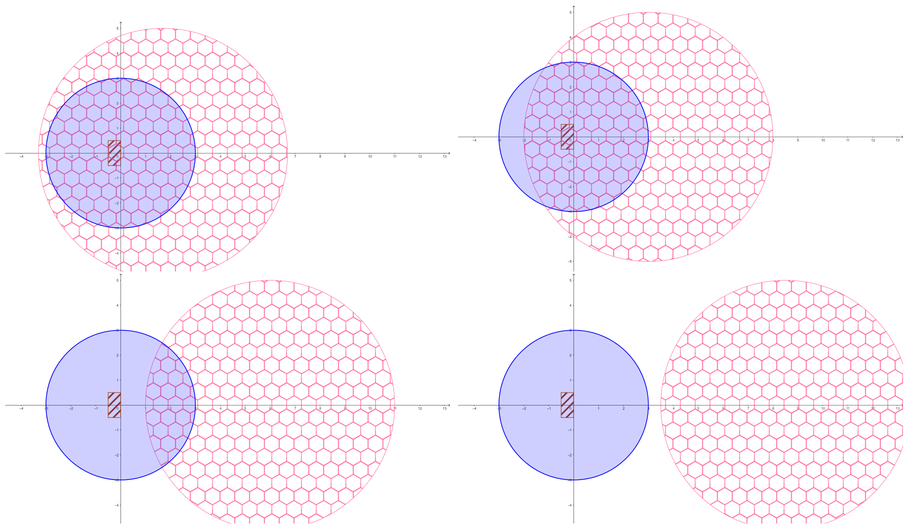
$$P = \frac{20 + \frac{5}{6}}{\pi R^2}.$$

Na závěr ještě uveďme, že v našem případě jsme uvažovali, že střela zasáhne libovolné místo kruhu se stejnou pravděpodobností. Toto odpovídá jistým parametrům naší zbraně, které mohou být pro jinou zbraň odlišné. Tj. zasažená plocha by nemusela být tvořena kruhem nebo bychom mohli mít pro různé části oblasti různou šanci na zásah. Navíc jsme uvažovali pouze situaci, kde je střela tvořena jen jedním bodem. Neuvažujeme jiné situace, kde by střela zasáhla terč jen částečně. Pokud bude střela jen o kousek mimo terč, již se to pro nás nepočítá jako zásah. Pokud bychom i blízké škrábnutí terče chtěli počítat jako zásah, museli bychom plochu terče upravit vzhledem ke tvaru střely.

Př. 227 *Horolezec uvízl na vrcholku skály s plochým pro jednoduchost kruhovým vrškem s poloměrem $r_1 = 3$. Jeho horolezecká výbava mu bohužel spadla dolů, a tak se nemůže dostat dolů. Potřebuje, abyste mu z vrtulníku shodili nové vybavení a on se tak mohl zachránit. Kvůli silnému větru není jiná možnost. Avšak vítr také způsobuje, že po shození vašeho nákladu zasáhnete pouze nějaký bod v kruhové oblasti s ploměrem $r_2 = 5$, kde šance na zasáhnutí některého bodu je vždy stejná. Vítr rozhoupává lano se zavěšeným vybavením a střed oblasti dopadu se může vychýlit do libovolného směru o parametr p. Horolezec stojí na skále a lze jej reprezentovat jako obdélník o stranách $1 \times 0,5$. Jaká je pravděpodobnost, že se trefíte na skálu? Jaká je pravděpodobnost, že trefíte horolezce? Horolezec bude stát ve středu skály. Kdyby stál na okraji skály, balík by ho dost možná ke všemu strhnul dolů.*

Budeme předpokládat, že skála je dána kružnicí $x^2 + y^2 \leq 9$, se středem v počátku. Pro zjednodušení výpočtu budeme uvažovat, že horolezec stojí v počátku vymezen body $[-0,5; -0,5]$, $[-0,5; 0,5]$, $[0; -0,5]$ a $[0; 0,5]$. Střed kružnice dopadu se pak bude posunovat ve směru kladné poloosy x, tj. kruh dopadu je dán jako $(x - p)^2 + y^2 \leq 25$, $p \geq 0$. Tato úvaha pouze ovlivní pravděpodobnost zásahu horolezce. Další komplikovanější situace bychom dostali, pokud bychom neuvažovali skálu plochou, ale například nahnutou. Popřípadě pokud by neměla kruhový tvar. Pokud se vám zdá příklad příliš nesmyslný, podívejte se na příběh George Hopkinse a na příběh jeho přistání na vrcholu ďáblovy věže (hledejte hesla jako: George Hopkins, Devil's tower, parachutist, parachutist stranded on top of...).

Možné varianty překryvů dopadu můžeme vykreslit následovně: Nejsnazší situace je vyobra-



Obrázek 3: Červená oblast vyznačuje možná místa dopadu. Modrou je znázorněna plocha skály. Hnědý obdélník odpovídá horolezci.

zena na prvním a posledním obrázku. Pokud je $p \leq 2$, tak je skála zcela uvnitř kruhu dopadu a tedy je pravděpodobnost zásahu skály dána jednoduše jako podíl plochy skály vůči ploše kruhu dopadu. Obdobně pro horolezce. Na základě vzorců pro výpočet plochy obdélníku a kruhu a na základě geometrické pravděpodobnosti máme

$$\begin{aligned}
P_S &= \frac{9\pi}{25\pi} = \frac{9}{25} = 0,36,\\
P_H &= \frac{0,5}{25\pi} = \frac{1}{50\pi} \approx 0,0064.
\end{aligned}$$

Naopak pokud je $p > 8$, tak balík zcela mine skálu a tedy nemůže zasáhnout ani horolezce. Tj. $P_S = P_H = 0$. Další hraniční situace vyplývají přirozeně z možných variant. Budeme tedy rozlišovat ve výpočtu dvě situace

1. Spočítáme pravdpodobnost zásahu skály vzhledem k parametru p, kde kruh dopadu překryje skálu jen částečně.
2. Rozlišíme variannty, kdy kruh horolezce mime, překryje jen částečně, nebo jej překryje kompletně.

Průsečíky skály a kruhu dopadu bude existovat pokud $2 \leq p \leq 8$ a dostaneme jej jako

$$\begin{aligned}
9 - x^2 = y^2 &= 25 - (x-p)^2\\
2px &= 16 - p^2\\
x &= \frac{16 - p^2}{2p}.
\end{aligned}$$

Samozřejmě musí být $x \in [-3, 3]$, což nastane právě v hraničních hodnotách $p = 2$ a $p = 8$. Budeme chtít spočítat plochu skály, která leží uvnitř kruhu dopadu. Jistě ji můžeme spočítat více cestami, my ji získáme díky vypozorování, že pro $x \in \left[?, \frac{16-p^2}{2p}\right]$ je horní i dolní hranicí vymezené plochy kružnice dopadu a na intervalu $x \in \left[\frac{16-p^2}{2p}, 3\right]$ je horní i dolní hranicí plochy kružnice skály. Musíme však nejprve určit hodnotu ?. Jedná se menší z průsečíků osy x kružnicí dopadu. Střed kružnice dopadu je v bodě $[p, 0]$ a má poloměr $r_2 = 5$, tedy menší z průsečíků osy x je samozřejmě $? = p - 5$.

$$\begin{aligned}
S_1 &= \int_{p-5}^{\frac{16-p^2}{2p}} \int_{-\sqrt{25-(x-p)^2}}^{\sqrt{25-(x-p)^2}} 1 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{16-p^2}{2p}}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} 1 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x =\\
&= \int_{p-5}^{\frac{16-p^2}{2p}} 2\sqrt{25-(x-p)^2} \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{16-p^2}{2p}}^{3} \sqrt{9-x^2} \,\mathrm{d}x = |\text{Substituce } x = R\sin t \text{ nebo vzorce.}| =\\
&= \left[\frac{1}{2}\left((x-p)\sqrt{25-(x-p)^2} + 25 \arcsin\frac{x-p}{5}\right)\right]_{p-5}^{\frac{16-p^2}{2p}} + \left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{9-x^2} + 9\arcsin\frac{x}{3}\right)\right]_{\frac{16-p^2}{2p}}^{3}
\end{aligned}$$

Z geometrické pravděpodobnosti tak získáme, že pravděpodobnost zásahu skály je

$$P_S = \frac{S_1}{25\pi}.$$

Samozřejmě zde neuvažujeme, zasáhnutí okraje skály by dost možná vyústilo ke sklouznutí balíku ze skály podobně jako se to stalo Georgi Hopkinsovi. Na druhou stranu je otázka, jestli by každé částečné zasažení okraje muselo vyústit v jeho spadnutí dolů. Na základě podobných úvah bychom mohli omezit prostor skály, který považujeme za bezpečný a počítat pravděpodobnost odsud.

Abychom určili pravděpodobnost zasažení horolezce, měli bychom určit pro jaké hodnoty parametru p má kruh dopadu průnik s obrysem horolezce. Nepočítáme zde situace, kdy se balík skutálí a zasáhne horolezce nepřímo. Jedno ohraničení získáme snadno. Pokud je $p > 5$, tak kruh dopadu horolezce mine a pravděpodobnost jeho zásahu je $P_H = 0$. Dolní hranici pro p dostaneme, když nalezneme průsečík kruhu dopadu s přímkou $x = -\frac{1}{2}$. Tento průsečík dostaneme jako

$$y^2 = 25 - (x-p)^2 = 25 - \left(-\frac{1}{2} - p\right)^2 = \frac{100 - (1+2p)^2}{4} = \frac{99 - 2p - 4p^2}{4}.$$

Přímka tvoří hranici obrysu horolezce pouze pro $y \in [-0,5; 0,5]$ a tedy je-li pokud je průsečík nad touto hodnotou, obray leží zcela uvnitř kruhu. Řešíme tedy nerovnost

$$\begin{aligned}\frac{99 - 2p - 4p^2}{4} &\geq \frac{1}{4}\\ 99 - 2p - 4p^2 &\geq 1\\ 49 - p - 2p^2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Kořeny kvadratické rovnice jsou

$$p_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{393}}{4}$$

a nerovnost je splněna pokud je $p \in [p_1, p_2]$. Jeden z těchto kořenů je však záporný a tedy nás zajímá pouze část $\left[0, \frac{1 \pm \sqrt{393}}{4}\right]$. Na tomto intervalu je obray zcela uvnitř kruhu dopadu a tedy je pravděpodobnost zásahu daná pomocí plochy obdélníku a kruhu skrze geometrickou pravděpodobnost jako

$$P_H = \frac{\frac{1}{2}}{25\pi} = \frac{1}{50\pi}.$$

Nejtěžší část zahrnuje případ, kdy je kruhem dopadu překryta jen část obdélníku. Abychom spočetli plochu této části, můžeme uvažovat, že je plocha symetrická přes osu x a stačí nám psočítat jen její polovinu, tj. jen část pro $y \geq 0$. Také si musíme uvědomit, že plocha je na intervalu $[-0,5; ?]$ ohraničena shora kruhem $y \leq \sqrt{25 - (x-p)^2}$ a na intervalu $[?; 0]$ je ohraničena shora naopak obdélníkem $y \leq \frac{1}{2}$. Musíme tak ještě určit bod ?. Ten dostaneme jako průsečík kruhu dopadu s přímkou $y = \frac{1}{2}$. Tedy

$$\begin{aligned}(x-p)^2 = 25 - y^2 = 25 - \frac{1}{4} &= \frac{99}{4}\\ x &= p \pm \frac{\sqrt{99}}{2}.\end{aligned}$$

Hledáme ten z průsečíků, jehož x-ová souřadnice je blízká nuly. Pro parametr p blízký čásla 5 je to nutně

$$x = p - \frac{\sqrt{99}}{2}.$$

vyštřovanou plochu tak dostaneme jako

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \int_{-\frac{1}{2}}^{p-\frac{\sqrt{99}}{2}} \int_0^{\sqrt{25-(x-p)^2}} 1 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x + \int_{p-\frac{\sqrt{99}}{2}}^{0} \int_0^{\frac{1}{2}} 1 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{p-\frac{\sqrt{99}}{2}} \sqrt{25-(x-p)^2} \,\mathrm{d}x + \frac{\frac{\sqrt{99}}{2} - p}{2} = \\
&= \left[\frac{1}{2}\left((x-p)\sqrt{25-(x-p)^2} + 25 \arcsin \frac{x-p}{5}\right)\right]_{-\frac{1}{2}}^{p-\frac{\sqrt{99}}{2}} + \frac{\sqrt{99}-2p}{4}.
\end{aligned}
$$

Dostali bychom dosazením plochu S_2, je následně pravděpodobnost zasažení horolezce

$$P_H = \frac{2S_2}{25\pi}.$$

V našem výpočtu jsme udělali mnoho zjednodušujících předpokladů. Jistě bychom mohli příklad zkomplikovat. Například kdybychom začali uvažovat, že shazovaný balík má nějakou velikost a tedy nezasáhne jeden bod, ale spíše nějakou malou plochu. Jinou komplikaci bychom mohli vytvořit, kdybychom chtěli spočítat jaká je pravděpodobnost zásahu horolezce, pokud předpokládáme, že jsme strefili samotnou skálu. K tomu bychom mohli použít podmíněnou pravděpodobnost danou vzorcem

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Zde A odpovídá jevu: zasáhneme horolezce, jev B je pak: zasáhneme horolezce. Pravděpodobnost $P(A|B)$ je hledaná pravděpodobnost zásahu horolezce pokud jsme již trefili skálu. Dále pravděpodobnost $P(A \cap B)$ udává pravděpodobnost, že zasáhneme zároveň skálu i horolezce, ale horolezec stojí na skále a zasáhneme jej pouze pokud zasáhneme i skálu. Tedy $P(A \cap B) = P(A)$ a máme

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Pravděpodobnosti $P(A)$ i $P(B)$ jsme již počítali v předchozí části. Stačí je tedy pouze doplnit.

Př. 228 *Spočtěte střední hodnotu transformované veličiny $Z = XY$ pokud víte, že je dána hustota dvourozměrného rozdělení (X, Y) jako*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1+xy}{4}, & |x| \le 1,\ |y| \le 1, \\ 0, & \textit{jinak.} \end{cases}$$

Ověřte navíc, že je splněna základní podmínka na hustotu $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$.

Ověřme nejprve podímku na hustotu, tj.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1+xy}{4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\left[x + \frac{x^2y}{2}\right]_{-1}^{1}\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} 2\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\left[2y\right]_{-1}^{1} =$$
$$= \frac{1}{4}4 = 1.$$

Podímka je tedy splněna. Pro výpočet střední hodnoty aplikujeme vhodný vzorec a dostaneme

$$\mathrm{E}\,XY = \iint_{\mathbb{R}^2} xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} xy\frac{1+xy}{4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} xy + x^2y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$
$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\left[\frac{x^2y}{2} + \frac{x^3y^2}{3}\right]_{-1}^{1}\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\frac{2y^2}{3}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{6}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{6}\frac{2}{3} = \frac{1}{9}.$$

Př. 229 *Spočtěte střední hodnotu transformované veličiny $Z = X + Y$ pokud víte, že je dána hustota dvourozměrného rozdělení (X, Y) jako*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{7}(x+y)^2, & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \textit{jinak.} \end{cases}$$

Ověřte navíc, že je splněna základní podmínka na hustotu $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$.

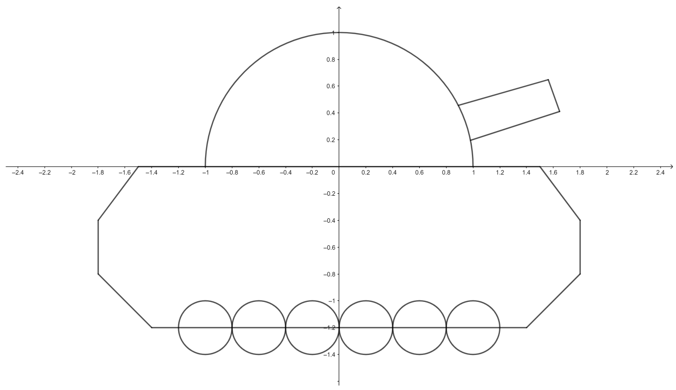
Ověřme nejprve podímku na hustotu, tj.

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{6}{7}(x+y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{6}{7}\int_0^1 \int_0^1 x^2 + 2xy + y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= \frac{6}{7}\int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2 y}{2} + xy^2\right]_0^1 \mathrm{d}y = \frac{6}{7}\int_0^1 \frac{1}{3} + y + y^2\,\mathrm{d}y = \\ &= \frac{6}{7}\left[\frac{y}{3} + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{6}{7}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{6}{7}\frac{4+3}{6} = 1.\end{aligned}$$

Podímka je tedy splněna. Pro výpočet střední hodnoty aplikujeme vhodný vzorec a dostaneme

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\,(X+Y) &= \iint_{\mathbb{R}^2} (x+y) f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^1 \frac{6}{7}(x+y)^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= \frac{6}{7}\int_0^1 \int_0^1 x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{6}{7}\int_0^1 \left[\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3 y}{3} + 3\frac{x^2 y^2}{2} + xy^3\right]_0^1 \mathrm{d}y = \\ &= \frac{6}{7}\int_0^1 \frac{1}{4} + y + \frac{3}{2}y^2 + y^3\,\mathrm{d}y = \frac{6}{7}\left[\frac{y}{4} + \frac{y^2}{2} + \frac{3y^3}{6} + \frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{6}{7}\left(\frac{2}{4} + 1\right) = \frac{6}{7}\frac{3}{2} = \frac{9}{7}.\end{aligned}$$

Př. 230 *Žijete na plochozemi a tedy vám chybí třetí rozměr. V boji jste nepříteli zajali tank a nyní se s ním potřebujete dostat přes most, jehož nosnost je 10 jednotek hmotnosti. Most je pro vás nesmírně důležitý, ale tank by se vám v nadcházející bitvě také hodil. Unese most tank? K výpočtu hmotnosti máte jen vaše znalosti a pravítko měřící vzdálenosti na plochozemi. Údaj o hustotě tanku se vám podařilo naštěstí nepříteli ukrást a je to* $\rho(x,y) = |\sin(x^2+y^2)|$. *Jaká je vaše odpověď?*



Hmotnost objektu spočteme jako integrál z hustoty a tedy

$$m = \iint_M |\sin(x^2+y^2)| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Část tanku lze je daná na obdélníku $M_1 : \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] \times \left[-\frac{6}{5}, 0\right]$. Zkusme na této podmnožině spočítat hmotnost tanku. Dostaneme

$$m_1 = \iint_{M_1} \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{M_1} \sin x^2 \cos y^2 + \cos x^2 \sin y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

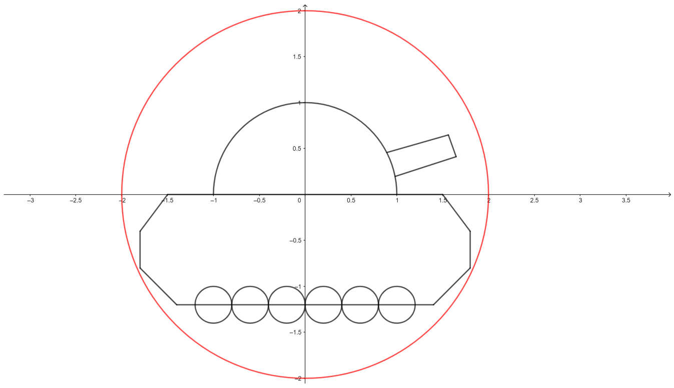
Celý úkol spočítání obsahu tak redukujeme na úkol spočítat $\int \sin x^2 \,\mathrm{d}x$ tento integrál nedostaneme jako integrál žádné obvykle známé funkce. Jedná se totiž o Fresnelův integrál. Jak tedy spočítat hmotnost? Mohli bychom zkusit zavést polární souřadnice čímž bychom poté dostali integrovanou funkci jako

$$\int \rho \sin \rho^2 \,\mathrm{d}\rho.$$

Výsledek tohoto integrálu dostaneme jednoduše pomocí substituce. Kdyby to však bylo jen takto jednoduché. Nesmíme zapomenout, že se nám do integrálu porjeví také rozsahy a popsat integrovnaou množinu pomocí polárních souřadnic také nebude nic jednoduchého. Jak tedy postupovat. Pokud bychom spočítali hmotnost těžšího objektu a tento objekt by byl stále dostatečně lehký, tak bychom věděli, že i náš tank je dostatečně lehký. Pokud je naším problémem funkce $|\sin(x^2+y^2)|$ tak si také můžeme všimnout, že platí $|\sin(x^2+y^2)| \le x^2+y^2$. Stačí si rozmyslet, že je $|\sin z| \le z$ což můžeme ověřit, pokud spočítáme, že $\sin 0 = 0$ a že je funkce $z - \sin z$ rostoucí (například pomocí derivace). Pro velké hodnoty z je toto očividné z ohraničenosti funkce $\sin z$. Počítejme tedy horní odhad hmotnosti jako

$$H_1 = \iint_M x^2 + y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

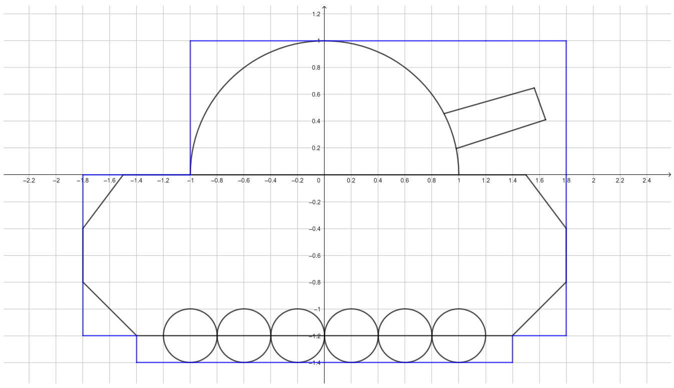
K výpočtu hmotnosti bychom nyní mohli určit horní a dolní rozsahy množiny M a rozdělili si integrál na mnoho části. Tento komplikovaný výpočet bychom si mohli možná usnadnit, pokud bychom zpozorovali, že celý tank leží uvnitř kruhu $M_2 : x^2+y^2 \le 4$.



Spočteme-li tak hmotnost celého kruhu, dostaneme ještě větší odhad na hmotnost. Tedy již druhý odhad, ale i zde platí $H_1 < H_2$. Máme

$$H_2 = \iint_{M_2} x^2 + y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^3 \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi \frac{2^4}{4} = 8\pi.$$

Tato hmotnost tedy odpovídá zhruba 25 jednotkám hmotnosti. To je poněkud hodně a je to více, než kolik most unese. Tento horní odhad je tak až příliš velký. Možná je však zvětšení množiny M na M_2 až příliš chamtivé. Možná si množinu až příliš zjednodušujeme. Množinu můžeme zvětšit/obalit také obdélníky jako



Takto můžeme rozdělit integrovanou množinu na tři obdélníky jako

$$\begin{aligned} O_1 &: \left[-1, \frac{9}{5}\right] \times \left[-\frac{6}{5}, 1\right], \\ O_2 &: \left[-\frac{9}{5}, -1\right] \times \left[-\frac{6}{5}, 0\right], \\ O_3 &: \left[-\frac{7}{5}, \frac{7}{5}\right] \times \left[-\frac{7}{5}, -\frac{6}{5}\right]. \end{aligned}$$

Integrujeme jednoduše přes obdélník polynom porměnných x, y. Samotný výpočet tak nebude příliš náročný. Dostaneme třetí odhad $H_3 > H_1$, který očekáváme (ale nevíme jistě) že bude splňovat také $H_3 < H_2$ čímž by se náš horní odhad zlepšil. Máme

$$
\begin{aligned}
H_3 &= \iint_{O_1 \cup O_2 \cup O_3} x^2 + y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{O_1 \cup O_2 \cup O_3} x^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{O_1 \cup O_2 \cup O_3} y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= \frac{11}{5}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{\frac{9}{5}} + \frac{6}{5}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{9}{5}}^{-1} + \frac{1}{5}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{7}{5}}^{\frac{7}{5}} + \frac{14}{5}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{6}{5}}^{1} + \frac{4}{5}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{6}{5}}^{0} + \frac{14}{5}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{7}{5}}^{-\frac{6}{5}} = \\
&= \frac{1}{15}\left[11\left(\frac{9^3}{5^3}+1\right) + 6\left(-1+\frac{9^3}{5^3}\right) + 2\frac{7^3}{5^3} + 14\left(1+\frac{6^3}{5^3}\right) + 4\frac{6^3}{5^3} + 14\left(\frac{7^3}{5^3}-\frac{6^3}{5^3}\right)\right] = \\
&= \frac{1}{3 \cdot 5^4}\left[11\,(729+125) + 6(729-125) + 686 + 14(125+216) + 864 + 14(343-216)\right] = \\
&= \frac{1}{3 \cdot 5^4}\left[9394 + 3624 + 686 + 4774 + 864 + 1778\right] = \frac{21\,120}{3 \cdot 5^4} = \frac{1408}{5^3} \approx 11,3.
\end{aligned}
$$

Odhad H_3 je poloviční oproti odhadu H_2. Přesto je však odhad příliš velký a tank by podle tohoto odhadu na most vjet nemohl. Přesto se stále jedná o odhad a nevíme, zda náhodou tank není přece jen lehčí. Možná jsme nezvětšili příliš jen množinu, ale možná jsme příliš zvětšili také hustotu. Skutečně platí, že je $|\sin z| \leq z$, ale pro $z > 1$ je tento odhad zbytečně velký. Pro $z > 1$ víme, že je funkce $|\sin z| \leq 1$. Zvětšeme tedy hustotu pouze jako

$$\rho(x, y) = |\sin(x^2 + y^2)| \leq \min\{x^2 + y^2, 1\}.$$

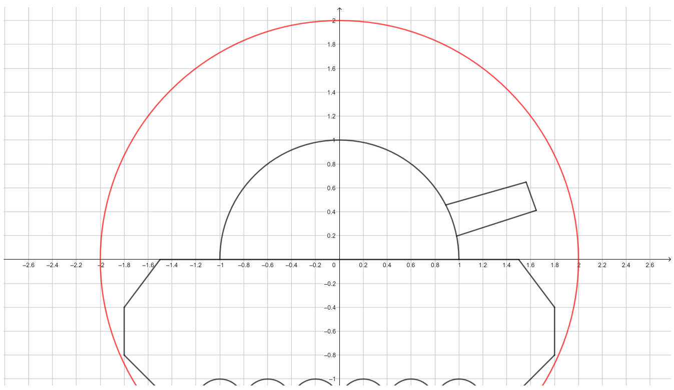
Dostaneme tak čtvrtý odhad H_4 při jehož výpočtu můžeme využít výhodně polární souřadnice, neboť poté je

$$\min\{x^2 + y^2, 1\} = \min\{\rho^2, 1\}.$$

Vzhledem k polárním souřadnicím se také jeví, že se nám integrál bude počítat mnohem lépe pokud zůstaneme u původně zvětšené množiny M_2. Počítáme

$$
\begin{aligned}
H_4 &= \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \min\{x^2 + y^2, 1\} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^3 \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi + \int_0^{2\pi}\int_1^2 \rho \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= 2\pi\frac{1}{4} + 2\pi\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_1^2 = \frac{\pi}{2} + 3\pi \approx 11.
\end{aligned}
$$

Tento odhad je pořád příliš velký. Uvědomme si však, že při jeho získání jsme do množiny M_2 přidali mnoho bodů a také třeba celý obdélník $\left[-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right] \times \left[1, \frac{9}{5}\right]$. Což vidíme dobře na obrázku



Hmotnost toho obdélníku dostaneme docela snadno neboť je jeho vzdálenost od počátku jistě větší než 1 a můžeme ji poté od horního odhadu odečíst. Je to

$$\int_{-\frac{3}{5}}^{\frac{3}{5}} \int_{1}^{\frac{9}{5}} 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5}\frac{4}{5} = \frac{24}{25} \approx 1.$$

Protože tuto hodnotu jsme k odhadu H_4 přidali zbytečně, můžeme ji zase od odhadu H_4 odečíst. Takovýto horní odhad hmotnosti tanku je pak

$$H_5 \approx 11 - 1 = 10.$$

Nyní se dostáváme na hranici a vidíme, že už se nacházíme na hranici nosnosti mostu. My jsme však k množině M přidali při tvorbě množiny M_2 například také dva čtverce symetrické přes osu y, kde jeden z nich je $\left[\frac{3}{5}, 1\right] \times \left[1, \frac{7}{5}\right]$ jehož hmotnost je obdobně $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$. Protože jsou tyto čtvrce dva. dostaneme se již dozajista pod nosnost mostu. Tento odhad je pořád nadsazený, ale již nám zaručuje, že náš tank může na most bezpečně vjet. Náš úkol je tak splněn. Všimněme si také, že hustota je uprostřed tanku v bodě $[0, 0]$ nulová. To je však v pořádku. V této oblasti je prostor pro posádku.

Př. 231 *Spočtěte střední hodnotu transformované veličiny $Z = X + Y$ pokud víte, že je dána hustota dvourozměrného rozdělení (X, Y) jako*

$$f(x,y) = \begin{cases} x - y, & 0 \le y < x \le 1, \\ 0, & \textit{jinak.} \end{cases}$$

Ověřte navíc, že je splněna základní podmínka na hustotu $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$.

Ověřme nejprve podímku na hustotu, tj.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_y^1 x - y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} - xy\right]_y^1 \mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{2} - y - \frac{y^2}{2} + y^2\,\mathrm{d}y =$$
$$= \left[\frac{y}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Nejedná se tedy o hustotu, neboť základní podmínka není splněna. Předpokládejme však, že bychom měli jinou hustotu $6f(x,y)$. Potom by byla podmínka splněna. Pro tuto upravenou hustotu spočítáme střední hodnotu transformované veličiny. Získáme

$$\mathrm{E}\,(X+Y) = \iint_{\mathbb{R}^2} (x+y)6f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 6\int_0^1 \int_y^1 x^2 - y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 6\int_0^1 \left[\frac{x^3}{3}y - xy^2\right]_y^1 \mathrm{d}y =$$
$$= 6\int_0^1 \frac{y}{3} - y^2 - \frac{y^4}{3} + y^3\,\mathrm{d}y = 6\left[\frac{y^2}{6} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{15} + \frac{y^4}{4}\right]_0^1 = 6\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3} - \frac{1}{15} + \frac{1}{4}\right) =$$
$$= 6\left(\frac{5 - 10 - 2}{30} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2} - \frac{7}{5} = \frac{15 - 14}{10} = \frac{1}{10}.$$

Př. 232 *Spočtěte střední hodnotu transformované veličiny* $Z = \mathrm{e}^{X-Y}$ *pokud víte, že je dána hustota dvourozměrného rozdělení* (X, Y) *jako*

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy, & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \textit{jinak.} \end{cases}$$

Ověřte navíc, že je splněna základní podmínka na hustotu $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$.

Ověřme nejprve podímku na hustotu, tj.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^1 4xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\int_0^1 y\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \mathrm{d}y = 2\int_0^1 y\,\mathrm{d}y = 2\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 1.$$

Podímka je tedy splněna. Pro výpočet střední hodnoty aplikujeme vhodný vzorec a dostaneme

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\,\mathrm{e}^{X-Y} &= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{x-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\int_0^1 \int_0^1 xy\,\mathrm{e}^{x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \int_0^1 y\,\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \mathrm{e}^x & v = \mathrm{e}^x \end{array} \right| = 4\left([x\,\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \right) \left(\left[-y\,\mathrm{e}^{-y}\right]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y \right) = \\ &= 4\left(\mathrm{e} - [\mathrm{e}^x]_0^1\right)\left(-\mathrm{e}^{-1} + \left[-\mathrm{e}^{-y}\right]_0^1\right) = 4\left(1 - \frac{2}{\mathrm{e}}\right). \end{aligned}$$

Př. 233 *Najděte funkci, jejíž druhé derivace jsou dány jako*

$$f_{xy} = f_{yx} = -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Naším úkolem je vhodně zinterovat funkci f_{xy} což nás vede na integrál

$$\int\int f_{yx}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\int f_{xy}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\int -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} t = x^2+y^2 \\ \mathrm{d}t = 2y\,\mathrm{d}y \end{array}\right| =$$
$$= \int\int -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{y^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left|\begin{array}{c} t = \frac{x}{y} \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{y}\,\mathrm{d}x \end{array}\right| = \frac{1}{y}\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{y}\operatorname{arctg} t = \frac{1}{y}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}.$$

Tato funkce je dána až na nějaké funkce $g(x) + h(y)$, které se při derivování ztratí. Hledaná funkce je tedy

$$f(x,y) = \frac{1}{y}\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + g(x) + h(y).$$

Př. 234 *Najděte Laplaceovu transformaci funkce $f(x,y)=xy$.*

Počítáme funkci

$$L(s,t)=\lim_{(A,B)\to(\infty,\infty)}\int_0^A\int_0^B \mathrm{e}^{-xs-yt}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\lim_{(A,B)\to(\infty,\infty)}\int_0^A\int_0^B xy\,\mathrm{e}^{-xs-yt}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$$

$$=\lim_{(A,B)\to(\infty,\infty)}\int_0^A x\,\mathrm{e}^{-xs}\,\mathrm{d}x\int_0^B y\,\mathrm{e}^{-yt}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{cc} u=x & u'=1\\ v'=\mathrm{e}^{-xs} & v=-\frac{1}{s}\,\mathrm{e}^{-xs}\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{(A,B)\to(\infty,\infty)}\left(\left[-\frac{x}{s}\,\mathrm{e}^{-xs}\right]_0^A+\int_0^A\frac{1}{s}\,\mathrm{e}^{-xs}\,\mathrm{d}x\right)\left(\left[-\frac{y}{t}\,\mathrm{e}^{-yt}\right]_0^B+\int_0^B\frac{1}{t}\,\mathrm{e}^{-yt}\,\mathrm{d}y\right)=$$

$$=\lim_{(A,B)\to(\infty,\infty)}\left(-\frac{A}{s}\,\mathrm{e}^{-As}+\left[-\frac{1}{s^2}\,\mathrm{e}^{-xs}\right]_0^A\right)\left(-\frac{B}{t}\,\mathrm{e}^{-Bt}+\left[-\frac{1}{t^2}\,\mathrm{e}^{-yt}\right]_0^B\right)=$$

$$=\lim_{(A,B)\to(\infty,\infty)}\left(-\frac{A}{s}\,\mathrm{e}^{-As}-\frac{1}{s^2}\,\mathrm{e}^{-As}+\frac{1}{s^2}\right)\left(-\frac{B}{t}\,\mathrm{e}^{-Bt}-\frac{1}{t^2}\,\mathrm{e}^{-Bt}+\frac{1}{t^2}\right)=\frac{1}{s^2t^2}.$$

Poslední rovnost nastává pokud je $s>0$, $t>0$ neboť je potom

$$\lim_{A\to\infty}\frac{A}{s\,\mathrm{e}^{As}}=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{s^2\,\mathrm{e}^{As}}=0.$$

Pro $s\le 0$, $t\le 0$ limita diverguje.

Př. 235 *Najděte Laplaceovu transformaci funkce* $f(x,y) = \mathrm{e}^{x+y}$.

Uvažme nejprve situace, kdy jsou $s \neq 1$ a $t \neq 1$. Potom máme integrály

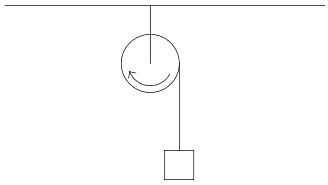
$$
\begin{aligned}
L(s,t) &= \lim_{(A,B)\to(\infty,\infty)} \int_0^A \int_0^B \mathrm{e}^{-xs-yt} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{(A,B)\to(\infty,\infty)} \int_0^A \int_0^B \mathrm{e}^{x+y-xs-yt}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= \lim_{(A,B)\to(\infty,\infty)} \int_0^A \mathrm{e}^{x(1-s)}\,\mathrm{d}x \int_0^B \mathrm{e}^{y(1-t)}\,\mathrm{d}y = \lim_{(A,B)\to(\infty,\infty)} \left[\frac{\mathrm{e}^{x(1-s)}}{1-s}\right]_0^A \left[\frac{\mathrm{e}^{y(1-t)}}{1-t}\right]_0^B = \\
&= \lim_{(A,B)\to(\infty,\infty)} \left(\frac{\mathrm{e}^{A(1-s)}}{1-s} - \frac{1}{1-s}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{B(1-t)}}{1-t} - \frac{1}{1-t}\right) = \begin{cases} \frac{1}{(1-s)(1-t)}, & s > 1 \wedge t > 1, \\ \infty, & s < 1 \vee t < 1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Je-li například $s = 1$, pak je

$$
\int_0^A \mathrm{e}^{x(1-s)}\,\mathrm{d}x = \int_0^A \mathrm{d}x = A.
$$

V takovémto případě integrály také nutně integrují. Máme tedy Laplaceovu transformaci pouze pro $s > 1$ a $t > 1$.

Př. 236 *Spočtěte zrychlení a, jaké bude mít závaží zavěšené na kladce a volně padající dolů. Kladka je dána jako kruh o poloměru $r = 1$. a) Uvažte, že je hustota $\rho(x, y)$ konstantní v celé kladce, tj. $\rho(x, y) = 3$. b) Uvažte, že je hustota kladky dána jako $\rho(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Mějme hmotnost závaží $m = 2$. Jednotky neřešte.*



Síla působící na závaží je dána jako $F = ma$, kde m je hmotnost závaží a a je jeho zrychlení. Točivý moment kladky získáme jako $T = I\omega$, kde I je moment setrvačnosti kladky a ω její úhlové zrychlení. Provázek spojující kladku a závaží je napjat silou N, která splňuje $T = Nr$. Tedy $I\omega = Nr$. Úhlové zrychlení ω zavisí na zrychlení a neboť je kladka propojena se závažím. Lze odvodit vztah $a = r\omega$. Na závaží působí gravitace silou mg, kde g je obvyklé gravitační zrychlení. V opačném směru pak působí síla N. Celkově tak na závaží působí síla $F = mg - N$, což můžeme propojit jako

$$mg - N = ma.$$

Neboť hmotnost m známe a veličinu a chceme zjistit, zbývá nám úpravami odvodit, že je

$$N = \frac{T}{r} = \frac{I\omega}{r} = \frac{Ia}{r^2}.$$

Dosadíme tak do rovnice a získáme vztah

$$mg - \frac{Ia}{r^2} = ma.$$

Vyjádříme-li z této rovnice a, dostaneme

$$a = \frac{mg}{m + \frac{I}{r^2}}.$$

Jedinou neznámou veličinou tak zůstává moment setrvačnosti I. K určení momentu setrvačnosti však budeme chtít použít integrály a uvedené vzorce. Můžeme si však ještě všimnout, že pokud bychom uvažovali $I = 0$, tak by padalo závaží volným pádem, tj. $a = g$.

Zbývá nám tak určit pouze moment setrvačnosti. Ten však musíme získat pomocí integrálů

$$I = \iint_M (x^2 + y^2)\rho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

V prvním případě a) je $\rho(x, y) = 3$ a množina M je dána jako kruh o poloměru $r = 1$, tj. $x^2 + y^2 \leq 1$. Integrál tedy budeme počítat transformací do polárních souřadnice $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$, pro $\rho \in [0, 1]$ a $\phi \in [0, 2\pi]$. Připomeňme, že jakobián tohoto zobrazení je $J = \rho$ a že platí $x^2 + y^2 = \rho^2$. Máme

$$I = \iint_M 3(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3\int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^3\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = 6\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\pi.$$

V případě b) budeme postupovat stejně. Pouze husota se změní na $\rho(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Po transformaci tak máme

$$I = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^3 \sqrt{1-\rho^2}\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}\rho = 2\pi \int_0^1 \rho^3 \sqrt{1-\rho^2}\, \mathrm{d}\rho = \left| \begin{array}{c} t = 1-\rho^2 \\ \mathrm{d}t = -2\rho\, \mathrm{d}\rho \end{array} \right| = 2\pi \int_1^0 -\frac{t+1}{2} \sqrt{t}\, \mathrm{d}t =$$

$$= \pi \int_0^1 t^{3/2} + \sqrt{t}\, \mathrm{d}t = \pi \left[\frac{t^{5/2}}{5/2} + \frac{t^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{3} \right) = \frac{16}{15}\pi.$$

Nyní známe již vše co potřebujeme. Hodnotu g budeme pro jednoduchost uvažovat jako $g = 10$. V případě a) dostaneme

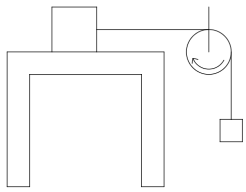
$$a = \frac{20}{2 + \frac{3}{2}\pi} \approx 2,9796.$$

V případě b) je pro změnu

$$a = \frac{20}{2 + \frac{16}{15}\pi} \approx 3,738.$$

Můžeme si všimnout, že těleso s menším momentem setrvačnosti má větší zrychlení. To souhlasí, neboť podle některých textů můžeme moment setrvačnosti chápat jako odpor tělesa ke zrychlení.

Př. 237 *Spočtěte zrychlení a, jaké bude mít závaží propojené s druhým závažím přes kladku. Závaží padá volně dolů a u druhého závaží neuvažujte tření se stolem. Kladka je dána jako kruh o poloměru* $r = 2$. *a) Uvažte, že je hustota* $\rho(x, y)$ *konstantní v celé kladce, tj.* $\rho(x, y) = 1$. *b) Uvažte, že je hustota kladky dána jako* $\rho(x, y) = xy$ *pro* $xy \geq 0$ *a* $\rho(x, y) = 0$ *jinak. Mějte hmotnost visícího závaží* $m_1 = 2$ *a závaží na stole nechť má hmotnost* $m_2 = 4$. *Jednotky neřešte.*



Protože jsou závaží propojené provázkem, tak je zrychlení a jednoho závaží stejné jako zrychlení druhého závaží. Na závaží na stole tak působí pouze síla $F = m_2 a$ a tato síla N_2 napíná provázek. Na zavěšené závaží působí gravitace a naopak síla N_1 napínající provázek v opačném směru. Točivý moment kladky je dán jako $T = I\omega$, kde I je moment setrvačnosti kladky a ω její úhlové zrychlení. Točivý moment však také vzniká z rozdílu působících sil N_1 a N_2 upraveno o poloměr. Tedy

$$(N_1 - N_2)r = T = I\omega.$$

Neznáme však síly N_1, N_2 stejně jako neznáme ani I a ω. Úhlové zrychlení lze vyjádřit jako $a = r\omega$. Síla N_2 posunující závaží na stole je pak dána jako $N_2 = m_2 a$. Naopak sílu N_1 napínající provázek získáme ze vztahu

$$m_1 g - N_1 = m_1 a.$$

Vidíme zde výslednici sil jako $m_1 a$, která se skládá z působení gravitace a v opačném směru z napětí provázku. Dosazením tak dostaneme snadno vyjádření

$$m_1 g - m_1 a - m_2 a = I \frac{a}{r^2}.$$

Odsud chceme získat zrychlení a, které tedy vyjádříme jako

$$a = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2}}.$$

Zbývá nám tak určit pouze moment setrvačnosti. Ten však musíme získat pomocí integrálů

$$I = \iint_M (x^2 + y^2)\rho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

V prvním případě a) je $\rho(x, y) = 1$ a množina M je dána jako kruh o poloměru $r = 2$, tj. $x^2 + y^2 \leq 4$. Integrál tedy budeme počítat transformací do polárních souřadnice $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$, pro $\rho \in [0, 2]$ a $\phi \in [0, 2\pi]$. Připomeňme, že jakobián tohoto zobrazení je $J = \rho$ a že platí $x^2 + y^2 = \rho^2$. Máme

$$I = \iint_M (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \rho^3\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi.$$

Všechny ostatní hodnoty máme již zadané. Hodnotu gravitačního zryhclení g budeme pro jednoduchost uvažovat jako $g = 10$. Když vše dosadíme, získáme

$$a = \frac{20}{6 + \frac{8\pi}{4}} = \frac{20}{6 + 2\pi} \approx 1,628.$$

Bod b) bude obdobný, pouze hustotu budeme uvažovat jinou. Hustota splňuje $\rho(x, y) \geq 0$ pro $\phi \in [0, \pi/2]$ a pro $\phi \in [\pi, 3\pi/2]$. Získáváme

$$\iint_M (x^2 + y^2)xy \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^2 \int_a^b \rho^5 \cos\phi \sin\phi \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\rho = \left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^2 \int_a^b \frac{\sin 2\phi}{2} \,\mathrm{d}\varphi = \frac{64}{12}\left[\frac{-\cos 2\phi}{2}\right]_a^b =$$
$$= \frac{16}{3}\left(\frac{-\cos 2b}{2} + \frac{\cos 2a}{2}\right).$$

Moment setrvačnosti tak dostaneme jako součet přes integrálů přes intervaly $[0, \pi/2]$ a $[\pi, 3\pi/2]$. Tedy

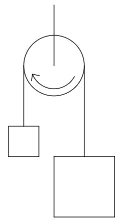
$$I = \frac{16}{3}\left(\frac{-\cos\pi}{2} + \frac{\cos 0}{2}\right) + \frac{16}{3}\left(\frac{-\cos 3\pi}{2} + \frac{\cos 2\pi}{2}\right) = \frac{16}{3} + \frac{16}{3} = \frac{32}{3}.$$

Zrychlení tedy v tomto případě dostaneme jako

$$a = \frac{20}{6 + \frac{32}{12}} =\approx 2,308.$$

I zde vidíme, že kladka s menším momentem setrvačnosti vede k většímu zrychlení.

Př. 238 *Spočtěte zrychlení a, jaké bude mít závaží propojené s druhým závažím přes kladku. Obě závaží visí volně ve vzduchu a těžší závaží vytahuje přes kladku lehčí nahoru. Kladka je dána jako kruh o poloměru* $r = 2$. *a) Uvažte, že je hustota* $\rho(x, y)$ *konstantní v celé kladce, tj.* $\rho(x, y) = 3$. *b) Uvažte, že je hustota kladky dána jako* $\rho(x, y) = x^2 + y^4$. *Mějte hmotnost těžšího závaží* $m_1 = 6$ *a lehčího závaží* $m_2 = 2$. *Jednotky neřešte.*



Protože jsou závaží propojené provázkem, mají obě stejné zrychlení a. Provázek propojující závaží otáčí kladkou a vzniká zde tedy točivý moment T daný jako rozdíl sil napínajících provázek upraveno o poloměr r. Tedy $T = (N_1 - N_2)r$, kde síla N_1 napíná provázek těžšího závaží a N_2 dělá to samé pro lehčí závaží. Navíc je však točivý moment dán jako $T = I\omega$, kde I je moment setrvačnosti kladky a ω její úhlové zrychlení. Úhlové zrychlení ω lze vyjádřit jako $a = r\omega$. Celkem tak máme

$$N_1 - N_2 = I\frac{a}{r^2}.$$

Abychom získali sílu N_2, musíme uvážit, že na lehčí těleso působí gravitace a v opačném směru síla napínající provázek. Výslednice sil je však také dána jako $F_2 = m_2 a$, a tedy máme

$$N_2 - m_2 g = m_2 a.$$

Zde uvažujeme, že lehčí těleso je nadzvedáváno, a proto je $N_2 > m_2 g$. Obdobně získáme výslednici sil pro těžší těleso jako

$$m_1 g - N_1 = m_1 a.$$

Z obou těchto vztahů můžeme vyjádřit N_1 a N_2 a získáme tak

$$m_1 g - m_1 a - m_2 a - m_2 g = I\frac{a}{r^2}.$$

Chceme-li získat z rovnice a, musíme vyjádřit

$$a = \frac{m_1 g - m_2 g}{m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2}}.$$

Zbývá nám tak určit pouze moment setrvačnosti. Ten však musíme získat pomocí integrálů

$$I = \iint_M (x^2 + y^2)\rho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

V prvním případě a) je $\rho(x, y) = 3$ a množina M je dána jako kruh o poloměru $r = 2$, tj. $x^2 + y^2 \leq 4$. Integrál tedy budeme počítat transformací do polárních souřadnice $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$, pro $\rho \in [0, 2]$ a $\phi \in [0, 2\pi]$. Připomeňme, že jakobián tohoto zobrazení je $J = \rho$ a že platí $x^2 + y^2 = \rho^2$. Máme

$$I = \iint_M 3(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3\int_0^2 \int_0^{2\pi} \rho^3\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = 6\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 = 24\pi.$$

Všechny ostatní hodnoty máme již zadané. Hodnotu gravitačního zryhclení g budeme pro jednoduchost uvažovat jako $g = 10$. Když vše dosadíme, získáme

$$a = \frac{40}{8 + \frac{24\pi}{4}} = \frac{40}{8 + 6\pi} \approx 1,4898.$$

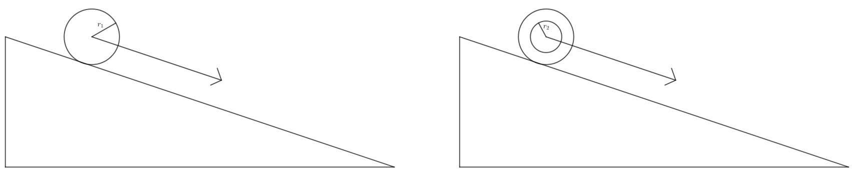
Bod b) bude obdobný, pouze hustotu budeme uvažovat jinou. Dostaneme

$$\begin{aligned}
I &= \iint_M (x^2 + y^2)(x^2 + y^4)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \rho^3(\rho^2 \cos^2\phi + \rho^4 \sin^4\phi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \rho^5 \cos^2\phi + \rho^7 \sin^4\phi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = \\
&= \left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^2 \left[\frac{\sin 2\phi + 2\phi}{4}\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{\rho^8}{8}\right]_0^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\phi - \cos^2\phi \sin^2\phi\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{64}{6}\frac{4\pi}{4} + \frac{256}{8}\left[\frac{2\phi - \sin 2\phi}{4}\right]_0^{2\pi} - \frac{256}{8}\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 2\phi}{4}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{32}{3}\pi + 32\frac{4\pi}{4} - 8\left[\frac{4\phi - \sin 4\phi}{8}\right]_0^{2\pi} = \\
&= \frac{128}{3}\pi - 8\pi = \frac{104}{3}\pi.
\end{aligned}$$

Zrychlení tedy v tomto případě dostaneme jako

$$a = \frac{40}{8 + \frac{104}{12}\pi} \approx 1,1355.$$

Př. 239 *Uvažujme nakloněnou rovinu na kterou položíme dvě tělesa. JPrvní těleso je vyplněný válec a druhé těleso je válec tvořen válcovým mezikružím. Oba válce mají stejný poloměr r_1, druhý válec pak má uvnitř válcovou dutinu s poloměrem r_2. Které z těles se skutálí z nakloněné roviny rychleji. Hustota obou válců je dána jako $\rho(x, y) = x^2 + y^2$. Nakonec uvažte navíc situaci, kde mají oba válce konstantní husotut takovou, že hmotnost obou válců je stejná.*



Válce se budou otáčet a zrychlovat směrem dolů z plošinky. Stačí nám určit, který válec bude mít větší zrychlení. Točivý moment obou válců je dán jako $T = I_k\omega_k$, kde I_k je moment setrvačnosti válce k a ω_k je úhlové zrychlení válce k. Úhlové zrychlení obou válců dostaneme jako $\omega_k = \frac{a_k}{r_1}$. Točivý moment vzniká vlivem tření válce o rovinu. Sílu působícího tření dostaneme jako $F_t = mg\cos\theta\mu$, kde θ je úhel, který svírá nakloněná rovina s podlahou a μ_k je koeficient tření. Upraveno o poloměr tak dostaneme

$$\begin{aligned} F_{t,k}r_1 &= I_k\frac{a_k}{r_1} \\ m_k g\cos\theta\mu_k &= I_k\frac{a_k}{r_1^2}. \end{aligned}$$

Naopak síla F_k valící těleso dolů je složena jako poměr gravitační síly $mg\sin\theta$ mínus síla působícího tření, tj.

$$m_k g\sin\theta - m_k g\cos\theta\mu_k.$$

Navíc je také $F_k = m_k a_k$ a tedy můžeme vyjádřit

$$\begin{aligned} m_k g\sin\theta - m_k g\cos\theta\mu_k &= m_k a_k \\ g\sin\theta - g\cos\theta\mu_k &= a_k. \end{aligned}$$

Úhel θ je parametr plošiny a tedy daný neurčitý koeficient. Koeficient tření μ_k můžeme navíc vyjádřit pomocí točivého momentu jako

$$\mu_k = \frac{a_k I_k}{r_1^2 m_k g\cos\theta}.$$

Dosazením do rovnice pro a_k tak získáme

$$\begin{aligned} g\sin\theta - g\cos\theta\frac{a_k I_k}{r_1^2 m_k g\cos\theta} &= a_k \\ g\sin\theta - \frac{a_k I_k}{r_1^2 m_k} &= a_k. \end{aligned}$$

Odsud vyjádříme hledané zrychlení a_k jako

$$a_k = \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{I_k}{r_1^2 m_k}}.$$

K určení které zrychlení je větší nám tak stačí porovnat pouze poměry $\frac{I_k}{m_k}$. Tento poměr získáme pomocí integrálu jako

$$\frac{I_k}{m_k} = \frac{\iint_{M_k} (x^2+y^2)\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_{M_k} \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} = \frac{\iint_{M_k} (x^2+y^2)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_{M_k} x^2+y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

Pro plný válec je množina M dána jako kruh o poloměru r_1, tj. $x^2+y^2 \le r_1^2$. Integrál tedy budeme počítat transformací do polárních souřadnice $x=\rho\cos\phi$, $y=\rho\sin\phi$, pro $\rho\in[0,r_1]$ a $\phi\in[0,2\pi]$. Připomeňme, že jakobián tohoto zobrazení je $J=\rho$ a že platí $x^2+y^2=\rho^2$.

$$\frac{I_1}{m_1} = \frac{\iint_{M_1} (x^2+y^2)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_{M_1} x^2+y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{r_1} \rho^5\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi}{\int_0^{2\pi}\int_0^{r_1} \rho^3\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi} = \frac{\left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^{r_1}}{\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{r_1}} = \frac{4r_1^6}{6r_1^4} = \frac{2r_1^2}{3}.$$

Druhý válec je uvnitř dutý, proto máme jiný rozsah, tj. $\rho\in[r_2,r_1]$. Jinak se výpočet nezmění. Tedy

$$\frac{I_2}{m_2} = \frac{\iint_{M_2} (x^2+y^2)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_{M_2} x^2+y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_{r_2}^{r_1} \rho^5\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi}{\int_0^{2\pi}\int_{r_2}^{r_1} \rho^3\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi} = \frac{\left[\frac{\rho^6}{6}\right]_{r_2}^{r_1}}{\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_{r_2}^{r_1}} = \frac{4(r_1^6-r_2^6)}{6(r_1^4-r_2^4)}.$$

Chceme určit, který z poměrů je větší. Počítejme tedy

$$r_1^2 - \frac{r_1^6-r_2^6}{r_1^4-r_2^4} = \frac{r_1^6 - r_1^2r_2^4 - r_1^6 + r_2^6}{r_1^4-r_2^4} = \frac{r_2^4(r_2^2-r_1^2)}{r_1^4-r_2^4} = -\frac{r_2^4}{r_1^2+r_2^2} < 0.$$

Z této nerovnosti jasně vidíme, že platí

$$\frac{I_1}{m_1} < \frac{I_2}{m_2}$$
$$a_2 = \frac{g\sin\theta}{1+\frac{I_2}{r_1^2 m_2}} < \frac{g\sin\theta}{1+\frac{I_1}{r_1^2 m_1}} = a_1.$$

Vyplněný válec se skutálí dříve.

Navíc uvažujme druhou situaci, kde mají oba válce stejnou hmotnost. Pak nám stačí porovnat pouze mezi sebou momenty setrvačnosti I_k. Řekněme, že hustota vyplněného válce je $\rho_1(x,y)=1$ a tedy je jeho hmotnost dána snadno jako

$$m_1 = \iint_{M_1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^{r_1} \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{r_1} = \pi r_1^2.$$

Hustota druhého válce je konstantní a a tedy $\rho_2(x,y)=K$. Budeme chtít dopočítat K, neboť hustoty vystupují ve výpočtu momentu setrvačnosti. Víme, že je

$$m_1 = m_2 = \iint_{M_2} K\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2K\pi\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{r_2}^{r_1} = K\pi(r_1^2-r_2^2).$$

Neboť je však také $m_2=\pi r_1^2$ máme

$$K = \frac{\pi r_1^2}{\pi(r_1^2-r_2^2)} = \frac{r_1^2}{(r_1^2-r_2^2)}.$$

Můžeme nyní spočítat momenty setrvačnosti

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \iint_{M_1} x^2 + y^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_1} \rho^3 \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi = 2\pi \frac{r_1^4}{4} = \frac{r_1^4}{2}\pi, \\
I_2 &= K \iint_{M_1} x^2 + y^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = K \int_0^{2\pi} \int_{r_2}^{r_1} \rho^3 \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi = 2K\pi \frac{r_1^4 - r_2^4}{4} = \frac{r_1^4 - r_2^4}{2} K\pi = \\
&= \frac{r_1^4 - r_2^4}{2} \frac{r_1^2}{(r_1^2 - r_2^2)}\pi = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} r_1^2 \pi = \frac{r_1^4 + r_1^2 r_2^2}{2}\pi > \frac{r_1^4}{2}\pi = I_1.
\end{aligned}
$$

I v tomto případě bychom dostali, že vyplněný válec se skutálí dřív, neboť má větší zrychlení.

6 Nevlastní integrál

Typickým příkladem nevlastního integrálu funkce jedné proměnné jsou interály

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x,$$

tj. integrál z neohraničené funkce a integrál na neohraničené množině.

1. **Neomezená množina M**

   Nechť M je neohraničená množina. Řekneme, že posloupnost ohraničených množin M_n, $n \in \mathbb{N}$ vyčerpává množinu M pokud platí $M_n \subset M$, pro každé n a navíc pokud pro každé $r > 0$ existuje n_0 takové, že pro každé $n \geq n_0$ je $M \cap x^2 + y^2 \leq r^2 \subset M_n$.

   Dále předpokládejme, že f je integrovatelné na libovolné ohraničené množině $N \subset M$.

   Řekneme, že nevlastní integrál konverguje na množině M a

   $$\iint_M f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = I,$$

   pokud existuje číslo $I \in \mathbb{R}$ takové, že

   $$\lim_{n\to\infty} \iint_{M\setminus M_n} f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = I$$

   pro libovolnou posloupnost měřitelných množin M_n, které vyčerpávají množinu M. Pokud takové číslo neexistuje (limita neexistuje, nebo není konečná), řekneme, že integrál diverguje.

   Nechť funkce f, g jsou nezáporné na neohraničené množině M. Nechť $f \leq g$ na množině M. Potom platí, že

   - pokud $\iint_M g\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x < \infty$ potom také $\iint_M f\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x < \infty$.
   - pokud $\iint_M f\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \infty$ potom také $\iint_M g\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \infty$.

   Integrál $\iint_M |f|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ konverguje tehdy a jen tehdy, když konverguje integrál $\iint_M f\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.

   Nechť funkce $f \geq 0$ na neohraničené množině M. Integrál

   $$\iint_M f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

   je konvergentní právě tehdy, když existuje posloupnost měřitelných množin M_n smršťující se k bodu A taková, že posloupnost

   $$I_n = \iint_{M_n} f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

   je ohraničená.

2. **Neohraničená funkce - singulární bod**

   Předpokládejme, že je zde množina M ohraničená. Dále nechť je každá funkce f integrovatelná na libovolné množině $M \setminus N$, kde N je libovolná měřitelná množina taková, že $A \in N^\circ$.

Bod $A \in \overline{M}$ se nazývá singulární bod funkce f jestliže funkce f není ohraničená na žádné množině tvaru $M \cap O(A)$, kde $O(A)$ je libovolné okolí bodu A.

Řekneme, že posloupnost ohraničených množin M_n, $n \in \mathbb{N}$ se smršťuje k bodu A pokud $A \in M_n^\circ$ (tj. A je vnitřním bodem) pro všechna n a navíc platí, že $\lim_{n\to\infty} d(M_n) = 0$ (tj. průměr množin jde limitně k nule).

Nechť funkce f je definovaná na množině $M \setminus \{A\}$ a A je její singulární bod. Řekneme, že nevlastní integrál konverguje na množině M a

$$\iint_M f \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = I,$$

pokud existuje číslo $I \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{M\setminus M_n} f \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = I$$

pro libovolnou posloupnost měřitelných množin M_n, které se smršťují k bodu A. V opačném případě (pokud limita neexistuje, nebo není konečná) řekneme, že integrál diverguje.

Pokud A není singulárním bodem, platí

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{M\setminus M_n} f \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_M f \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

Nechť funkce f, g mají společný singulární bod na M. Jestliže nevlastní integrály

$$\iint_M f \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x, \qquad \iint_M g \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

konvergují, pak konverguje také integrál

$$\iint_M Af + Bg \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x,$$

kde A, B jsou konstanty a platí

$$\iint_M Af + Bg \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = A \iint_M f \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x + B \iint_M g \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

Nechť funkce f, g jsou nezáporné na množině M, kde A je jejich společný singulární bod. Nechť $f \leq g$ na množině M. Potom platí, že

- pokud $\iint_M g \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x < \infty$ potom také $\iint_M f \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x < \infty$.
- pokud $\iint_M f \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \infty$ potom také $\iint_M g \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \infty$.

Nechť funkce f je definovaná na množině $M \setminus \{A\}$ a A je její singulární bod. Integrál $\iint_M |f| \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$ konverguje tehdy a jen tehdy když konverguje integrál $\iint_M f \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$.

Nechť funkce $f \geq 0$ na množině, kde A je její singulární bod. Integrál

$$\iint_M f \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

je konvergentní právě tehdy, když existuje posloupnost měřitelných množin M_n smršťující se k bodu A taková, že posloupnost

$$I_n = \iint_{M\setminus M_n} f \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

je ohraničená.

3. **Nevlastní integrál - obecná definice**

   Následující tvrzení vychází především z knihy [12]. Mějme posloupnost množin M_n, $n \in \mathbb{N}$. Tato posloupnost množin je vnořená, pokud $M_n \subset M_{n+1}$, pro každé n. Nějaké okolí množiny N definujeme jako sjednocení okolí bodů množiny N, tj. $O(N) = \cup_{A \in N} O(A)$.

   Řekneme, že množina N je singulární množina množiny N, pokud funkce f není ohraničená na libovolné množině $M \cap O(N)$, pro libovolné okolí $O(N)$ množiny N.

   Nyní předpokládejme, že funkce f je definována na množině M. Množina M může být neohraničená a funkce může mít v bodě A singulární bod (a je tedy definována na množině $M \setminus \{A\}$), nebo může mít souvislou singulární množinu N (a být definována na množině $M \setminus N$).

   Řekneme, že posloupnost vnořených množin M_n, $n \in \mathbb{N}$ vyčerpává množinu M pokud $M = \cup_{n=1}^{\infty} M_n$.

   Nechť posloupnost M_n vyčerpává množinu M a nechť funkce f je integrovatelná na každé množině M_n. Pokud existuje stejná limita $I \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{M_n} f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = I$$

   nezávislá na volbě vyčerpávající množině M_n, potom řekneme, že integrál

$$\iint_{M} f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

   konverguje a jeho hodnota je I. Pokud taková limita neexistuje, nebo je závislá na volbě vyčerpávajících množin, pak řekneme, že integrál diverguje.

   Nechť funkce $f \geq 0$ na množině M, pak pokud existuje posloupnost M_n vyčerpávajících množin taková, že limita

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{M_n} f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = I$$

   existuje konečná, potom integrál

$$\iint_{M} f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

   konverguje k I.

Fubiniova věta platí obecně, tj.

$$\iint_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_X \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_Y \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

jenom pokud je integrál

$$\iint_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

konvergentní. Pokud integrál diverguje, tak Fubiniovu větu použít nelze.

Uvažujme například integrál

$$\iint_{x^2+y^2\geq 1} \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Pokud bychom po transformaci spolu s Fubiniovou větou chtěli převést tento integrál, tak bychom dostali

$$\begin{aligned}\iint_{x^2+y^2\geq 1} \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &\stackrel{?}{=} \int_0^{2\pi}\int_1^{\infty} \frac{\rho}{\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} [\ln\rho]_1^{\infty}\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \lim_{\rho\to\infty} \ln\rho\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \infty\,\mathrm{d}\varphi.\end{aligned}$$

Vidíme, že po převodu bychom mohli dostat integrál z nekonečna, což není smysluplný výraz. Dobře řekli bychom si, že je problém s nekonečnem ve vnitřní mezi. Zavedeme pravidlo, že nekonečno musí být jen ve vnější mezi a Fubiniova věta začne fungovat. Nikoliv, takhle to fungovat stále nebude. Uvažujme příklad

$$\iint_{\mathbb{R}^2} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Tento integrál rozhodně nekonverguje. Například přes systém $M_n : [-n, n^2] \times [-n, n]$ bychom dostali integrál

$$I_n = \int_{-n}^{n^2}\int_{-n}^{n} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}y = 2n\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-n}^{n} = n(n^2-n) = n^3 - n^2.$$

Vidíme, že limita $\lim_{n\to\infty} I_n = \infty$, a protože konvergentní integrál by musel konvergovat přes libovolnou M_n, tak integrál diverguje. Avšak zaveďme na tento integrál polární souřadnice (pro $\rho \in [0,\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$) spolu s Fubiniovou větou bychom tak dostali

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &\stackrel{?}{=} \int_1^{\infty}\int_0^{2\pi} \rho\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = \int_1^{\infty} \rho\,[\sin\varphi]_0^{2\pi}\,\mathrm{d}\rho = \\ &= \int_1^{\infty} \rho\,(\sin(2\pi) - \sin 0)\,\mathrm{d}\rho = \int_1^{\infty} \rho\cdot 0\,\mathrm{d}\rho = \int_1^{\infty} 0\,\mathrm{d}\rho = 0.\end{aligned}$$

Na základě tohoto převodu bychom zase nyní dostali, že integrál konverguje. Při aplikaci Fubiniho věty na nevlastní integrály si musíme dávat pozor.

6.1 Neomezená množina

Př. 240 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_M xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y, \quad \text{pro} \quad M = [0, \infty)^2.$$

První si všimněme, že množina M je neohraničená. Zavedeme nějakou vyčerpávající množinu množiny M. Hledáme tedy systém vnořených množin, které by nám postupně vyplnili první kvadrant. Takových systémů bychom jistě našli hodně. Například čtverce $M_n = [0, n)^2$ se zvětšující stranou by podmínky splňovaly. Takto bychom dostali integrál

$$I_n = \iint_{M_n} xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^n \int_0^n xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^n \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^n = \frac{n^4}{4}.$$

Počítáme-li nyní limitu $\lim_{n\to\infty} I_n = \infty$, tak vidíme, že není konečná. Tudíž bychom řekli na základě tohoto výpočtu, že integrál diverguje. Avšak co kdybychom uvážili jiný systém vyčerpávajících množin? První kvadrant nám vyplní také čtvrt kruhy $x^2 + y^2 \leq n^2 \cap 1.\,\mathrm{kv}$ nebo trojúhelníky $[0, n] \times [0, n - x]$. Uvažujme tedy jinou posloupnost

$$\begin{aligned}
J_n &= \iint_{N_n} xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^n \int_0^{n-x} xy \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^n x \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{n-x} \mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^n x \underbrace{(n-x)^2}_{=n^2-2nx+x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left[n^2 \frac{x^2}{2} - 2n \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^n = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{n^4}{2} - \frac{2n^4}{3} + \frac{n^4}{4}\right) = \frac{n^4}{24}.
\end{aligned}$$

Tento výsledek dopadne stejně. Jak však víme, že pro jinou volbu nedostaneme jinou limitu? Pokud by integrál konvergoval, musela by být limita konečná pro každou vyčerpávající posloupnost. Protože jsme již našli nějaký vyčerpávající systém, pro který limita konečná není (našli jsme dokonce již dva), tak víme, že integrál nutně diverguje. Požadavky na konvergenci jsou poměrně přísné, a tudíž je obecně snazší ukázat, že integrál diverguje.

Př. 241 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2}.$$

Množina M není ohraničená a integrovaná funkce je nezáporná. Množina M je celou rovinou, proto nám nedává žádné specifické požadavky na volbu M_n. Z tvaru funkce usuzujeme, že nejlepší bude vše převést do polárních souřadnic a volit $M_n : x^2+y^2 \le n^2$ pro $\rho \in [0,n]$, $\varphi \in [0,2\pi]$. Dostaneme

$$I_n = \int_0^n \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{1+\rho^2} \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\rho = \left| \begin{array}{c} t = 1+\rho^2 \\ \mathrm{d}t = 2\rho \mathrm{d}\rho \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_1^{1+n^2} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \pi \left[\ln|t|\right]_1^{1+n^2} =$$
$$= \pi(\ln(n^2+1) - \ln 1) \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

Dostáváme tedy, že integrál diverguje.

Př. 242 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_M \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+a^2)^2}, \qquad \textit{pro} \qquad M=[0,\infty)^2, a>0.$$

Množina M není ohraničená a integrovaná funkce je nezáporná. Z tvaru funkce usuzujeme, že nejlepší bude vše převést do polárních souřadnic a volit tudíž $M_n : x^2+y^2 \le n^2$, pro $\rho \in [0,n]$, $\varphi \in [0,\pi/2]$. Dostaneme

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^n \int_0^{\pi/2} \frac{\rho}{(\rho^2+a^2)^2} \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\rho = \left| \begin{array}{c} t=\rho^2+a^2 \\ \mathrm{d}t = 2\rho\mathrm{d}\rho \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_{a^2}^{a^2+n^2} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \\ &= \frac{\pi}{4}\left[-\frac{1}{t}\right]_{a^2}^{a^2+n^2} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^2+n^2}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\pi}{4a^2}. \end{aligned}$$

Integrál konverguje.

Př. 243 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_M \frac{1}{x^2y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \textit{pro} \qquad M = [1,\infty)^2.$$

Množina M je neohraničená. I zde vidíme, že integrovaná funkce splňuje $f \geq 0$, a proto nám stačí spočíst integrál přes nějakou vyčerpávající množinu množiny M. Hned vidíme, že takovou množinou by mohlo být například $M_n = [1,n)^2$. Hledáme systém množin M_n takový, aby se nám dvojný integrál přes množiny M_n dobře počítal. Vyčerpávající systém množin $N_n = [0,n] \times [1, 4n + \sin x^2]$ bychom také mohli zvolit, ale dvojný integrál bychom přes tuto množinu patrně nespočítali. Zvolíme tedy raději množinu M_n a dostáváme integrál

$$\begin{aligned} I_n &= \iint_{M_n} \frac{1}{x^2y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^n \int_1^n \frac{1}{x^2y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n \left[-\frac{1}{y}\right]_1^n = \\ &= \left(-\frac{1}{n}+1\right)^2. \end{aligned}$$

Počítáme-li nyní limitu $\lim_{n\to\infty} I_n = 1$. Jak však víme, že pro jinou volbu nedostaneme jinou limitu. Zvolme si nyní jiný systém množin $K_n = [0,n^2] \times [1, x+n]$. Integrál přes tento systém by nám dal

$$\begin{aligned} J_n &= \iint_{K_n} \frac{1}{x^2y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^{n^2} \int_1^{x+n} \frac{1}{x^2y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^{n^2} \frac{1}{x^2}\left[-\frac{1}{y}\right]_1^{x+n} \mathrm{d}x = \\ &= \int_1^{n^2} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2(x+n)}\,\mathrm{d}x = \int_1^{n^2} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{n^2(x+n)} - \frac{1}{nx^2} + \frac{1}{n^2x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \left[-\frac{1}{x} - \frac{\ln|x+n|}{n^2} + \frac{1}{nx} + \frac{\ln|x|}{n^2}\right]_1^{n^2} = \\ &= -\frac{1}{n^2} - \frac{\ln|n^2+n|}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{\ln|n^2|}{n^2} + 1 + \frac{\ln|1+n|}{n^2} - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Tato posloupnost konverguje také k 1. Tento výsledek dopadne stejně. Avšak správně bychom měli prozkoumat všechny možné vyčerpávající posloupnosti. Takový úkol by nebyl jednoduchý. Nicméně můžeme zpozorovat, že na množině M je integrovaná funkce $f = \frac{1}{x^2y^2} \geq 0$ a tedy víme, že výsledek ani jinak dopadnout nemohl. Pro všechny vyčerpávající systémy musíme získat stejnou limitu. Tudíž získáváme řešení našeho příkladu, že integrál konverguje k hodnotě 1.

Př. 244 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$I = \iint_M xy\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \textit{pro} \qquad M = [0,\infty)^2.$$

Vidíme, že integrovaná množina je neohraničená a že integrovaná funkce je na M nezáporná, tj. $f \geq 0$. Nalezneme posloupnost M_n, která vyčerpává množinu M. Například pro $M_n = [0,n]^2$ vidíme, že $M_n \subset M$, že je systém vnořený a že $M_n \to M$. Počítáme

$$\begin{aligned}\iint_{M_n} xy\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^n \int_0^n xy\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^n x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \int_0^n y\,\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \\ &= \left(\int_0^n x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 = \left| \begin{array}{c} t = x^2 \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \frac{1}{4}\left(\int_0^{n^2} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^2 = \\ &= \frac{1}{4}\left([-\mathrm{e}^{-t}]_0^{n^2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-n^2}\right)^2 \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

V tomto případě by nám mohlo lákat také použít systém $N_n = \{x^2+y^2 \leq n^2\} \cap 1.\,\mathrm{kv.}$ V takovém případě bychom po použití polárních souřadnic dostali

$$\begin{aligned}\iint_{N_n} xy\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^n \rho^3 \sin\varphi \cos\varphi\,\mathrm{e}^{-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi \int_0^{n^2} \frac{t}{2}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Jako další pozorování bychom mohli udělat, že integrovaná funkce je symetrická přes osu $y = x$ a tudíž pokud integrál konverguje, tak musí platit

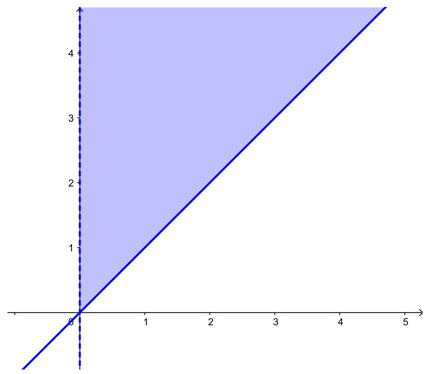
$$I = 2\iint_A xy\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \text{pro} \qquad A = [0,\infty)^2 \cap y \geq x.$$

Těžko říct, zda by nám toto pozorování výpočet usnadnilo.

Př. 245 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_M \mathrm{e}^{-x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \textit{pro} \qquad M: 0 \le x \le y.$$

Množina M je neohraničená a lze ji zakreslit následovně



Protože je integrovaná funkce $f = \mathrm{e}^{-x-y} \ge 0$ tak stačí integrál spočítat přes jednu vyčerpávající množinu. Můžeme zvolit jednoduše $M_n = \{0 \le x \le y \le n\}$ a dostáváme

$$I_n = \int_0^n \int_x^n \mathrm{e}^{-x-y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^n \left[-\mathrm{e}^{-x-y}\right]_x^n \mathrm{d}x = \int_0^n \mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x-n}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left[\mathrm{e}^{-x-n} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^n = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2n} - \mathrm{e}^{-n} + \frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}.$$

A integrál konerguje. Také bychom si mohli uvědomit, že $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x-y}$ je symetrická přes osu $y = x$ (nahradíme-li ve funkci y za x a naopak, tak se funkce nezmění)a tedy dostáváme

$$\iint_M \mathrm{e}^{-x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint_N \mathrm{e}^{-x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \text{pro} \qquad N: [0,\infty)^2.$$

Následně volbou $N_n = [0,n]^2$ dostáváme

$$J_n = \int_0^n \int_0^n \mathrm{e}^{-x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\int_0^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^n\right)^2 = \left(1 - \mathrm{e}^{-n}\right)^2 \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Př. 246 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Množina M není ohraničená a integrovaná funkce je nezáporná. Z tvaru funkce hned vidíme, že je rozumné brát vyčerpávající posloupnost množin jako $M_n : x^2+y^2 \le n^2$ a transformovat vše do polárních souřadnic. Tedy $\rho \in [0,n]$, $\varphi \in [0,2\pi]$. Dostaneme

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^n \int_0^{2\pi} \rho\,\mathrm{e}^{-\rho^2}\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho = \left| \begin{array}{c} t=\rho^2 \\ \mathrm{d}t = 2\rho\mathrm{d}\rho \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{n^2} \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = \\ &= \pi\left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{n^2} = \pi\left(1-\mathrm{e}^{-n^2}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \pi. \end{aligned}$$

Proto řekneme, že integrál konverguje. Dále můžeme o integrálu I učinit několik pozorování. Všimněme si, že množina M je symetrická přes osu x i přes osu y. Stejně tak integrovaná funkce $f = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ je symetrická přes osu x i přes osu y (nahradíme-li x za $-x$ nebo y za $-y$ tak se funkce nezmění). Z těchto důvodů můžeme vyjádřit

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\iint_{x\ge 0\, y\ge 0} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Dále uvažme, že volba vyčerpávajících množin $N_n = [0,n]^2$ be nebyla rozumná, protože v takovém případě bychom museli integrovat $\int \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x$ což bychom pomocí normálních metod nesvedli. Předpokládejme na chvíli, že bychom to chtěli zkusit stejně. Měli bychom

$$J_n = \int_0^n \int_0^n \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\int_0^n \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf} x\right)^2,$$

Kde funkce

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t.$$

O této funkci víme například, že $\lim_{x\to\infty} \operatorname{erf} x = 1$. Více informací lze nalézt například na stránce [2].

Př. 247 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-|x|-|y|}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Množina M není ohraničená a integrovaná funkce je nezáporná. Stačí tedy vše spočítat přes jeden vyčerpávající systém. Žádná M_n se nezdá obzvlášť výhodná, zvolíme tedy jednoduše vyčerpávající systém $M_n = [-n, n]^2$ a počítáme

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-n}^{n}\int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{-|x|-|y|}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{-|x|}\, \mathrm{d}x \int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{-|y|}\, \mathrm{d}y = \left(\int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{-|x|}\, \mathrm{d}x\right)^2 = \\ &= \left(\int_{-n}^{0} \mathrm{e}^{x} + \int_{0}^{n} \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x\right)^2 = |\text{subst.} t = -x| = \left(2\int_{-n}^{0} \mathrm{e}^{x}\, \mathrm{d}x\right)^2 = 4\left([\mathrm{e}^{x}]_{-n}^{0}\right)^2 = \\ &= 4\left(1 - \mathrm{e}^{-n}\right)^2 \xrightarrow{n\to\infty} 4. \end{aligned}$$

Tedy integrál konverguje. Všimněme si, že integrovaná funkce je symetrická přes osu x a y můžeme tedy vyjádřit

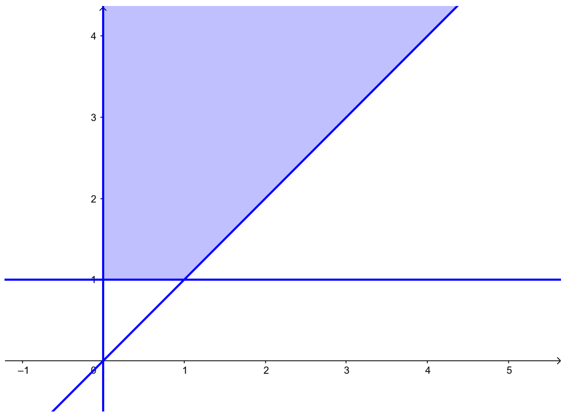
$$\iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-|x|-|y|}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 4 \iint_{x\geq 0\; y\geq 0} \mathrm{e}^{-x-y}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Tento integrál jsme navíc již počítali v příkladě 245, kde jsme zjistili, že tento integrál konverguje k hodnotě 1.

Př. 248 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_M \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \textit{pro} \qquad M:\, y \geq 1,\, 0 \leq x \leq y.$$

Podívejme se nejprve na integrovanou funkci. Ta je nezáporná a má singularitu v počátku $[0,0]$. Podmínka $y \geq 1$ však zaručuje, že množina M je od této singularity dostatečně ohraničena. Vykresleme si tedy podobu množiny M



Vidíme, že množina není ohraničená. Zvolme tedy vhodný systém $M_n : M \cap \mathbb{R} \times [1,n]$. Pokud bychom chtěli nyní popsat množinu M, tak máme dvě různé dolní ohraničení, což nám dá

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 \int_1^n \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \int_x^n \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right]_1^n \mathrm{d}x + \int_0^1 \left[\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right]_x^n \mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{n}{x} - \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{n}{x} - \frac{1}{x}\operatorname{arctg}1\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{n}{x} - \frac{\pi}{4}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Avšak integrál $\int \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{n}{x}\,\mathrm{d}x$ bychom počítali jen obtížně. Z tohoto důvodu by bylo patrně lepší popsat množinu M z jiného směru. Proto budeme integrovat znovu

$$\begin{aligned}
J_n &= \int_1^n \int_0^y \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^n \left[\frac{1}{y}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right]_0^y \mathrm{d}y = \\
&= \int_1^n \frac{1}{y}\operatorname{arctg}1 - \frac{1}{y}\operatorname{arctg}0\,\mathrm{d}y = \int_1^n \frac{1}{y}\operatorname{arctg}1\,\mathrm{d}y = \\
&= \frac{\pi}{4}\left[\ln y\right]_1^n = \frac{\pi}{4}\ln n \xrightarrow{n\to\infty} \infty.
\end{aligned}$$

Nyní již vidíme, že integrál diverguje.

Př. 249 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Z tvaru funkce hned vidíme, že je rozumné brát $M_n : x^2+y^2 \le n^2$ a transformovat vše do polárních souřadnic $\rho \in [0,n]$, $\varphi \in [0,2\pi]$. Dostaneme

$$\int_0^{2\pi}\int_0^n \rho\,\mathrm{e}^{-\rho^2}\cos(\rho^2)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \left| \begin{array}{c} t=\rho^2 \\ \mathrm{d}t = 2\rho\mathrm{d}\rho \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \int_0^{n^2} \mathrm{e}^{-t}\cos t\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{\pi}{2}\left[\mathrm{e}^{-t}(\sin t - \cos t)\right]_0^{n^2} =$$
$$= \frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-n^2}(\sin n^2 - \cos n^2) + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{n\to\infty} |0\cdot \mathrm{OHR.}| \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\pi}{2}.$$

V integrálu používáme výpočet

$$A = \int \mathrm{e}^{-t}\cos t\,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{cc} \cos t & -\sin t \\ \mathrm{e}^{-t} & -\mathrm{e}^{-t} \end{array} \right| = -\,\mathrm{e}^{-t}\cos t - \int \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t =$$
$$= \left| \begin{array}{cc} \sin t & \cos t \\ \mathrm{e}^{-t} & -\mathrm{e}^{-t} \end{array} \right| = -\,\mathrm{e}^{-t}\cos t + \mathrm{e}^{-t}\sin t - \underbrace{\int \mathrm{e}^{-t}\cos t\,\mathrm{d}t}_{=A},$$
$$\Rightarrow 2A = -\,\mathrm{e}^{-t}\cos t + \mathrm{e}^{-t}\sin t.$$

Co jsme však nyní zjistili o integrálu? Zjistili jsme, že přes jeden vyčerpávající systém množin vyjde integrál jako $\frac{\pi}{2}$, a pokud by byla integrovaná funkce nezáporná, tento výsledek by nám i stačil. Všimněme si však, že integrovaná funkce nezáporná není. Funkce $\cos x$ je oscilující a funkce mění znaménko na podmnožinách $k\frac{\pi}{2} \le x^2+y^2 \le k\frac{\pi}{2}+\pi$, pro $k \in \mathbb{N}$. Pokud bychom uvažovali integrál absolutních hodnot, měli bychom

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \left|\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\cos(x^2+y^2)\right|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\left|\cos(x^2+y^2)\right|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le \iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Pokud by větší integrál konvergoval, konvergoval by i náš integrál absolutně. Neboť je absolutní konvergence stejná jako konvergence, konvergoval by tedy i náš integrál. Tento integrál však konverguje což je obsahem příkladu 246. Proto integrál

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

skutečně konverguje k hodnotě $\frac{\pi}{2}$.

Př. 250 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Množina M je neohraničená, ale integrovaná funkce není nezáporná. Avšak platí vztah

$$\left|\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \sin(x^2+y^2)\right| \le \mathrm{e}^{-x^2-y^2},$$

a tedy tento integrál pokud konverguje integrál $\iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, pak konverguje i vyšetřovaný integrál. Toto je však obsahem příkladu 246, a proto rovnou víme, že integrál konverguje. Nyní již zbývá nalézt pouze jeho hodnotu. K tomu musíme zvolit nějaký vyčerpávajícíc systém a přes něj integrál spočítat jako limitu vhodné posloupnosti (limita musí existovat). Z tvaru funkce vidíme, že je rozumné brát $M_n : x^2+y^2 \le n^2$ a transformovat vše do polárních souřadnic $\rho \in [0,n]$, $\varphi \in [0,2\pi]$. Dostaneme

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{2\pi} \int_0^n \rho\,\mathrm{e}^{-\rho^2} \sin(\rho^2)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \left| \begin{array}{c} t=\rho^2 \\ \mathrm{d}t = 2\rho\mathrm{d}\rho \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{n^2} \mathrm{e}^{-t} \sin t\,\mathrm{d}t = \\
&= |\text{2krat per partes a pak zbyly integral prevedeme na druhou stranu}| = \\
&= \frac{\pi}{2}\left[\mathrm{e}^{-t}(-\sin t - \cos t)\right]_0^{n^2} = \\
&= \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-n^2}(-\sin n^2 - \cos n^2) + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{n\to\infty} |0\cdot\text{OHR.}| \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Ve výpočtu používáme výpočet

$$\begin{aligned}
A &= \int \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{cc} \sin t & \cos t \\ \mathrm{e}^{-t} & -\mathrm{e}^{-t} \end{array} \right| = -\mathrm{e}^{-t}\sin t + \int \mathrm{e}^{-t}\cos t\,\mathrm{d}t = \\
&= \left| \begin{array}{cc} \cos t & -\sin t \\ \mathrm{e}^{-t} & -\mathrm{e}^{-t} \end{array} \right| = -\mathrm{e}^{-t}\sin t - \mathrm{e}^{-t}\cos t - \underbrace{\int \mathrm{e}^{-t}\cos t\,\mathrm{d}t}_{=A}, \\
&\Rightarrow 2A = -\mathrm{e}^{-t}\sin t - \mathrm{e}^{-t}\cos t.
\end{aligned}$$

Př. 251 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Množina M není ohraničená a integrovaná funkce je nezáporná. V tomto případě si však musíme všimnout, že funkce má také singulární bod v počátku. Z těchto důvodů volíme vyčerpávající systém $M_n : \frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq n^2$, abychom mohli použít polární souřadnice. Máme tedy

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\rho}{\rho^4}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{1}{\rho^3}\,\mathrm{d}\rho = \\ &= 2\pi \left[\frac{\rho^{-2}}{-2}\right]_{\frac{1}{n}}^{n} = 2\pi \left(\frac{n^2}{2} - \frac{1}{2n^2}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \infty. \end{aligned}$$

Tudíž integrál diverguje.

Př. 252 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_M \frac{1}{1+(x+y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \textit{pro} \qquad M:\, x \geq 0,\, y \geq 0.$$

Množina M není ohraničená a integrovaná funkce je nezáporná. Pro jednoduchost budeme integrovat přes systém množin $M_n : [0,n]^2$ a dostaneme tak

$$I_n = \int_0^n \int_0^n \frac{1}{1+(x+y)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^n [\operatorname{arctg}(x+y)]_0^n\,\mathrm{d}x = \int_0^n \operatorname{arctg}(x+n) - \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left[(x+n)\operatorname{arctg}(x+n) - \frac{1}{2}\ln(1+(x+n)^2) - x\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^n =$$
$$= 2n\operatorname{arctg} 2n - \frac{1}{2}\ln(1+4n^2) - n\operatorname{arctg} n + \frac{1}{2}\ln(1+n^2) - n\operatorname{arctg} n + \frac{1}{2}\ln(1+n^2) =$$
$$= 2n(\operatorname{arctg} 2n - \operatorname{arctg} n) + \ln(1+n^2) - \frac{1}{2}\ln(1+4n^2) = 2n(\operatorname{arctg} 2n - \operatorname{arctg} n) + \frac{1}{2}\ln\frac{(1+n^2)^2}{1+4n^2}.$$

V integrálu používáme výpočet

$$\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} \operatorname{arctg} x & \frac{1}{1+x^2} \\ 1 & x \end{matrix}\right| = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

nyní potřebujeme vyřešit limitu $\lim_{n\to\infty} I_n$ k čemuž můžeme využít následující mezivýsledky

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2n - \operatorname{arctg} n}{\frac{1}{n}} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{1+4n^2} - \frac{1}{1+n^2}}{-\frac{1}{n^2}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} -\left(\frac{2n^2}{1+4n^2} - \frac{n^2}{1+n^2}\right) = -\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2},$$
$$\lim_{n\to\infty} \ln\frac{(1+n^2)^2}{1+4n^2} = \lim_{n\to\infty} \ln\frac{1+2n^2+n^4}{1+4n^2} = \infty.$$

Dohromady tak vidíme, že posloupnost I_n diverguje a tedy diverguje také integrál.

Př. 253 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_M y - x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \textit{pro} \qquad M : 0 \le x \le y.$$

Množina M je neohraničená. Navíc je množina M symetrická přes osu $y = x$ a integrovaná funkce je symetrická přes osu $y = x$. Tedy platí, že máme

$$\iint_M y - x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint_{x\ge 0\, y\ge 0} y - x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Takovýto integrál bychom mohli počítat přes vyčerpávající množinu $M_n = [0, n]^2$. Měli bychom potom

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^n \int_0^n y - x \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^n \left[\frac{y^2}{2} - xy\right]_0^n \mathrm{d}x = \int_0^n \frac{n^2}{2} - nx \,\mathrm{d}x = \\ &= \left[\frac{n^2}{2}x - n\frac{x^2}{2}\right]_0^n = \frac{n^3}{2} - \frac{n^3}{2} = 0. \end{aligned}$$

Řekli bychom, že integrál konverguje. Integrál bychom mohli také uvažovat přes vyčerpávající posloupnost množin $N_n = \{0 \le x \le y \le n\}$. Potom bychom měli integrál

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^n \int_x^n y - x \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^n \left[\frac{y^2}{2} - xy\right]_x^n \mathrm{d}x = \int_0^n \frac{n^2}{2} - nx \underbrace{-\frac{x^2}{2} + x^2}_{=\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \\ &= \left[\frac{n^2}{2}x - n\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right]_0^n = \frac{n^3}{2} - \frac{n^3}{2} + \frac{n^3}{6} = \frac{n^3}{6} \xrightarrow{n\to\infty} \infty. \end{aligned}$$

Hmmm někde musí být chyba. Takto by nám vyšlo, že integrál diverguje. Chyba je hned na několika místech. Funkce $y - x$ není symetrická přes osu $y = x$, ale antisymetrická. Prohodíme-li proměnné y a x dostaneme funkci $x - y$ což ale otočí znaménko. Není tedy divu, že se tyto dvě části odečtou. Uvedený vztah spojující integrály neplatí. Navíc funkce $y - x$ není v prvním kvadrantu nezáporná. Tato funkce má na nekonečné podmnožině M kladné znaménko a na nekonečné podmnožině M záporné znaménko. Což znamená, že o konvergenci integrálu nelze usuzovat pouze na základě jedné vyčerpávající posloupnosti množin. Přes jiný systém bychom dostali jiný výsledek. Spočtěme

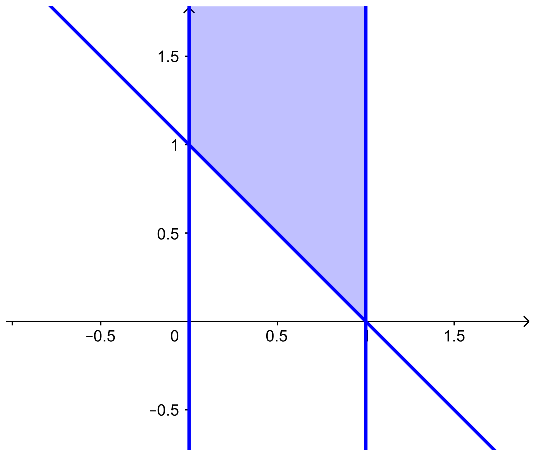
$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{n^4} \int_0^n y - x \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{n^4} \left[\frac{y^2}{2} - xy\right]_0^n \mathrm{d}x = \int_0^{n^4} \frac{n^2}{2} - nx \,\mathrm{d}x = \\ &= \left[\frac{n^2}{2}x - n\frac{x^2}{2}\right]_0^{n^4} = \frac{n^6}{2} - \frac{n^8}{2} \xrightarrow{n\to\infty} -\infty. \end{aligned}$$

Integrál skutečně diverguje.

Př. 254 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_M \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x+y)^p}, \qquad \textit{pro} \qquad M : x+y \geq 1, 0 \leq x \leq 1, p > 0.$$

Množina M není ohraničená a integrovaná funkce je nezáporná. Stačí tedy vše spočítat přes jeden vyčerpávající systém. Množina M si můžeme pro znázornění vykreslit jako



Zde se nabízejí dvě varianty, volit $M_n : x \in [0,1], y \in [1-x, n]$ nebo $M_n : x \in [0,1], y \in [1-x, n-x]$. Kterou zvolit? Pro druhou variantu můžeme zavést vhodnou transformaci $x = x, y = u - x$, kde následně dostaneme $x \in [0,1]$ a $u \in [1, n]$. Nebo rovnou vezmeme

$$I_n = \int_0^1 \int_{1-x}^{n-x} \frac{1}{(x+y)^p} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = x+y \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}y \end{array} \right| = \int_0^1 \int_1^n t^{-p} \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_1^n t^{-p}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} [\ln|t|]_1^n, & p = 1, \\ \left[\frac{t^{1-p}}{1-p}\right]_1^n, & p \neq 1, \end{cases} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} \infty, & 0 < p \leq 1, \\ \frac{1}{p-1}, & p > 1. \end{cases}$$

Pro $p \leq 1$ je tedy integrál divergentní. Pro $p > 1$ je konvergentní. Co kdybychom však zvolili přece jen systém $M_n : x \in [0,1], y \in [1-x, n]$? Přece jen tato volba se může jevit jako očividnější. Potom bychom měli integrál

$$I_n = \int_0^1 \int_{1-x}^n \frac{1}{(x+y)^p} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_0^1 \left[\frac{(x+y)^{1-p}}{1-p}\right]_{1-x}^n \mathrm{d}x, & p \neq 1, \\ \int_0^1 [\ln|x+y|]_{1-x}^n \,\mathrm{d}x, & p = 1. \end{cases}$$

Museli bychom zde rozpracovat dvě varianty. Pokud je $p = 1$ musíme vypočíst

$$\int_0^1 \ln|x+n| - \ln|x+1-x| \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \underbrace{\ln|x+n|}_{x+n>0} \,\mathrm{d}x = [(x+n)\ln(x+n) - x]_0^1 =$$

$$= (n+1)\ln(n+1) - n\ln n = n \ln\frac{n+1}{n} + \ln(n+1) > \ln(n+1) \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

Ještě bychom museli pokračovat ve druhé integrálu

$$\int_0^1 \left[\frac{(x+n)^{1-p}}{1-p} - \frac{(x+1-x)^{1-p}}{1-p}\right]_{1-x}^{n} \mathrm{d}x = \begin{cases} \left[\frac{(x+n)^{2-p}}{(1-p)(2-p)}\right]_0^1 - \frac{1}{1-p}, & p \neq 2, \\ \left[\frac{\ln|x+n|}{1-p}\right]_0^1 - \frac{1}{1-p}, & p = 2, \end{cases} =$$

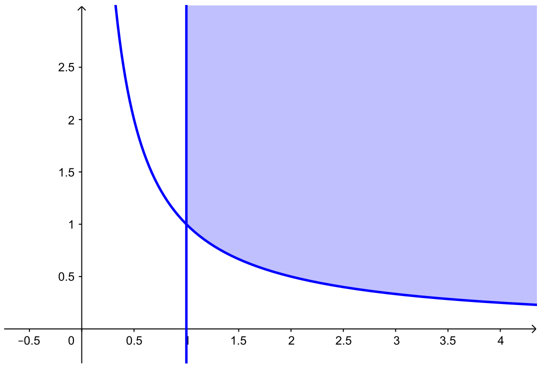
$$= \begin{cases} \frac{(n+1)^{2-p}}{(1-p)(2-p)} - \frac{n^{2-p}}{(1-p)(2-p)} - \frac{1}{1-p}, & p \neq 2, \\ \frac{\ln\frac{n+1}{n}}{1-p} - \frac{1}{1-p}, & p = 2. \end{cases}$$

Pro $p = 2$ bychom dostali konvergentní integrál. Pro $p \neq 2$ bychom zase museli rozvážit situace, které mohou nastat. V kontextu uvedených výpočtů se zvolená substituce nezdá až tak hrozná.

Př. 255 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_M \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^p y^q}, \quad \textit{pro} \quad M: xy \geq 1, x \geq 1, p > 0, q > 0.$$

Množina M není ohraničená a integrovaná funkce je nezáporná. Množinu m si bude nejlepší nejprve graficky znázornit. Máme



Mohli bychom volit různé vyčerpávající množiny. Vzhledem k nerovnosti $xy \geq 1 \Rightarrow y \geq \frac{1}{x}$ vidíme, že bychom si mohli množinu transformovat abychom vyrovnali oblou hyperbolu. Volme $M_n: 1 \leq x \leq n, 1 \leq xy \leq n$ a zavedeme transformaci $x = x, u = yx \Rightarrow y = \frac{u}{x}$ (rovnost $x = x$ není zrovna přesná, ale pro jednoduchost nebudeme proměnnou zbytečně přejmenovávat). Tím získáme $x \in [1, n]$ a $u \in [1, n]$ a transformovaná množina bude čtvercem. Dále spočítáme jakobián transformace jako

$$J = \begin{vmatrix} x_x & x_u \\ y_x & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{u}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x}.$$

Máme tedy

$$I_n = \int_1^n \int_1^n \frac{1}{x^{p+1} \frac{u^q}{x^q}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u = \int_1^n \frac{1}{u^q}\,\mathrm{d}u \int_1^n \frac{1}{x^{p+1-q}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{u^{1-q}}{1-q}\right]_1^n \left[\frac{x^{q-p}}{q-p}\right]_1^n =$$
$$= \frac{1}{(1-q)(q-p)} \left(\frac{1}{n^{q-1}} - 1\right)\left(\frac{1}{n^{p-q}} - 1\right).$$

Výrazy v závorce mohou konvergovat k 0, nebo divergovat k ∞. Rozeberme možné situace. Vidíme, že výrazy v závorkách budou divergovat, pokud $q < 1$ nebo $p < q$. V takovém případě samozřejmě také integrál diverguje. Roznásobíme-li závorky, dostaneme výraz

$$\frac{1}{(1-q)(q-p)} \left(n^{1-p} - n^{1-q} - n^{q-p} + 1\right).$$

Zde vidíme další nezbytnou podmínku, aby integrál konvergoval. Pokud $p < 1$, pak výraz n^{1-p} diverguje a integrál také diverguje. Celkově tak máme, že integrál konverguje pro $p \geq q \geq 1$ k hodnotě $\frac{1}{(1-q)(q-p)}$.

Př. 256 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iiint_M \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^7}, \qquad \textit{pro} \qquad M = [0,\infty)^3.$$

Množina M není ohraničená a integrovaná funkce je nezáporná. Stačí zvolit vhodnou posloupnost vyčerpávajících množin a spočíst přes ně integrál. Volíme $M_n = [0,n]^3$ a dostáváme

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^n \int_0^n \int_0^n \frac{1}{(1+x+y+z)^7}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{6}\int_0^n \int_0^n \left[\frac{1}{(1+x+y+z)^6}\right]_0^n \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \\
&= -\frac{1}{6}\int_0^n \int_0^n \frac{1}{(1+n+y+z)^6} - \frac{1}{(1+y+z)^6}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \\
&= \frac{1}{30}\int_0^n \left[\frac{1}{(1+n+y+z)^5} - \frac{1}{(1+y+z)^5}\right]_0^n \mathrm{d}z = \\
&= \frac{1}{30}\int_0^n \frac{1}{(1+2n+z)^5} + \frac{1}{(1+z)^5} - \frac{2}{(1+n+z)^5}\,\mathrm{d}z \\
&= -\frac{1}{120}\left[\frac{1}{(1+2n+z)^4} + \frac{1}{(1+z)^4} - \frac{2}{(1+n+z)^4}\right]_0^n = \\
&= -\frac{1}{120}\left(\frac{1}{(1+3n)^4} + \frac{3}{(1+n)^4} - \frac{3}{(1+2n)^4} - 1\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{120}.
\end{aligned}$$

Integrál tedy konverguje. Uvažme však navíc, že toto nemusí být nejjednodušší systém vyčerpávajících množin. Ve funkci vystupuje výraz $x+y+z$ a to by nám mohlo připomenou simplex. Pokud bychom tedy uvážili systém simplexů

$$N_n : \, x \geq 0\, y \geq 0\, z \geq 0\, x+y+z \leq n,$$

dostali bychom integrály

$$\begin{aligned}
J_n &= \int_0^n \int_0^{n-x} \int_0^{n-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^7}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\int_0^n \int_0^{n-x} \left[\frac{1}{(1+x+y+z)^6}\right]_0^{n-x-y} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\
&= -\frac{1}{6}\int_0^n \int_0^{n-x} \frac{1}{(1+n)^6} - \frac{1}{(1+x+y)^6}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\frac{n^2}{(1+n)^6} + \frac{1}{6}\int_0^n \int_0^{n-x} \frac{1}{(1+x+y)^6}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\
&= -\frac{1}{6}\frac{n^2}{(1+n)^6} - \frac{1}{30}\int_0^n \left[\frac{1}{(1+x+y)^5}\right]_0^{n-x} \mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\frac{n^2}{(1+n)^6} - \frac{1}{30}\int_0^n \frac{1}{(1+n)^5} - \frac{1}{(1+x)^5}\,\mathrm{d}x = \\
&= -\frac{1}{6}\frac{n^2}{(1+n)^6} - \frac{1}{30}\frac{n}{(1+n)^5} + \frac{1}{30}\int_0^n \frac{1}{(1+x)^5}\,\mathrm{d}x = \\
&= -\frac{1}{6}\frac{n^2}{(1+n)^6} - \frac{1}{30}\frac{n}{(1+n)^5} - \frac{1}{120}\left[\frac{1}{(1+x)^4}\right]_0^n = \\
&= -\frac{1}{6}\frac{n^2}{(1+n)^6} - \frac{1}{30}\frac{n}{(1+n)^5} - \frac{1}{120}\frac{1}{(1+n)^4} + \frac{1}{120} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{120}.
\end{aligned}$$

Výsledek je stejný, ale postup je o něco jednodušší, neboť zde nemusíme integrovat tolik zlomků.

Př. 257 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$I = \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{-x^2-y^2-z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Na první pohled vidíme, že množina M není ohraničená a že integrovaná funkce je nezáporná (kladná). Navíc ve funkci vystupuje výraz $x^2+y^2+z^2$, který se vhodně upraví užitím sférických souřadnic. Zavedli bychom tak vyčerpávající systém $M_n : x^2+y^2+z^2 \le n^2$. V tomto postupu bychom však narazili na problém, že nevíme jak integrovat $\int_0^n \rho^2\,\mathrm{e}^{-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho$. Všimněme si však, že platí nerovnost

$$\begin{aligned}\int_0^n \rho^2\,\mathrm{e}^{-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho &\le \int_0^1 \rho\,\mathrm{e}^{-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho + \int_1^n \rho^3\,\mathrm{e}^{-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho = \\ &= \left[-\frac{\mathrm{e}^{-\rho^2}}{2}\right]_0^1 + \left[-\frac{(\rho^2-1)\,\mathrm{e}^{-\rho^2}}{2}\right]_1^n.\end{aligned}$$

Došli bychom k závěru, že samotný integrál je konvergentní, ale neznáme jeho hodnotu. Protože je integrál konvergentní, musí integrál konvergovat ke stejné hodnotě přes libovolnou posloupnost množin M_n, tj.

$$\begin{aligned}I^2 &\xleftarrow{n\to\infty} \left(\int_{-n}^n \int_{-n}^n \int_{-n}^n \mathrm{e}^{-x^2-y^2-z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right)^2 = \\ &= \left(\int_{-n}^n \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \int_{-n}^n \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y \int_{-n}^n \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z\right)^2 = \left(\int_{-n}^n \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\right)^6 = \\ &= \left(\int_{-n}^n \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \int_{-n}^n \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right)^3 = \\ &= \left(\int_{-n}^n \int_{-n}^n \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^3 \xrightarrow{n\to\infty} \left(\iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^3 = \pi^3.\end{aligned}$$

Zde využijeme výsledek příkladu 246 a toho, že tento integrál vyšel také konvergentní. V příkladě 246 používáme pouze polární souřadnice a proto nám v integrálu vznikne odlišným jakobiánem výraz $\int_0^n \rho\,\mathrm{e}^{-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho$, který snadno spočteme. Víme, že integrál I figurující na levé straně je kladný, dostaneme tedy výsledek $I = \sqrt{\pi^3}$.

Př. 258 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$I = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{e}^{-x^2-z^2} \cos(x^2+z^2)}{y^2+1} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z.$$

Integrační obor není ohraničená množina. Proto počítáme nevlastní integrál. Integrovaná funkce není nezáporná a vzhledem k oscilujícícmu kosinu integrovaná funkce mění znaménko poměrně často. Rozmysleme si tedy nejprve, zda integrál konverguje, nebo diverguje. V absolutních hodnotách můžeme integrál odhadnout jako

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\mathrm{e}^{-x^2-z^2} \cos(x^2+z^2)}{y^2+1} \right| \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \le \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{e}^{-x^2-z^2}}{y^2+1} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z.$$

Tento integrál bychom mohli vyšetřovat přes množiny $M_n : x^2+z^2 \le n^2$, $y \in [-n,n]$, což by nám dalo po zavedení polárních souřadnic

$$I_n = \int_0^n \int_0^{2\pi} \int_{-n}^n \frac{\rho \,\mathrm{e}^{-\rho^2}}{y^2+1} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\rho = \int_{-n}^n \frac{1}{y^2+1} \,\mathrm{d}y \int_0^n \int_0^{2\pi} \rho \,\mathrm{e}^{-\rho^2} \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\rho =$$

$$= \left(\underbrace{\operatorname{arctg} n - \operatorname{arctg}(-n)}_{=2 \operatorname{arctg} n} \right) \int_0^n \int_0^{2\pi} \rho \,\mathrm{e}^{-\rho^2} \pi \xrightarrow{n\to\infty} \pi^2 = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{e}^{-x^2-z^2}}{y^2+1} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z.$$

Zde využíváme výsledku příkladu 246. Každopádně vidíme, že integrál konverguje. Navíc původní integrál můžeme vyšetřovat přes stejný systém M_n a dostali bychom

$$J_n = \int_{-n}^n \frac{1}{y^2+1} \,\mathrm{d}y \int_0^n \int_0^{2\pi} \rho \,\mathrm{e}^{-\rho^2} \cos \rho^2 \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\rho \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\pi^2}{2} = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{e}^{-x^2-z^2} \cos(x^2+z^2)}{y^2+1} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z,$$

kde tentokrát využijeme příkladu 249 a předchozího výpočtu.

6.2 Singulární bod

Př. 259 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_M \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \textit{pro} \qquad M:\ x^2+y^2 \le 1.$$

Vidíme, že integrovaná funkce

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

má singularitu v počátku. Vždyť pokud bychom uvážili libovolně malé okolí bodu $[0,0]$, tak v tomto okolí musí být nějaký bod tvaru $[10^{-k},0]$ jehož funkční hodnota pak je

$$f(10^{-k},0) = \frac{1}{10^{-2k}} = 10^{2k}.$$

Chceme tedy nalézt smršťující systém množin M_n které se smršťují k počátku. Volíme M_n : $x^2+y^2 \ge \frac{1}{n^2}$, neboť v integrované funkci vystupuje výraz x^2+y^2, který se dobře uváží po použití polárních souřadnic. Množina M je navíc kružnice, a proto bychom měli $M \setminus M_n$ mezikruží, které se v polárních souřadnicích popíše dobře. Dostaneme integrál

$$\begin{aligned} I_n &= \iint_{M\setminus M_n} \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\rho}{\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= 2\pi\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{\rho}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\,[\ln\rho]_{\frac{1}{n}}^1 = 2\pi\left(\ln 1 - \ln\frac{1}{n}\right) = 2\pi\,(\ln 1 + \ln n)\,. \end{aligned}$$

Vidíme, že $\lim_{n\to\infty} I_n = \infty$. Protože přes jeden vyčerpávající systém vyšla limita divergentní, tak nás ostatní systémy nezajímají a integrál diverguje.

Pokud bychom chtěli ukázat, zdali limita konverguje, nebo diverguje. Mohli bychom volit také například jiný systém. Například čtverce $\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]^2$. Přes ně by se však integrál dopočítával pracně, neboť množina M bez tohoto čtverce by byla ošklivá. Na druhou stranu nám by stačilo ukázat, že integrál konverguje, nebo diverguje na menší množině než je celá M. Pokud bychom zmenšili množinu M například na čtverec $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]^2$ ubrali bychom z integrálu pouze konečnou hodnotu a tady by divergencii/konvergenci neovlivnila.

Př. 260 *Vypočtěte nevlastní integrál*

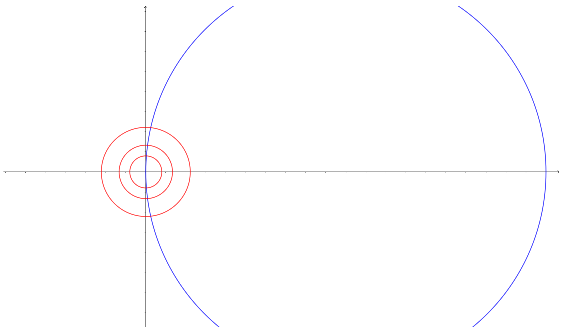
$$\iint_M \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \textit{pro} \qquad M: 0 < x^2+y^2 \le x.$$

Množina M je nějaký posunutý kruh. Úpravou na čtverec dostaneme $0 \ge x^2+y^2-x = (x-1/2)^2+y^2-\frac{1}{4}$, že se jedná o kruh se středem $[1/2, 0]$ a poloměrem $r=\frac{1}{2}$. Na hranici kruhu tak leží bod $[0,0]$ což je pro nás důležité. Vidíme, že $f(x,y)$ má singularitu v bodě $A=[0,0]$ neboť nám tak vznikne nula ve jmenovateli.

Hledáme množinu, která se smršťuje k bodu A. Takovou množinou je například $M_n : x^2+y^2 \le \frac{1}{n^2}$. Vidíme, že A je vnitřním bodem M_n pro každé $n \in \mathbb{N}$ a že průměr $d(M_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Spočítáme tedy

$$\iint_{M\setminus M_n} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Množina $M \setminus M_n$ je kruh ze kterého vyřízneme srpek kolečka.



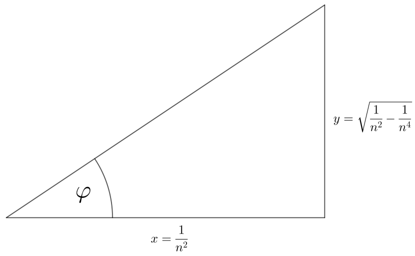
V integrované funkci vystupuje výraz x^2+y^2 a množiny M_n jsou kružnice se středem v počátku. Z těchto důvodů bychom mohli zkusit zavést klasické polární souřadnice. Pro poloměr dostaneme dosazení do nerovnosti určující množinu $M \setminus M_n$, že

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} < \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi &\le \rho\cos\varphi \\ \frac{1}{n^2} < \rho^2 &\le \rho\cos\varphi \\ \frac{1}{n} < \rho &\le \cos\varphi. \end{aligned}$$

Máme tedy interval pro poloměr. Potřebujeme ještě určit úhel φ. Situaci bychom si mohli zjednodušit, pokud bychom si řekli, že $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Jak však vidíme z obrázku, s rostoucím n se množina $M \setminus M_n$ přibližuje k ose y, ale nikdy se jí nedotkne. Musíme tedy najít průsečíky kružnic ohraničujících množiny M_n a M. Řešíme tedy soustavu

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= \frac{1}{n^2} \\ x^2+y^2 &= x. \end{aligned}$$

Odečtením rovnic od sebe dostaneme vztah $x = 1/n^2$ a po dosazení do rovnice $x^2+y^2 = x$ získáme také druhou souřadnici průsečíku jako $y = \pm\sqrt{1/n^2 - 1/n^4}$. Dostaneme tak pravoúhlý trojúhelník



z něhož dostaneme vztah

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4}}}{\frac{1}{n^2}} = \pm n^2\sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4}} = \pm\sqrt{n^2 - 1}.$$

Proto jsou hraniční úhly dány jako $\varphi = \pm \operatorname{arctg}\sqrt{n^2 - 1}$. Vidíme, že pro rostoucí n jdou tyto úhly limitně k $\varphi \xrightarrow{n\to\infty} \pm\frac{\pi}{2}$. Do intervalu pro φ patří také nula a nutně tak vyplývá, že $-\operatorname{arctg}\sqrt{n^2 - 1} \leq \varphi \leq \operatorname{arctg}\sqrt{n^2 - 1}$. Dostáváme konečně integrál

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-\operatorname{arctg}\sqrt{n^2-1}}^{\operatorname{arctg}\sqrt{n^2-1}} \int_{1/n}^{\cos\varphi} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2}} \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi = \int_{-\operatorname{arctg}\sqrt{n^2-1}}^{\operatorname{arctg}\sqrt{n^2-1}} \left(\cos\varphi - \frac{1}{n}\right) \mathrm{d}\varphi = \\ &= \left[\sin\varphi - \frac{\varphi}{n}\right]_{-\operatorname{arctg}\sqrt{n^2-1}}^{\operatorname{arctg}\sqrt{n^2-1}} = \left|\sin x \text{ a } \frac{1}{x} \text{ liché fce}\right| = \\ &= 2\sin\operatorname{arctg}\sqrt{n^2 - 1} - 2\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{n^2 - 1}}{n}. \end{aligned}$$

V první části máme složení spojitých funkcí $\sin x$, $\operatorname{arctg} x$, $\sqrt{x}$ a ve druhé části pak ohraničenou funkci vynásobenou něčím, co jde limitně do nuly. Dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 2\sin\lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg}\sqrt{n^2 - 1} - 0 = 2\sin\overbrace{\operatorname{arctg}\underbrace{\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2 - 1}}_{\to\infty}}^{\to\frac{\pi}{2}} = 2\sin(\pi/2) = 2.$$

Takto dostaneme výsledek jen přes jeden systém. Přesto je to takto dostatečné, protože integrovaná funkce $f = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \geq 0$ a integrál je tedy vskutku konvergentní a jeho hodnota je 2.

Př. 261 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_M (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená $x^2+y^2 \le A^2$, $A>0$.

Vidíme, že integrovaná funkce není definována v počátku, protože by zde vznikl logaritmus nuly. Funkce f má tedy singulární bod uvnitř množiny M. Zavedeme smršťující množiny M_n dané ohraničením $\frac{1}{n^2} \le x^2+y^2 \le A^2$, která je tvořena kružnicí. Zvolíme polární souřadnice $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Dosazením do omezení dostaneme $1/n \le \rho \le A$. Navíc Neboť nemáme další podmínky, po transformaci je $\varphi \in [0,2\pi]$. Počítáme

$$\begin{aligned}
I_n &= \iint_{M_n} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_{1/n}^{A} \rho\left(\rho^2\right)\underbrace{\ln\rho^2}_{=2\ln\rho}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= 4\pi\int_{1/n}^{A}\rho^3\ln\rho\,\mathrm{d}\rho = \left|\begin{array}{cc} \ln\rho & \frac{1}{\rho} \\ \rho^3 & \frac{\rho^4}{4}\end{array}\right| = 4\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\ln\rho\right]_{1/n}^{A} - \pi\int_{1/n}^{A}\rho^3\,\mathrm{d}\rho = \\
&= A^4\pi\ln A - \frac{\pi}{n^4}\ln\frac{1}{n} - \pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_{1/n}^{A} = A^4\pi\ln A - \frac{\pi}{n^4}\ln\frac{1}{n} - \frac{A^4}{4}\pi + \frac{\pi}{4n^4}.
\end{aligned}$$

Nyní musíme pouze určit $\lim_{n\to\infty} I_n$. Využijeme k tomu limitu

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{\ln\frac{1}{n}}{n^4} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^4} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n^4} = 0.$$

Proto je $\lim_{n\to\infty} I_n = A^4\pi\ln A - \frac{A^4}{4}\pi$ a platí

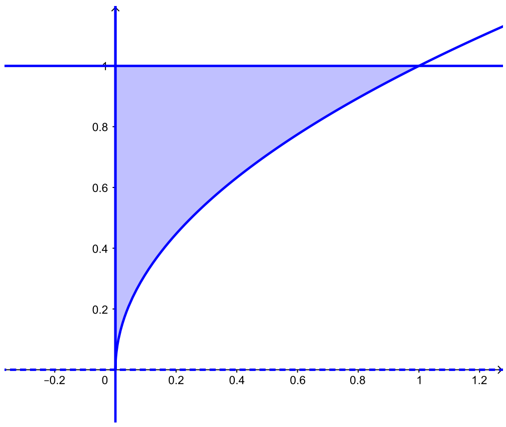
$$\iint_M (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = A^4\pi\ln A - \frac{A^4}{4}\pi.$$

Tedy integrál konverguje. Proč tomu však tak je? Nalezli jsme limitu jen pro jeden systém smršťujících se množin. Navíc integrovaná funkce $f=(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$ ani není nezáporná. Popravdě je dokonce záporná uvnitř kruhu $x^2+y^2<1$. To je však pointou celého přístupu. Je-li integrál z funkce $-f$ konvergentní, musí být konvergentní také integrál z funkce f. Pokud je $A\ge 1$, tak integrovaná funkce mění na M znaménko. Část množiny $x^2+y^2\ge 1$ však konvergenci celého integrálu pokazit nemůže.

Př. 262 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_M \mathrm{e}^{x/y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \textit{pro} \qquad M: 0 < y \le 1, x \ge 0, y \ge \sqrt{x}.$$

Množina M je ohraničená a vypadá následovně



Z definičního oboru funkce $f(x,y) = \mathrm{e}^{x/y}$ vidíme, že v bodě $[0,0]$ se nachází singularita. Singularita se nachází popravdě na celé ose x, kde platí $y = 0$. Avšak z osy x leží v množině M pouze počátek. Navíc je exponenciála nezápornou funkcí a tedy i integrovaná funkce je nezáporná. Jak zvolit smršťující se množiny? Mohli bychom volit například $M_n : x^2 + y^2 \le \frac{1}{n^2}$. Takováto úvaha by nás patrně dovedla na polární souřadnice, ale jak bychom pomocí nich určili integrovanou množinu? Snadno si rozmyslíme, že v tomto případě by bylo $\varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ a rozsah pro poloměr by se určoval značně komplikovaně. Například dosazení do nerovnosti $y \ge \sqrt{x}$ by nám dalo $\rho \sin\varphi \ge \sqrt{\rho\varphi}$. Tahle nerovnost by nám dala dolní mez pro poloměr pro jisté úhly. Pro další úhly bychom po úvaze dostali dolní ohraničení $\frac{1}{n}$. Práci bychom si jistě neusnadnili. Co zvolit jinou volbu? $M_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]^2$ Tato volba by nám dala $M \setminus M_n = \{\frac{1}{n} \le y \le 1, 0 \le x \le y^2\}$. Pokud bychom však chtěli integrál počítat přes tuto množinu, tak musíme uvážit následující

$$\iint_{M\setminus M_n} \mathrm{e}^{x/y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \int_{\frac{1}{n}}^1 \mathrm{e}^{x/y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \mathrm{e}^{x/y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Na druhou stranu není řečeno, že musíme na množinu $M \setminus M_n$ aplikovat Fubiniho větu z tohoto úhlu. Stejně tak můžeme intergál popsat jako

$$\iint_{M\setminus M_n} \mathrm{e}^{x/y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{n}}^1 \int_0^{y^2} \mathrm{e}^{x/y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Takto spojíme integrály do jednoho a ušetříme si práci. Volba se zdá docela rozumná. Dostáváme

$$I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 \int_0^{y^2} \mathrm{e}^{x/y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left[\frac{\mathrm{e}^{x/y}}{\frac{1}{y}}\right]_0^{y^2} \mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{n}}^1 y\,\mathrm{e}^y - y\,\mathrm{d}y = \left|\begin{array}{cc} y & 1 \\ \mathrm{e}^y & \mathrm{e}^y \end{array}\right| =$$

$$= \left[(y-1)\,\mathrm{e}^y - \frac{y^2}{2}\right]_{\frac{1}{n}}^1 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}.$$

Integrál konverguje. Nakonec si rozmysleme, zda dovedeme integrál

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \int_{\frac{1}{n}}^1 \mathrm{e}^{x/y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

spočítat? Nedovedli, protože s integrálem $\int \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$ bychom pomocí obvyklých metod nepohli.

Př. 263 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_M \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \textit{pro} \qquad M: 0 < x^2+y^2 \leq a^2, a > 0.$$

Z definičního oboru vidíme, že máme singularitu v bodě $[0,0]$, neboť nula ve jmenovateli nám dá nekonečně velkou hodnotu. V závislosti na hodnotě a integrovaná funkce nemusí být nezáporná. Avšak v dostatečně malém okolí počátku bude funkce nezáporná (když bude zlomek ≥ 1) a na zbytku množiny M musí být integrál konečný. Z tvaru funkce a množiny M vidíme, že bude vhodné vše transformovat do polárních souřadnic. Volíme tedy smršťující množiny $M_n : x^2+y^2 \leq \frac{1}{n^2}$. Tím získáme v polárních souřadnicích $\rho \in [1/n^2, a]$ a $\varphi \in [0, 2\pi]$. Dostaneme

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{2\pi} \int_{1/n^2}^a \rho \ln \frac{1}{\sqrt{\rho^2}} \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi = -\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{1/n^2}^a \rho \ln \rho \mathrm{d}\rho = \left| \begin{array}{cc} \ln \rho & \frac{1}{\rho} \\ \rho & \frac{\rho^2}{2} \end{array} \right| = \\ &= -2\pi \left[\frac{\rho^2}{2} \ln \rho - \frac{\rho^2}{4} \right]_{1/n}^a = -2\pi \left(\frac{a^2}{2} \ln a - \frac{a^2}{4} - \frac{1}{2n^2} \ln \left(\frac{1}{n} \right) + \frac{1}{4n^2} \right). \end{aligned}$$

Pomocí L'hospitalova pravidla dostaneme, že

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{\ln(1/n)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n^2} = 0,$$

a tedy $\lim_{n\to\infty} I_n = \pi a^2 \left(\frac{1}{2} - \ln a \right)$. Všimněme si nakonec, jaký vliv má parametr a na hodnotu integrálu. Zvětšuje-li se a, zvětšuje se také integrovaná množina M. Čím je však bod $[x, y]$ vzdálenější od počátku, tím je zlomek $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ menší což znamená, že větší část funkčních hodnot integrované funkce je záporná.

Př. 264 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_M \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad pro \qquad M = [0,1]^2.$$

Vidíme, že integrovaná funkce

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{y}}$$

má nejen singularitu v počátku, ale má singularita na celém kříži $\{[x,0] | x \in [0,1]\} \cup \{[0,y] | y \in [0,1]\}$. Vždyť je-li $x = 0$ nebo $y = 0$, tak nám ve jmenovateli vznikne 0. Chceme tedy nalézt vyčerpávající systém M_n který by vyčerpával čtverec M. Takový systém může tvořit například $M_n : \left[\frac{1}{n}, 1\right]^2$, přes který by se nám integrál dobře počítal. Dostaneme

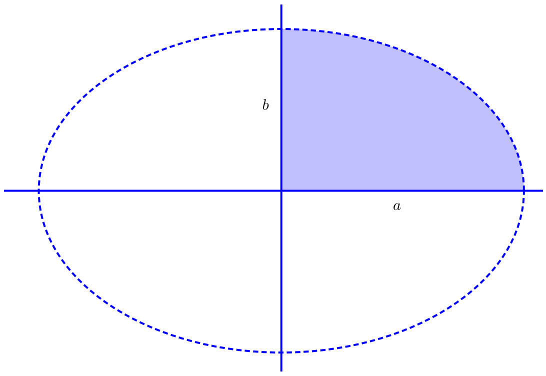
$$\begin{aligned} I_n &= \int_{\frac{1}{n}}^{1}\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left[2\sqrt{x}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} \left[2\sqrt{y}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} = \\ &= \left(2\sqrt{1} - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2. \end{aligned}$$

Protože je integrovaná funkce $f = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{y}} \geq 0$, tak nám stačí určit integrál pouze přes jeden systém množin M_n. Máme tedy $\lim_{n\to\infty} I_n = 4$. Integrál konverguje.

Př. 265 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_M \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}, \qquad \textit{pro} \qquad M: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1, x\geq 0, y\geq 0, a>0, b>0.$$

Všimněme si nejprve, proč se jedná o nevlastní integrál. Integrovaná funkce je definovaná pokud pod odmocninou není záporné číslo, tj. pokud je $1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\geq 0$. Tato podmínka je na množině M splněna. Avšak pro $1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ nám vznikne nula ve jmenovateli. Hranice množiny M je částí elipsy a tedy máme množinu M



Singularitou je zde celá část hranice elipsy. Volíme tedy vyčerpávající systém $M_n: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1-\frac{1}{n}, x\geq 0, y\geq 0$ čímž se budeme blížit po menších elipsách k hranici. Tato volba nám nejen hezky vyčerpá množinu M, ale navíc je vhodná vzhledem k podobě integrované funkce. Zvolme transformaci do eliptických souřadnic $x=a\rho\cos\varphi$, $y=b\rho\sin\varphi$ čímž dosazení do podmínky dostaneme

$$\frac{a^2\rho^2\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{b^2\rho^2\sin^2\varphi}{b^2}=\rho^2\leq 1-\frac{1}{n}.$$

Další nerovnosti nám dají $a\rho\cos\varphi=x\geq 0\Rightarrow\cos\varphi\geq 0$, $b\rho\sin\varphi=y\geq 0\Rightarrow\sin\varphi\geq 0$. Ať už z obrázku nebo z nerovností analyticky dostaneme rozsahy $\rho\in[0,\sqrt{1-1/n}]$, $\varphi\in[0,\pi/2]$. Počítáme

$$I_n=\int_0^{\sqrt{1-1/n}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{ab\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho=\left|\begin{array}{c} t^2=1-\rho^2 \\ t\,\mathrm{d}t=-\rho\mathrm{d}\rho \end{array}\right|=-ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_1^{\frac{1}{n}}\frac{t}{\sqrt{t^2}}\,\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{\pi}{2}ab\int_{\frac{1}{n}}^1 1\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}ab\left(1-\frac{1}{n}\right)\xrightarrow{n\to\infty}\frac{\pi}{2}ab.$$

Protože má odmocnina vždy nezáporné hodnoty, je také integrovaná funkce $f=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\geq 0$ na množině M. Proto máme, že integrál je roven $\frac{\pi}{2}ab$ a konverguje.

Př. 266 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_M \ln(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad \textit{pro} \quad M:\ x^2+y^2\leq 1.$$

Vidíme, že integrovaná funkce

$$f(x,y)=\ln(1-x^2-y^2)$$

má singularity v bodech kružnice $x^2+y^2=1$, neboť logaritmus není na okolí nuly ohraničený. Integrovaná funkce sice není nezáporná, ale je na M záporná a tedy nám stačí vyřešit integrál přes jednu vyčerpávající posloupnost. Zavedeme tedy vyčerpávající systém $M_n:\ \left(1-\frac{1}{n}\right)^2\geq x^2+y^2$, který se bude blížit vhodně k hranici kružnice. Na výpočet integrálu pak použijeme vhodně polární souřadnice. Dostaneme integrál

$$I_n=\iint_{M_n}\ln(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\frac{1}{n}}\rho\ln(1-\rho^2)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi=\left|t=1-\rho^2\right|$$
$$=\pi\int_{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}^{1}\ln t\,\mathrm{d}t=\begin{vmatrix}\ln t & \frac{1}{t}\\ 1 & t\end{vmatrix}=\pi\left[t\ln t-t\right]_{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}^{1}=\pi\left(\frac{2n-1}{n^2}-1-\frac{(2n-1)\ln\frac{2n-1}{n^2}}{n^2}\right)$$

Dále uvažme, že

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)\ln\frac{2n-1}{n^2}}{n^2}=\left|\frac{-\infty}{\infty}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2\ln\frac{2n-1}{n^2}+\frac{2n-1}{\frac{2n-1}{n^2}}\frac{2n^2-(2n-1)2n}{n^4}}{2n}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\ln\frac{2n-1}{n^2}+\frac{2n(1-n)}{n^2}}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\ln\frac{2n-1}{n^2}+2\frac{1-n}{n}}{2n}.$$

Obdobně pak máme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{2n-1}{n^2}}{n}=\left|\frac{-\infty}{\infty}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\frac{2n-1}{n^2}}\frac{2n^2-(2n-1)2n}{n^4}}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-2n^2}{(2n-1)n^2}=0.$$

Dohromady tak máme, že je $\lim_{n\to\infty}I_n=-\pi$ a integrál konverguje.

Př. 267 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iiint_M \ln(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \qquad \textit{pro} \qquad M: 0 < x^2+y^2+z^2 \le a^2,\, a>0.$$

Z tvaru integrované funkce vidíme, že má singularitu v bodě $[0,0,0]$ neboť logaritmus je v okolí nuly neohraničený. Integrovaná funkce není nezáporná, ale na dostatečně malém okolí počátku je záporná. Stačí nám tedy integrál určit pouze přes jeden systém smršťujících se množin. Ve funkci vystupuje výraz $x^2+y^2+z^2$ a vidíme, že je rozumné brát $M_n: x^2+y^2+z^2 \ge \frac{1}{n^2}$ a transformovat vše do sférických souřadnic $\rho \in [1/n, a]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, \pi]$. Dostaneme

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_{\frac{1}{n^2}}^{a}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \rho^2 \sin\theta \ln\rho^2 \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{n^2}}^{a}\rho^2 \underbrace{\ln\rho^2}_{=2\ln\rho}\,\mathrm{d}\rho = \\
&= \left| \begin{array}{cc} \ln\rho & \frac{1}{\rho} \\ \rho^2 & \frac{\rho^3}{3} \end{array} \right| = 2\pi \underbrace{\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}}_{=2} \left[\frac{2}{3}\rho^3\ln\rho - \frac{2}{9}\rho^3\right]_{\frac{1}{n^2}}^{a} = \\
&= 4\pi\left(\frac{2}{3}a^3\ln a - \frac{2}{9}a^3 + \frac{2\ln n^2}{3n^3} + \frac{2}{9n^3}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{8\pi a^3}{3}\left(\ln a - \frac{1}{3}\right).
\end{aligned}$$

Integrál konverguje.

Př. 268 *Vypočtěte integrál*

$$\iiint_V \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde V je dána omezeními $x^2+y^2-1 \le z \le 1-x^2-y^2$.

Všimněme si nejprve, že funkce není ohraničená v okolí počátku $[0,0]$, což ale zahrnuje celou osu z, tj. všechny body $[0,0,z]$. Položíme-li v nerovnosti $x=y=0$, tak dostaneme nerovnost $-1\le z\le 1$ což poukazuje na fakt, že v množině M leží část osy z. Máme tedy nevlastní integrál z nezáporné funkce. Vzhledem k tvaru množiny V (jedná se o průnik dvou paraboloidů) zavedeme válcové souřadnice. Dostáváme nerovnosti $\rho^2-1\le z\le 1-\rho^2$ jejichž kombinací odvodíme $\rho^2-1\le 1-\rho^2 \Rightarrow \rho\le 1$.

Neboť máme nevlastní integrál, musíme ještě vytvořit vyčerpávající množinu V_n. Vzhledem k válcovým souřadnicím můžeme výhodně uvážit V_n danou skrze omezení $x^2+y^2-1\le z\le 1-x^2-y^2$ a $\frac{1}{n^2}\le x^2+y^2$, tj. vyřízneme z V úzký válec. Počítáme

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{2\pi}\int_{1/n}^{1}\int_{\rho^2-1}^{1-\rho^2} \rho\frac{1}{\rho^4}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\int_{1/n}^{1}\frac{1}{\rho^3}\left(1-\rho^2-\rho^2+1\right)\mathrm{d}\rho = \\ &= 2\pi\int_{1/n}^{1}\frac{2}{\rho^3}-\frac{2}{\rho}\,\mathrm{d}\rho = 2\pi\left[\frac{2\rho^{-2}}{-2}-2\ln\rho\right]_{1/n}^{1} = 2\pi\left(-1+n^2-2\ln n\right). \end{aligned}$$

Poté bereme

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \lim_{n\to\infty} I_n = 2\pi\lim_{n\to\infty} -1+n^2-2\ln n = \\ &= 2\pi\lim_{n\to\infty} -1+n\left(n-2\underbrace{\frac{\ln n}{n}}_{\to 0}\right) = \infty. \end{aligned}$$

Integrál diverguje.

6.3 Pokročilejší příklady

Př. 269 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\int \cdots \int_{[1,\infty)^k} \frac{1}{x_1^2 \cdot \dots \cdot x_k^2} \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_k.$$

Integrační obor je neohraničený a integrovaná funkce je nezáporná. I pro k rozměrný integrál můžeme volit vyčerpávací množinu $M_n = [1, n]^k$. Dostáváme

$$\begin{aligned} I_n &= \int \cdots \int_{[1,n]^k} \frac{1}{x_1^2 \cdot \dots \cdot x_k^2} \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_k = \int_1^n \frac{1}{x_1^2} \mathrm{d}x_1 \cdots \int_1^n \frac{1}{x_k^2} \mathrm{d}x_k = \\ &= \left(\int_1^n \frac{1}{x_1^2} \mathrm{d}x_1 \right)^k = \left(\left[-\frac{1}{x_1} \right]_1^n \right)^k = \left(-\frac{1}{n} + 1 \right)^k. \end{aligned}$$

Nyní vidíme, že platí $\lim_{n\to\infty} I_n = 1$. Integrál konverguje.

Př. 270 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}.$$

Množina M není ohraničená a integrovaná funkce je nezáporná. Množina M je celou rovinou, proto nám nedává žádné specifické požadavky na volbu M_n. Přesto vidíme, že integrál nevyjde jednoduše pro každý systém M_n. Výraz $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$ se upraví dobře v astroidových souřadnicích. Volíme tedy $M_n : x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}} \leq n^{\frac{2}{3}}$ a transformaci $x=\rho\cos^3\varphi$, $y=\rho\sin^3\varphi$. Potom máme po dosazení, že je $\rho^{\frac{2}{3}} \leq n^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \rho \in [0,n]$. Navíc pak máme $\varphi\in[0,2\pi]$ neboť Popisujeme celý vnitřek Astroidy kolem dokola 360°. Podobně si můžeme uvědomit, že na φ po dosazení nevznikají žádné požadavky. Dostaneme

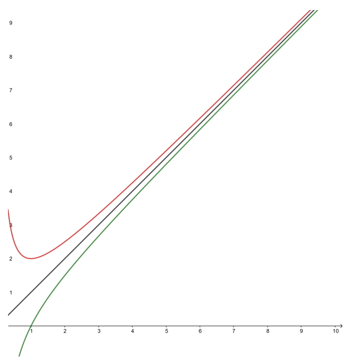
$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^n \int_0^{2\pi} \frac{\frac{3}{4}\rho\sin^2 2\varphi}{1+\rho^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho = \left| \begin{array}{c} t^3=\rho^2 \\ 3t^2\,\mathrm{d}t = 2\rho\mathrm{d}\rho \end{array} \right| = \\
&= \frac{9}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi \int_0^{n^{\frac{2}{3}}} \frac{t^2}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{9}{8}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi \int_0^{n^{\frac{2}{3}}} t-1+\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{9}{8}\left[\frac{\varphi}{2}-\frac{\sin 4\varphi}{8}\right]_0^{2\pi} \left[\frac{t^2}{2}-t+\ln|1+t|\right]_0^{n^{\frac{2}{3}}} = \frac{9}{8}\pi\left(\frac{n^{\frac{4}{3}}}{2}-n^{\frac{2}{3}}+\ln\left|1+n^{\frac{2}{3}}\right|\right) = \\
&= \frac{9}{8}\pi\left(n^{\frac{2}{3}}\left(\frac{n^{\frac{2}{3}}}{2}-1\right)+\ln\left|1+n^{\frac{2}{3}}\right|\right) \xrightarrow{n\to\infty} \infty.
\end{aligned}$$

Dostáváme tedy, že integrál diverguje.

Př. 271 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\iint_M \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \textit{pro} \qquad M:\, x\geq 1,\, x-\frac{1}{x}\leq y \leq x+\frac{1}{x}.$$

O vyšetřované množině M si můžeme všimnout hned několika věcí. Nejprve si vykresleme funkce $y=x\pm\frac{1}{x}$ spolu s přímkou $y=x$. Máme obrázek



Vidíme, že množina M není ohraničená. Také vidíme, že integrovaná funkce má singularitu na ose x, tj. pro hodnoty $y=0$. Na hranici množiny M leží jediný bod osy x a tím je bod $[1,0]$. Proto máme na množině M také singulární bod. Integrovaná funkce je však zato nezáporná.

Vyšetřujme tedy nejprve integrál na množinách tvaru $M_n: A \le x \le n,\ x - \frac{1}{x} \le y \le x + \frac{1}{x}$, pro $A > 1$. Dostali bychom

$$\begin{aligned} I_n &= \int_A^n \int_{x-\frac{1}{x}}^{x+\frac{1}{x}} \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_A^n \left[-\frac{1}{y}\right]_{\frac{x^2-1}{x}}^{\frac{x^2+1}{x}} \mathrm{d}x = \int_A^n \frac{x}{x^2-1} - \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_A^n \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\ln|x-1|| + \ln|x+1| - \ln(x^2+1)\right]_A^n = \\ &= \frac{1}{2}\underbrace{\ln\frac{n^2-1}{n^2+1}}_{\ln\left(1-\frac{2}{n^2+1}\right)} - \frac{1}{2}\ln\frac{A^2-1}{A^2+1} \xrightarrow{n\to\infty} -\frac{1}{2}\ln\frac{A^2-1}{A^2+1} \xrightarrow{A\to 1^+} \left|\ln\frac{0}{2}\right| = \infty. \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že integrál diverguje.

Př. 272 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$I = \iiint_M \frac{(y^2+z^2)\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \qquad \textit{pro} \qquad M : y^2+z^2 \leq 4,\ x \geq 1.$$

Integrovaná množina je tvořena válcem, který však není ohraničený vůči proměnné x shora. Množina M tedy není omezená. Jedná se tedy o nevlastní integrál, kde však integrovaná funkce není nezáporná, ale mění znaménko. Proto vyšetřujme nejprve integrál absolutních hodnot. Platí

$$\iiint_M \left|\frac{(y^2+z^2)\cos x}{x^2}\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \leq \iiint_M \frac{y^2+z^2}{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Počítejme integrál přes vyčerpávající množinu $M_n : y^2+z^2 \leq 4,\ x \in [1,n]$ a zaveďme pro její vyšetření polární souřadnice. Dostaneme

$$I_n = \iiint_{M_n} \frac{y^2+z^2}{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_1^n \frac{\rho^2}{x^2}\cdot\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \int_1^n \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho^3\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi =$$
$$= 2\pi\left[-\frac{1}{x}\right]_1^n\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi\left(-\frac{1}{n}+1\right) \xrightarrow{n\to\infty} 8\pi.$$

Vidíme tedy, že větší z integrálů konverguje a tedy i původní integrál konverguje. Chtěli bychom tedy počítat původní integrál a k tomu můžeme využít stejný systém M_n. Máme tak

$$J_n = \iiint_{M_n} \frac{y^2+z^2}{x^2}\cos x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_1^n \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x \int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho^3\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = 8\pi\int_1^n \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

K výpočtu tohoto integrálu nevede žádná nám známá cesta. Cestou však může být vše spojit se sinovým trigonomickým integrálem, který je daný jako

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Dostaneme

$$8\pi\int_1^n \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{cc} \cos x & \sin x \\ \frac{1}{x^2} & -\frac{1}{x}\end{array}\right| = 8\pi\left[-\frac{\cos x}{x}\right]_1^n + 8\pi\int_1^n \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= 8\pi\left(\cos 1 - \frac{\cos n}{n}\right) + 8\pi(\mathrm{Si}(n) - \mathrm{Si}(1)).$$

Nyní výsledek závisí na chování funkce $\mathrm{Si}(x)$. O této funkci víme několik věcí. Například to, že $\lim_{x\to\infty}\mathrm{Si}(x) = \frac{\pi}{2}$. Proto máme

$$\lim_{n\to\infty} J_n = \lim_{n\to\infty} 8\pi\left(\cos 1 - \frac{\cos n}{n}\right) + 8\pi(\mathrm{Si}(n)-\mathrm{Si}(1)) = 8\pi\cos 1 + 8\pi\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(1)\right) \approx 29,28.$$

Integrál konverguje.

Př. 273 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$I_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \,\mathrm{e}^{-x^2} \,\mathrm{d}x,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

pro prvních několik hodnot k.

První si rozmysleme, zda tento integrál vůbec konverguje. Obecně však platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| x^k \,\mathrm{e}^{-x^2} \right| \mathrm{d}x = 2 \int_{0}^{\infty} x^k \,\mathrm{e}^{-x^2} \,\mathrm{d}x \le$$
$$\le A + 2 \int_{N}^{\infty} \mathrm{e}^{x} \,\mathrm{e}^{-x^2} \,\mathrm{d}x \le A + 2 \int_{N}^{\infty} \mathrm{e}^{x} \,\mathrm{e}^{-2x} \,\mathrm{d}x = A + 2 \int_{N}^{\infty} \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x.$$

Protože můžeme integrál odhadnou shora konvergentním integrálem, tak i původní integrál konverguje pro libovolné k. Hodnoty A a N jsou pouze vhodné dostatečně velké konstanty. Dále si všimněme, že pro k liché se jedná o součin liché funkce (x^k je lichá fce) a sudé funkce (e^{-x^2} je sudá fce), což nám dává ze znalosti konvergence integrálu, že $I_k = 0$, je-li k liché. Dále nechť je k sudé. Potom máme

$$I_k^2 = \left| \begin{matrix} \mathrm{e}^{-x^2} & -2x \,\mathrm{e}^{-x^2} \\ x^k & \frac{x^{k+1}}{k+1} \end{matrix} \right| = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} \,\mathrm{e}^{-x^2} \right]_{-\infty}^{\infty} + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{k+1} \,\mathrm{e}^{-x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{2}{k+1} I_{k+2}.$$

Máme tak vztah

$$I_{k+2} = \frac{k+1}{2} I_k.$$

Nyní zbývá ukázat, že platí

$$I_0^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2} \,\mathrm{d}y = \iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \pi.$$

Tedy vidíme, že platí $I_0 = \sqrt{\pi}$. Vidíme tedy, že platí

$$I_k = \frac{(k-1)!!}{2^{\frac{k}{2}}} \sqrt{\pi},$$

pro libovolné sudé k.

Př. 274 *Vypočtěte nevlastní integrál*

$$\int \cdots \int_M \frac{1}{x_1^2 + \cdots + x_k^2} \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_k, \qquad pro \qquad M : x_1^2 + \cdots + x_k^2 \leq 1, k \in \mathbb{Z} \cap [3, 6].$$

Integrovaná funkce není ohraničená v počátku, ale funkce je zde nezáporná. Zavedeme smršťující se posloupnost množin. Vzhledem k tomu, že M je tvořena k rozměrnou koulí, zvolíme $M_n = \frac{1}{n^2} \leq x_1^2 + \cdots + x_k^2 \leq 1$ a zavedeme k rozměrné sférické souřadnice

$$\begin{aligned}
x_1 &= \rho \cos\varphi \sin\theta_1 \sin\theta_2 \quad \ldots \quad \sin\theta_{k-2},\\
x_2 &= \rho \sin\varphi \sin\theta_1 \sin\theta_2 \quad \ldots \quad \sin\theta_{k-2},\\
x_3 &= \rho \qquad \cos\theta_1 \sin\theta_2 \quad \ldots \quad \sin\theta_{k-2},\\
x_4 &= \rho \qquad\qquad \cos\theta_2 \sin\theta_3 \ldots \sin\theta_{k-2},\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
x_k &= \rho \qquad\qquad\qquad\qquad \cos\theta_{k-2}.
\end{aligned}$$

Jakobián této transformace je pak $|J| = \rho^{k-1} \sin\theta_1 \sin^2\theta_2 \ldots \sin^{k-2}\theta_{k-2}$. Navíc zde platí $x_1^2 + \cdots + x_k^2 = \rho^2$. Dostaneme tak

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \cdots \int_{M_n} \frac{1}{x_1^2 + \cdots + x_k^2} \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_k =\\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{\rho^2} \cdot \rho^{k-1} \sin\theta_1 \sin^2\theta_2 \ldots \sin^{k-2}\theta_{k-2} \, \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta_1 \ldots \mathrm{d}\theta_{k-2} \, \mathrm{d}\varphi =\\
&= 2\pi \left[\frac{\rho^{k-2}}{k-2}\right]_{\frac{1}{n}}^1 \int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi} \sin\theta_1 \sin^2\theta_2 \ldots \sin^{k-2}\theta_{k-2} \, \mathrm{d}\theta_1 \ldots \mathrm{d}\theta_{k-2}.
\end{aligned}$$

Uvažme, že k může nabývat jen hodnot $3, \ldots, 6$. Spočtěme tedy

$$\int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi} \sin\theta_1 \sin^2\theta_2 \ldots \sin^4\theta_4 \, \mathrm{d}\theta_1 \ldots \mathrm{d}\theta_4 = \begin{cases} [-\cos\theta_1]_0^{\pi} = 2, & k = 3,\\ 2 \int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi} \sin^2\theta_2 \ldots \sin^4\theta_4 \, \mathrm{d}\theta_2 \ldots \mathrm{d}\theta_4, & k > 3, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2\left[\frac{\theta_2}{2} - \frac{\sin 2\theta_2}{4}\right]_0^{\pi} = \pi, & k = 4,\\ \pi \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \sin^3\theta_3 \sin^4\theta_4 \, \mathrm{d}\theta_3 \ldots \mathrm{d}\theta_4, & k > 4, \end{cases} = \begin{cases} \pi \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}\pi, & k = 5,\\ \frac{4}{3}\pi \int_0^{\pi} \sin^4\theta_4 \, \mathrm{d}\theta_4, & k > 5, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2, & k = 3,\\ \pi, & k = 4,\\ \frac{4}{3}\pi, & k = 5,\\ \frac{4}{3}\pi \left[\frac{3\theta_4}{8} - \frac{\sin 2\theta_4}{4} + \frac{\sin 4\theta_4}{32}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}, & k = 6. \end{cases}$$

Jako další krok musíme rozebrat ještě chování ostatních částí integrálu

$$(k-2)\left[\frac{\rho^{k-2}}{k-2}\right]_{\frac{1}{n}}^1 = 1 - \frac{1}{n^{k-2}} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Pro všechny varianty k dostáváme konvergentní integrál. Pouze konkrétní hodnotu musíme poskládat dohromady z uvažovaných variant. Pokud by bylo $k = 2$, jedná se o Příklad 259, pokud je naopak $k = 1$, jedná se o jednorozměrný integrál $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x$, který je také divergentní.

Př. 275 *Vypočtěte integrál*

$$\iint_{[0,1]^2} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Následně ukažte, že tento integrál nelze zapsat jednoduše jako integrály

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad a \qquad \int_0^1\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Nejprve ukažme, že dvojný integrál diverguje.Všimněme si, že integrovaná funkce není nezáporná. Ve skutečnosti mění znaménko na přímce $y=x$. Uvažujme tedy integrál jejích absolutních hodnot, který konverguje právě tehdy, když konverguje náš integrál. Počítejme tedy

$$\iint_{[0,1]^2} \frac{|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Jedná se o nevlastní integrál, protože funkce má singulární bod v počátku. Pokud bychom se například blížili do počátku po ose x, tj. pro $y=0$, pak by integrovaná funkce vypadala jako

$$\left.\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right|_{y=0} = \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}.$$

A funkční hodnoty by pro malé x utekli do nekonečna. Vskutku se tedy jedná o singulární bod. Pro usnadnění výpočtu si nahraďme integrační množinu $[0,1]^2$ za čtvrt kruh $x^2+y^2\leq 1\cap[0,1]^2$. Tím se nám integrační množina zmenší, ale samotný integrál se změní nejvýše o konečnou hodnotu. Na konvergenci/divergenci toto mít vliv nebude. Navíc uvažujme smršťující systém množin $M_n : x^2+y^2\leq \frac{1}{n^2}$, který z množiny $x^2+y^2\leq 1\cap[0,1]^2$ odebereme, abychom se vyhnuli singulárnímu bodu. V polárních souřadnicích tak máme

$$I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi|}{\rho^4}\cdot\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{|\cos^2\varphi-\sin^2\varphi|}_{=|\cos 2\varphi|}\,\mathrm{d}\varphi\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{1}{\rho}\,\mathrm{d}\rho =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,[\ln\rho]_{\frac{1}{n}}^1 = 2\left[\frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\ln 1 \underbrace{-\ln\frac{1}{n}}_{=\ln n}\right) = \ln n \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

Vzhledem k ekvivalenci víme, že původní integrál diverguje stejně jako integrál absolutních hodnot. Podívejme se nyní na dvojnásobné integrály

$$\int_0^1\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_0^1\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = [\operatorname{arctg} x]_0^1 = \frac{\pi}{4},$$
$$\int_0^1\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\left[\frac{-x}{x^2+y^2}\right]_0^1\mathrm{d}y = -\int_0^1\frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = -[\operatorname{arctg} y]_0^1 = -\frac{\pi}{4}.$$

Vidíme, že integrál nelze bezmyšlenkovitě přepsat pomocí Fubiniho věty, protože integrály si neodpovídají.

Př. 276 *Ukažte, že integrál*

$$I = \iint_{[1,\infty)^2} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

diverguje přesto, že integrály

$$\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y,$$
$$\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x,$$

konvergují.

Dále víme, že pokud následující integrály konvergují, tak platí

$$\iint_{[1,\infty)^2} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y,$$

neboť přidáme k integrálu pouze části, které splňují

$$\iint_{x \in [0,1],\ x^2+y^2 \geq 1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = -\iint_{y \in [0,1],\ x^2+y^2 \geq 1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

Můžeme tak počítat v polárních souřadnicích

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{2\pi} \int_1^n \frac{\rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi}{\rho^4} \rho \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi \,\mathrm{d}\varphi \int_1^n \frac{1}{\rho} \,\mathrm{d}\rho = \left[\frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} [\ln \rho]_1^n = 0 \cdot [\ln \rho]_1^n = 0. \end{aligned}$$

A tedy pokud integrál konverguje, tak vyjde nulový. Zde však předpokládáme, že oba integrály v rovnosti konvergují.

Možná jednodušeji si můžeme všimnout, že pokud integrál I konverguje, tak musí platit

$$\begin{aligned} &\iint_{[1,\infty)^2} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \iint_{[1,\infty)^2, x \geq y} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y + \iint_{[1,\infty)^2, y \geq x} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \\ &= \iint_{[1,\infty)^2, x \geq y} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y - \iint_{[1,\infty)^2, y \geq x} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = 0. \end{aligned}$$

Neboť ve druhém integrálu se jedná pouze o záměnu proměnných. Máme tedy i zde odhad pro integrál I, který nyní závisí jen na jeho konvergenci. Závislost konvergencí zde platí například pokud bychom porovnali absolutní konvergenci integrálu I, která je ekvivalentní jeho samotné konvergenci.

Dále budeme chtít počítat integrál přes vyčerpávající množinu, která není symetrická přes osu $y = x$. Zvolme například množinu $M_n = [1, n] \times [1, Kn]$, kde $K > 0$ je konstanta. Máme

$$\begin{aligned}
J_n &= \int_1^{Kn} \int_1^n \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_1^{Kn} \int_1^n \frac{1}{x^2 + y^2} - 2\frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \\
&= \int_1^{Kn} \left[\frac{1}{y} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)\right]_1^n - 2y^2 \left(\left[\frac{x}{2y^2(x^2 + y^2)}\right]_1^n + \frac{1}{2y^2} \int_1^n \frac{1}{x^2 + y^2} \,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y = \\
&= \int_1^{Kn} \left[\frac{1}{y} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)\right]_1^n - \left[\frac{x}{x^2 + y^2}\right]_1^n - \left[\frac{1}{y} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)\right]_1^n \mathrm{d}y = \\
&= \int_1^{Kn} -\frac{n}{n^2 + y^2} + \frac{1}{1 + y^2} \,\mathrm{d}y = \left[-\frac{n}{n} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{n}\right) + \operatorname{arctg} y\right]_1^{Kn} = \\
&= -\operatorname{arctg} K + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right) + \operatorname{arctg}(Kn) - \operatorname{arctg} 1 = \\
&= -\operatorname{arctg} K + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right) + \operatorname{arctg}(Kn) - \frac{\pi}{4} \to -\operatorname{arctg} K + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} K.
\end{aligned}$$

Vidíme, že pro libovolné K limita konverguje, ale výsledná hodnota závisí na K. Navíc pro $K \neq 1$ je limita nenulová. Integrál rozhodně konvergovat nemůže a ve skutečnosti diverguje. Ve výpočtu používáme redukční vztah

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^2} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2}.$$

Nakonec si rozmysleme, že integrály

$$\begin{gathered}
\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y, \\
\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x,
\end{gathered}$$

skutečně konvergují. Vzhledem k symetrii pokud konverguje jeden, pak konverguje i druhý. Jejich hodnotu jsme pak získali v průběhu výpočtu J_n.

Př. 277 *Ukažte, že integrály*

$$\int_0^1 \int_1^\infty \mathrm{e}^{-xy} - 2\,\mathrm{e}^{-2xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
$$\int_1^\infty \int_0^1 \mathrm{e}^{-xy} - 2\,\mathrm{e}^{-2xy}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$$

nevycházejí stejně.

Počítejme nejprve druhý integrál jako

$$I_2 = \int_1^\infty \int_0^1 \mathrm{e}^{-xy} - 2\,\mathrm{e}^{-2xy}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \left[-\frac{\mathrm{e}^{-xy}}{x} + \frac{\mathrm{e}^{-2xy}}{x}\right]_0^1 \mathrm{d}x =$$
$$= \int_1^\infty -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} + \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Nyní musí nutně platit, že je $I_2 < 0$ neboť integrovaná funkce splňuje

$$\frac{\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x}}{x} < \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}}{x} = 0.$$

Druhý integrál zase dostaneme podobně jako

$$I_1 = \int_0^1 \int_1^\infty \mathrm{e}^{-xy} - 2\,\mathrm{e}^{-2xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[-\frac{\mathrm{e}^{-xy}}{y} + \frac{\mathrm{e}^{-2xy}}{y}\right]_1^\infty \mathrm{d}y =$$
$$= \int_0^1 \frac{\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-2xy} - \mathrm{e}^{-xy}}{y} + \frac{\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{-2y}}{y}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{-2y}}{y}\,\mathrm{d}y.$$

Zde naopak musí platit, že je $I_1 > 0$ neboť stejně jako u prvního integrálu platí

$$\frac{\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{-2y}}{y} > \frac{\mathrm{e}^{-2y} - \mathrm{e}^{-2y}}{y} = 0.$$

Oba tyto vztahy vychází z faktu, že je funkce e^{-Ax}, klesající pro $A > 0$.

6.4 Rozhodování o konvergenci/divergenci

Př. 278 *Rozhodněte o konvergenci/divergenci integrálu*

$$\iint_M \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \textit{pro} \qquad M : x+y \geq 1, 0 \leq x \leq 1, p > 1.$$

Všimneme si, že můžeme integrál z absolutní hodnoty funkce ohraničit shora jako

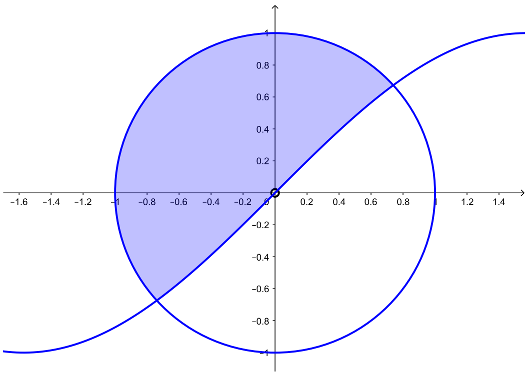
$$\iint_M \left|\frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p}\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \iint_M \frac{1}{(x+y)^p}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Proto pokud by byl integrál z větší funkce konvergentní, je také integrál z menší funkce konvergentní vzhledem k nezápornosti uvažovaných funkcí. Avšak horní ohraničení tvoří integrál počítaný v příkladě 278 odkud dostáváme, že vyšetřovaný integrál je konvergentní a to absolutně. Absolutní konvergence je ekvivalentní obyčejné konvergenci. Máme výsledek.

Př. 279 *Rozhodněte o konvergenci/divergenci integrálu*

$$I = \iint_M \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \textit{pro} \qquad M : 0 < x^2+y^2 \leq 1, \sin x \leq y.$$

Množina M vypadá takto:



Na její hranici je bod $[0,0]$, který je singulárním bodem funkce $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Tvar funkce nám napovídá, že je vhodné využít k integraci transformaci do polárních souřadnic, odrazuje nás však naopak tvar množiny M. Všimněme si však, že funkce nabývá pouze kladných hodnot a tedy integrál může být pouze nezáporný, navíc integrál zvětšíme, pokud budeme integrovat přes množinu N, kde $M \subset N$. Zvolíme tedy $N : x^2+y^2 \leq 1$ a počítáme

$$\iint_M \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}} < \iint_N \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^{2\pi} \int_{1/n}^1 \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2}}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\left(1-\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 2\pi.$$

Protože i větší integrál konverguje, konverguje také menší integrál. Z těchto důvodů integrál I konverguje. Hodnotu integrálu I bychom mohli odhadnout v softwaru jako

$$I \approx 3,07.$$

Př. 280 *Rozhodněte o konvergenci/divergenci integrálu*

$$\iint_M yx\,\mathrm{e}^{x^2y^2}\ln(x^2+y^2), \qquad \textit{pro} \qquad M:[2,\infty)^2.$$

Hned na první pohled vidíme několik věcí. Množina M není ohraničená a integrovaná funkce je nezáporná. Snadno si také rozmyslíme, že

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} yx\,\mathrm{e}^{x^2y^2}\ln(x^2+y^2)=\infty.$$

Stačí uvážit, že se jedná o součin funkcí, které samy o sobě divergují k nekonečnu. Očekáváme tedy, že integrál diverguje. Navíc na množině M platí, že

$$yx\,\mathrm{e}^{x^2y^2}\ln(x^2+y^2)\geq 2x\,\mathrm{e}^{4x^2}\ln(x^2+4)>1x\,\mathrm{e}^{1x^2}\ln(4+4)>x\,\mathrm{e}^{x^2}>\mathrm{e}^{x}\,.$$

Tedy integrovanou funkci dokážeme výrazně zmenšit na daleko rozumnější funkci. Proto máme

$$\iint_M yx\,\mathrm{e}^{x^2y^2}\ln(x^2+y^2)>\iint_M \mathrm{e}^{x}=\lim_{n\to\infty}\int_0^n\int_0^n \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty} n\,(\mathrm{e}^{n}-1)=\infty.$$

Takže vskutku vidíme, že vyšetřovaný integrál diverguje, neboť mnohem menší integrál také diverguje.

Př. 281 *Rozhodněte o konvergenci/divergenci integrálu*

$$\iint_M \mathrm{e}^{y^2x^2} - \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \textit{pro} \qquad M: 0 < x^2+y^2 \leq 1.$$

Podívejme se nejprve na důvod, proč by se mělo jednat o nevlastní integrál. Množina M je ohraničená, ale integrovaná funkce má singulární bod v počátku kvůli části $\frac{1}{x^2+y^2}$. Znaménko integrované funkce není zcela přehledné, ale uvědomme si hlavně, že na nějakém dostatečně malém okolí počátku je funkce záporná. Z tvaru množiny M tušíme, že bychom chtěli vše transformovat do polárních souřadnic, nevíme si však příliš rady s funkcí $\mathrm{e}^{y^2x^2}$, kterou nedokážeme jednoduše zintegrovat. Nicméně víme, že na množině M je funkce $\mathrm{e}^{y^2x^2}$ ohraničená, a proto integrál

$$\iint_M \mathrm{e}^{y^2x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

konverguje. Navíc spočítáme, že

$$\iint_M \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\int_{1/n}^1 \frac{\rho}{\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \lim_{n\to\infty} 2\pi\left(\ln 1 - \ln\frac{1}{n}\right) = \infty.$$

Proto pokud by konvergoval integrál

$$\iint_M \mathrm{e}^{y^2x^2} - \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

pak by konvergoval také rozdíl

$$\iint_M \mathrm{e}^{y^2x^2} - \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_M \mathrm{e}^{y^2x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_M \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Což však není pravda. Tento integrál diverguje. A tedy víme, že vyšetřovaný integrál také diverguje.

Př. 282 *Rozhodněte o konvergenci/divergenci integrálu*

$$\iint_M \frac{2x^2+yx}{x^2y+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde množina $M=[0,\infty)^2$.

První si všimneme, že na množině M je funkce $f(x,y)=\frac{2x^2+yx}{x^2y+1}\geq 0$. Dále si všimneme, že platí

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,1)}\frac{2x^2+yx}{x^2y+1}=\lim_{(x,y)\to(\infty,1)}\frac{2+y\frac{1}{x}}{y+\frac{1}{x^2}}=\frac{2+0}{1+0}=2$$

nebo také

$$\lim_{(x,y)\to(1,\infty)}\frac{2x^2+yx}{x^2y+1}=\lim_{(x,y)\to(\infty,1)}\frac{x+\frac{2x^2}{y}}{x^2+\frac{1}{y}}=\frac{1+0}{1+0}=1.$$

Ať už vezmeme kteroukoliv limitu, neboť je $f(x,y)\geq 0$ a limity $\neq 0$, máme

$$\iint_M \frac{2x^2+yx}{x^2y+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\infty.$$

Stačilo by nám pouze vhodně zmenšit funkci

$$\frac{2x^2+yx}{x^2y+1}\geq\begin{cases}1, & [x,y]\in[N,\infty)\times[1-\varepsilon,1+\varepsilon],\\ 0, & \text{jinak},\end{cases}$$

pro vhodné N a ε o kterých víme, že existují. Aby mohl integrál konvergovat, musí jít nutně pro nezápornou funkci $f(x,y)$ na M všechny limity tvaru

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,A)} f(x,y),\qquad \lim_{(x,y)\to(A,\infty)} f(x,y),$$

k nule pro libovolné A.

Př. 283 *Rozhodněte o konvergenci/divergenci integrálu*

$$\iint_M \frac{1}{y^2}\sin^2(xy) + \sqrt{x^2+x} - x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde množina M je dána ohraničením $x \geq 0$.

Všimneme si první, že platí $f(x,y) \geq 0$ na celém M, neboť očividně $\frac{1}{y^2}\sin^2(xy) \geq 0$ a $\sqrt{x^2+x} - x \geq \sqrt{x^2} - x = 0$ na M. Dále se rozmysleme, zda nelze funkci vhodně ohraničit. Platí totiž

$$\sqrt{x^2+x} - x \leq \frac{1}{y^2}\sin^2(xy) + \sqrt{x^2+x} - x \leq \frac{1}{y^2} + \sqrt{x^2+x} - x.$$

Tyto nerovnosti by nám daly vhodné adepty na možné ohraničení, které si však zvolit? Dolní ohraničení bychom volili pokud bychom si mysleli, že integrál diverguje. Horní ohraničení zase pokud bychom očekávali, že celý integrál konverguje. Nejsme-li si jistí, můžeme spočítat limitu

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}.$$

Tudíž máme nezápornou funkci, která někde v nekonečnu nezamíří do nuly. Můžeme tak snadno ohraničit

$$\iint_M \frac{1}{y^2}\sin^2(xy) + \sqrt{x^2+x} - x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geq \iint_M \sqrt{x^2+x} - x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geq \iint_{M(\varepsilon)} \frac{1}{2} - \varepsilon \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \infty,$$

kde množina $M(\varepsilon)$ je dána ohraničením $x \geq N$, pro N dostatečně velké aby bylo $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Integrál diverguje.

Př. 284 *Rozhodněte o konvergenci/divergenci integrálu*

$$\iint_M \frac{\sin y}{x^2y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde množina $M = [1,\infty)^2$.

Integrační obor není ohraničený, ale integrovaná funkce mění na M znaménko. Vezmeme integrál z absolutní hodnoty funkce, jehož konvergence je ekvivalentní konvergenci původního integrálu. Dostaneme tak

$$\iint_M \left|\frac{\sin y}{x^2y^2}\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le \iint_M \frac{1}{x^2y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Spočítáme tento nový integrál přes vhodnou posloupnost vyčerpávajících množin, kterou může být například $M_n : [1,n]^2$. Vyjde nám

$$\begin{aligned}I_n &= \iint_M \frac{1}{x^2y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty}\int_1^n\int_1^n \frac{1}{x^2y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty}\left(\int_1^n \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 = \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\left[-\frac{1}{x}\right]_1^n\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}+1\right)^2 = 1.\end{aligned}$$

Vidíme tedy, že integrál z absolutní hodnoty konverguje, konverguje tedy také integrál

$$\iint_M \frac{\sin y}{x^2y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

a to absolutně.

Př. 285 *Rozhodněte o konvergenci/divergenci integrálu*

$$\iint_M \ln(2x+3y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde množina M je dána jako $[0,1]^2$

Všimneme si, že integrovaná funkce má singularitu v počátku, ale integrovat funkci vzhledem k její podobě nebude úplně snadné. Uvědomme si však, že nám nesejde, zda je M dána jako $[0,1]^2$, nebo například $x^2+y^2 \leq 15 \cap [0,\infty)^2$, neboť nás zde pouze zajímá, zda funkce konverguje/diverguje. Je-li množina M ohraničená, obsahuje původní singulární bod a vypadá v nějakém okolí singularity stále stejně, tak na zbytku množiny M (mimo okolí singularity, kde je funkce konečná) nám již tolik nezáleží. Dodržíme-li však tyto podmínky, můžeme se omezit s M na jinou množinu, která našim potřebám integrování bude vyhovovat lépe. Také si všimneme, že funkce má singularitu utíkající do $-\infty$. Pokud tedy ohraničíme integrál zdola konvergentním integrálem, bude také samotný integrál také konvergovat. Pokud je $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ tak platí nerovnost

$$2x+3y > x+y \geq x^2+y^2.$$

Navíc neboť je logaritmus $\ln x$ rostoucí funkce, platí nutně také

$$\ln(2x+3y) > \ln(x^2+y^2).$$

Množinu M můžeme omezit pouze na jednotkovou kružnici $x^2+y^2 \leq 1 \cap [0,1]^2$, abychom mohli použít polární souřadnice. Počítáme

$$\begin{aligned}
&\iint_{x^2+y^2\leq 1\cap[0,\infty)^2} \ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{1}{n}}^1 \rho\ln\rho^2\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4}\int_{\frac{1}{n^2}}^1 \ln t\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4}\left[t\ln t - t\right]_{\frac{1}{n^2}}^1 = \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4}\left(-1-\frac{1}{n^2}\ln\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Neboť snadno rozřešíme limitu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{-2\ln n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-2}{n}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{-2}{n^2} = 0.$$

Máme tedy dolní ohraničení integrálu se stejnou singularitou, které konverguje. Celý integrál tak konverguje. Dolní ohraničení zde uvažujeme protože integrál je blízko singularit záporný. V absolutní hodnotě tak nacházíme naopak horní ohraničení. Všimněme si, že funkce $\ln(2x+3y)$ má singularity na celé přímce $2x+3y=0$. Pokud bychom tak dodali do množiny M další body této přímky, integrál by mohl dopadnou jinak.

Př. 286 *Rozhodněte o konvergenci/divergenci integrálu*

$$\iint_M \frac{\sin(x-y)\cos(x+y)}{2x^2+3y^2+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde množina M je ohraničená podmínkou $x^2+y^2 \le 1$.

Neboť funkce mění znaménko na množině M, zavedeme integrál

$$\iint_M \left|\frac{\sin(x-y)\cos(x+y)}{2x^2+3y^2+1}\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le \iint_M \frac{1}{2x^2+3y^2+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Nyní chceme spočítat integrál přes vyčerpávající množinu. Integrovaná funkce je však poněkud komplikovaná, využijeme tak dalšího odhadu

$$\iint_M \frac{1}{2x^2+3y^2+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le \iint_M \frac{1}{x^2+y^2+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\rho}{\rho^2+1}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho \le$$

$$\le \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{\rho^2+1}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = \lim_{n\to\infty} 2\pi \underbrace{\left[\operatorname{arctg}\rho\right]_{\frac{1}{n}}^1}_{=\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{n}} = \frac{\pi^2}{2}.$$

Tedy vidíme, že integrál konverguje a to dokonce absolutně. Avšak všimněme si, že uvedený postup je zbytečný. Integrál ve skutečnosti nemá žádnou singularitu, neboť integrovaná funkce je sama o sobě ohraničená (ve jmenovateli nula nevznikne a čitatel je hezky spojitý). Řešit jeho konvergence v tomto případě tedy nemá smysl a rovnou vidíme, že integrál konverguje.

Př. 287 *Rozhodněte o absolutní/neabsolutní konvergenci integrálu*

$$\iint_M \frac{\sin(x+y)}{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde množina M *je dána jako* $[0,2]^2$.

Funkce se zdá v bodě $[0,0]$ nespojitá, neboť není v tomto bodě definovaná. Mohlo by to tedy vypadat, že zde máme singularitu. Musíme se však zamyslet nad limitou

$$\lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \frac{\sin(x+y)}{x+y},$$

neboť víme, že je $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Jak však vyřešíme limitu dvou proměnných? Víme, že můžeme nahradit funkci $\sin x$ Maclaurinovou řadou pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ jako

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Máme tedy limitu

$$\lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \frac{\sin(x+y)}{x+y} = \lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{(x+y)^{2n+1}}{x+y} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x+y)^{2n} = \frac{1}{1!} \cdot 1 = 1.$$

Tedy integrovaná funkce je na množině M ohraničená a v počátku se nejedná o singulární bod. Takový integrál je nutně na ohraničené množině M absolutně konvergentní.

Př. 288 *Ukažte, že integrál*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

diverguje.

Ukážeme, že integrál přes různé vyčerpávací množiny dává různé výsledky. Zvolíme nejprve $M_n : x^2+y^2 \le n^2$ a zavedeme polární souřadnice. Máme

$$I_n = \int_0^{2\pi}\int_0^n \rho\cos\rho^2\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \left| \begin{array}{c} t=\rho^2 \\ \mathrm{d}t = 2\rho\,\mathrm{d}\rho \end{array} \right| = \pi\int_0^{n^2}\cos t\,\mathrm{d}\rho = \pi\,[\sin t]_0^{n^2} = \pi\sin n^2.$$

Nyní vidíme, že limita $\lim_{n\to\infty}\iint_{M_n}\cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ neexistuje. Zvolíme-li jinou vyčerpávací množinu $K_n : [-n,n]^2$ máme

$$\begin{aligned} J_n &= \int_{-n}^n\int_{-n}^n \cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-n}^n\int_{-n}^n \cos(x^2)\cos(y^2)-\sin(x^2)\sin(y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= \int_{-n}^n \cos(x^2)\,\mathrm{d}x\int_{-n}^n\cos(y^2)\,\mathrm{d}y - \int_{-n}^n\sin(x^2)\,\mathrm{d}x\int_{-n}^n\sin(y^2)\,\mathrm{d}y = \\ &= \left(\int_{-n}^n\cos(x^2)\,\mathrm{d}x\right)^2 - \left(\int_{-n}^n\sin(x^2)\,\mathrm{d}x\right)^2 = \\ &= 4\left(\int_0^n\cos(x^2)\,\mathrm{d}x\right)^2 - 4\left(\int_0^n\sin(x^2)\,\mathrm{d}x\right)^2. \end{aligned}$$

V tomto vyjádření máme Fresnelovy integrály, o kterých víme, že platí

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} = \int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x.$$

Dostaneme tak

$$\lim_{n\to\infty} 4\left(\int_0^n\cos(x^2)\,\mathrm{d}x\right)^2 - 4\left(\int_0^n\sin(x^2)\,\mathrm{d}x\right)^2 = 4\frac{2\pi}{16} - 4\frac{2\pi}{16} = 0.$$

Vidíme tedy, že integrál diverguje neboť přes různé součty se integrál nerovná. Divergenci jsme však mohli už usoudit dříve, když jsme pro volbu M_n dostali nekonvergentní limitu.

Př. 289 *Ukažte, že integrál*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \sin(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

diverguje.

Zavedeme vyčerpávací posloupnost množin $M_n : x^2+y^2 \le n^2$ čímž dostaneme snadno po zavedení polárních souřadnic

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{2\pi}\int_0^n \rho\sin\rho^2\cos\rho^2\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = |t=\rho^2| = \pi\int_0^{n^2}\sin t\cos t\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{n^2}\sin 2t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{n^2} = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{\cos 2n^2}{2}+\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Vidíme nyní, že limita

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{M_n}\sin(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\cos 2n^2}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

neexistuje. Můžeme však také upravit integrál

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathbb{R}^2}\sin(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= 4\iint_{[0,\infty)^2}\left(\sin x^2\cos y^2+\sin y^2\cos x^2\right)\left(\cos x^2\cos y^2-\sin x^2\sin y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= 4\iint_{[0,\infty)^2}\sin x^2\cos x^2\cos^2 y^2+\cos^2 x^2\sin y^2\cos y^2-\sin^2 x^2\sin y^2\cos y^2-\sin x^2\cos x^2\sin^2 y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= 4\iint_{[0,\infty)^2}\sin x^2\cos x^2\left(\cos^2 y^2-\sin^2 y^2\right)+\left(\cos^2 x^2-\sin^2 x^2\right)\sin y^2\cos y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= 2\iint_{[0,\infty)^2}\sin 2x^2\cos 2y^2+\cos 2x^2\sin 2y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= 4\lim_{n\to\infty}\int_0^n\int_0^n\sin 2x^2\cos 2y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\lim_{n\to\infty}\int_0^n\sin(\sqrt{2}x)^2\,\mathrm{d}x\int_0^n\cos(\sqrt{2}y)^2\,\mathrm{d}y = \\ &= 2\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{2}n}\sin t^2\,\mathrm{d}t\int_0^{\sqrt{2}n}\cos s^2\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Využijeme-li faktu, že

$$\int_0^\infty\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} = \int_0^\infty\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$$

dostaneme nyní

$$\iint_{\mathbb{R}^2}\sin(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_0^\infty\sin t^2\,\mathrm{d}t\int_0^\infty\cos s^2\,\mathrm{d}s = 2\frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{4}.$$

Přes různé vyčerpávající množiny tak máme různý výsledek, a proto integrál diverguje.

7 Integrály závislé na parametru

Eulerovu Gamma funkci definujeme jako

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\,\mathrm{d}t, & x > 0, \\ \frac{\Gamma(x-\lfloor x \rfloor)}{x(x+1)\dots(x-\lfloor x \rfloor - 1)}, & x \in (-\infty, 0) \setminus \mathbb{Z}, \end{cases}$$

na množině $\mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$.

Některé vlastnosti Gamma funkce

1. Je-li funkce$\Gamma(x)$ definovaná v bodě x, potom $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$.
3. $\Gamma(n+\frac{1}{p}) = \Gamma(\frac{1}{p})\frac{(pn-(p-1))!^p}{p^n}$
4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right) = \frac{(-2)^n}{(2n-1)!!}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$.
5. $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$, $x \notin \mathbb{Z}$.
6. $\frac{\mathrm{d}^n\Gamma(x)}{\mathrm{d}x^n} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1} \ln^n t\,\mathrm{d}t$, pro $x > 0$.

Zde symbol $!^p$ označuje p vykřičníků $!\dots!$.

Beta funkci definujeme následně jako

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

pro $x > 0$, $y > 0$.

Věta 290 *Nechť funkce f je spojitá na množině $A \times B$, kde A a B jsou kompaktní měřitelné množiny. Potom platí, že funkce*

$$g(y) = \int_A f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

je spojitá na množině B a můžeme psát

$$\lim_{y\to y_0}\int_A f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_A \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_A f(x,y_0)\,\mathrm{d}x$$

pro $y_0 \in B^\circ$.

Věta 291 *Nechť A je kompaktní měřitelná množina a nechť funkce f je spojitá na množina $A \times [a,b]$ a má na této množině spojitou parciální derivaci podle poslední proměnné. Potom funkce*

$$g(y) = \int_A f(\mathbf{x},y)\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}y$$

má na intervalu $[a,b]$ spojitou derivaci a platí

$$g'(y) = \int_A \frac{\partial f(\mathbf{x},y)}{\partial y}\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}y$$

Věta 292 *Nechť f je spojitá funkce na množině $[a,b] \times [c,d]$ a funkce g, h jsou funkce spojité na intervalu $[c,d]$ a $g([c,d]) \subset [a,b]$, $h([c,d]) \subset [a,b]$. Poté je funkce*

$$G(y) = \int_{h(y)}^{g(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

spojitá na intervalu $[c,d]$.

Věta 293 *Nechť f je spojitá funkce na množině $(a,b) \times (c,d)$ a má zde spojitou parc. derivaci podle druhé proměnné. Nechť g, h jsou funkce definované na intervalu (c,d) a mají na něm derivaci. Nechť dále g, h splňují $g((c,d)) \subset (a,b)$, $h((c,d)) \subset (a,b)$. Poté má funkce*

$$G(y) = \int_{h(y)}^{g(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

na intervalu (c,d) derivaci a platí

$$G'(y) = \int_{h(y)}^{g(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x + f(g(y),y)g'(y) - f(h(y),y)h'(y).$$

Př. 294 *Nalezněte následující hodnoty* $\Gamma(1)$, $\Gamma^2(1/2)$ $\Gamma(5)$, $\Gamma(3,2)$, $\Gamma(-2)$, $\Gamma(-1,5)$, $\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)$, $\Gamma(3/2)\Gamma(-1/2)$.

Počítáme dosazením

$$
\begin{aligned}
\Gamma(1) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{1-1}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^\infty = -0+1 = 1\\
\Gamma(5) &= 4\Gamma(4) = \cdots = 4\cdot 3\cdot 2\cdot \Gamma(1) = 4! = 24\\
\Gamma^2(1/2) &= \Gamma(1/2)\Gamma(1/2) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi\\
\Gamma(3,2) &= 2,2\cdot 1,2\Gamma(1,2) = 2,64\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{0,2}\,\mathrm{d}t =\\
&= 2,64\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,\sqrt[5]{t}\,\mathrm{d}t \text{ integrál nespočteme. Můžeme pouze aproximovat jeho hodnotu.}\\
\Gamma(-2) &\text{ funkce není v bodě } -2 \text{ definovaná}\\
\Gamma(-1,5) &= \frac{\Gamma(-1,5-(-2))}{-1,5} = \frac{\Gamma(0,5)}{-1,5\cdot(-0,5)} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}\\
\Gamma(1/4)\Gamma(3/4) &= \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\pi\\
\Gamma(3/2)\Gamma(-1/2) &= \frac{\pi}{\sin\frac{3\pi}{2}} = -\pi
\end{aligned}
$$

Př. 295 *Nalezněte následující hodnoty $\beta(1,1)$, $\beta(1/2,3/2)$, $\beta(2,-1)$, $\beta(1/2,1/3)$ jako známé konstanty nebo pomocí hodnot $\Gamma(1/p)$, $p \in \mathbb{N}$.*

Máme vztah

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Dosadíme tedy hodnoty

$$\begin{aligned}
\beta(1,1) &= \frac{\Gamma(1)\Gamma(1)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2} \\
\beta(1/2,3/2) &= \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(2)} = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2)}{2 \cdot 2!} = \frac{\pi}{4} \\
\beta(2,-1) &\text{ funkce není definována pro záporné hodnoty} \\
\beta(1/3,1/3) &= \frac{\Gamma^2(1/3)}{\Gamma(2/3)}
\end{aligned}$$

Víme, že platí $\Gamma(1/3)\Gamma(2/3) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. Proto je

$$\beta(1/3,1/3) = \frac{\sqrt{3}\Gamma^3(1/3)}{2\pi}$$

Př. 296 *Nalezněte hodnotu* $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ *za pomoci aritmetického-geometrického průměru.*

Celý postup začneme vyjádřením hodnoty $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ pomocí integrálu

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$$

Počítáme

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}} = \left| \begin{array}{c} t^4 = u \\ 4t^3\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u}} \frac{1}{4\sqrt[4]{u^3}}\,\mathrm{d}u =$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^1 (1-u)^{1/2-1}u^{1/4-1}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}B(1/2,1/4) = \frac{1}{4}\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)}$$

Z předchozího příkladu již víme, že můžeme vyjádřit

$$\Gamma(1/4)\Gamma(3/4) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\pi$$

Proto platí, že

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{\Gamma^2(1/4)}{4\sqrt{2\pi}}$$

Nyní zavedeme posloupnosti

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$
$$y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$$

Pro počáteční podmínky $x_0 = 1$, $y_0 = \sqrt{2}$. Tyto posloupnosti konvergují ke stejné hodnotě $1/G$, kde G je Gaussova konstanta. Postupně ukážeme řadou transformací, že pomocí této hodnoty lze vyjádřit hodnotu $\Gamma(1/4)$.

Uvažme dále funkci

$$T(A,B) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(A^2+t^2)(B^2+t^2)}} = 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(A^2+t^2)(B^2+t^2)}}$$

Poté platí, že

$$
\begin{aligned}
T(A,B) &= 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(A^2+t^2)(B^2+t^2)}} = 2\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{(A^2+B^2)u^2+u^4+A^2B^2}}\,\mathrm{d}u = \\
&= 2\int_0^\infty \frac{u^2+AB}{\sqrt{u^2\left(A^2+B^2+2AB-2AB+u^2+\frac{A^2B^2}{u^2}\right)(u^2+AB)^2}}\,\mathrm{d}u = \\
&= 2\int_0^\infty \frac{u^2+AB}{\sqrt{u^2\left((A+B)^2+u^2-2AB+\frac{A^2B^2}{u^2}\right)(u^4+2ABu^2+A^2B^2)}}\,\mathrm{d}u = \\
&= 2\int_0^\infty \frac{u^2+AB}{\sqrt{u^4\left((A+B)^2+u^2-2AB+\frac{A^2B^2}{u^2}\right)\left(u^2+2AB+\frac{A^2B^2}{u^2}\right)}}\,\mathrm{d}u = \\
&= 2\int_0^\infty \frac{u^2+AB}{u^2\sqrt{\left((A+B)^2+\left(u-\frac{AB}{u}\right)^2\right)\left(4AB+u^2-2AB+\frac{A^2B^2}{u^2}\right)}}\,\mathrm{d}u = \\
&= \int_0^\infty \frac{1+\frac{AB}{u^2}}{\frac{2}{4}\sqrt{\left((A+B)^2+\left(u-\frac{AB}{u}\right)^2\right)\left(4AB+\left(u-\frac{AB}{u}\right)^2\right)}}\,\mathrm{d}u = \\
&= \int_0^\infty \frac{1+\frac{AB}{u^2}}{2\sqrt{\left(\frac{1}{4}(A+B)^2+\frac{1}{4}\left(u-\frac{AB}{u}\right)^2\right)\left(AB+\frac{1}{4}\left(u-\frac{AB}{u}\right)^2\right)}}\,\mathrm{d}u = \\
&= \left|\begin{array}{c} t=\frac{1}{2}\left(u-\frac{AB}{u}\right) \\ \mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(1+\frac{AB}{u^2}\right)\mathrm{d}u \end{array}\right| = \\
&= \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\left(\left(\frac{A+B}{2}\right)^2+t^2\right)\left(\sqrt{A^2B^2}+t^2\right)}}\,\mathrm{d}u = \\
&= T\left(\frac{A+B}{2},\sqrt{AB}\right)
\end{aligned}
$$

Vidíme, že funkce $T(x_{n+1},y_{n+1})=T(x_n,y_n)$. Proto indukcí platí, že $T(x_0,y_0)=T(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}T(x_n,y_n)=T(L,L)$. Avšak vidíme, že

$$
\begin{aligned}
T(x_0,y_0)=T(L,L) &= \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(L^2+t^2)(L^2+t^2)}} = \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}t}{L^2+t^2} = \\
&= \left[\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{L}\right)}{L}\right]_{-\infty}^\infty = \left[\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{L}\right)}{L}\right]_{-\infty}^\infty = \\
&= \frac{\pi}{2L}+\frac{\pi}{2L}=\frac{\pi}{L}
\end{aligned}
$$

Z tohoto výrazu nyní můžeme vyjádřit limitu $L(x_0,y_0)$, Nás zajímá především hodnota $L(1,\sqrt{2})$. Vidíme však, že ji můžeme získat dosazením do funkce $T(A,B)$ jako

$$
T(1,\sqrt{2}) = 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1+t^2)(2+t^2)}}.
$$

Tento integrál budeme chtít spojit s integrálem

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}.$$

Avšak k tomuto vede ještě několik mezi kroků.

Uveďme, že na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ platí rovnost

$$\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x} = \sqrt{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\cos x}$$

Této rovnosti využijeme abychom vyjádřili

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{A^2\cos^2 u + B^2 \sin^2 u}} = \left| \begin{array}{c} t = B\operatorname{tg} u \\ \mathrm{d}t = \frac{B}{\cos^2 u}\,\mathrm{d}u = \frac{B}{\cos u}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}\,\mathrm{d}u = \\ = \frac{B}{\cos u}\sqrt{1+\frac{t^2}{B^2}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\cos u}\sqrt{B^2+t^2}\,\mathrm{d}u \end{array} \right| =$$
$$= \int_0^\infty \frac{\cos u\,\mathrm{d}t}{\cos u\sqrt{B^2+t^2}\sqrt{A^2+B^2\frac{\sin^2 u}{\cos^2 u}}} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{B^2+t^2}\sqrt{A^2+t^2}} = T(A,B)$$

Dále dostaneme

$$K(C) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-C^2\sin^2 u}} = \left| \begin{array}{c} t = \sin u \\ \mathrm{d}t = \cos u\,\mathrm{d}u = \sqrt{\cos^2 u}\,\mathrm{d}u = \sqrt{1-\sin^2 u}\,\mathrm{d}u = \\ = \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}u \end{array} \right| =$$
$$= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-C^2t^2}}$$

Spojením těchto vyjádření vidíme, že platí

$$T(A,B) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{A^2\cos^2 u + B^2\sin^2 u}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{A\sqrt{\cos^2 u + \frac{B^2}{A^2}\sin^2 u}} =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{A\sqrt{1-\sin^2 u + \frac{B^2}{A^2}\sin^2 u}} = \frac{1}{A}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-\left(1-\frac{B^2}{A^2}\right)\sin^2 u}} = \frac{1}{A}K\left(\sqrt{1-\frac{B^2}{A^2}}\right)$$

Je-li však $A=\sqrt{2}$ a $B=1$ vidíme, že

$$K\left(\sqrt{1-\frac{B^2}{A^2}}\right) = K\left(\sqrt{1-\frac{1}{2}}\right) = K\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = K\left(\frac{B}{A}\right)$$

Navíc můžeme vyjádřit

$$K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-\frac{1}{2}t^2}} = \sqrt{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{2-t^2}}$$

Dále převedeme

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1+x^2)}} = \left| \begin{array}{c} x = \frac{t}{\sqrt{2-t^2}} \\ \mathrm{d}x = \dots = \frac{2}{\sqrt{(2-t^2)^3}}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^1 \frac{\frac{2}{\sqrt{(2-t^2)^3}}}{\sqrt{\left(1-\frac{t^2}{2-t^2}\right)\left(1+\frac{t^2}{2-t^2}\right)}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{2-t^2}{\sqrt{(2-t^2)^3}\sqrt{(2-t^2-t^2)\,(2-t^2+t^2)}}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-t^2}\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

Nyní spojíme postupně všechny kroky znovu dohromady

$$\Gamma^2(1/4) = 4\sqrt{2\pi}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}} = 4\sqrt{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-t^2}\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 4\sqrt{\pi}K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4\sqrt{\pi}K\left(\sqrt{1-\frac{1}{2}}\right) = 4\sqrt{2\pi}T(1,\sqrt{2}) = 4\sqrt{2\pi}L(1,\sqrt{2})$$

Vidíme tedy, že hodnotu $\Gamma(1/4)$ dokážeme vyjádřit pomocí limity dvou posloupností. Avšak tuto limitu dostaneme právě jako Gaussovu konstantu.

Př. 297 *Nalezněte následující hodnoty* $\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)$, $\Gamma\left(\frac{10}{4}\right)$, $\Gamma\left(\frac{11}{4}\right)$, $\Gamma\left(\frac{16}{5}\right)$ *pomocí hodnot* $\Gamma(1/p)$, $p \in \mathbb{N}$.

Vidíme, že lze přepsat $\Gamma\left(\frac{9}{4}\right) = \Gamma\left(2+\frac{1}{4}\right)$. Určíme hodnotu $\Gamma(n+\frac{1}{p})$ ze zadaného vzorce a dostaneme

$$\Gamma\left(2+\frac{1}{4}\right) = \Gamma(\frac{1}{4})\frac{(8-3)!!!!}{4^2} = \frac{5}{16}\Gamma(\frac{1}{4})$$

Další hodnotu lze převést $\Gamma\left(\frac{10}{4}\right) = \Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)$.

Dosadíme opět do vzorce pro $\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)$ čímž máme

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+2\right) = \frac{3!!}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

Vidíme, že lze přepsat $\Gamma\left(\frac{11}{4}\right) = \Gamma\left(2+\frac{3}{4}\right)$. Použijeme vzorec $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ abychom dostali

$$\Gamma\left(2+\frac{3}{4}\right) = \left(1+\frac{3}{4}\right)\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{21}{16}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$$

Následně určíme hodnotu $\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$ skrze předchozí příklady. Víme, že platí

$$\Gamma(3/4) = \frac{\sqrt{2}\pi}{\Gamma(1/4)}$$

Přepíšeme $\Gamma\left(\frac{16}{5}\right) = \Gamma\left(3+\frac{1}{5}\right)$ a dosadíme do vzorce pro $\Gamma(n+\frac{1}{p})$ jako

$$\Gamma\left(3+\frac{1}{5}\right) = \frac{11\cdot 6}{125}\Gamma\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{66}{125}\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)$$

Př. 298 *Nalezněte hodnotu $\beta(n, m)$, kde $n, m \in \mathbb{N}$.*

Víme, že můžeme převést

$$\beta(n, m) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(n+m)} = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} = \frac{m+n}{n \cdot m} \frac{m! \cdot n!}{(m+n)!} = \frac{m+n}{nm} \frac{1}{\binom{n+m}{n}}$$

Př. 299 *Zaveďte funkci* $g(x,y)=\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-y+1)}$ *a zobecněné kombinační číslo* $\binom{x}{y}=\frac{g(x,y)}{\Gamma(y+1)}$*. Ukažte, že platí*

$$g(x+1,y)-g(x,y)=y\cdot g(x,y-1)$$
$$\binom{x+1}{y}-\binom{x}{y}=\binom{x}{y-1}$$

Dosadíme nejprve

$$\begin{aligned}g(x+1,y)-g(x,y)&=\frac{\Gamma(x+2)}{\Gamma(x-y+2)}-\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-y+1)}=\\&=\Gamma(x+1)\left(\frac{x+1}{(x-y+1)\Gamma(x-y+1)}-\frac{1}{\Gamma(x-y+1)}\right)=\\&=\Gamma(x+1)\frac{x+1-(x-y+1)}{(x-y+1)\Gamma(x-y+1)}=\Gamma(x+1)\frac{y}{(x-y+1)\Gamma(x-y+1)}=\\&=\frac{y\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-y+2)}=y\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-(y-1)+1)}=y\cdot g(x,y-1)\end{aligned}$$

Do druhé nerovnosti dosadíme obdobně čímž dostaneme

$$\begin{aligned}&\binom{x+1}{y}-\binom{x}{y}=\frac{g(x+1,y)}{\Gamma(y+1)}-\frac{g(x,y)}{\Gamma(y+1)}=\frac{g(x+1,y)-g(x,y)}{\Gamma(y+1)}=\\&=\frac{y\cdot g(x,y-1)}{y\Gamma(y)}=\frac{g(x,y-1)}{\Gamma(y)}=\binom{x}{y-1}\end{aligned}$$

Př. 300 *Vyjádřete $\int_0^\infty x^B\,\mathrm{e}^{-Ax^2}\,\mathrm{d}x$, kde $A>0$ a $B>-1$ pomocí Gamma funkce. Pomocí tohoto odvození ukažte, že hustota standardizovaného normálního rozdělení je definována korektně.*

Vzhledem ke tvaru Gamma funkce musíme zavést vhodnou substituci $t = Ax^2$. Dostaneme tak

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty x^B\,\mathrm{e}^{-Ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{t}{A}\right)^{B/2}\mathrm{e}^{-t}\,\frac{1}{\sqrt{At}}\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{2A^{(B+1)/2}}\int_0^\infty t^{(B-1)/2}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2A^{(B+1)/2}}\int_0^\infty t^{(B+1)/2-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{\Gamma((B+1)/2)}{2A^{(B+1)/2}}
\end{aligned}$$

Hustota rozdělení psti musí splňovat, že $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Ověříme tedy, že standardizované normální rozdělení tuto vlastnost splňuje. Hustota je

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

Dosadíme do integrálu a počítáme

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\right) = \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Vidíme, že máme integrál odpovídá obecnému tvaru pro $A = 1/2$, $B = 0$. Dosadíme

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(1/2)}{2\sqrt{1/2}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = 1
\end{aligned}$$

Př. 301 *Vyjádřete* $\int_0^\infty x^B \,\mathrm{e}^{-Ax^n}\,\mathrm{d}x$*, kde* $A > 0$*,* $B > -1$ *a* $n \in \mathbb{N}$ *pomocí Gamma funkce. Pomocí těchto výsledků rozhodněte, která z těles* V_n *má největší objem. Těleso* V_n *vznikne rotací křivky* $x^{(n-1)/2}\,\mathrm{e}^{-x^n}$ *okolo osy* x *na intervalu* $[0,\infty)$*.*

Vzhledem ke tvaru Gamma funkce musíme zavést vhodnou substituci $t = Ax^n$. Dostaneme

$$\int_0^\infty \left(\frac{t}{A}\right)^{B/n} \mathrm{e}^{-t}\,\frac{1}{n\sqrt[n]{A}t^{(n-1)/n}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{nA^{(B+1)/n}}\int_0^\infty t^{(B+1)/n-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{\Gamma((B+1)/n)}{nA^{(B+1)/n}}$$

S pomocí tohoto výsledku budeme nyní počítat objem těles. ten získáme jako

$$\pi\int_0^\infty f^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^\infty x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-2x^n}\,\mathrm{d}x$$

Tento integrál odpovídá vyšetřovanému integrálu pro $A = 2$ a $B = n-1$, který získáme ze znalosti obecné formule jako

$$\pi\int_0^\infty x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-2x^n}\,\mathrm{d}x = \pi\frac{\Gamma((n-1+1)/n)}{n2^{(n-1+1)/n}} = \pi\frac{\Gamma(1)}{2n} = \frac{\pi}{2n}$$

Tato hodnota je očividně největší pro $n = 1$.

Př. 302 *Vyjádřete* $\int_0^\infty \frac{x^{A-1}}{(1+x)^{A+B}}\,\mathrm{d}x$*, kde* $A > 0$*,* $B > 0$ *a* $n \in \mathbb{N}$ *pomocí Beta funkce. Pomocí těchto výsledků rozhodněte, který z integrálů*

$$\int_0^\infty \frac{x^{A-1}}{(1+x)^{A+B}}\,\mathrm{d}x$$
$$\int_0^\infty \frac{x^{B-1}}{(1+x)^{A+B}}\,\mathrm{d}x$$

je větší, pokud víte, že $A > B$*.*

Abychom spočetli integrál, musíme zavést vhodnou substituci. Vidíme, že by tento úkol nebyl příliš složitý, pokud bychom měli ve jmenovateli výraz $1 - x$. Pokud zavedeme substituci $x = t/(1-t)$ dostaneme, že $x + 1 = 1/(1-t)$ a navíc je $\mathrm{d}x = \frac{(1-t)+t}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t$. Vidíme, že nám tato substituce dá přesně to co chceme. Máme

$$\int_0^\infty \frac{t^{A-1}}{(1-t)^{A-1}}(1-t)^{A+B}\frac{1}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty t^{A-1}(1-t)^{A+B+1-A-2}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty t^{A-1}(1-t)^{B-1}\,\mathrm{d}t = \beta(A,B)$$

Pomocí tohoto výsledku chceme nyní určit, který z integrálů je větší. Avšak platí

$$\int_0^\infty \frac{x^{A-1}}{(1+x)^{A+B}}\,\mathrm{d}x = \beta(A,B)$$
$$\int_0^\infty \frac{x^{B-1}}{(1+x)^{A+B}}\,\mathrm{d}x = \beta(B,A)$$

Navíc platí, že

$$\beta(A,B) = \frac{\Gamma(A)\Gamma(B)}{\Gamma(A+B)} = \frac{\Gamma(B)\Gamma(A)}{\Gamma(A+B)} = \beta(B,A)$$

Proto jsou integrály stejné.

Př. 303 *Vyjádřete* $\int_0^1 x^{B-1}(1-x^n)^{A-1}\,\mathrm{d}x$*, kde* $A>0$*,* $B>0$ *a* $n>0$ *pomocí Beta funkce. Pomocí tohoto výsledku určete hodnotu integrálu* $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$*.*

Abychom spočetli integrál, musíme zavést vhodnou substituci. V integrálu nám vadí výraz x^n v rozdílu. Zavedeme tedy substituci $t=x^n$ čímž dostaneme

$$\int_0^1 x^{B-1}(1-x^n)^{A-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 t^{(B-1)/n}(1-t)^{A-1}\frac{1}{n}t^{1/n-1}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{n}\int_0^1 t^{B/n-1}(1-t)^{A-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\beta(B/n,A)}{n}$$

Následně chceme vypočítat integrál, přepíšeme jej tedy do tvaru

$$\int_0^1 (1-x^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}x$$

Proto vidíme $A=1/2$, $B=1$ a $n=2$. Dosadíme do vzorce abychom získali

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\beta(1/2,1/2)}{2} = \frac{\Gamma^2(1/2)}{\Gamma(1)2} = \frac{\pi}{2}$$

Př. 304 *Vyjádřete $\int_0^{\pi/2} \sin^{B-1} x \cos^{A-1} x \,\mathrm{d}x$, kde $A > 0$, $B > 0$ pomocí Beta funkce. Pomocí těchto výsledků odvoďte hodnotu integrálu*

$$\int_0^1 \sin^n x \,\mathrm{d}x$$

pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.

Budeme chtít zavést vhodnou substituci, abychom integrál převedli. Zavedeme $t = \sin x$, avšak musíme také přepsat $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - t^2}$. Dostaneme tedy

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{B-1} x \cos^{A-1} x \,\mathrm{d}x = \int_0^1 t^{B-1} \sqrt{(1-t^2)^{A-1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}} \,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^1 t^{B-1} (1-t^2)^{A/2-1} \,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{B-1} (1-t^2)^{A/2-1} \,\mathrm{d}t$$

Z předchozího příkladu však víme, že

$$\int_0^1 t^{B-1} (1-t^2)^{A/2-1} \,\mathrm{d}t = \frac{\beta(B/2, A/2)}{2}$$

Nyní chceme počítat integrál

$$\int_0^1 \sin^n x \,\mathrm{d}x$$

Vidíme, že zde platí $A = 1$ a $B = n + 1$. Dosazením do výsledku vidíme, že

$$\int_0^1 \sin^n x \,\mathrm{d}x = \frac{\beta((n+1)/2, 1/2)}{2} = \frac{\Gamma((n+1)/2)\Gamma(1/2)}{2\Gamma((n+2)/2)} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{n\Gamma(n/2)} =$$
$$= \begin{cases} \frac{(2k-1)!!\sqrt{\pi}}{2^k (k-1)!}, & \text{pro } n = 2k, k \in \mathbb{N} \\ \frac{2^{k-1}(k-1)!}{(2k-3)!!\sqrt{\pi}}, & \text{pro } n = 2k-1, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Př. 305 *Vyjádřete* $\int_0^\infty \frac{x^{A-1}}{1+x^B}\,\mathrm{d}x$*, kde* $A > 0$*,* $B > 0$*,* $A/B < 1$ *pomocí Beta funkce. Pomocí těchto výsledků spočtěte integrál*

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^6}\,\mathrm{d}x.$$

Musíme integrál převést do vhodného tvaru, ve jmenovateli nám však vadí výraz $1+x^B$, zavedeme tedy substituci $t = x^B$. Čímž dostaneme

$$\int_0^\infty \frac{x^{A-1}}{1+x^B}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{B}\int_0^\infty \frac{t^{(A-1)/B}}{1+t} t^{1/B-1}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{B}\int_0^\infty \frac{t^{A/B-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{B}\int_0^\infty \frac{t^{A/B-1}}{(1+t)^{A/B+1-A/B}}\,\mathrm{d}t$$

V Příkladě 305 jsme ukázali, že platí

$$\int_0^\infty \frac{x^{A-1}}{(1+x)^{A+B}}\,\mathrm{d}x = \beta(A,B)$$

Proto dostaneme integrál jako

$$\frac{1}{B}\int_0^\infty \frac{t^{A/B-1}}{(1+t)^{A/B+1-A/B}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{B}\beta(A/B, 1-A/B) = \frac{\Gamma(A/B)\Gamma(1-A/B)}{B\Gamma(1)} =$$
$$= \frac{\pi}{B\sin\left(\frac{A\pi}{B}\right)}$$

Integrál můžeme snadno spočítat pokud si uvědomíme, že platí

$$\left(\operatorname{arctg} x^3\right)' = \frac{3x^2}{1+x^6}$$

nebo dosadíme do vzorce $A = 3$, $B = 6$ a získáme

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^6}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6\sin\left(\frac{3\pi}{6}\right)} = \frac{\pi}{6}$$

Př. 306 *Nalezněte n-tý moment standardizovaného normálního rozdělení.*

Standardizované normální rozdělení má hustotu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

a jeho $n-$ tý moment je

$$M_n = E(N^n(0,1)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\;\mathrm{d}x$$

První si všimneme, že pro n liché je integrovaná funkce také lichá a nemá tedy smysl integrál počítat neboť v tomto případě je $M_n = 0$. Předpokládejme nadále, že $n = 2k$ je sudé. Dostaneme

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\;\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\;\mathrm{d}x$$

V Příkladě 300 jsme ukázali, že platí

$$\int_{0}^{\infty} x^B\,\mathrm{e}^{-Ax^2}\;\mathrm{d}x = \frac{\Gamma((B+1)/2)}{2A^{(B+1)/2}}$$

Volíme tedy $B = n$ a $A = 1/2$. Dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\;\mathrm{d}x &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{2^{1-(n+1)/2}} = \\ = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(k+1/2)}{2^{1/2-k}} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} 2^{k-1/2} \frac{(2k-1)!!}{2^k} \sqrt{\pi} = (2k-1)!! \end{aligned}$$

Př. 307 *Nalezněte n-tý moment rozdělení, které je dáno hustotou*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\Gamma(C/2)} x^{C/2-1}\,\mathrm{e}^{-x/2}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

kde $C = 4k$, $k \in \mathbb{N}$ je libovolný parametr.

Počítáme $n-$tý moment jako integrál

$$M_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^{C/2}\Gamma(C/2)} \int_0^{\infty} x^n x^{C/2-1}\,\mathrm{e}^{-x/2}\,\mathrm{d}x = \\ = \frac{1}{2^{C/2}\Gamma(C/2)} \int_0^{\infty} x^{n+C/2-1}\,\mathrm{e}^{-x/2}\,\mathrm{d}x$$

V Příkladě 300 jsme ukázali, že platí

$$\int_0^{\infty} x^B\,\mathrm{e}^{-Ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma((B+1)/2)}{2A^{(B+1)/2}}$$

Volíme tedy $B = n + C/2 - 1$ a $A = 1/2$. Dostáváme tedy

$$\frac{1}{2^{C/2}\Gamma(C/2)} \frac{\Gamma((2n+C)/4)}{2^{1-(2n+C)/4}} = \frac{\Gamma(k+n/2)}{2^{1-n/2+k}\Gamma(2k)} = \\ = \frac{\Gamma(k+n/2)}{2^{1-n/2+k}(2k-1)!} = \begin{cases} \frac{(k+l-1)!}{2^{1+k-l}(2k-1)!} & \text{pro } n = 2l, l \in \mathbb{N}, \\ \frac{[2(k+l)-3]!!}{2^{3k+l-1}(2k-1)!}\sqrt{\pi} & \text{pro } n = 2l-1, l \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

Př. 308 *Nalezněte n-tý moment rozdělení, které je dáno hustotou*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{Cx^{C-1}}{D^C} \, \mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{D}\right)^2}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

kde $C > 0$, $D > 0$ jsou parametry.

Počítáme $n-$tý moment jako integrál

$$\begin{aligned} M_n &= \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} x^n \frac{Cx^{C-1}}{D^C} \, \mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{D}\right)^2} \, \mathrm{d}x = \\ &= \frac{C}{D^C} \int_0^{\infty} x^{n+C-1} \, \mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{D}\right)^2} \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

V Příkladě 300 jsme ukázali, že platí

$$\int_0^{\infty} x^B \, \mathrm{e}^{-Ax^2} \, \mathrm{d}x = \frac{\Gamma((B+1)/2)}{2A^{(B+1)/2}}$$

Volíme tedy $B = n + C - 1$ a $A = 1/D^2$. Máme tedy

$$\frac{C}{D^C} \frac{\Gamma((n+C)/2)}{2} D^{n+C} = C \frac{\Gamma((n+C)/2)}{2} D^n = \begin{cases} CD^n \frac{(k-1)!}{2}, & \text{pro } n + C = 2k, k \in \mathbb{N}, \\ CD^n \frac{(2k-3)!!}{2^k} \sqrt{\pi} & \text{pro } n + C = 2k - 1, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Př. 309 *Pomocí hodnot funkcí Beta/Gamma spočtěte hodnotu integrálů*

1. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$
2. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$
3. $\int_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$
4. $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$
5. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x$
6. $\int_0^{\pi/2} \sin x\sqrt{\cos x}\,\mathrm{d}x$
7. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x$

1. Integrál převedeme do tvaru

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \int_0^1 x^{1-1}(1-x^2)^{2/3-1}\,\mathrm{d}x = \beta(1,2/3) = \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(5/3)}$$

2. Integrál převedeme do tvaru

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^1 x^{1-1}(1-x^4)^{1/2-1}\,\mathrm{d}x$$

Integrál tohoto tvaru jsme v obecné podobě vyřešili v Příkladě 303 jako vzorec

$$\int_0^1 x^{B-1}(1-x^n)^{A-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\beta(B/n,A)}{n}$$

dosadíme tedy

$$\int_0^1 x^{1-1}(1-x^4)^{1/2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\beta(1/4,1/2)}{4} = \frac{\Gamma(1/4)}{4\Gamma(3/4)}\sqrt{\pi}$$

3. Integrál převedeme vhodnou substitucí $x = 3t$ do tvaru

$$\int_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x = 81\int_0^1 t^{3-1}(1-x^2)^{3/2-1}\,\mathrm{d}x$$

I zde využijeme vzorec získaný v Příkladě 303 čímž dostaneme

$$81\int_0^1 t^{3-1}(1-x^2)^{3/2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\beta(3/2,3/2)}{2} = \frac{\Gamma^2(3/2)}{2\Gamma(3)} = \frac{\pi}{16}$$

4. Integrál převedeme do tvaru

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{x^{3/2-1}}{(1+x)^{3/2+1/2}}\,\mathrm{d}x$$

Integrál tohoto tvaru jsme v obecné podobě vyřešili v Příkladě 305, kde jsme získali vzorec

$$\int_0^\infty \frac{x^{A-1}}{(1+x)^{A+B}} = \beta(A,B)$$

Dosadíme do něj abychom získali

$$\int_0^\infty \frac{x^{3/2-1}}{(1+x)^{3/2+1/2}}\,\mathrm{d}x = \beta(3/2,1/2) = \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(2)} = \frac{\pi}{2}$$

5. Integrál převedeme do tvaru

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin^{3/2-1} x \cos^{1-1} x\,\mathrm{d}x$$

Integrál tohoto tvaru jsme v obecné podobě vyřešili v Příkladě 304, kde jsme získali vzorec

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{B-1} x \cos^{A-1} x\,\mathrm{d}x = \frac{\beta(B/2,A/2)}{2}$$

Dosadíme do tohoto vzorce abychom získali

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{3/2-1} x \cos^{1-1} x\,\mathrm{d}x = \frac{\beta(3/4,1/2)}{2}$$

6. Integrál převedeme do tvaru

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\sqrt{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin^{2-1} x \cos^{3/2-1} x\,\mathrm{d}x$$

Integrál tohoto tvaru jsme v obecné podobě vyřešili v Příkladě 304, kde jsme získali vzorec do kterého snadno dosadíme.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2-1} x \cos^{3/2-1} x\,\mathrm{d}x = \frac{\beta(1,3/4)}{2}$$

7. Integrál převedeme do tvaru

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin^{3/2-1} x \cos^{1/2-1} x\,\mathrm{d}x$$

Integrál tohoto tvaru jsme v obecné podobě vyřešili v Příkladě 304, kde jsme získali vzorec do kterého snadno dosadíme.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{3/2-1} x \cos^{1/2-1} x\,\mathrm{d}x = \frac{\beta(3/4,1/4)}{2} = \frac{\Gamma(3/4)\Gamma(1/4)}{2\Gamma(1)} = \frac{\pi}{2\sin(\pi/4)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Př. 310 *Ukažte, že funkce*

$$F(y) = \int_0^1 \mathrm{sgn}(x-y)\,\mathrm{d}x$$

je spojitá.

Vypočteme integrál vzhledem k jednoduchosti funkce

$$\mathrm{sgn}(x-y) = \begin{cases} 1, & x-y > 0, \\ 0, & x = y, \\ -1, & x-y < 0. \end{cases}$$

V integrálu však $x \in [0,1]$, a proto máme

$$F(y) = \begin{cases} \int_0^1 -1\,\mathrm{d}x = -1, & y \geq 1, \\ \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1, y \leq 0. \end{cases}$$

Zbytek funkce pro $y \in (0,1)$ dopočteme snadno

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_0^1 \mathrm{sgn}(x-y)\,\mathrm{d}x = \int_0^y \mathrm{sgn}(x-y)\,\mathrm{d}x + \int_y^1 \mathrm{sgn}(x-y)\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^y -1\,\mathrm{d}x + \int_y^1 1\,\mathrm{d}x = -y + (1-y) = 1-2y \end{aligned}$$

Funkce $F(y)$ je tedy definovaná po částech, kde vyšetřované části jsou spojité. Musíme tedy dořešit spojitost funkcí pouze v bodech 0 a 1. Avšak snadno vidíme, že zde se limita zprava a zleva vždy rovnají neboť

$$\begin{aligned} \lim_{y\to 0^-} F(y) = 1 = \lim_{y\to 0^+-} F(y), \\ \lim_{y\to 1^-} F(y) = -1 = \lim_{y\to 1^+-} F(y). \end{aligned}$$

Př. 311 *Vypočtěte limitu*

$$\lim_{y\to 0}\int_0^2 x^2\cos(xy)\,\mathrm{d}x$$

Všimneme si, že integrovaná funkce $f(x,y) = x^2\cos(xy)$ je spojitá na celém $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ a tedy i na množině $[0,2]\times[-A,A]$. Můžeme tedy zaměnit pořadí integrace a limity podle věty čímž získáme

$$\begin{aligned}&\lim_{y\to 0}\int_0^2 x^2\cos(xy)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \lim_{y\to 0} x^2\cos(xy)\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}\end{aligned}$$

Př. 312 *Vypočtěte limitu*

$$\lim_{y\to 0} \int_{-1}^{1} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x$$

Chtěli bychom v tomto případě zaměnit pořadí limity a integrálu, k tomu musíme ověřit několik podmínek. Víme, že funkce $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ je spojitá na celé množině $\mathbb{R}^2$. Navíc množina $A = [-1,1]$ je kompaktní a proto můžeme počítat pro libovolnou kompaktní B, která obsahuje bod 0, že

$$\lim_{y\to 0} \int_{-1}^{1} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \lim_{y\to 0} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} |x|\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} x\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1$$

Př. 313 *Vypočtěte limitu*

$$\lim_{y\to 1}\int_0^1 \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x$$

Vidíme, že funkce $f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$ není spojitá v počátku. Množina $A=[0,1]$ je daná. Musíme vhodně zvolit množinu B, aby na obdélníku $A\times B$ byla f spojitá. Chceme však vyšetřovat limitu $y\to 1$, můžeme volit například $B=[1/2,2]$ a podmínka na spojitost f je splněna. Můžeme tedy brát

$$\begin{aligned}&\lim_{y\to 1}\int_0^1 \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \lim_{y\to 1}\frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\\&=[\operatorname{arctg} x]_0^1=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Obdobně můžeme počítat

$$\begin{aligned}&\lim_{y\to 1}\int_0^1 \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x=\lim_{y\to 1}\frac{1}{y^2}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x=\\&=\lim_{y\to 1}\frac{1}{y^2}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)\right]_0^1=\lim_{y\to 1}\frac{1}{y^2}\operatorname{arctg}\frac{1}{y}=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Př. 314 *Vypočtěte limitu*

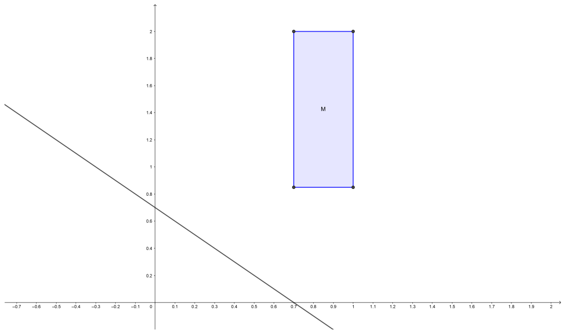
$$\lim_{y\to 1}\int_z^1 \frac{1}{x+y-z}\,\mathrm{d}x,$$

kde $z<1$

Hledáme obdélník $A\times B$ na kterém by byla funkce

$$f(x,y)=\frac{1}{x+y-z}$$

spojitá za podmínky, že $1\in B$ a máme dané $A=[z,1]$. Funkce $f(x,y)$ není spojitá na přímce $x+y=z$, proto volíme $B=\left[\frac{1+z}{2},2\right]$, neboť takto nebude mít obdélník s přímkou žádný průnik. Stačí si vše vykreslit. Pro jisté z dostaneme



Avšak můžeme také uvážit, že pro $x>0$ je $y=z-x<z<\frac{1+z}{2}$.

Dostáváme tak

$$\lim_{y\to 1}\int_z^1 \frac{1}{x+y-z}\,\mathrm{d}x=\int_z^1 \lim_{y\to 1}\frac{1}{x+y-z}\,\mathrm{d}x=$$
$$=\int_z^1 \frac{1}{x+1-z}\,\mathrm{d}x=[\ln|x+1-z|]_z^1=\ln|2-z|-\ln 1=\ln(2-z)$$

Můžeme také počítat přímo

$$\lim_{y\to 1}\int_z^1 \frac{1}{x+y-z}\,\mathrm{d}x=\lim_{y\to 1}[\ln|x+y-z|]_z^1=$$
$$=\lim_{y\to 1}(\ln(1+y-z)-\ln y)=\ln(2-z)$$

Př. 315 *Vypočtěte limitu*

$$\lim_{y\to 0}\int_y^{y+1}\frac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x$$

Vidíme, že funkce $f(x,y)=\frac{1}{1+x^2+y^2}$, $g(y)=y+1$ a $h(y)=y$ jsou spojité na libovolném intervalu. Proto zvolíme $[a,b]$, $[c,d]$ libovolně tak aby $g([c,d])\subset[a,b]$ a $h([c,d])\subset[a,b]$. Nesmíme však zapomenout, že chceme $0\in[c,d]$. Snadno tak získáme například intervaly $[-3,3]\times[-1,1]$. Můžeme proto počítat

$$\lim_{y\to 0}\int_y^{y+1}\frac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x=\lim_{y\to 0}G(y)=G(0)=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=[\operatorname{arctg}x]_0^1=\frac{\pi}{4}$$

Př. 316 *Vypočtěte limitu*

$$\lim_{y\to 0}\int_{y-2}^{\operatorname{sgn} y} x+y^2\,\mathrm{d}x$$

Vidíme, že funkce $f(x,y)=x+y^2$, $h(y)=y-2$ jsou spojité v každém bodě. Avšak funkce $g(y)=\operatorname{sgn} y$ je nespojitá v bodě 0. Nenalezneme tedy vhodný trojúhelník, abychom mohli zaměnit pořadí limity a integrace, počítáme přesto rovnou

$$\lim_{y\to 0}\int_{y-2}^{\operatorname{sgn} y} x+y^2\,\mathrm{d}x=\lim_{y\to 0}\left[\frac{x^2}{2}+xy^2\right]_{y-2}^{\operatorname{sgn} y}=$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sgn}^2 y-(y-2)^2}{2}+y^2\operatorname{sgn} y-y^3+2y^2=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sgn}^2 y}{2}+y^2\operatorname{sgn} y=$$

Budeme chtít počítat limitu těchto výrazů, uvědomíme si však, že funkce $\operatorname{sgn} y$ je ohraničená, proto je $\lim_{y\to 0} y^2\operatorname{sgn} y=0$. Dále pak platí, že $\lim_{y\to 0}\operatorname{sgn}^2 y=1$ což si snadno rozmyslíme, nebo nakreslíme. Proto je celkem limita

$$\lim_{y\to 0}\int_{y-2}^{\operatorname{sgn} y} x+y^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

Př. 317 *Vypočtěte limitu*

$$\lim_{y\to 1}\int_{y^2}^{y^3+1}\sqrt{\frac{x^2+\ln y}{x^2+y^2-1}}\,\mathrm{d}x$$

Vidíme, že funkce $g(y)=y^3+1$ a $h(y)=y^2$ jsou spojité na libovolném intervalu. Navíc funkce $f(x,y)=\sqrt{\frac{x^2+\ln y}{x^2+y^2-1}}\,\mathrm{d}x$ je nespojitá pouze v bodech $[x,0]$ a na kružnici $x^2+y^2=1$. Zvolíme interval $B=[1-1/n,1+1/n]$ pro vhodné dostatečně velké n. Druhý interval $A=[a,b]$ volíme poté tak, aby se body obdélníku $A\times B$ nesetkaly s kružnicí $x^2+y^2=1$. Stačí nalézt n dostatečně velké spolu s a dostatečně blízkým hodnotě 1 avšak tak aby stále platilo $\left(1-\frac{1}{n}\right)^2>a$. horní hranice b zvolíme libovolně dostatečně velkou, např. $b=4$. Poté platí, že $g(B)\subset[a,4]$ a $h(B)\subset[a,4]$. Můžeme tedy počítat

$$\lim_{y\to 1}\int_{y^2}^{y^3+1}\sqrt{\frac{x^2+\ln y}{x^2+y^2-1}}\,\mathrm{d}x=\lim_{y\to 1}G(y)=G(1)=\int_1^2\sqrt{\frac{x^2+\ln 1}{x^2+1-1}}\,\mathrm{d}x=$$
$$=\int_1^2\sqrt{\frac{x^2}{x^2}}\,\mathrm{d}x=\int_1^2 1\,\mathrm{d}x=1$$

Př. 318 *Vypočtěte limitu*

$$\lim_{y\to 0} \frac{1}{y} \int_z^x f(t+y) - f(t)\,\mathrm{d}t,$$

kde funkce $f(t)$ je spojitá na intervalu $[A, B]$, a $A < z < x < B$.

Nejdříve se musíme zorientovat v písmencích vyskytujících se v integrálu. Řešíme limitu vzhledem k y a integrál vzhledem k t. Proto nás meze integrálu nezajímají a bereme je jako konstanty. Funkce

$$h(t, y) = f(t+y) - f(t)$$

je spojitá pokud $t \in [A, B]$ a pokud je $t + y \in [A, B]$. Avšak zajímá nás y pouze blízko nule. Tudíž funkce $h(t, y)$ je spojitá na množině $[z, x] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ pokud je $\varepsilon > 0$ dostatečně malé tak aby $A < z - \varepsilon < t + y < x + \varepsilon < B$. Můžeme tedy zaměnit pořadí integrace a limity čímž dostaneme

$$\lim_{y\to 0} \frac{1}{y} \int_z^x f(t+y) - f(t)\,\mathrm{d}t = \int_z^x \lim_{y\to 0} \frac{f(t+y) - f(t)}{y}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_z^x f'(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)]_z^x = f(x) - f(z)$$

Př. 319 *Nalezněte derivaci funkce*

$$G(y) = \int_0^2 \mathrm{e}^{-yx^2}\ \mathrm{d}x$$

pro $y \neq 0$.

Vidíme, že integrovaná funkce

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{-yx^2}$$

je spojitá na celém $\mathbb{R}^2$ a proto je spojitá i na libovolném vhodném obdélníku. Její parciální derivace je

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{e}^{-yx^2} = -x^2\,\mathrm{e}^{-yx^2}$$

a tato je také spojitá na libovolném vhodném obdélníku. Můžeme tedy zaměnit

$$G'(y) = \int_0^2 \frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{e}^{-yx^2}\ \mathrm{d}x = \int_0^2 -x^2\,\mathrm{e}^{-yx^2}\ \mathrm{d}x$$

Tento integrál snadno neurčíme, necháme tedy derivaci v tomto tvaru.

Př. 320 *Nalezněte derivaci funkce*

$$G(y) = \int_0^1 \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) \,\mathrm{d}x$$

pro $y \neq 0$.

Vidíme, že funkce $\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$ je nespojitá v bodech $[x, 0]$. Její parciální derivace je

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{x}{y^2 + x^2}$$

a ta je nespojitá v počátku $[0, 0]$. Z integrálu máme danou první část obdélníku přes který integrujeme jako $A = [0, 1]$. Pro pevné $y > 0$ a $y < 0$ vždy nalezneme zbytek kompaktního interval na kterém budou $f(x, y)$ a $f_y(x, y)$ spojité. Máme tedy

$$G'(y) = -\int_0^1 \frac{x}{y^2 + x^2} \,\mathrm{d}x = -\left[\frac{1}{2} \ln |y^2 + x^2|\right]_0^1 = -\frac{1}{2} \ln |y^2 + 1| + \frac{1}{2} \ln |y^2| = \frac{1}{2} \ln \frac{y^2}{y^2 + 1}$$

Př. 321 *Nalezněte derivaci funkce*

$$G(y) = \int_1^2 \frac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1+x}} \,\mathrm{d}x$$

Vidíme, že integrovaná funkce

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}$$

není spojitá v bodech $[0,y]$ a $[-1,y]$. Její parciální derivace je

$$f_y(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1+x}(1+x^2y^2)}$$

Tato je nespojitá pouze v bodech $[-1,y]$. Interval pro x máme daný jako $A = [1,2]$. Na obdélníku $A \times \mathbb{R}$ jsou tak funkce f a f_y spojité a můžeme počítat

$$G'(y) = \int_1^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1+x}} \,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1+x}(1+x^2y^2)} \,\mathrm{d}x$$

Př. 322 *Nalezněte derivaci funkce*

$$G(y)=\int_0^1 \frac{\ln(1+xy)}{1+x^2+\ln y}\,\mathrm{d}x$$

pro $y>1$.

Vidíme, že funkce

$$f(x,y)=\frac{\ln(1+x)}{1+x^2+\ln y}$$

není spojitá pouze pro $yx\le -1$. Avšak vyšetřovaný obdélník má jednu stranu $A=[0,1]$. Navíc máme podmínku $y>1$ a tedy nás toto omezení neovlivňuje. Ze zadaných podmínek je také jmenovatel vždy kladný. Parciální derivace je

$$f_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\ln(1+xy)}{1+x^2+\ln y}=\frac{x}{(1+yx)(1+x^2+\ln y)}-\frac{\ln(1+xy)}{(1+x^2+\ln y)^2}$$

Vidíme, že parciální derivace není definována pouze v bodech $1+yx=0$ avšak tímto také nejsme omezení. Máme tudíž

$$G'(y)=\int_0^1 \frac{x}{(1+yx)(1+x^2+\ln y)}-\frac{\ln(1+xy)}{(1+x^2+\ln y)^2}\,\mathrm{d}x$$

Př. 323 *Nalezněte derivaci funkce*

$$G(y) = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \, \mathrm{d}x,$$

kde $z > 0$.

Vidíme, že funkce

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

je spojitá v libovolném bodě. Parciální derivace

$$f_y(x, y) = -\frac{2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

je také spojitá v každém bodě. Proto platí

$$G'(y) = -\int_0^1 \frac{2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \, \mathrm{d}x$$

Př. 324 *Nalezněte derivaci funkce*

$$G(y) = \int_0^1 \frac{\ln(z+x)}{z+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

kde $z > 0$.

Vidíme, že funkce

$$f(x,y) = \frac{\ln(z+x)}{z+x^2}$$

není spojitá pouze pro $z + x \leq 0$ avšak vyšetřovaný obdélník je pro x omezen integrovaným rozsahem jako $A = [0, 1]$. Neboť je navíc $z > 0$ tato podmínka nás nijak neomezí. Parciální derivace je

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\ln(z+xy)}{z+x^2} = \frac{x}{(z+yx)(z+x^2)}$$

Vidíme, že parciální derivace není definována pouze v bodech $z+yx = 0$ avšak tímto také nejsme omezení. Máme tudíž

$$G'(y) = \int_0^1 \frac{x}{(z+yx)(z+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

Př. 325 *Nalezněte derivaci funkce*

$$G(y) = \int_0^z x^2 + y^2 \, \mathrm{d}x,$$

pro $z > 0$.

Vidíme, že funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ je spojitá v každém bodě. Také parciální derivace $f_y(x, y) = 2y$ je spojitá v každém bodě. Proto platí

$$G'(y) = \int_0^z 2y \, \mathrm{d}x = 2y \, [x]_0^z = 2yz$$

Můžeme nyní také snadno určit

$$G(y) = y^2 z + C,$$

kde C je konstant. Víme, že platí

$$C = G(0) = \int_0^z x^2 + 0^2 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^z = \frac{z^3}{3}$$

Proto máme

$$G(y) = y^2 z + \frac{z^3}{3}$$

Toto bychom však mohli získat rovnou integrováním původního integrálu.

Př. 326 *Vypočtěte hodnotu integrálu*

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Integrál vypočteme pomocí parametrického integrálu

$$G(y) = \int_0^1 \frac{\ln(1+xy)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Pro $x \in [0,1]$ je integrovaná funkce

$$f(x,y) = \frac{\ln(1+xy)}{1+x^2}$$

spojitá na obdélníku $M = [0,1] \times [A,B]$, kde $-1 < A < B$. Navíc je parciální derivace daná jako

$$f_y(x,y) = \frac{x}{(1+xy)(1+x^2)}$$

spojitá na obdélníku M také. Proto máme

$$\begin{aligned}
G'(y) &= \int_0^1 \frac{x}{(1+xy)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{-y}{(y^2+1)(1+xy)} + \frac{x}{(1+y^2)(1+x^2)} + \frac{y}{(1+y^2)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \\
&= \left[-\frac{1}{1+y^2}\ln(1+xy) + \frac{1}{2(1+y^2)}\ln(1+x^2) + \frac{y\operatorname{arctg} x}{1+y^2}\right]_0^1 = \\
&= -\frac{\ln(1+y)}{1+y^2} + \frac{\ln 2}{2(1+y^2)} + \frac{\pi y}{4(1+y^2)}
\end{aligned}$$

Integrací tohoto výrazu dostaneme

$$\begin{aligned}
G(y) &= -\int_0^y \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \left[\frac{\ln 2}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{8}\ln(1+x^2)\right]_0^y = \\
&= -\int_0^y \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{\ln 2}{2}\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{8}\ln(1+y^2)
\end{aligned}$$

Druhé vyjádření pro funkci $G(y)$ je pak

$$G(y) = \int_0^1 \frac{\ln(1+xy)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Dohromady tak máme

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = G(1) = -\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{\pi\ln 2}{8} + \frac{\pi\ln 2}{8}$$

Převedením na druhou stranu tak získáme

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln 2}{8}\pi$$

Př. 327 *Nalezněte derivaci funkce*

$$G(y) = \int_y^{y^2} \mathrm{e}^{-yx^2} \, \mathrm{d}x,$$

pro $y > 0$.

Všimneme si, že vystupující funkce $g(y) = y^2$, $h(y) = y$ a $f(x, y) = \mathrm{e}^{-yx^2}$ jsou všechny spojité na libovolném obdélníku. Také parciální derivace

$$f_y(x, y) = -x^2 \, \mathrm{e}^{-yx^2}$$

je spojitá na libovolném obdélníku a derivace $g'(y)$, $h'(y)$ jsou spojité na libovolném intervalu. Proto můžeme dosadit do Leibnitzova vzorce čímž získáme

$$G'(y) = -\int_y^{y^2} x^2 \, \mathrm{e}^{-yx^2} \, \mathrm{d}x + f(y^2, y) \cdot (y^2)' + f(y, y) \cdot (y)' = -\int_y^{y^2} x^2 \, \mathrm{e}^{-yx^2} \, \mathrm{d}x + 2y \, \mathrm{e}^{-y^5} - \mathrm{e}^{-y^3} \cdot 1$$

Př. 328 *Nalezněte derivaci funkce*

$$G(y) = \int_{y^2}^{3y^2+1} \frac{\mathrm{e}^{xy}}{x}\,\mathrm{d}x,$$

pro $y > 0$.

Vidíme, že omezující funkce $g(y) = 3y^2+1$ a $h(y) = y^2$ jsou spojité a diferencovatelné. Integrovaná funkce

$$f(x, y) = \frac{\mathrm{e}^{xy}}{x}$$

je nespojitá v bodech $[0, y]$. Platí, že $h([a, b]) = [a^2, b^2]$ a $g[a, b] = [3a^2+1, 3b^2+1]$. Proto platí, že ohraničující funkce g, h zobrazují interval $[a, b]$ do intervalu $[a^2, 3b^2 + 1]$. Pokud $0 \notin [a, b]$ potom ani $0 \notin [a^2, 3b^2 + 1]$. Tudíž $f(x, y)$ je spojitá na obdélníku $M = [a^2, 3b^2 + 1] \times [a, b]$. Její parciální derivace je

$$f_y(x, y) = \mathrm{e}^{xy},$$

která je spojitá na libovolném obdélníku, tedy i na M. Můžeme tedy použít Leibnizův vzorec abychom získali

$$G'(y) = \int_{y^2}^{3y^2+1} \mathrm{e}^{xy}\ \mathrm{d}x + f(g(y), y)g'(y) - f(h(y), y)h'(y) = \int_{y^2}^{3y^2+1} \mathrm{e}^{xy}\ \mathrm{d}x + \frac{6y\,\mathrm{e}^{3y^3+y}}{3y^2+1} - \frac{2y\,\mathrm{e}^{y^3}}{y^2} =$$

$$= \left[\frac{\mathrm{e}^{xy}}{y}\right]_{y^2}^{3y^2+1} + \frac{6y\,\mathrm{e}^{3y^3+y}}{3y^2+1} - \frac{2\,\mathrm{e}^{y^3}}{y} = \left[\frac{\mathrm{e}^{3y^3+y} - \mathrm{e}^{y^3}}{y}\right]_{y^2}^{3y^2+1} + \frac{6y\,\mathrm{e}^{3y^3+y}}{3y^2+1} - \frac{2\,\mathrm{e}^{y^3}}{y}$$

Př. 329 *Nalezněte derivaci funkce*

$$G(y) = \int_{\ln y}^{y} \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x,$$

pro $y > 0$.

Vidíme, že integrovaná funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ je spojitá v každém bodě stejně jako horní ohraničení $g(y) = y$. Toto ohraničení je také diferencovatelné. Parciální derivace

$$f_y(x, y) = \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

není spojitá pouze v bodě $[0, 0]$. Dolní ohraničení $h(y) = \ln y$ je diferencovatelná pro $y > 0$. Vezmeme-li interval $[a, b]$ pro $0 < a < b$ pak $g([a, b]) = [a, b]$ a $h([a, b]) \subset [-K, K]$ pro K dostatečně velké. Poté jsou f a f_y na obdélníku $M = [-K, K] \times [a, b]$ spojité. Vidíme, že počátek v M nikdy neleží. Můžeme zde tedy využít Leibnizův vzorec abychom dostali derivace na intervalu $[a, b]$ jako

$$G'(y) = \int_{\ln y}^{y} \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\mathrm{d}x + \sqrt{2y^2} - \frac{\sqrt{\ln^2 y + y^2}}{y}.$$

Neboť jsou $b > a > 0$ libovolné, platí tento vzorec pro libovolné $y > 0$.

Př. 330 *Nalezněte derivaci funkce*

$$G(y) = \int_{2y-1}^{\operatorname{sgn} y} x^2 + y^2 \,\mathrm{d}x.$$

Vidíme, že dolní ohraničení $h(y) = 2y - 1$ stejně jako integrovaná funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ jsou spojité a mají spojité i (parciální) derivace. Dolní ohraničení zobrazuje libovolný uzavřený interval $[a, b]$ na interval $[2a-1, 2b-1]$. Komplikaci v tomto příkladě představuje horní ohraničení $g(y) = \operatorname{sgn} y$, které je spojité a diferencovatelné všude kromě bodu $y = 0$. Uvážíme-li tedy $y > 0$ zobrazuje g libovolný interval $[a, b]$, kde $0 < a < b$ na bod $\{1\}$. Dostaneme tak obdélník $[2a - 1, 2b - 1] \times [a, b]$, kde jsou předpoklady věty splněny a máme

$$G'(y) = \int_{2y-1}^{\operatorname{sgn} y} 2y \,\mathrm{d}x + (\operatorname{sgn}^2 y + y^2) \cdot 0 - 2(2y - 1)^2 - 2y^2 = \left[y^2\right]_{2y-1}^{\operatorname{sgn} y} - 2(2y - 1)^2 - 2y^2$$

Tento vzorec však platí pouze pro $y > 0$. Obdobně lze odvodit vzorec pro $y < 0$. Avšak obdobně můžeme derivaci získat skrze vyjádření

$$G(y) = \left[\frac{x^3}{3} + xy^2\right]_{2y-1}^{\operatorname{sgn} y} = \frac{\operatorname{sgn}^3 y}{3} + y^2 \operatorname{sgn} y - \frac{(2y - 1)^3}{3} - (2y - 1)y^2,$$

které zderivujeme.

Př. 331 *Nalezněte derivaci funkce*

$$G(y) = \int_{\sin y}^{\cos y} \mathrm{e}^{y\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x,$$

pro $y > 0$.

Dolní a horní ohraničení $g(y) = \cos y$, $h(y) = \sin y$ jsou spojité a diferencovatelné funkce. Stejně tak integrovaná funkce $f(x,y) = \mathrm{e}^{y\sqrt{1-x^2}}$ je spojitá pokud $x^2 \leq 1$. Její parciální derivace je

$$f_y(x,y) = \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{e}^{y\sqrt{1-x^2}},$$

která je také spojitá pokud $x^2 \leq 1$. Neboť ohraničení g, h zobrazují libovolný interval $[a,b]$ do intervalu $[-1,1]$ jsou f a f_y spojité na libovolném obdélníku $M = [-1,1] \times [a,b]$. Proto můžeme využít Leibnizovu formuli

$$G'(y) = \int_{\sin y}^{\cos y} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{e}^{y\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + -\mathrm{e}^{y\sqrt{1-\cos^2 y}}\sin y - \mathrm{e}^{y\sqrt{1-\sin^2 y}}\cos y$$

Př. 332 *Nalezněte derivaci funkce*

$$G(y) = \int_{A+y}^{B+y} \frac{\sin yx}{x}\, \mathrm{d}x,$$

pro $y > 0$.

Vidíme, že horní a dolní ohraničení $g(y) = B + y$, $h(y) = A + y$ jsou spojité a diferencovatelné. Integrovaná funkce

$$f(x, y) = \frac{\sin yx}{x}$$

je nespojitá v bodech $[0, y]$ a její parciální derivace

$$f_y(x, y) = \cos yx$$

je spojitá v každém bodě. Ohraničení g, h zobrazují libovolný interval $[c, d]$ na intervaly $[A + c, A + d]$ a $[B + c, B + d]$. Tedy dohromady do intervalu $[A + c, B + d]$. Dostáváme tak obdélník $[A + c, B + d] \times [c, d]$. Můžeme však využít Leibnizův vzorec jen v bodech, kde $0 \notin [A + c, B + d]$. Poté máme

$$\begin{aligned}
G'(y) &= \int_{A+y}^{B+y} \cos yx\, \mathrm{d}x + \frac{\sin(By + y^2)}{B + y} - \frac{\sin(Ay + y^2)}{A + y} = \\
&= \left[\frac{\sin yx}{y}\right]_{A+y}^{B+y} + \frac{\sin(By + y^2)}{B + y} - \frac{\sin(Ay + y^2)}{A + y} = \\
&= \frac{\sin(By + y^2)}{y} - \frac{\sin(Ay + y^2)}{y} + \frac{\sin(By + y^2)}{B + y} - \frac{\sin(Ay + y^2)}{A + y} = \\
&= \frac{\sin(By + y^2)}{y} - \frac{\sin(Ay + y^2)}{y} + \frac{\sin(By + y^2)}{B + y} - \frac{\sin(Ay + y^2)}{A + y} =
\end{aligned}$$

Př. 333 *Nalezněte derivaci funkce*

$$G(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+yx)}{x} \, \mathrm{d}x,$$

pro $y > 0$.

Vidíme, že dolní a horní ohraničení $g(y) = y$ a $h(y) = 0$ jsou spojité a diferencovatelné. Integrovaná funkce

$$f(x,y) = \frac{\ln(1+yx)}{x}$$

je nespojitá v bodech $[0,y]$ a pokud $1 + yx \leq 0$. Parciální derivace

$$f_y(x,y) = \frac{1}{1+yx}$$

je nespojitá pro $1+yx \neq 0$. Zvolíme-li libovolný interval $[c,d]$, kde $0 < c < d$. Ohraničení zobrazují tento interval do intervalu $[0,d]$. Avšak tyto narážejí na situaci, kdy je funkce f nespojitá. Rozdělíme tedy funkci $G(y)$ pro nějaké $\varepsilon > 0$ na

$$G(y) = \int_0^\varepsilon \frac{\ln(1+yx)}{x} \, \mathrm{d}x + \int_\varepsilon^y \frac{\ln(1+yx)}{x} \, \mathrm{d}x,$$

Tyto dvě části vyšetříme zvlášť. První integrál má konstantní hranice a na množině $[0,\varepsilon] \times [c,d]$ jsou nyní funkce f a f_y spojité. Druhý integrál analyzujeme stejným způsobem jako v první části, tentokrát jsou však funkce f a f_y na vyšetřované množině $[\varepsilon, d] \times [c,d]$ spojité a můžeme použít Leibnizovu formuli. Dostáváme

$$\begin{aligned} G'(y) &= \int_0^\varepsilon \frac{1}{1+yx} \, \mathrm{d}x + \int_\varepsilon^y \frac{1}{1+yx} \, \mathrm{d}x + \frac{\ln(1+y^2)}{y} - \frac{\ln(1+\varepsilon y)}{\varepsilon} \cdot 0 = \\ &= \left[\frac{\ln(1+yx)}{y} \right]_0^y + \frac{\ln(1+y^2)}{y} = \frac{2\ln(1+y^2)}{y} \end{aligned}$$

Př. 334 *Nalezněte derivaci funkce*

$$G(y) = \int_0^{y^2} \mathrm{d}x \int_{x-y}^{x+y} \sin\left(x^2 + z^2 - y^2\right) \mathrm{d}z,$$

pro $y > 0$.

Vidíme, že funkce $G(y)$ je součinem dvou funkcí $G(y) = K(y) \cdot L(y)$, kde

$$K(y) = \int_0^{y^2} \mathrm{d}x,$$
$$L(y) = \int_{x-y}^{x+y} \sin\left(x^2 + z^2 - y^2\right) \mathrm{d}z$$

Musíme tedy nalézt derivace těchto funkcí, načež využijeme obvyklou Leibnizovu formuli $G' = K' \cdot L + K \cdot L'$.

1. Nalezneme derivaci $K'(y)$. Integrovaná funkce $f(x, y) = 1$ je spojitá na libovolném obdélníku a horní a dolní ohraničení jsou spojité a diferencovatelné. Dostaneme

$$K'(y) = \int_0^{y^2} 0 \,\mathrm{d}x + 1 \cdot 2y - 1 \cdot 0 = 2y$$

   Toto vidíme rovnou, pokud zintegrujeme $K(y) = \int_0^{y^2} \mathrm{d}x = y^2$ a následně vše zderivujeme.

2. Nalezneme derivaci $L'(y)$. Integrovaná funkce je spojitá, má spojité parciální derivace, stejně tak ohraničení integrálu jsou spojité a diferencovatelné. Můžeme tedy použít Leibnizovu formuli, abychom dostali

$$L'(y) = -\int_{x-y}^{x+y} 2y \cos\left(x^2 + z^2 - y^2\right) \mathrm{d}z + \sin\left(x^2 + z^2 - (x+y)^2\right) - \sin\left(x^2 + z^2 - (x-y)^2\right) =$$
$$= -2\int_{x-y}^{x+y} y \cos\left(x^2 + z^2 - y^2\right) \mathrm{d}z + \sin\left(z^2 - 2xy - y^2\right) - \sin\left(z^2 + 2xy - y^2\right)$$

Finální derivaci dostaneme jejich kombinací.

Př. 335 *Nalezněte n-tou derivaci $G^{(n)}(y)$ funkce*

$$G(y) = \int_0^y (x+y)f(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde funkce $f(x)$ má všechny derivace spojité.

Vidíme, že ohraničující funkce jsou spojité a diferencovatelné. Stejně tak integrovaná funkce $g(x,y) = (x+y)f(x)$ je spojitá na libovolném obdélníku a její parciální derivace je

$$g_y(x,y) = f(x),$$

která je také spojitá na libovolném obdélníku. Můžeme tak použít Leibnizovu formuli abychom dostali

$$G'(y) = \int_0^y f(x)\,\mathrm{d}x + g(y,y)\cdot 1 - g(0,y)\cdot 0 = yf(x) + 2yf(y) = 3yf(y)$$

Budeme-li nyní derivovat $G'(y)$ dále, dostaneme obecnou derivaci jako

$$\left(G'(y)\right)^{(n)} = 3\left(nf^{(n-1)}(y) + yf^{(n)}(y)\right)$$

Chceme-li tak přesně $n-$tou derivaci, dostaneme snadno ze vzorce

$$G^{(n)}(y) = 3\left((n-1)f^{(n-2)}(y) + yf^{(n-1)}(y)\right)$$

Př. 336 *Nalezněte n-tou derivaci $G^{(n)}(y)$ funkce*

$$G(y) = \int_0^y f(x)(y-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x,$$

kde funkce $f(x)$ má všechny derivace spojité.

Vidíme, že ohraničující funkce jsou spojité a diferencovatelné. Stejně tak integrovaná funkce $g(x,y) = f(x)(y-x)^{n-1}$ je spojitá na libovolném obdélníku a její parciální derivace je pro $n > 1$

$$g_y(x,y) = (n-1)f(x)(y-x)^{n-2},$$

dostaneme tak derivaci z Leibnizova vzorce

$$\begin{aligned} G'(y) &= \int_0^y (n-1)f(x)(y-x)^{n-2}\,\mathrm{d}x + f(y)(y-y)^{n-1}\cdot 1 - f(0)(y-0)^{n-1}\cdot 0 = \\ &= (n-1)\int_0^y f(x)(y-x)^{n-2}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Je-li však $n = 1$ máme naopak $g(x,y) = f(x)$, a proto je $g_y(x,y) = 0$ a

$$G'(y) = \int_0^y 0\,\mathrm{d}x + g(y,y)\cdot 1 - g(0,y)\cdot 0 = f(y)$$

Podobně lze získat druhou derivaci pokud platí $n > 2$ jako

$$\begin{aligned} G''(y) &= (n-1)(n-2)\int_0^y f(x)(y-x)^{n-3}\,\mathrm{d}x + (n-1)f(y)(y-y)^{n-2}\cdot 1 - (n-1)f(0)(y-0)^{n-2}\cdot 0\,\mathrm{d}x = \\ &= (n-1)(n-2)\int_0^y f(x)(y-x)^{n-3}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Avšak je-li zase $n = 2$ máme očividně $g'(x,y) := (n-1)f(x)(y-x)^{n-2} = f(x)$ a znovu dostáváme

$$G''(y) = \int_0^y 0\,\mathrm{d}x + g'(y,y)\cdot 1 - g'(0,y)\cdot 0 = f(y)$$

Vidíme, že pro obecné n je

$$G^{(n-1)} = (n-1)(n-2)\dots 1\int_0^y f(x)(y-x)^{n-1-(n-1)}\,\mathrm{d}x = (n-1)!\int_0^y f(x)\,\mathrm{d}x$$

Následně je $g^{(n-1)}(x,y) = f(x)$, a tudíž

$$G^{(n)} = (n-1)!\int_0^y 0\,\mathrm{d}x + (n-1)!f(y) - (n-1)!f(0)\cdot 0 = (n-1)!f(y)$$

Př. 337 *Vypočtěte integrál*

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

pomocí vztahu

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2y^2}\,\mathrm{d}y$$

Převedeme vyšetřovaný integrál podle zadané rovnosti do tvaru

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Zaměníme pořadí integračních proměnných a dostaneme integrál

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left|\begin{array}{c} x=\sin t \\ dx=\cos t\,\mathrm{d}t \end{array}\right| =$$

$$= \int_0^1\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{(1+y^2\sin^2 t)\sqrt{1-\sin^2 t}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1+y^2\sin^2 t)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^1\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(\cos^2 t+(y^2+1)\sin^2 t)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1+(y^2+1)\operatorname{tg}^2 t)}\frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y =$$

$$= \left|\begin{array}{c} s=\operatorname{tg} t \\ ds=\frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \end{array}\right| = \int_0^1\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+(y^2+1)s^2)}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{1+y^2}s)}{\sqrt{1+y^2}}\right]_0^{\infty}\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}} - 0\,\mathrm{d}y =$$

$$= \left|\begin{array}{c} y=\sinh u \\ \mathrm{d}y=\cosh u\,\mathrm{d}u \\ \sinh 0=\frac{\mathrm{e}^0-\mathrm{e}^{-0}}{2}=0 \\ \sinh 0=\frac{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}}{2} \end{array}\right| = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}}{2}} \frac{\cosh u}{\sqrt{1+\sinh^2 u}}\,\mathrm{d}u = |\cosh^2 x-\sinh^2 x=1| =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}}{2}} \frac{\cosh u}{\sqrt{\cosh^2 u}}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}}{2}} 1\,\mathrm{d}u = [u]_0^{\frac{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}}{2}} = \frac{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}}{2}$$

Př. 338 *Vypočtěte integrál derivováním podle proměnné y*

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2y\cos x + y^2)\,\mathrm{d}x$$

Nejprve se podíváme na situaci, kdy je integrovaná funkce $f(x, y) = \ln(1-2y\cos x+y^2)$ nespojitá. Chceme tedy vyřešit nerovnost $1 - 2y\cos x + y^2 < 0$ vzhledem k y, když víme, že $x \in [0, \pi]$. Determinant polynomu je

$$D = 4\cos^2 x - 4 = -4\sin^2 x$$

Avšak pro $x \in [0, \pi]$ je nutně $D \leq 0$. V případě $x = 0$ nebo $x = \pi$ dostáváme funkce $\ln(1 \pm y)^2$. Uvážíme tedy nejprve situaci na intervalu $y \in (-1, 1)$ čímž vidíme, že na obdélnících $[0, \pi] \times [c, d]$, kde $-1 < c < d < 1$ je $f(x, y)$ spojitá. Parciální derivace

$$f_y(x, y) = \frac{2y - 2\cos x}{1 - 2y\cos x + y^2}$$

je zde pak také spojitá. Derivujeme tedy

$$\begin{aligned}
F'(y) &= \int_0^\pi \frac{2y - 2\cos x}{1 - 2y\cos x + y^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{y}\int_0^\pi \frac{1 + y^2 - 2y\cos x + y^2 - 1}{1 - 2y\cos x + y^2}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{\pi}{y} - \frac{y^2 - 1}{y}\int_0^\pi \frac{1}{y^2 + 1 - 2y\cos x}\,\mathrm{d}x = |\text{ univerzální substituce }| = \\
&= \frac{\pi}{y} - \frac{y^2 - 1}{y}\int_0^\infty \frac{1}{y^2 + 1 - 2y\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{\pi}{y} - \frac{y^2 - 1}{y}\int_0^\infty \frac{2}{(y^2 + 1)(t^2 + 1) + y^2t^2 + 1 - 2y + 2yt^2}\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{\pi}{y} - \frac{y^2 - 1}{y}\int_0^\infty \frac{2}{t^2(y + 1)^2 + (y - 1)^2}\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{\pi}{y} - 2\frac{y^2 - 1}{y}\left[\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{y+1}{y-1}t\right)}{(y - 1)(y + 1)}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{y} - \frac{2}{y}\frac{\pi}{2} = 0
\end{aligned}$$

Vidíme tedy, že $F(y) = C$ je konstantní. Dosadíme-li do funkce

$$C = F(0) = \int_0^\pi \ln(1 - 2y\cos x + y^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \ln 1\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi 0\,\mathrm{d}x = 0$$

Proto platí, že $F(y) = 0$ pro $y \in (-1, 1)$. Pro $y > 1$ nebo $y < -1$ dostaneme stejnou situaci, neboť $F'(y)$ vyjde stejně.

Př. 339 *Pomocí záměny pořadí integrace spočtěte integrál*

$$\int_0^1 \frac{x^B - x^A}{\ln x}\,\mathrm{d}x$$

Všimneme si vztahu

$$\frac{x^B - x^A}{\ln x} = \left[\frac{x^y}{\ln x}\right]_A^B = \int_A^B x^y\,\mathrm{d}y$$

a dosadíme jej do vzorce abychom dostali

$$\int_0^1 \frac{x^B - x^A}{\ln x} = \int_0^1 \int_A^B x^y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_A^B \int_0^1 x^y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$
$$= \int_A^B \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1 \mathrm{d}y = \int_A^B \frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}y = [\ln|y+1|]_A^B =$$
$$= \ln|B+1| - \ln|A+1|$$

Př. 340 *Vypočtěte integrál*

$$\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^B - x^A}{\ln x}\,\mathrm{d}x$$

Všimneme si vztahu

$$\frac{x^B - x^A}{\ln x} = \left[\frac{x^y}{\ln x}\right]_A^B = \int_A^B x^y\,\mathrm{d}y$$

Dostaneme dosazením

$$\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\int_A^B x^y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_A^B\int_0^1)x^y \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left|\begin{array}{c} x = \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{d}x = -\,\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t \end{array}\right| =$$
$$= -\int_A^B\int_\infty^0 \mathrm{e}^{-ty}\sin t\,\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t\,\mathrm{d}y = \int_A^B\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t(y+1)}\sin t\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y = |\text{2x per partes}| =$$
$$= \int_A^B \frac{1}{(y+1)^2} - \frac{1}{(y+1)^2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t(y+1)}\sin t\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y$$

Proto máme dohromady, že

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t(y+1)}\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(y+1)^2}\frac{(y+1)^2}{(y+1)^2+1} = \frac{1}{(y+1)^2+1}$$

Tudíž samozřejmě máme

$$\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^B - x^A}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \int_A^B \frac{1}{(y+1)^2+1}\,\mathrm{d}y = [\operatorname{arctg}(y+1)]_A^B =$$
$$= \operatorname{arctg}(B+1) - \operatorname{arctg}(A+1) = \operatorname{arctg}\frac{B-A}{1+(A+1)(B+1)}$$

Př. 341 *Vyjádřete $E''(y)$ funkce*

$$E(y) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - y^2 \sin^2 x}\, \mathrm{d}x,$$

pro $y \in (0,1)$

Vidíme, že za podmínky $y \in (0,1)$ je integrovaná funkce $f(x,y) = \sqrt{1 - y^2 \sin^2 x}$ spojitá. Její parciální derivace je

$$f_y(x,y) = -\frac{y \sin^2 x}{\sqrt{1 - y^2 \sin^2 x}}$$

Opět z podmínky $y \in (0,1)$ plyne, že i tato derivace je spojitá. Rovnou spočítáme i druhou derivaci

$$f_{yy}(x,y) = -\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1 - y^2 \sin^2 x}} - \frac{y^2 \sin^4 x}{\sqrt{\left(1 - y^2 \sin^2 x\right)^3}} = \frac{-\sin^2 x(1 - y^2 \sin^2 x) - y^2 \sin^4 x}{\sqrt{\left(1 - y^2 \sin^2 x\right)^3}} =$$
$$= -\frac{\sin^2 x}{\sqrt{\left(1 - y^2 \sin^2 x\right)^3}}$$

I tato parciální derivace je za podmínky $y \in (0,1)$ spojitá. Můžeme tedy zaměnit pořadí integrace a derivace a máme

$$E'(y) = -\int_0^{\pi/2} \frac{y \sin^2 x}{\sqrt{1 - y^2 \sin^2 x}}\, \mathrm{d}x,$$
$$E''(y) = -\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{\left(1 - y^2 \sin^2 x\right)^3}}\, \mathrm{d}x.$$

Př. 342 *Vyjádřete $F''(y)$ funkce*

$$F(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - y^2 \sin^2 x}} \, \mathrm{d}x$$

pro $y \in (0, 1)$

Vidíme, že za podmínky $y \in (0, 1)$ je integrovaná funkce $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2 \sin^2 x}}$ spojitá. Její parciální derivace je

$$f_y(x, y) = \frac{y \sin^2 x}{\sqrt{\left(1 - y^2 \sin^2 x\right)^3}}$$

Opět z podmínky $y \in (0, 1)$ plyne, že i tato derivace je spojitá. Rovnou spočítáme i druhou derivaci

$$\begin{aligned} f_{yy}(x, y) &= \frac{\sin^2 x}{\sqrt{\left(1 - y^2 \sin^2 x\right)^3}} + \frac{3y^2 \sin^4 x}{\sqrt{\left(1 - y^2 \sin^2 x\right)^5}} = \\ &= \frac{\sin^2 x \left(1 - y^2 \sin^2 x\right) + 3y^2 \sin^4 x}{\sqrt{\left(1 - y^2 \sin^2 x\right)^5}} = \frac{\sin^2 x - y^2 \sin^4 x + 3y^2 \sin^4 x}{\sqrt{\left(1 - y^2 \sin^2 x\right)^5}} = \\ &= \frac{\sin^2 x + 2y^2 \sin^4 x}{\sqrt{\left(1 - y^2 \sin^2 x\right)^5}} \end{aligned}$$

I tato parciální derivace je za podmínky $y \in (0, 1)$ spojitá. Můžeme tedy zaměnit pořadí integrace a derivace a máme

$$\begin{aligned} F'(y) &= \int_0^{\pi/2} \frac{y \sin^2 x}{\sqrt{\left(1 - y^2 \sin^2 x\right)^3}} \, \mathrm{d}x, \\ F''(y) &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x + 2y^2 \sin^4 x}{\sqrt{\left(1 - y^2 \sin^2 x\right)^5}} \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Př. 343 *Ukažte, že funkce (které se nazývají jako úplný eliptický integrál 1. a 2. druhu)*

$$E(y) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - y^2 \sin^2 x} \, \mathrm{d}x \tag{1}$$

$$F(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - y^2 \sin^2 x}} \, \mathrm{d}x \tag{2}$$

splňují vztahy

$$E'(y) = \frac{E(y) - F(y)}{y}$$

$$E''(y) = -\frac{F'(y)}{y}$$

V předchozím příkladě jsme již spočetli $E'(y)$ a $E''(y)$. Počítáme

$$\frac{E(y) - F(y)}{y} = \frac{1}{y} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - y^2 \sin^2 x} - \frac{1}{\sqrt{1 - y^2 \sin^2 x}} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{y} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - y^2 \sin^2 x - 1}{\sqrt{1 - y^2 \sin^2 x}} \, \mathrm{d}x = -\int_0^{\pi/2} \frac{y \sin^2 x}{\sqrt{1 - y^2 \sin^2 x}} \, \mathrm{d}x = E'(y)$$

Derivací tohoto vztahu a jeho opětovným využitím dostaneme

$$E''(y) = \frac{(E'(y) - F'(y))y - (E(y) - F(y))}{y^2} = \frac{yE'(y) - yF'(y) - yE'(y)}{y^2} = -\frac{yF'(y)}{y^2} = -\frac{F'(y)}{y}$$

Př. 344 *Ukažte, že funkce $E(y), F(y)$ splňují*

$$(1-y^2)F' = E' + yF$$

Využijte k tomuto vztahů (viz [11])

$$F(y) = \frac{\pi}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!}\right]^2 y^{2i},$$

$$E(y) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!}\right]^2 \frac{y^{2i}}{2i-1}.$$

Začneme nalezením poloměru konvergence což dostaneme nalezením limity pro řadu $F(y)$ jako

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2i+1)!!}{2^{i+1}(i+1)!}\right]^2\left[\frac{2^i i!}{(2i-1)!!}\right]^2 =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(2i+1)^2}{4(i+1)^2} = 1.$$

Tedy poloměr konvergence je $R = 1$. Obdobný výsledek bychom dostali pro řadu $E(y)$. Můžeme tedy na oboru konvergence zaměnit pořadí derivace a sumace. Také využijeme faktu, že na jeho vnitřku řada konverguje absolutně. Dostáváme

$$\begin{aligned}
E'(y) + yF(y) &= \frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!}\right]^2 \frac{2iy^{2i-1}}{2i-1} + \frac{\pi}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!}\right]^2 y^{2i+1} = \\
&= -\frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!}\right]^2 \frac{2iy^{2i-1}}{2i-1} + \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(2k-3)!!}{2^{k-1}(k-1)!}\right]^2 y^{2k-1} = \\
&= -\frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!}\right]^2 \left(-\frac{2i}{2i-1} + \frac{4i^2}{(2i-1)^2}\right) y^{2i-1} = \\
&= \frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!}\right]^2 \left(\frac{-2i(2i-1)+4i^2}{(2i-1)^2}\right) y^{2i-1} = \\
&= \frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!}\right]^2 \left(\frac{2i}{(2i-1)^2}\right) y^{2i-1}
\end{aligned}$$

Druhou stranu rovnosti můžeme rozepsat jako

$$\begin{aligned}
(1-y^2)F'(y) &= \frac{\pi}{2}(1-y^2)\sum_{i=1}^{\infty} 2i\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!}\right]^2 y^{2i-1} = \\
&= \frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{\infty} 2i\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!}\right]^2 y^{2i-1} - \frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{\infty} 2i\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!}\right]^2 y^{2i+1} = \\
&= \frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{\infty} 2i\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!}\right]^2 y^{2i-1} - \frac{\pi}{2}\sum_{i=2}^{\infty} 2(k-1)\left[\frac{(2k-3)!!}{2^{k-1}(k-1)!}\right]^2 y^{2k-1} = \\
&= \frac{\pi}{2}\frac{2}{4}y + \frac{\pi}{2}\sum_{i=2}^{\infty}\left(2i - \frac{8i^2(i-1)}{(2i-1)^2}\right)\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!}\right]^2 y^{2i-1} = \\
&= \frac{\pi}{4}y + \frac{\pi}{2}\sum_{i=2}^{\infty}\frac{2i(4i^2-4i+1)-2i(4i^2-4i)}{(2i-1)^2}\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!}\right]^2 y^{2i-1} = \\
&= \frac{\pi}{4}y + \frac{\pi}{2}\sum_{i=2}^{\infty}\frac{2i}{(2i-1)^2}\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!}\right]^2 y^{2i-1} = \\
&= \frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2i}{(2i-1)^2}\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!}\right]^2 y^{2i-1}
\end{aligned}$$

Neboť se obě strany rovnají, vidíme, že výraz platí. Spolu s využitím předchozího můžeme dále ukázat, že

$$F' = \frac{\frac{E-F}{y} + yF}{1-y^2} = \frac{E - F + y^2F}{y(1-y^2)} = \frac{E-(1-y^2)F}{y(1-y^2)}.$$

Př. 345 *Ukažte, že $E(y)$ řeší rovnici*

$$E''(y) + \frac{1}{y}E'(y) + \frac{E(y)}{1-y^2} = 0,$$

pro $y \in (0,1)$.

S využitím předchozích vzorců můžeme dostat, že

$$\begin{aligned} E'' &= -\frac{F'}{y} \\ E' &= \frac{E-F}{y} \\ F' &= \frac{E + (y^2-1)F}{y(1-y^2)} \end{aligned}$$

Dosazujeme tedy postupně do rovnice

$$\begin{aligned} &E''(y) + \frac{1}{y}E'(y) + \frac{E(y)}{1-y^2} = -\frac{F'}{y} + \frac{E-F}{y^2} + \frac{E}{1-y^2} = \\ &= -\frac{E+(y^2-1)F}{y^2(1-y^2)} + \frac{E-F}{y^2} + \frac{E}{1-y^2} = \frac{-E-(y^2-1)F + (E-F)(1-y^2) + Ey^2}{y^2(1-y^2)} = \\ &= \frac{-E - y^2F + F + E - F - y^2E + y^2F + Ey^2}{y^2(1-y^2)} = 0 \end{aligned}$$

Př. 346 *Ukažte, že $F(y)$ řeší rovnici*

$$\big(y(1-y^2)F'(y)\big)' - yF(y) = 0,$$

pro $y \in (0,1)$.

I tentokrát využijeme vztahů

$$E'' = -\frac{F'}{y}$$
$$E' = \frac{E-F}{y}$$
$$F' = \frac{E+(y^2-1)F}{y(1-y^2)}$$

Dostaneme postupně

$$\big(y(1-y^2)F'(y)\big)' - yF(y) = \big(E+(y^2-1)F\big)' - yF(y) = E' + 2yF + (y^2-1)F' - yF =$$
$$= \frac{E-F}{y} + 2yF - \frac{E+(y^2-1)F}{y} - yF = \frac{E-F-E-(y^2-1)F+y^2F}{y} = 0$$

Př. 347 *Ukažte, že platí*

$$\int_0^y tF(t)\,\mathrm{d}t = E(y) - (1-y^2)F(y),$$

pro $y \in (0,1)$.

Celou rovnici nejprve zderivujeme čímž dostaneme

$$yF(y) = E'(y) + 2yF(y) + (y^2-1)F'(y).$$

Využijeme-li však vztahu

$$(1-y^2)F' = E' + yF$$

dostaneme

$$E' + 2yF + (y^2-1)F' = E' + 2yF - E' - yF = yF.$$

Zintegrujeme-li tedy tento výraz znovu, dostaneme hledaný integrál.

Př. 348 *Nalezněte extrémy parametrického integrálu*

$$\int_a^x \sin t \, \mathrm{d}t$$

pro $x \in [a, \infty)$.

K nalezení extrémů funkce obvykle využíváme derivace a stacionární body. Budeme tedy chtít derivovat funkci

$$F(x) = \int_a^x \sin t \, \mathrm{d}t.$$

Snadno si rozmyslíme, že vzhledem ke spojitosti vystupujících funkcí můžeme snadno derivovat $F(x)$ vzorcem

$$F'(x) = \int_a^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin t \, \mathrm{d}t + \sin x \cdot (x)' - \sin a (a)' = sinx$$

Hledáme-li tedy stacionární body dostaneme je na množině $k\pi$, pro $k \in \mathbb{Z}$. Zdali se skutečně jedná o extrémy můžeme ověřit pomocí druhých derivací

$$F''(x) = \cos x$$

Vidíme tedy jasně, že v bodech $2k\pi > a$ má funkce lokální maximum a pro $\pi + 2k\pi > a$ má funkce lokální minimum. Navíc Si snadno rozmyslíme, že se nejedná o globální maximum.

Př. 349 *Nalezněte extrémy parametrického integrálu*

$$\int_0^{x^2} 2tx - \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$$

pro $x \in [0, \infty)$.

Opět vidíme, že chceme derivovat funkci

$$F(x) = \int_0^{x^2} 2tx + \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$$

Vidíme, že integrovaná funkce $2tx + \sqrt{t}$ je spojitá na množině $[0, \infty) \times \mathbb{R}$. Navíc pro libovolné

$$x \in (0, \sqrt{b}) \text{ platí } 0 < g(x) < b,$$

kde $g(x) = x^2$. Vzhledem k libovolnosti b můžeme tedy nalézt derivaci na intervalu $(0, \infty)$. Máme ze vzorce

$$F'(x) = \int_0^{x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2tx - \sqrt{t}\right)\,\mathrm{d}t + \left(2x^3 - \sqrt{x^2}\right)\left(x^2\right)' - \left(2 \cdot 0 \cdot x - \sqrt{0}\right)(0)' =$$
$$= \int_0^{x^2} 2t\,\mathrm{d}t + 4x^4 - 2x^2 = \left[t^2\right]_0^{x^2} + 4x^4 - 2x^2 = x^4 + 4x^4 - 2x^2 = 5x^4 - 2x^2$$

Nyní budeme chtít nalézt stacionární body tohoto výrazu

$$x^2\left(5x^2 - 2\right) = 0$$

Vidíme, že stacionární body se nacházejí v bodech

$$0, \ \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

Avšak nula je na okraji vyšetřovaného intervalu a chceme jen záporné hodnoty. Zajímá nás tedy pouze jeden stacionární bod. Nalezneme druhou derivaci

$$F''(x) = 20x^3 - 4x$$

a dosadíme

$$F''\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right) = 20\frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{5}} - 4\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = 8\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{5}} - 4\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = 4\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} > 0$$

Jedná se tedy o lokální minimum. Vzhledem ke znaménku $F'(x)$ si také můžeme uvědomit, že se na intervalu $[0, \infty)$ jedná o globální minimum. Dále si můžeme všimnout, že

$$F(0) = \int_0^0 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Zde se jedná o lokální maximum, neboť vzhledem ke tvaru funkce $F'(x)$ vidíme, že následně funkce klesá.

Př. 350 *Nalezněte tečnu ke křivce funkce*

$$F(x) = \int_{x^2}^{\mathrm{e}^x} \frac{x}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

v bodě $[0, F(0)]$.

K nalezení tečny využijeme obvyklého vzorce

$$t : y = F'(x_0)(x - x_0) + F(x_0).$$

Máme

$$F(0) = \int_0^1 \frac{0}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

Dále si uvědomíme, že funkce vystupující v integrálu jsou všechny funkce spojité. Proto máme ze vzorce

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \int_{x^2}^{\mathrm{e}^x} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\left(\mathrm{e}^x\right)' - \frac{x}{1+x^4}\left(x^2\right)' = \\
&= \int_{x^2}^{\mathrm{e}^x} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{e}^x - \frac{2x^2}{1+x^4} \\
F'(0) &= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{0}{1+\mathrm{e}^0}\,\mathrm{e}^0 - \frac{0}{1+0^4} = [\operatorname{arctg} t]_0^1 = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Tečna je tedy

$$t : y = \frac{\pi}{4}x.$$

Př. 351 *Nalezněte plochu pod grafem funkce*

$$F(x) = \int_0^\pi x \sin t \, \mathrm{d}t$$

pro $x \in [0, 1]$.

Chceme tedy počítat integrál

$$\int_0^1 \left| \int_0^\pi x \sin t \, \mathrm{d}t \right| \mathrm{d}x.$$

Na intervalu $[0, \pi]$ je $\sin t$ kladný a stejně tak máme $x > 0$ proto upravíme integrál na

$$\int_0^1 \int_0^\pi x \sin t \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x = \int_0^1 x \, \mathrm{d}x \int_0^\pi \sin t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \left[- \cos t \right]_0^\pi = 1.$$

Př. 352 *Spočtěte objem tělesa, které vznikne rotací funkce*

$$F(x) = \int_0^1 xt \, \mathrm{d}t,$$

okolo osy x na intervalu $[0, 1]$.

Z teorie integrálů víme, že tento objem spočteme jako integrál

$$\pi \int_0^1 F^2(x) \, \mathrm{d}x = \pi \int_0^1 \left(\int_0^1 xt \, \mathrm{d}t \right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x \int_0^1 t \, \mathrm{d}t \int_0^1 t \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{12}$$

8 Nevlastní parametrické integrály-neohraničená množina

Nechť $f(x,y)$ je spojitou funkcí na množině $A \le x < \infty$, $C < y < D$. Konvergentní integrál

$$\int_A^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x = \lim_{B\to\infty} \int_A^B f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

nazveme stejnoměrně konvergentním integrálem na intervalu I, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje číslo N takové, že pro každé $n \ge N$ a $y \in I$ platí

$$\left| \int_n^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon.$$

Věta 353 *Integrál*

$$\int_A^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

je stejnoměrně konvergentní na $[C,D]$, pokud existuje funkce $F(x)$ taková, že

$$|f(x,y)| \le F(x) \text{ pro } x \in [A,\infty) \text{ a } y \in [C,D]$$
$$\int_A^\infty F(x)\,\mathrm{d}x < \infty$$

Definice 1 *Řekneme, že funkce $g(x,y) \to G(y)$ na intervalu I pro $x \to \infty$ pokud pro každé $y \in I$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje K takové, že pro všechna $x \ge K$ je*

$$|G(y) - g(x,y)| < \varepsilon.$$

Definice 2 *Řekneme, že funkce $g(x,y) \rightrightarrows G(y)$ na intervalu I pro $x \to \infty$ pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje K takové, že pro všechna $x \ge K$ a $y \in I$ je*

$$|G(y) - g(x,y)| < \varepsilon.$$

Věta 354 *Předpokládejme, že funkce $f(x,y)$ a $g(x,y)$ jsou integrovatelné pro každé $y \in I$ na každém $[A,B] \subset [A,\infty)$. Integrál*

$$\int_A^\infty f \cdot g\,\mathrm{d}x$$

konverguje na I stejnoměrně pokud $g(x,y)$ je monotonní funkce na intervalu $[A,\infty)$ pro každé $y \in I$ a dále

- ***(Abelova)*** *existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že $\left|\int_A^B f\,\mathrm{d}x\right| < K$, pro libovolné $B \in [A,\infty)$, $y \in I$ (tj. integrál je stejnoměrně ohraničený) a $g(x,y) \rightrightarrows 0$ na I pro $x \to \infty$.*
- ***(Dirichletova)*** *integrál $\int_A^\infty f\,\mathrm{d}x$ konverguje stejnoměrně na I a existuje konstanta $K \in \mathbb{R}$ taková, že $|g(x,y)| < K$ pro každé $x \in [A,\infty)$ a $y \in I$ (tj. funkce g je stejnoměrně ohraničená).*

Všimněme si, že stejnoměrná ohraničenost zde splývá s ohraničeností na množině v $\mathbb{R}^2$. POuze vyšetřujeme obvyklou ohraničenost funkce

$$F(x,y) = \left| \int_A^t f(t,y)\,\mathrm{d}t \right|$$

a $g(x,y)$.

Věta 355 *Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá na množině $[A,\infty)\times[C,D]$ a integrál*

$$\int_A^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

konverguje pro všechna $y\in(C,D)$. Pokud integrál diverguje pro $y=C$ nebo pro $y=D$, potom integrál nekonverguje stejnoměrně na intervalu (C,D).

Je-li integrál

$$\int_A^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x=\lim_{B\to\infty}\int_A^B f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu I, pak je na tomto intervalu funkce

$$F(y)=\int_A^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

spojitá. Tedy

$$\lim_{y\to C}F(y)=\int_A^\infty f(x,C)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 356 *Nechť $f(x,y)$ je integrovatelná na $[A,\infty)$ na libovolném intervalu $[N,\infty)$, pro N dostatečně velké. Nechť $f(x,y)\rightrightarrows F(x)$ na libovolném intervalu $[A,B]$ pro $y\to\infty$ a dále nechť je $\int_A^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x$ stejnoměrně konvergentní na intervalu $[N,\infty)$. Za těchto předpokladů je pak*

$$\lim_{y\to\infty}\int_A^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_A^\infty F(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 357 *Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá na obdélníku $[A,\infty)\times[C,D]$ a integrál $\int_A^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x$ konverguje stejnoměrně na intervalu $[C,D]$. Potom je funkce*

$$F(y)=\int_A^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

integrovatelná na intervalu $[C,D]$ a platí

$$\int_C^D\int_A^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_A^\infty\int_C^D f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Věta 358 *Nechť funkce $f(x,y)$ a $f_y(x,y)$ jsou spojité na obdélníku $[A,\infty)\times[C,D]$ a integrály $\int_A^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x$, $\int_A^\infty f_y(x,y)\,\mathrm{d}x$ konvergují stejnoměrně na intervalu $[C,D]$. Potom funkce*

$$F(y)=\int_A^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

splňuje

$$F'(y)=\int_A^\infty\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_A^\infty f_y(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Př. 359 *Rozhodněte na kterém intervalu konverguje integrál*

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-xy}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

stejnoměrně.

Uvažme nejprve situaci, kdy $y \geq 0$. Potom můžeme integrovanou funkci můžeme ohraničit jako

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{-xy}}{1+x^2}\right| \leq \frac{\mathrm{e}^0}{1+x^2},$$

pro $x \in [0,\infty)$. Kde však uvážíme, že

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = [\operatorname{arctg} x]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

Proto vidíme, že integrál konverguje na intervalu $[0,\infty)$ stejnoměrně. Pro $y < 0$ budeme situaci vyšetřovat skrze

$$\int_B^\infty \frac{\mathrm{e}^{-xy}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \geq \int_B^\infty \frac{\mathrm{e}^{-By}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-By}\,[\operatorname{arctg} x]_B^\infty = \mathrm{e}^{-By}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} B\right)$$

Nadále budeme chtít počítat limitu tohoto výrazu pomocí L'hospitalova pravidla pro $y < 0$ a dostaneme

$$\lim_{B\to\infty} \frac{-\frac{1}{1+B^2}}{y\,\mathrm{e}^{yB}} = |z = -y| = \frac{1}{z}\frac{\mathrm{e}^{zB}}{1+B^2} = \infty$$

Odsud vidíme, že funkce nekonverguje stejnoměrně, neboť tento zbytek by musel mít libovolně malou hodnotu.

Př. 360 *Rozhodněte na kterém intervalu konverguje integrál*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(yx)^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

stejnoměrně.

Rozmysleme si, že platí

$$\mathrm{e}^{-(yx)^2} \leq \mathrm{e}^0 = 1$$

pro libovolné y a libovolné x. Můžeme tak ohraničit

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(yx)^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

kterýžto integrál je však již konvergentní. Dle Weierstrassova kritéria je tak tento integrál stejnoměrně konvergentní na celém $\mathbb{R}$.

Př. 361 *Určete pro která y integrál*

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x$$

konverguje stejnoměrně.

Všimneme si, že můžeme ohraničit integrál

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = 1$$

pro libovolné $y \in \mathbb{R}$. Tedy dle Weierstraasova kritéria je integrál stejnoměrně konvergentní na celém $\mathbb{R}$. Můžeme ilustrovat, že

$$\int_B^\infty \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x \leq \int_B^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{B}.$$

Tedy pro libovolné $\varepsilon > 0$ snadno nalezneme dostatečně velké B, aby bylo

$$\int_B^\infty \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{B} < \varepsilon,$$

pro libovolné y.

Př. 362 *Určete interval na kterém integrál*

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xy}\, \mathrm{d}x$$

konverguje stejnoměrně.

Nejdříve se chceme podívat, pro která y integrál konverguje. Můžeme rovnou integrovat

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xy}\, \mathrm{d}x = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-xy}}{y}\right]_0^\infty = -\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xy}}{y} + \frac{1}{y}.$$

Hned vidíme, že je-li $y < 0$ pak integrál diverguje. Proto budeme uvažovat stejnoměrnou konvergenci pouze na intervalu $[0, \infty)$. Uvažme dále pro $y > 0$ integrál

$$\int_K^\infty \mathrm{e}^{-xy}\, \mathrm{d}x = -\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xy}}{y} + \frac{\mathrm{e}^{-By}}{y} = \frac{\mathrm{e}^{-By}}{y}.$$

Aby integrál konvergoval stejnoměrně na množině I, chceme aby pro libovolné $\varepsilon > 0$ bylo pro všechny B dostatečně velké a libovolné $y \in I$ aby

$$\frac{\mathrm{e}^{-By}}{y} < \varepsilon.$$

Všimneme si však, že pro $y_1 < y_2$ je

$$\frac{\mathrm{e}^{-By_1}}{y_1} > \frac{\mathrm{e}^{-By_2}}{y_2}.$$

Vidíme tedy, že je-li $I = [A, \infty)$, musí být

$$\frac{\mathrm{e}^{-BA}}{A} < \varepsilon$$

je-li však $I = (0, \infty)$, vidíme, že funkce

$$\frac{\mathrm{e}^{-By}}{y}$$

diverguje na tomto intervalu k nekonečnu a proto zde nemůže konvergovat stejnoměrně. Vidíme, že integrál konverguje na libovolném intervalu $[A, \infty)$, kde $A > 0$.

Př. 363 *Určete interval na kterém integrál*

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{e}^{-xy}\;\mathrm{d}x$$

konverguje stejnoměrně.

Všimneme si, že platí

$$\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{e}^{-xy}\;\mathrm{d}x \le \int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{e}^{-xy}\;\mathrm{d}x \le \int_1^\infty \mathrm{e}^{-xy}\;\mathrm{d}x.$$

V předchozím příkladě jsme však viděli, že tento integrál konverguje stejnoměrně na libovolném intervalu $[A, \infty)$, pro $A > 0$. Proto můžeme ohraničit

$$\int_B^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{e}^{-xy}\;\mathrm{d}x \le \int_B^\infty \mathrm{e}^{-xy}\;\mathrm{d}x\varepsilon$$

a jistě nalezneme B, aby tato nerovnost byla splněna.

Je-li $y < 0$ vidíme, že $lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{e}^{-xy} > 0$ a protože není splněna nutná podmínka konvergence, integrál diverguje. Situace je však komplikovanější pro $y = 0$. Mohli bychom se podívat, zda integrál konverguje v krajním bodě $y = 0$. V tomto případě však máme

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x,$$

což je konvergentní integrál (například podle Abelova kritéria pro nevlastní integrály na $\mathbb{R}$). Nelze tedy použít věty, která by nám vyřadila integrál z úvahy krajní bod. Můžeme si rozmyslet, že na intervalu $I = [0, \infty)$ nelze použít ani Dirichletova kritéria ani Abelova kritéria. Je-li však $y \ge 0$ víme, že

$$\mathrm{e}^{-xy} \le \mathrm{e}^0 = 1$$

a tedy

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{e}^{-xy}\;\mathrm{d}x \le \int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

Integrál je sjtenoměrně konvergentní dle weierstrasova kritéria.

Př. 364 *Určete pro které $y \geq 0$ je integrál*

$$\int_1^\infty \frac{\sin yx}{x^y}\,\mathrm{d}x$$

stejnoměrně konvergentní.

Všimneme si, že můžeme ohraničit integrovanou funkci jako

$$\int_1^\infty \left|\frac{\sin yx}{x^y}\right|\mathrm{d}x \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^y}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} [\ln|x|]_1^\infty, & y = 1, \\ \left[-\frac{1}{yx^{y-1}}\right]_1^\infty, & y \neq 1 \end{cases}.$$

Snadno si tozmyslíme, že pro $y \leq 1$ je majorantní integrál divergentní a pro $y > 1$ majorantní integrál konverguje. Tedy pro $y > 1$ integrál konverguje stejnoměrně.

Dále si můžeme uvědomit, že pro $y = 0$ je

$$\int_1^\infty \frac{\sin yx}{x^y}\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty 1\,\mathrm{d}x = \infty.$$

Tedy na intervalu $(0, D)$ nemůže integrál konvergovat stejnoměrně. Avšak pro pevné $y \in (0, 1)$ je integrál

$$\int_1^\infty \frac{\sin yx}{x^y}\,\mathrm{d}x$$

konvergentní dle Abelova kritéria pro neparametrické integrály v $\mathbb{R}$. Musíme tedy dořešit pouze intervaly $[C, 1]$, pro $C > 0$. Na tomto intervalu však platí, že

$$\frac{1}{x^y} \leq \frac{1}{x^C},$$

a proto

$$\frac{1}{x^y} \rightrightarrows 0, \text{ pro } x \to \infty$$

Navíc máme, že

$$\left|\int_0^B \sin xy\,\mathrm{d}x\right| = \left|\left[\frac{\sin xy}{y}\right]_0^B\right| = \left|\frac{\sin By}{y}\right| \leq \frac{1}{C}.$$

Integrál tak na tomto intervalu splňuje podmínky Abelova kritéria a je tedy stejnoměrně konvergentní.

Př. 365 *Určete obor konvergence integrálu*

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^y + x^2}\,\mathrm{d}x$$

Všimneme si, že můžeme ohraničit

$$\left|\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^y + x^2}\,\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^y}\,\mathrm{d}x\right|,$$

proto dle předchozího příkladu vidíme, že na intervalech $[C, \infty)$, pro $C > 0$ integrál konverguje stejnoměrně. Budeme chtít opět vyšetřit situaci pro $y = 0$. Zde však vidíme, že

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^y + x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{\sin x}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x$$

Tento integrál je však konvergentní (opět například pomocí Abelova kritéria). Nicméně pro $y \in [0, \infty)$ a $x \in [1, \infty)$ je

$$\frac{1}{x^y + x^2} \leq \frac{1}{1 + x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Tentokrát můžeme Abelovo kritérium použít rovnou na intervalu $[0, \infty)$. Ani toto ohraničení však není dostatečné, neboť funkce

$$\frac{1}{x^y + x^2}$$

je ohraničená pro $y > -2$ a stejnoměrně ohraničená na intervalu $[C, \infty)$ pro libovolné $C > -2$.

Př. 366 *Spočtěte*
$$\lim_{y\to\infty}\int_0^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x,$$
kde
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{y}, & x\in[0,y],\\ 0, & x>y.\end{cases}$$

První ze všeho si všimneme, že platí $f(x,y)\rightrightarrows 0$ pro $y\to\infty$, neboť je
$$f(x,y)\le\frac{1}{y}$$
a pro libovolné $\varepsilon>0$ nalezneme takové N, že pro všechny $y\ge N$ a libovolné x je
$$f(x,y)\le\frac{1}{y}<\varepsilon.$$

Navíc počítáme
$$\lim_{y\to\infty}\int_0^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x=\lim_{y\to\infty}\int_0^y\frac{1}{y}\,\mathrm{d}x=\lim_{y\to\infty}\left[\frac{x}{y}\right]_0^y=\lim_{y\to\infty}1=1$$
Nicméně pokud bychom zaměnili pořadí limity a integrace dostaneme vzhledem k $f(x,y)\rightrightarrows 0$, že
$$\lim_{y\to\infty}\int_0^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x=0.$$
Je třeba si uvědomit, že integrál
$$\int_0^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x$$
nekonverguje stejnoměrně na $[N,\infty)$, neboť pro $B<y$ je vždy
$$\int_B^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x=1-\frac{B}{y}.$$
Avšak pro libovolné $\varepsilon>0$ a libovolné B nalezneme na intervalu $[N,\infty)$ takové y, že tato hodnota nebude menší než ε.

Zde vidíme, že ve větě o záměně limity a integrálu nestačí, aby byla funkce pouze stejnoměrně konvergentní.

Př. 367 *Určete*

$$\lim_{y\to 0}\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-xy}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Již jsme ukázali, že tento integrál stejnoměrně konverguje na intervalu $[0,\infty)$. Výsledný integrál je tak spojitou funkcí vzhledem k proměnné y na tomto intervalu a můžeme zaměnit pořadí limity a integrace, abychom dostali

$$\lim_{y\to 0}\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-xy}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{0}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Př. 368 *Určete*

$$\lim_{y\to\infty}\int_1^\infty \frac{1}{y^2+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Již jsme ukázali, že tento integrál je stejnoměrně konvergentní na celém $\mathbb{R}$. Dále si všimneme, že pro $y \in [N,\infty)$ je

$$\frac{1}{y^2+x^2} \le \frac{1}{y^2} \le \frac{1}{N^2}$$

a tedy pro libovolné $\varepsilon > 0$ nalezneme takové N, aby tato hodnota byla menší pro libovolné x a y z uvažovaných intervalů. Což tedy znamená, že $\frac{1}{y^2+x^2} \rightrightarrows 0$ a máme

$$\lim_{y\to\infty}\int_1^\infty \frac{1}{y^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty 0\,\mathrm{d}x = 0$$

Př. 369 *Určete hodnoty funkce*

$$F(y) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(xy)}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x,$$

pro $y > -1$.

První ze všeho si všimneme, že funkce

$$\frac{\operatorname{arctg}(xy)}{x}$$

je ohraničená. Neboť pro $y = 0$ se jedná o nulovou funkci a pro $y \neq 0$ máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(xy)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+(xy)^2}}{1} = 1.$$

Dále máme, že funkce $\frac{\operatorname{arctg}(x,y)}{x}$ je ohraničená a integrál

$$\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

konverguje a nezávisí ani na proměnné y, tedy konverguje stejnoměrně. Tudíž dle Dirichletova kritéria tento integrál konverguje stejnoměrně. Integrovaná funkce

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{arctg}(xy)}{x(1+x^2)}$$

je navíc spojitá všude kromě kraje intervalu přes který integrujeme. Máme

$$f_y(x,y) = \frac{x}{x(1+x^2)(1+(xy)^2)},$$

která je také spojitá pro $x > 0$. Dále platí, že

$$\int_0^\infty f_y(x,y)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Tedy i tento integrál je stejnoměrně konvergentní. Můžeme tedy podle věty počítat

$$\begin{aligned} F'(y) &= \int_0^\infty f_y(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)(1+(xy)^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-y^2}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} - \frac{y^2}{1+(xy)^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{1-y^2}\left[\operatorname{arctg} x - y\operatorname{arctg}(xy)\right]_0^\infty = \frac{1}{1-y^2}\left(\frac{\pi}{2} - y\frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+y}. \end{aligned}$$

Můžeme tedy zpětně integrovat čímž dostaneme

$$F(y) = \frac{\pi}{2}\ln|1+y| + C.$$

Dosadíme-li

$$F(0) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(0)}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = 0 = \frac{\pi}{2}\ln|1+0| + C = C$$

a tedy funkce

$$F(y) = \frac{\pi}{2} \ln |1 + y|$$

na intervalu $y \in (-1, 1)$. Musíme si ještě rozmyslet, že pro

$$F'(\pm 1) = \int_0^\infty \frac{1}{(1 + x^2)^2} \, \mathrm{d}x = \left[\frac{\operatorname{arctg} x}{2} + \frac{x}{2x^2 + 2} \right]_0^\infty = \frac{\pi}{4}$$

Tedy $F'(y)$ je spojitá pro $y = 1$ a tedy máme vyjádření pro $F(y)$ na intervalu $(-1, \infty)$.

Př. 370 *Určete hodnotu integrálu*

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

Zavedeme pomocný integrál

$$F(y)=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x$$

O tomto integrálu víme, že integruje stejnoměrně pro $y \geq 0$ (podobně jako v příkladu 364). Navíc integrovaná funkce je spojitá pro $x > 0$ (v dalším jakoby uvážíme její spojité rozšíření a budeme ji brát spojitou i pro $x = 0$) a máme

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{e}^{-xy} = -\sin x\,\mathrm{e}^{-xy},$$

což je opět spojitá funkce pro $x \geq 0$. Máme

$$F'(y) = -\int_0^\infty \sin x\,\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(y\sin(x)+\cos(x))}{y^2+1}\,\mathrm{e}^{-xy}\right]_0^\infty = -\frac{0+1}{1+y^2} = -\frac{1}{1+y^2}$$

Zintegrujeme-li zpátky toto vyjádření, dostaneme

$$F(y) = -\operatorname{arctg} y + C$$

Neboť je $F(y)$ spojitou funkcí proměnné y, je

$$\lim_{y\to\infty} F(y) = \int_0^\infty \lim_{y\to\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Navíc platí také

$$\lim_{y\to\infty} F(y) = \lim_{y\to\infty} -\operatorname{arctg} y + C = -\frac{\pi}{2}+C$$

a tedy je $C = \frac{\pi}{2}$. Uvážíme-li naopak ze spojitosti, že

$$\lim_{y\to 0^+} F(y) = \int_0^\infty \lim_{y\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

a také že

$$\lim_{y\to 0^+} F(y) = \lim_{y\to 0^+} -\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

máme výslednou hodnotu hledaného integrálu.

9 Křivkový integrál 1.druhu

Nechť $\alpha(t)$, $\beta(t)$ jsou spojité funkce pro $t \in [a, b]$. Potom množinu

$$C = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 | x = \alpha(t), y = \beta(t), t \in [a, b]\}$$

nazýváme spojitou křivkou v rovině $\mathbb{R}^2$. Rovnice $x = \alpha(t)$, $y = \beta(t)$ se pak nazývají parametrickými rovnicemi.

Křivka C daná jako $x = \alpha(t)$, $y = \beta(t)$, $z = \gamma(t)$, pro $t \in [A, B]$ se nazývá hladká, pokud α, β, γ mají na $[A, B]$ spojité derivace (tedy jsou samy spojité) a

$$(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2 + (\gamma'(t))^2 > 0$$

pro každé $t \in [A, B]$.

Obecně můžeme mít křivku zadanou v $\mathbb{R}^n$, ale pro jednoduchost uvažujme křivku C v prostoru $\mathbb{R}^3$. Je-li funkce $f(x, y, z)$ definovaná a spojitá v bodech hladké křivky C, která je daná parametrizací jako $x = \alpha(t)$, $y = \beta(t)$, $z = \gamma(t)$, pro $t \in [A, B]$, pak křivkový integrál prvního druhu počítáme jako

$$\int_C f(x, y, z)\,\mathrm{d}s = \int_A^B f(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)) \sqrt{(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2 + (\gamma'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

Máme-li funkci f a křivku C pouze v prostoru $\mathbb{R}^2$, dostaneme obdobný vzorec, kde uvažujeme $\gamma(t) = 0$.

Vektor $(\alpha'(t), \beta'(t), \gamma'(t))$ udává tečný vektor ke křivce C a jeho velikost v obvyklé Euklidovské normě je $\sqrt{(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2 + (\gamma'(t))^2}$, kterýžto výraz vystupuje v převodové formuli.

Je-li křivka C daná v rovině $\mathbb{R}^2$ implicitně skrze funkci $y = g(x)$, můžeme nejsnáze parametrizovat křivku C jako $x = t$ a $y = g(t)$. V takovém případě je tečný vektor ke křivce $(1, g'(t))$. Norma tečného vektoru nám zde potom vždy vznikne jako $\sqrt{1 + (g')^2}$.

V následující části uvažujme obě variant křivek, které se nacházejí v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ dohromady. Délku křivky C dostaneme jako křivkový integrál prvního druhu

$$l = \int_C 1\,\mathrm{d}s.$$

Hmotnost křivky jejíž hustota je dána funkcí $\rho(x, y, z)$ spočteme jako křivkový integrál z hustoty

$$m = \int_C \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}s.$$

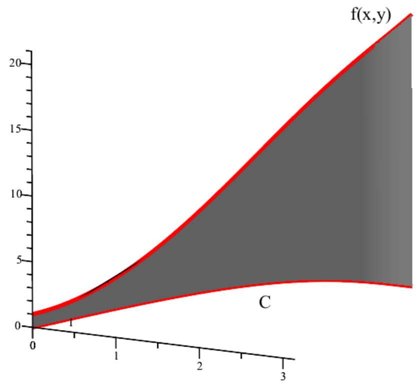
Uvažujme křivku C v prostoru a nechť $[x(t), y(t), z(t)]$ jsou body této křivky. Úsečky spojující body $[x(t), y(t), z(t), 0]$ a $[x(t), y(t), z(t), f(x(t), y(t), z(t))]$ vytvoří plochu, jejíž obsah spočteme jako

$$S = \int_C f(x, y, z)\,\mathrm{d}s.$$

Analogicky, pro křivku C v rovině danou jako $[x(t), y(t)]$ dostaneme integrálem

$$S = \int_C f(x, y)\,\mathrm{d}s.$$

obsah plochy, kterou tvoří úsečky spojující body $[x(t), y(t), 0]$ a $[x(t), y(t), f(x(t), y(t))]$. Situace by mohla být znázorněna jako



Těžiště rovinné křivky (v $\mathbb{R}^2$) jejíž hustota je dána funkcí $\rho(x,y)$ získáme skrze stacionární momenty

$$S_x = \int_C y\rho \,\mathrm{d}s,$$
$$S_y = \int_C x\rho \,\mathrm{d}s.$$

Souřadnice těžiště pak jsou

$$\left[\frac{S_y}{m}, \frac{S_x}{m}\right],$$

kde m je hmotnost křivky C.

Těžiště prostorové křivky (v $\mathbb{R}^3$) jejíž hustota je dána funkcí $\rho(x,y,z)$ získáme skrze stacionární momenty

$$S_{xy} = \int_C z\rho \,\mathrm{d}s,$$
$$S_{xz} = \int_C y\rho \,\mathrm{d}s,$$
$$S_{yz} = \int_C x\rho \,\mathrm{d}s.$$

Souřadnice těžiště pak jsou

$$\left[\frac{S_{yz}}{m}, \frac{S_{xz}}{m}, \frac{S_{xy}}{m}\right],$$

kde m je hmotnost křivky C.

9.1 Parametrizace křivky

Př. 371 *Pro každou křivku nalezněte dvě parametrizace pro*

- *úsečku AB, kde $A = [-1, 6], B = [2, -1]$.*
- *horní polovinu kružnice $x^2 + y^2 = 16$.*
- *levou část elipsy $x^2 + 3y^2 = 12$.*
- *parabolu $y = -x^2 + 2$, pro $-1 \le x \le 2$.*
- *prostorovou křivku splňující $x^2 + y^2 + z^2 = 16, x \ge 0, z \ge 0, y = \sqrt{3}x$.*
- *křivku implicitně danou jako $x^2 - 8x + y^2 + 4y + 4 = 0$.*
- *$x^{2/3} + y^{2/3} = A^{2/3}$, pro $A > 0$.*
- *hyperbolu $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$.*
- *řetězovku $y = A \cosh \frac{x}{A}$.*
- *lemniskatu $\left(x^2 + y^2\right)^2 = A^2 \left(x^2 - y^2\right)$.*
- *cykloidu $x = A(t - \sin t)$, $y = A(1 - \cos t)$.*

Pro jednotlivé body máme

- Hledáme parametrický popis úsečky AB, body A, B udávají vektor $v = \overrightarrow{AB} = (2 - (-1), -1 - 6) = (3, -7)$. Dostáváme tak parametrický popis $x = -1 + 3t$, $y = 6 - 7t$, pro $t \in [0, 1]$. Tato parametrizace má počáteční bod A. Obrátíme-li znaménko vektoru v dostaneme parametrizaci v opačném směru a tedy musíme začínat v bodě B. Udaná parametrizace je pak $x = 2 - 3t$, $y = -1 + 7t$, pro $t \in [0, 1]$. Jinou libovolnou parametrizaci dostaneme, pokud zvolíme $t \in [a, a + 1]$ a upravíme jednu z již nalezených parametrizací vhodným posunem, tj. $x = -1 + 3(t - a)$, $y = 6 - 7(t - a)$, pro $t \in [a, a + 1]$.

- Vyjádříme-li z rovnice proměnnou y dostaneme horní půlkružnici jako funkci $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$. Dolní půlkružnice by pak byla dána jako $f(x) = -\sqrt{16 - x^2}$. Nyní je křivka dána jako funkce proměnné x a dostaneme jednoduše parametrizaci $x = t$, $y = \sqrt{16 - t^2}$, pro $t \in [-4, 4]$. Vidíme například z definičního oboru funkce $f(x)$. Vskutku pro $x > 4$ nemá rovnice $x^2 + y^2 = 16$ žádné řešení. Křivka je částí kružnice a víme, že body kružnice můžeme vhodně popsat pomocí polárních souřadnic. Dostaneme tedy parametrizaci $x = 4 \cos t$, $y = 4 \sin t$, pro $t \in [0, \pi]$.

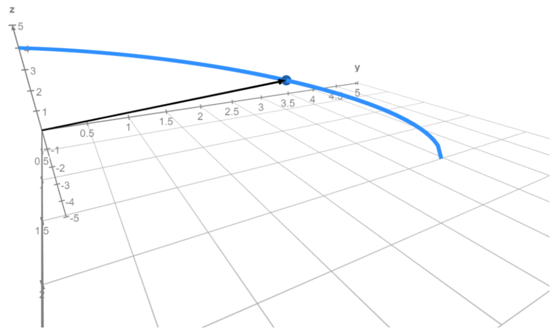
- I zde můžeme vyjádřit z rovnice $x^2 + 3y^2 = 12$ proměnnou y, pak bychom dostali horní, nebo dolní polovinu elipsy. Pokud vyjádříme z rovnice x, dostaneme levou, nebo pravou část elipsy. Dostáváme tak parametrizaci $x = -\sqrt{12 - 3t^2}$, $y = t$, pro $t \in [-2, 2]$. Pokud však použijeme zobecněné polární souřadnice, dostaneme obdobně $x = \sqrt{12} \cos t$, $y = 2 \sin t$, pro $t \in [\pi/2, 3\pi/2]$.

- Neboť máme funkci $f(x) = -x^2 + 2 =$, dostaneme jednoduše $x = t$, $y = -t^2 + 2$, pro $t \in [-1, 2]$. Pokud chceme nalézt druhou parametrizaci, stačí například upravit $x = -t$, $y = -t^2 + 2$, pro $t \in [-2, 1]$. Můžeme zvolit x jiným způsobem. Například pokud vezmeme $x = \ln t$, tak je $y = -\ln^2 t + 2$, pro $t \in [\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}^2]$ a máme další parametrizaci křivky. Obdobně pro $x = t - 2$, $y = -(t - 2)^2 + 2$, pro $t \in [1, 4]$.

- I zde se nabízí jednoduchá varianta parametrizace, neboť y je vyjádřeno pomocí x a z zase pomocí x i y. Můžeme tedy zvolit $x = t$, $y = \sqrt{3}t$, $z = \sqrt{16 - 4t^2}$. Nyní potřebujeme už jen určit interval pro t. Z nerovnosti $x \geq 0$ vidíme, že křivka začíná v $t = 0$ a pokračuje, dokud křivka nedorazí na půdorysnu, tj. dokud nenastane $z = 0$, což platí pro $t = 2$. Proto máme $t \in [0, 2]$. Druhou parametrizaci získáme pomocí sférických souřadnic. Volíme tedy $x = \rho \cos\varphi \sin\theta$, $y = \rho \sin\varphi \sin\theta$, $z = \rho \sin\theta$. Neboť se pohybujeme na sféře, bude poloměr konstantní (po dosazení do rovnice sféry dostáváme $\rho^2 = 16$). Naše křivka je navíc částí poledníku, a proto je také φ konstantní, což můžeme určit z obrázku, nebo po dosazení

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{3}x \\ \rho \sin\varphi \sin\theta &= \sqrt{3}\rho \cos\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi &= \sqrt{3}\cos\varphi \\ \operatorname{tg}\varphi &= \sqrt{3}. \end{aligned}$$

  Odkud vidíme, že $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Nakonec z nerovnosti $0 \leq z = \rho \sin\theta$ určíme $\theta \in [0, \pi/2]$. Samotnou křivku můžeme vykreslit jako:



- Vidíme, že se jedná patrně o kružnici, nebo elipsu. Rovnici $x^2 - 8x + y^2 + 4y + 4 = 0$ tedy musíme upravit na čtverec, dostáváme

$$x^2 - 8x + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 8x + 16 + y^2 + 4y + 4 + 4 - 16 - 4 = (x - 4)^2 + (y + 2)^2 - 16.$$

  Jedná se o kružnici s poloměrem 4 a středem $[4, -2]$. Parametrizujeme ji pomocí polárních souřadnic jako

$$\begin{aligned} x + 4 &= 4\cos t, \\ y - 2 &= 4\sin t, \end{aligned}$$

  pro $t \in [0, 2\pi]$. Čímž dostáváme první parametrizaci. Druhou parametrizaci dostaneme například jako

$$\begin{aligned} x + 4 &= 4\cos(-t) = 4\cos t, \\ y - 2 &= 4\sin(-t) = -4\sin t, \end{aligned}$$

  stále pro $t \in [0, 2\pi]$. Tímto získáme parametrizaci s opačnou orientací. Třetí orientaci dostaneme, pokud zaměníme sinus a cosinus v parametrizaci. Máme tak

$$\begin{aligned} x + 4 &= 4\sin t \\ y - 2 &= 4\cos t, \end{aligned}$$

pro $t \in [0, 2\pi]$. Neboť však platí, že $\cos x = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, jedná se o stejnou parametrizaci jako v předchozím případě, jen interval přes který parametrizujeme by se posunul. Vzhledem k periodičnosti funkcí $\sin x$ a $\cos x$ můžeme dostat další parametrizace pokud posuneme libovolný interval pro t o celý násobek délky periody.

- Křivka připomíná rovnici kružnice, pokud bychom parametrizovali křivku jako $x = A\cos t$, $y = A\sin t$, dostaneme po dosazení

$$A^{2/3}\sqrt[3]{\cos^2 t} + A^{2/3}\sqrt[3]{\sin^2 t} = A^{2/3} \Rightarrow \sqrt[3]{\cos^2 t} + \sqrt[3]{\sin^2 t} = 1$$

Zde bychom chtěli podobně jako u kružnice využít goniometrické jedničky, ale tu nelze použít kvůli odmocninám. Chtěli bychom se zbavit ve výrazu třetí odmocniny. Jak toho však dosáhnout? Třetí odmocnina se vyruší s třetí mocninou. Vidíme tak, že pokud použijeme $x = A\cos^3 t$, $y = A\sin^3 t$, dostaneme stejně

$$A^{2/3}\cos^2 t + A^{2/3}\sin^2 t = A^{2/3} \Rightarrow \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Máme tedy hledanou parametrizaci pro $t \in [0, 2\pi]$. Další parametrizaci dostaneme opět jako $x = A\cos^3(-t)$, $y = A\sin^3(-t)$ pro $t \in [0, 2\pi]$.

- Chceme-li parametrizovat hyperbolu, zkusíme nejprve použít obvyklou eliptickou parametrizaci

$$x = A\cos t,$$
$$y = B\sin t,$$

čímž po dosazení dostaneme

$$\frac{A^2\cos^2 t}{A^2} - \frac{B^2\sin^2 t}{B^2} = \cos^2 t - \sin^2 t.$$

Vidíme, že tento výraz není roven jedničce. Zde si však můžeme vzpomenout na hypergoniometrickou jedničku, která je dána jako vztah

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Avšak přivede nás to na myšlenku, že můžeme k parametrizaci využít hyperbolické funkce, čímž dostaneme

$$x = A\cosh t,$$
$$y = B\sinh t,$$

pro $t \in (-\infty, \infty)$. Uvědomme si však, že tato parametrizace odpovídá pouze jednomu rameni hyperboly, neboť $\cosh x > 0$. Druhé rameno hyperboly získáme jako jeho překlopením přes osu y, což odpovídá druhé části parametrizace

$$x = -A\cosh t,$$
$$y = B\sinh t,$$

pro $t \in (-\infty, \infty)$. Další parametrizaci dostaneme, vezmeme-li

$$x = \pm A\cosh t,$$
$$y = -B\sinh t,$$

pro $t \in (-\infty, \infty)$. Neboť je však $\sinh(x)$ lichá funkce, odpovídá tato druhá parametrizace první parametrizaci, akorát v opačném směru.

Další parametrizaci hyperboly dostaneme, pokud uvážíme rovnost $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Můžeme psát

$$1 = \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 t} = \frac{1}{\sin^2 t} - \operatorname{tg}^2 t,$$

což vede na parametrizaci

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sin t}, \\ y &= \operatorname{tg} t. \end{aligned}$$

Opět si musíme uvědomit, že zde máme dva intervaly pro t a to jsou $t \in (-\pi/2, \pi/2)$, $(\pi/2, 3\pi/2)$, abychom dostali dvě nesouvislé ramena. Tato parametrizace je méně intuitivní.

- První parametrizaci řetězovky získáme snadno jako $x = t$ a $y = A \cosh \frac{t}{A}$, pro $t \in (\infty, \infty)$. Avšak u řetězovky $y = A \cosh \frac{x}{A}$ je užitečné si také uvědomit, že lze tuto rovnici přepsat jako

  $$y = A \cosh \frac{x}{A} = A \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{A}} - \mathrm{e}^{-\frac{x}{A}}}{2}.$$

  Můžeme tak vhodně zvolit také parametrizaci $x = A \ln t$ což nám po dosazení dává

  $$y = \frac{A}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right).$$

  Rozsah pro parametr t se upraví vzhledem k oboru hodnot na $t \in (0, \infty)$.

- U komplikovanějších výrazů může s parametrizací pomoci, pokud prostě pohledáme mezi známými parametrizacemi. S trochou práce zjistíme, že Lemniskata je daná parametricky jako

  $$\begin{aligned} x &= \frac{A \cos t}{1 + \sin^2 t}, \\ y &= \frac{A \sin t \cos t}{1 + \sin^2 t}. \end{aligned}$$

  Tento vzorec bychom asi těžko odhadovali. Snadno nalezneme druhou parametrizaci, pokud zavedeme transformaci $t = -x$, která vede na parametrizaci v opačném směru.

- Uvedená cykloida je sama o sobě již parametrizována jako $x = A(t - \sin t)$, $y = A(1 - \cos t)$, pro $t \in (-\infty, \infty)$. K nalezení další parametrizace můžeme použít transformaci pro t, která nezmění množinu přes kterou parametrizujeme. Můžeme volit například

  $$\begin{aligned} x &= A(t^3 - \sin t^3), \\ y &= A(1 - \cos t^3). \end{aligned}$$

  Část cykloidy můžeme získat také parametrickým vyjádřením jako

  $$x = A \arccos \frac{A - y}{A} - \sqrt{y(2A - y)},$$

což můžeme ověřit dosazením

$$A \arccos \frac{A-y}{A} - \sqrt{y(2A-y)} = A \arccos \cos t - \sqrt{(A - A\cos t)(A + A\cos t)} =$$
$$= At - A\sqrt{1-\cos^2 t} = At - A \sin t.$$

Funkce $\cos t$ je prostá na intervalu $[0, \pi]$ a tedy $t \in [0, \pi]$, aby platil vztah $\arccos \cos t = t$.

Př. 372 *Nakreslete průmět křivky C do půdorysny xy, kde křivka C je*

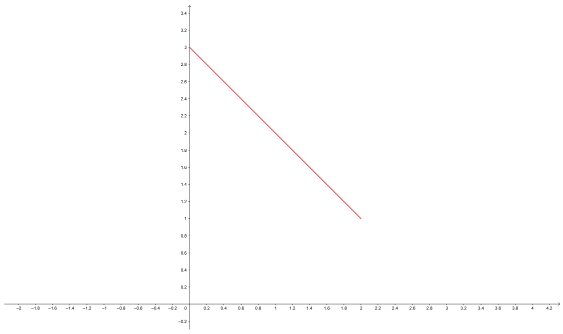
- *daná jako $x = t+1$, $y = 2-t$, $z = 3t$, pro $t \in [-1,1]$.*
- *daná jako $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, pro $t \in [0, 2\pi]$.*
- *daná jako $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$, pro $t \in [0,1]$.*
- *daná jako $y = 2\arcsin\frac{x}{2}$, $z = \ln\frac{2-x}{2+x}$, pro $x \in [0,2]$.*

Pro jednotlivé body máme

- Chceme-li vykreslit průmět do půdorysny křivky, která je dána parametricky, zapomeneme třetí souřadnici a vykreslíme křivku pouze pro x a y. Jedná se tedy o přímku $x = t+1$, $y = 2-t$, můžeme převést $t = x-1$ a dosadit

  $$y = 2 - t = 2 - (x-1) = 3 - x.$$

  Z omezení $t \in [-1,1]$ a vztahu $xt+1$ pak dostaneme $x \in [0,2]$. Což vede na graf

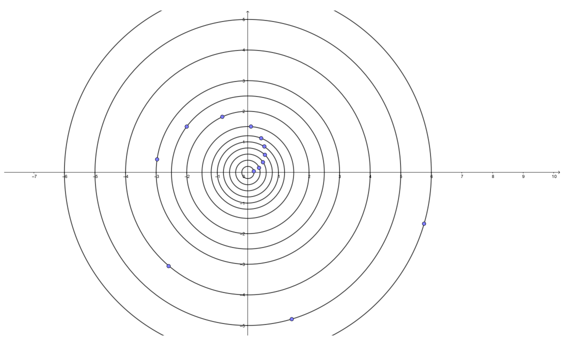
  

  Obdobně si můžeme všimnout, že křivka je přímkou. Počáteční bod je dán jako pro $t = -1$ jako $[0,3]$ a koncový bod je pro $t = 1$ dán jako $[2,1]$. Tyto dva body nyní stačí jen spojit úsečkou.

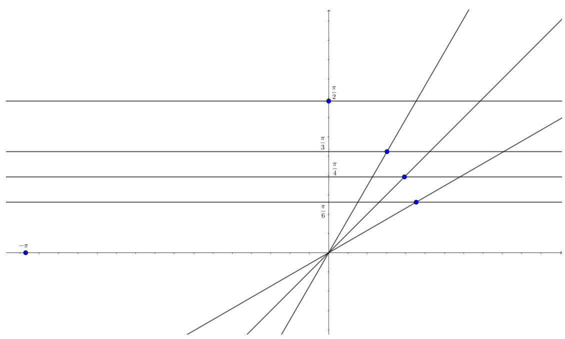
- Zapomeneme-li třetí souřadnici, dostaneme křivku $x = t\cos t$, $y = t\sin t$. Dosadíme-li ji do vztahu $x^2 + y^2$ získáme

  $$x^2 + y^2 = t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t = t^2.$$

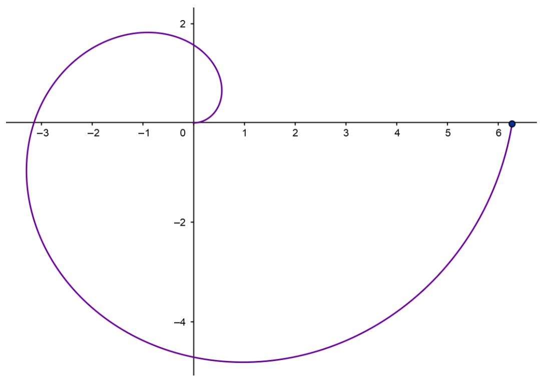
  Vidíme, že body křivky leží v čase t vždy na kružnici s poloměrem t a úhel bodu lineárně roste. Když začneme vykreslovat jednotlivé kružnice se zvětšujícím se poloměrem dostaneme zhruba obrázek

Můžeme se také orientovat tím, že v $\frac{\pi}{2}$ a v $\frac{3\pi}{2}$ protíná graf osu y ve vzdálenosti právě $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{3\pi}{2}$. Obdobně pro hodnoty π, 2π máme průsečík s osou x. Hodnotu π známe také přibližně a můžeme si tím vypomoct při kreslení grafu pokud zapojíme další známe hodnoty (např. $\frac{\pi}{4} = 45°$). Po vykreslení pomocných přímek se správnými úhly a ve správných hodnotách dostaneme jiný obrázek



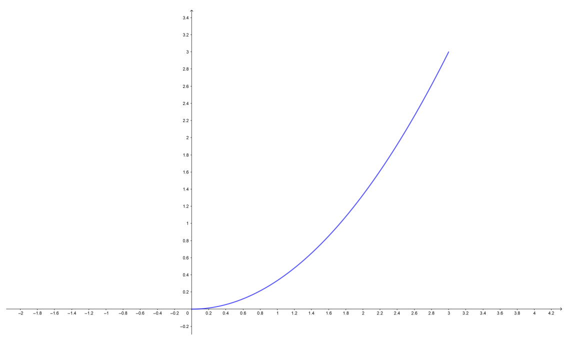
Postupně bychom se mohli přiblížit ke správnému tvaru, který je



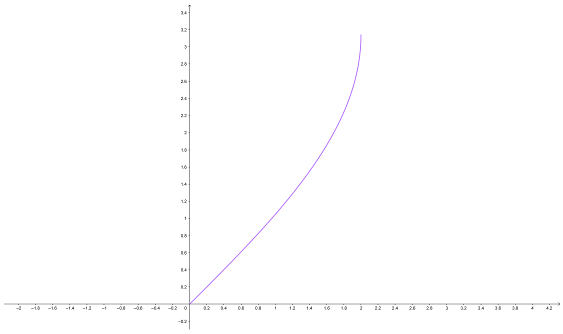
- Zapomeneme-li třetí souřadnici, dostaneme křivku $x = 3t$, $y = 3t^2$, pro $t \in [0, 1]$. Tu nejsnáze vykreslíme, pokud vyjádříme $t = \frac{x}{3}$ a dosadíme

$$y = 3t^2 = 3\frac{x^2}{9} = \frac{x^2}{3}.$$

Pro $t \in [0, 1]$ platí z $x = 3t$, že $x \in [0, 3]$. Vykreslení je již jasné



- Tentokrát není křivka daná parametricky. Nejsnáze ji však spočteme, pokud si uvědomíme, že v půdorysně ji máme zadanou již daným vyjádřením $y = 2\arcsin\frac{x}{2}$. Druhé vyjádření pak ovlivňuje pouze jak vysoko se křivka nachází. Vykreslíme tedy funkci $\arcsin(x)$ na intervalu $[0, 1]$, kde si jen uvědomíme, že $2f(x)$ ovlivní rozsah na ose y a rychlost pohybu po ose y. Obdobně ovlivní $f(x/2)$ rozsahy na ose x. Máme tedy



Př. 373 *Parametrizujte křivku, která vznikne průnikem válce* $x^2+y^2=2x$ *a koule* $x^2+y^2+z^2=4$*, pro* $z \geq 0$

Budeme chtít využít faktu, že kouli můžeme vyjádřit jako $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$. Zde se jedná pouze o horní polovinu sféry, ale platí také $z \geq 0$ a je to tedy v pořádku. Navíc můžeme stejně vyjádřit $y=\pm\sqrt{2x-x^2}$ čímž bychom mohli dojít k parametrizaci křivky přes její dvě části volbou $x=t$ a dosazením do vyjádření. Nicméně můžeme také využít polárních souřadnic po úpravě rovnice $x^2+y^2=2x$ na čtverec jako $(x-1)^2+y^2=1$. Dostaneme posunutím polárních souřadnic parametrizaci

$$\begin{aligned} x-1 &= \rho\cos t, \\ y &= \rho\sin t, \end{aligned}$$

kde nám přebývá parametr ρ. Dosazením do rovnice $x^2+y^2=2x$ získáme

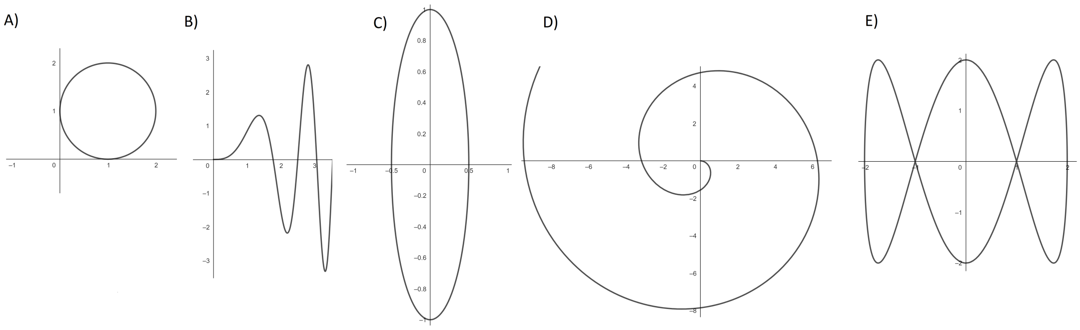
$$\begin{aligned} \rho^2\cos^2 t+\rho^2\sin^2 t &= 1 \\ \rho^2 &= 1. \end{aligned}$$

Tedy $\rho=1$ a následným dosazením do $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ již získáme parametrizaci $x=1+\cos t$, $y=\sin t$, $z=\sqrt{2-2\cos t}$, pro $t \in [0,2\pi]$.

Př. 374 *Mějte zadané křivky C pro blíže nespecifikovaný rozsah t:*

1. $x = \frac{\cos\frac{1}{t}}{t}$, $y = -\frac{\sin\frac{1}{t}}{t}$.
2. $x = 2\cos t$, $y = 2\sin 3t$.
3. $x = 1 - \sin t$, $y = 1 + \cos t$.
4. $x = \sqrt{t}$, $y = \sqrt{t}\sin t$.
5. $x = \frac{\cos t}{2}$, $y = \sin t$.

A jejich grafy:



Spojte uvedené parametrizace s příslušným grafem.

Křivky C potřebujeme nějak postupně přiřadit. Zběžným pohledem bychom měli poznat v 3. křivce posunutou kružnici s poloměrem $r = 1$. To proto, že jednoduše dosazením získáme pro $x - 1 = -\sin t$, $y - 1 = \cos t$, že platí

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = \sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

Přiřadíme tedy 3. $= A$.

Ve křivce 5. bychom naopak měli poznat elipsu, neboť pro $u = 2x$ dostaneme parametrizaci $u = \cos t$, $y = \sin t$, tj. kružnici. Substituce $u = 2x$ pak pouze změní měřítko. Přiřadíme tedy 5. $= C$.

Křivka 4. lze vhodně upravit pro $x = \sqrt{t} \Rightarrow t = x^2$ a dosazením dostaneme $y = x\sin x^2$, tj. graf funkce. Máme tedy graf podobný $\sin u$, kde zvětšující se x způsobí zvětšení amplitudy a x^2 ve výrazu $\sin x^2$ způsobí změnu frekvence. Přitom víme, že pro větší hodnotu u má $\sin u$ větší frekvenci. Jasně vidíme, že 4. $= B$.

Křivka 2. nám udává téměř kružnici s poloměrem $r = 2$. Pouze u y-ové složky dojde ke změně přidáním $3t$. Rozmysleme si, že pro $t \in [0, \pi]$ projde x-ová souřadnice křivky interval $[-2, 2]$ pouze $1\times$. Naopak y-ová souřadnice bodu tento interval projde $3\times$. Toto chování vidíme na křivce E a nevidíme jej na křivce D. Spojíme tedy 2. $= E$.

Nakonec uvažme křivku 1., v níž poznáme také kružnici, v upravených polárních souřadnicích bychom zde dostali poloměr $\rho = \frac{1}{t}$ a úhel $\varphi = \frac{1}{t}$. Se zmenšujícím se t poloměr i úhel rostou, tj. křivka bude obíhat okolo počátku. Pro t rostoucí jde poloměr k nule stejně jako úhel, blížíme se tedy do počátku. Toto chování vidíme u křivky D a tedy spojujeme 1. $= D$.

9.2 Křivka zadaná parametricky

Př. 375 *Spočtěte integrál*

$$\int_C x + y \, \mathrm{d}s, \quad \textit{pro} \quad C : x = 5t + 2, y = 1 - 3t, z = 2 + t,$$

pro $t \in [1, 3]$.

Křivka je daná jednoduše parametricky, můžeme tedy hned dosadit do vzorce, abychom dostali

$$\int_1^3 (5t + 2 + 1 - 3t) \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 1^2} \, \mathrm{d}t = \sqrt{35} \int_1^3 2t + 3 \, \mathrm{d}t = \sqrt{35} \left[t^2 + 3t\right]_1^3 =$$
$$= \sqrt{35}(9 + 9 - 1 - 3) = 14\sqrt{35}.$$

Př. 376 *Spočtěte*

$$\int_C \frac{1+x}{1+y^2}\,\mathrm{d}s, \qquad \textit{pro} \qquad C: x = 2t, y = t,$$

pro $t \in [0,1]$.

Rovnou můžeme dosadit do vzorce jako

$$\int_0^1 \frac{1+2t}{1+t^2}\sqrt{4+1}\,\mathrm{d}t = \sqrt{5}\int_0^1 \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \sqrt{5}\left[\ln|1+t^2| - \operatorname{arctg} t\right]_0^1 = \sqrt{5}\left(\ln 2 - \frac{\pi}{4} - \ln 1 + \operatorname{arctg} 0\right) = \sqrt{5}\left(\ln 2 - \frac{\pi}{4}\right).$$

Př. 377 *Vypočtěte*

$$\int_C 5x^2 + 5y^2 + 6z^2 \,\mathrm{d}s, \qquad \textit{pro} \qquad C : x = 2\sin t, y = 2\cos t, z = 3t,$$

pro $t \in [0, 2\pi]$.

Vidíme, že křivka je šroubovicí a snadno spočteme derivace parametrizace jako

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x = 2\cos t,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y = -2\sin t,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z = 3.$$

Dosadíme tak do vzorce a počítáme

$$\int_C 5x^2 + 5y^2 + 6z^2 \,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \left(20\sin^2 t + 20\cos^2 t + 54t^2\right) \sqrt{4\cos^2 t + 4\sin^2 t + 9} \,\mathrm{d}t =$$
$$= \sqrt{13} \int_0^{2\pi} 20 + 54t^2 \,\mathrm{d}t = \sqrt{13} \left(40\pi + 54 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{2\pi} \right) =$$
$$= \sqrt{13} \left(40\pi + 144\pi^3\right).$$

Př. 378 *Vypočtěte*

$$\int_C 3\sqrt{x^2+y^2} - 2z \,\mathrm{d}s, \qquad \textit{pro} \qquad x = t\cos t, y = t\sin t, z = t,$$

pro $t \in [0, \pi]$.

Křivka je zadaná parametricky, můžeme tedy počítat

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x = \cos t - t\sin t,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y = \sin t + t\cos t,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z = 1.$$

Následně dosadíme do vzorce

$$\int_0^\pi \left(3\sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t} - 2t\right)\sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^\pi (3t - 2t)\sqrt{\cos^2 t - 2t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + 2t\cos t\sin t + t^2\cos^2 t + 1}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^\pi t\sqrt{2+t^2}\,\mathrm{d}t = \left|\begin{array}{c} s = 2+t^2 \\ \mathrm{d}s = 2t\,\mathrm{d}t \end{array}\right| =$$
$$= \frac{1}{2}\int_2^{2+\pi^2} \sqrt{s}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\left[\frac{2\sqrt{s^3}}{3}\right]_2^{2+\pi^2} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{(2+\pi)^3} - \sqrt{8}\right).$$

Př. 379 *Vypočtěte*

$$\int_C y^2\,\mathrm{d}s, \qquad \textit{pro} \qquad x = 3t - 3\sin t, y = 3 - 3\cos t$$

pro $t \in [0, \pi]$.

Křivku máme danou parametricky, máme tedy

$$\begin{aligned} x' &= 3 - 3\cos t,\\ y' &= 3\sin t \end{aligned}$$

a dosadíme do odmocniny čímž dostaneme

$$\sqrt{(3-3\cos t)^2 + 9\sin^2 t} = \sqrt{9 - 18\cos t + 9\cos^2 t + 9\sin^2 t} = 3\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} = \\ = 3\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}.$$

$$\int_0^\pi (3-3\cos t)^2 3\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,\mathrm{d}t = 27\sqrt{2}\int_0^\pi (1-\cos t)^2\sqrt{1-\cos t}\,\mathrm{d}t = \left|1 - \cos t = 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right| = \\ = 27\sqrt{2}\int_0^\pi 4\sin^4\left(\frac{t}{2}\right)\sqrt{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t = 27\cdot 8\int_0^\pi \sin^5\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t = \\ = 27\cdot 8\int_0^\pi \sin\left(\frac{t}{2}\right)\left(1-\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2\,\mathrm{d}t = 27\cdot 8\int_0^\pi \sin\left(\frac{t}{2}\right)\left(1 - 2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + \cos^4\left(\frac{t}{2}\right)\right)\,\mathrm{d}t = \\ = |\text{substituce } z = \cos\frac{t}{2}| = 27\cdot 8\cdot 2\left[-\frac{\cos^5\frac{t}{2}}{5} + \frac{2\cos^3\frac{t}{2}}{3} - \cos\frac{t}{2}\right]_0^\pi = 27\cdot 16\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1\right) = \\ = 27\cdot 16\left(\frac{8}{15}\right) = \frac{9\cdot 128}{5}.$$

Př. 380 *Spočtěte*

$$\int_C \frac{4x+y^2}{5}\,\mathrm{d}s, \quad \textit{pro} \quad x = \cos t + t\sin t, y = \sin t - t\cos t$$

pro $t \in [-\pi, \pi]$.

Využijeme zadanou parametrizaci a počítáme

$$\begin{aligned} x' &= -\sin t + \sin t + t\cos t = t\cos t, \\ y' &= \cos t - \cos t + t\sin t = t\sin t. \end{aligned}$$

Následně dosadíme do vzorce

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \frac{4\cos t + 4t\sin t + (\sin t - t\cos t)^2}{5}\sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{5}\int_{-\pi}^{\pi} t(4\cos t + 4t\sin t + (\sin^2 t - 2t\cos t\sin t + t^2\cos^2 t))\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{5}\int_{-\pi}^{\pi} (4t\cos t + 4t^2\sin t + t\sin^2 t - 2t^2\cos t\sin t + t^3\cos^2 t)\,\mathrm{d}t = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Neboť všechny integrované funkce jsou liché a integrujeme přes symetrický interval.

Př. 381 *Spočtěte*

$$\int_C \frac{z^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s, \qquad \textit{pro} \qquad x = 3\cos t, y = 3\sin t, z = 2t$$

pro $t \in [0, \pi]$.

Nejdříve spočítáme derivace parametrizace čímž získáme

$$\begin{aligned} x' &= -3\sin t, \\ y' &= 3\cos t. \end{aligned}$$

Převedeme integrál pomocí základního vzorce do tvaru

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \frac{4t^2}{9\cos^2 t + 9\sin^2 t}\sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 4}\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{4\sqrt{13}}{9}\int_0^\pi t^2\,\mathrm{d}t = \frac{4\sqrt{13}}{9}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^\pi = \frac{4\sqrt{13}\pi^3}{27}. \end{aligned}$$

Př. 382 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C xy\,\mathrm{d}s, \qquad \textit{pro} \qquad C: x = A\cosh t, y = A\sinh t, \ \textit{pro}\ t \in [0, t_0], A > 0$$

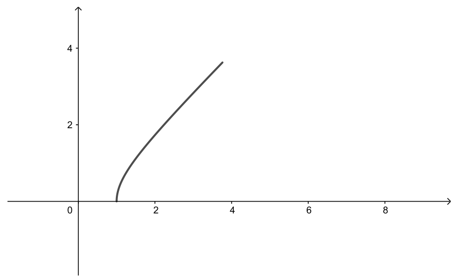
Nejprve připomeňme, že $(\sinh t)' = \cosh t$, $(\cosh t)' = \sinh t$ a $\cosh t = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}$. Dostáváme tedy

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t_0} A^2 \sinh t \cosh t \sqrt{A^2 \sinh^2 t + A^2 \cosh^2 t}\,\mathrm{d}t = |\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1| = \\
&= A^3 \int_0^{t_0} \sinh t \cosh t \sqrt{2\cosh^2 t - 1}\,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} z = 2\cosh^2 t - 1 \\ \mathrm{d}z = 4\cosh t \sinh t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \\
&= \frac{A^3}{4} \int_1^{\cosh 2t_0} \sqrt{z}\,\mathrm{d}z = \frac{A^3}{4} \left[\frac{2}{3} \sqrt{z^3} \right]_1^{\cosh 2t_0} = \frac{A^3}{6} \left(\cosh^{3/2} 2t_0 - 1 \right).
\end{aligned}$$

Zde využijeme odvození

$$2\cosh^2 t - 1 = 2\frac{(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})^2}{4} - 1 = \frac{\mathrm{e}^{2t} + 2\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-2t} - 2}{2} = \frac{\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t}}{2} = \cosh 2t.$$

Zkoumaná křivka vypadá pro $A = 1$ a $t_0 = 2$ jako



Př. 383 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C y^2 \,\mathrm{d}s, \quad \textit{pro} \quad C : x = At - A\sin t, y = A - A\cos t, \ \textit{pro}\ t \in [0, 2\pi]$$

Vypočteme

$$\begin{aligned} x' &= A - A\cos t, \\ y' &= A\sin t. \end{aligned}$$

Dosazením do odmocniny tak získáme

$$\sqrt{(A - A\cos t)^2 + A^2\sin^2 t} = \sqrt{A^2 - 2A\cos t + A^2\cos^2 t + A^2\sin^2 t} = \sqrt{2A^2 - 2A^2\cos t}.$$

Základní vzorec nám dá křivkový integrál jako

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} A^2(1-\cos t)^2\sqrt{2A^2 - 2A^2\cos t}\,\mathrm{d}t = \left|\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1-\cos t}{2}\right| = \\
&= \sqrt{2}A^3 \int_0^{2\pi} 4\sin^4\left(\frac{t}{2}\right)\sqrt{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t = |\sin t \text{ je na } [0,\pi] \text{ kladný}| = \\
&= 2^3A^3 \int_0^{2\pi} \sin^5\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} z = \cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ \mathrm{d}z = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \\
&= -2^4A^3 \int_1^{-1} \left(1 - \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2 \mathrm{d}z = 2^4A^3 \int_{-1}^{1} (1-z^2)^2\,\mathrm{d}z = \\
&= |\text{integrál sudé funkce}| = 2^5A^3 \int_0^1 1 - 2z^2 + z^4\,\mathrm{d}z = \\
&= 2^5A^3\left[z - 2\frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5}\right]_0^1 = 2^5A^3\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right).
\end{aligned}$$

Př. 384 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C x^2 + y^2 \,\mathrm{d}s, \quad \textit{pro} \quad C : x = r(\cos t + t \sin t), y = r(\sin t - t \cos t), \ \textit{pro}\ t \in [0, 2\pi], r > 0.$$

Počítáme

$$x' = r(-\sin t + \sin t + t \cos t) = rt \cos t,$$
$$y' = r(\cos t - \cos t + t \sin t) = rt \sin t.$$

Dosazením od odmocniny dostaneme

$$\sqrt{r^2t^2 \cos^2 t + r^2t^2 \sin^2 t} = \sqrt{r^2t^2} = rt,$$

pro $r > 0$ a $t \geq 0$.

$$r^2 \int_0^{2\pi} rt \left[(\cos t + t \sin t)^2 + (\sin t - t \cos t)^2\right] \,\mathrm{d}t =$$
$$= r^3 \int_0^{2\pi} t \left[\cos^2 t + 2t \cos t \sin t + t^2 \sin^2 t + \sin^2 t - 2t \sin t \cos t + t^2 \cos^2 t\right] \,\mathrm{d}t =$$
$$= r^3 \int_0^{2\pi} (1 + t^2)t \,\mathrm{d}t = r^3 \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}\right]_0^{2\pi} = 2\pi^2 r^3 \left(1 + 2\pi^2\right).$$

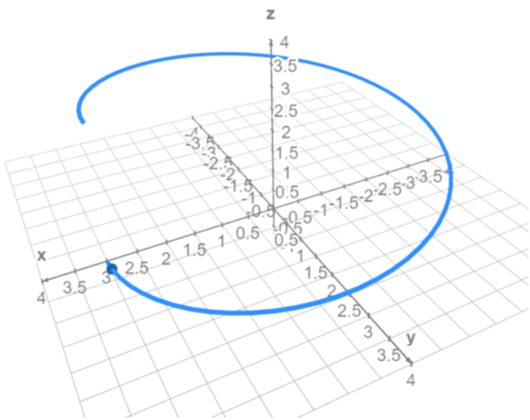
Př. 385 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C x^2 + y^2 + z^2 \,\mathrm{d}s, \qquad \textit{pro} \qquad C : x = A\cos t, y = A\sin t, z = Bt, t \in [0, 2\pi].$$

Vyšetřovaná křivka je šroubovicí s obecnými parametry A, B a jedná se pouze o jeden její závit. Počítáme

$$\int_0^{2\pi} \left(A^2\cos^2 t + A^2\sin^2 t + B^2t^2\right) \sqrt{A^2\sin^2 t + A^2\cos^2 t + B^2}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(A^2 + B^2t^2\right) \sqrt{A^2 + B^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{A^2 + B^2}\left[A^2t + \frac{B^2t^3}{3}\right]_0^{2\pi} =$$
$$= \sqrt{A^2 + B^2}\left(2A^2\pi + \frac{8B^2\pi^3}{3}\right).$$

Pro $A = 3$, $B = \frac{1}{2}$ vypadá závit šroubovice jako



Př. 386 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C z\,\mathrm{d}s, \qquad pro \qquad C : x = t\cos t, y = t\sin t, z = t, t \in [0, t_0].$$

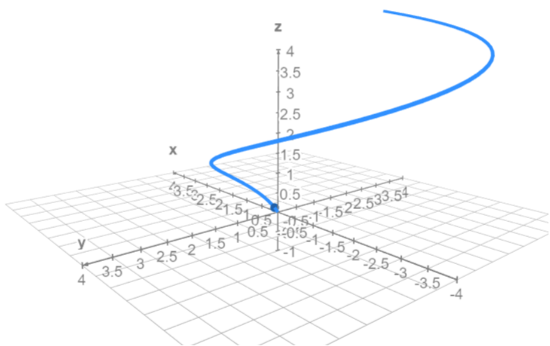
Křivka je rovnou daná parametricky a máme

$$\begin{aligned} x' &= \cos t - t\sin t, \\ y' &= \sin t + t\cos t, \\ z' &= 1. \end{aligned}$$

Počítáme

$$\begin{aligned} &\int_0^{t_0} t\sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^{t_0} t\sqrt{\cos^2 t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + t^2\cos^2 t + 1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{t_0} t\sqrt{2 + t^2}\,\mathrm{d}t = \\ &= \left| \begin{array}{c} z = 2 + t^2 \\ \mathrm{d}z = 2t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_2^{2+t_0^2} \sqrt{z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}z^{3/2}\right]_2^{2+t_0^2} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{(2+t_0^2)^3} - \sqrt{8}\right). \end{aligned}$$

Vyšetřovaná křivka vypadá jako



9.3 Obecně zadaná křivka

Př. 387 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C x + y \, \mathrm{d}s, \quad \textit{pro} \quad C \textit{ obvod trojúhelníka } A = [0,0], B = [0,2], C = [1,0]$$

Křivka C je dána třemi po částech hladkými křivkami $C_1 : x = t, y = 0$, $C_2 : x = 1 - t, y = 2t$, $c_3 : x = 0, y = 2 - 2t$, pro $t \in [0,1]$. Dostaneme tak pomocí základního vzorce 3 integrály

$$\int_0^1 (t+0)\sqrt{1^2+0}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (1-t+2t)\sqrt{1^2+2^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (2-2t)\sqrt{0+2^2}\,\mathrm{d}t =$$
$$\int_0^1 t\sqrt{1} + (1+t)\sqrt{4+1} + (2-2t)\sqrt{4}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (\sqrt{5}-3)t + (\sqrt{5}+4)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{\sqrt{5}-3}{2} + \sqrt{5} + 4 = \frac{3\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{2}.$$

Př. 388 *Spočtěte integrál*

$$\int_C \frac{x^2}{5}\,\mathrm{d}s,$$

kde C je křivka daná jako $y = \ln x^2$ spojující body $[\mathrm{e}, 2]$ a $[1, 0]$.

Parametrizujeme křivku snadno jako $x = t$ a $y = \ln t^2$, pro $t \in [1, \mathrm{e}]$. Máme tedy $x' = 1$ a $y' = \frac{2}{t}$. Dosadíme takto do vzorce

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{t^2}{5}\sqrt{1+\frac{4}{t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{t}{5}\sqrt{t^2+4}\,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} s = 4+t^2 \\ \mathrm{d}s = 2t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{10}\int_5^{4+\mathrm{e}^2} \sqrt{s}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{10}\left[\frac{2\sqrt{s^3}}{3}\right]_5^{4+\mathrm{e}^2} = \frac{1}{15}\left(\sqrt{(4+\mathrm{e}^2)^3} - \sqrt{5^3}\right)$$

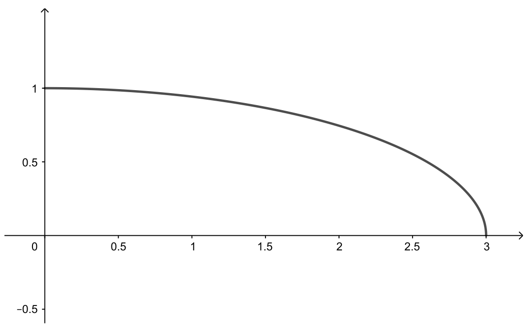
Př. 389 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C xy \, \mathrm{d}s, \quad \textit{pro} \quad C: \frac{x^2}{9} + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0$$

Zvolíme parametrizaci C jako $x = 3\cos t$, $y = \sin t$, pro $t \in [0, \pi/2]$ a počítáme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t \sin t \sqrt{9\sin^2 t + \cos^2 t} \, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t \sin t \sqrt{8\sin^2 t + 1} \, \mathrm{d}t =$$
$$= \left| \begin{array}{c} z = 8\sin^2 t + 1 \\ \mathrm{d}z = 16 \sin t \cos t \, \mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{3}{16} \int_1^9 \sqrt{z} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{8} \left[\sqrt{z^3} \right]_1^9 = \frac{13}{4}.$$

Křivka je tvořena částí elipsy, kterou můžeme vhodně popsat pomocí zobecněných polárních souřadnic. Křivka vypadá následovně



Př. 390 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C (5 - x^2 + 3y^2 - 2xy)\,\mathrm{d}s, \qquad \textit{pro} \qquad C : x^2 + y^2 = 4$$

Křivku C parametrizujeme $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, pro $t \in [0, 2\pi]$ a počítáme

$$\int_0^{2\pi} (5 - 4\cos^2 t + 12\sin^2 t - 8\sin t\cos t)\sqrt{4\cos^2 t + 4\sin^2 t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} 5 - 4\cos 2t + 8\sin^2 t - 4\sin 2t\,\mathrm{d}t =$$

$$= 2\,[5t - 2\sin 2t + 2\cos 2t]_0^{2\pi} + 2\int_0^{2\pi} 4(1 - \cos 2t)\,\mathrm{d}t = 20\pi + 8\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= 20\pi + 16\pi = 36\pi$$

Př. 391 *Vypočtěte*

$$\int_C 3x^2 + y \, \mathrm{d}s,$$

kde křivka C je lomená čára od bodu $[2,2]$ *přes bod* $[3,3]$ *do bodu* $[4,2]$.

Budeme chtít parametrizovat křivku a neboť je daná po částech, dostaneme ji přes dvě parametrizace jako

$$\begin{aligned} x &= 2 + t, \\ y &= 2 + t, \end{aligned}$$

pro $t \in [0,1]$ a její druhou část jako

$$\begin{aligned} x &= 3 + t, \\ y &= 3 - t, \end{aligned}$$

pro $t \in [0,1]$. Dostaneme tak integrál

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left(3(2+t)^2 + 2 + t\right) \sqrt{1+1} \, \mathrm{d}t + \int_0^1 \left(3(3+t)^2 + 3 - t\right) \sqrt{1+1} \, \mathrm{d}t = \\ &= \sqrt{2} \int_0^1 3(4 + 4t + t^2) + 3(9 + 6t + t^2) + 5 \, \mathrm{d}t = 3\sqrt{2} \left[13t + 5t^2 + \frac{2t^3}{3}\right]_0^1 + 5\sqrt{2} = \\ &= \sqrt{2} \, (39 + 15 + 2 + 5) = 31\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Př. 392 *Vypočtěte*

$$\int_C y\,\mathrm{e}^{xz}\,\mathrm{d}s,$$

kde křivka C je přímka spojující počátek s bodem $[-1,2,1]$.

Začneme parametrizací křivky. Dostaneme

$$\begin{aligned} x &= -1+t,\\ y &= 2-2t,\\ z &= 1-t, \end{aligned}$$

pro $t \in [0,1]$. Dosadíme-li tuto parametrizaci do integrálu, dostaneme

$$\int_0^1 (2-2t)\,\mathrm{e}^{(t-1)(1-t)}\sqrt{1+4+1}\,\mathrm{d}t.$$

Vidíme, že integrovaný výraz je poněkud komplikovaný a jeho integrace nebude jednoduchá. Pokud bychom zvolili rozumnější parametrizaci

$$\begin{aligned} x &= -t,\\ y &= 2t,\\ z &= t, \end{aligned}$$

pro $t \in [0,1]$, dostaneme

$$\int_0^1 2t\,\mathrm{e}^{-t^2}\sqrt{1+4+1}\,\mathrm{d}t = \left|s=t^2\right| = \sqrt{6}\int_0^1 \mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s = \sqrt{6}\left[-\mathrm{e}^{-s}\right]_0^1 = \sqrt{6}\left(-\mathrm{e}^{-1}+1\right).$$

Př. 393 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C \sqrt{2y^2+z^2}\,\mathrm{d}s, \qquad \textit{pro} \qquad C: x^2+y^2+z^2=4, x=y, x\leq 0, z\geq 0$$

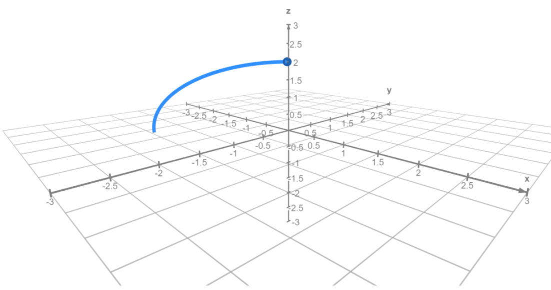
Vyšetřovaná křivka leží na sféře, použijeme tedy sférické souřadnice. Z rovnice sféry vidíme, že $\rho = 2$, z rovnosti $y = x$ navíc vidíme, že $\varphi = \frac{\pi}{4}$ nebo $\frac{\pi}{4} + \pi$. Z nerovnosti $x \leq 0$ však vidíme, že je to druhá z variant, tedy $\varphi = \frac{5}{4}\pi$. Neboť $z \geq 0$, máme navíc $\theta \in [0, \pi/2]$ a dostáváme tedy parametrizaci

$$\begin{aligned}
x &= 2\cos\frac{5}{4}\pi\sin t = -\sqrt{2}\sin t,\\
y &= 2\sin\frac{5}{4}\pi\sin t = -\sqrt{2}\sin t,\\
z &= 2\cos t.
\end{aligned}$$

Počítáme ze základního vzorce

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\cos^2 t + 4\sin^2 t}\sqrt{2\cos^2 t + 2\cos^2 t + 4\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4}\sqrt{4}\,\mathrm{d}t = 4\frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

Křivku můžeme zobrazit jako



Př. 394 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C x^{4/3} + y^{4/3}\,\mathrm{d}s, \qquad pro \qquad C: x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

Parametrizaci asteroidy získáme jako $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, pro $t \in [0, 2\pi]$. Dostáváme tak integrál

$$\begin{aligned}
&a^{4/3}\int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t)\,\sqrt{9a^2(\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t)}\,\mathrm{d}t = \\
&= 3a^{7/3}\int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t)|\cos t\sin t|\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \\
&= 12a^{7/3}\int_0^{\pi/2} (\cos^4 t + \sin^4 t)\cos t\sin t\,\mathrm{d}t = \\
&= \left| \begin{array}{c} z = \sin t \\ \mathrm{d}z = \cos t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = 12a^{7/3}\int_0^1 z((1-z^2)^2 + z^4)\,\mathrm{d}z = \\
&= 12a^{7/3}\int_0^1 z - 2z^3 + 2z^5\,\mathrm{d}z = 12a^{7/3}\left[\frac{z^2}{2} - 2\frac{z^4}{4} + 2\frac{z^6}{6}\right]_0^1 = \\
&= 12a^{7/3}\frac{1}{3} = 4a^{7/3}.
\end{aligned}$$

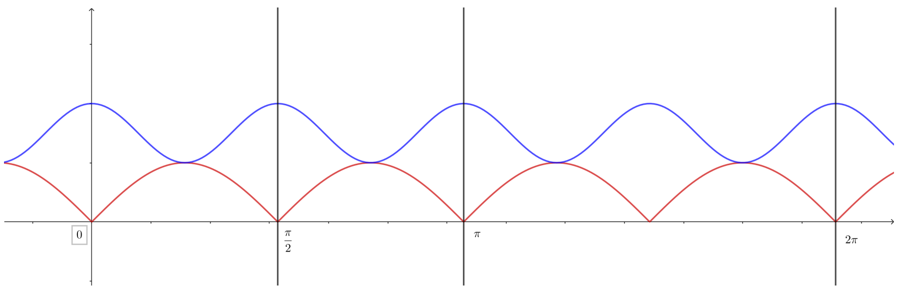
Integrál stačí integrovat jen přes čtvrtinu rozsahu, protože

$$\begin{aligned}
\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x, \\
\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin x,
\end{aligned}$$

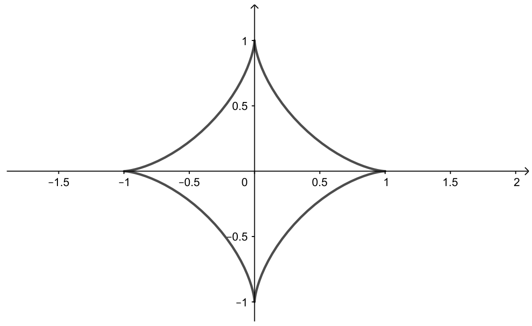
čehož můžeme využít k vyjádření

$$\begin{aligned}
\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| &= |\sin x\cos x|, \\
\sin^4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin^4 x + \cos^4 x.
\end{aligned}$$

Následně už bychom použili jen vhodný lineární posun, který by po substituci nic neovlivnil a získáme tak $4\times$ stejný integrál. Také to můžeme vidět na obrázku, pokud si obě funkce vykreslíme



Asteroida pro $A = 1$ vypadá jako


-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
1
0.5
-0.5
-1

Př. 395 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C z\,\mathrm{d}s, \quad \textit{pro} \quad C : x^2 + y^2 = z^2, y^2 = Ax, \ \textit{od bodu } [0,0,0] \textit{ do bodu } [A, A, A\sqrt{2}]$$

která vede ob dobu $[0,0,0]$ *do bodu* $[A, A, A\sqrt{2}]$, $A > 0$.

Nejdříve musíme nalézt vhodnou parametrizaci, volíme $x = t$ a $y = \pm\sqrt{At}$, neboť je v koncovém bodě $y = A > 0$ máme nutně $y = \sqrt{At}$. Ze stejného důvodu platí také $z = \sqrt{t^2 + At}$ a vidíme, že $t \in [0, A]$. Nejdříve počítáme

$$\begin{aligned} x' &= 1, \\ y' &= \frac{A}{2\sqrt{At}}, \\ z' &= \frac{2t + A}{2\sqrt{t^2 + At}}. \end{aligned}$$

Tyto vztahy dosadíme do výrazu

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 1 + \frac{A}{4t} + \frac{(2t+A)^2}{4t(t+A)} = \frac{4t^2 + 4At + A^2 + At + 4t^2 + 4At + A^2}{4t(t+A)} = \\ = \frac{2A^2 + 9At + 8t^2}{4t(t+A)}.$$

Dostáváme tedy integrál

$$\frac{1}{2}\int_0^A \sqrt{t(t+A)}\sqrt{\frac{2A^2 + 9At + 8t^2}{t(t+A)}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^A \sqrt{2A^2 + 9At + 8t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Pod odmocninou se nachází kvadratický polynom, jeho kořeny jsou $t_{1,2} = \frac{-9A \pm \sqrt{81A^2 - 64A^2}}{16} = A\frac{-9\pm\sqrt{17}}{16}$. Nadále bychom aplikovali vhodnou Eulerovu substituci. Řekněme, že je $t_1 > t_2$ a máme

$$\int_0^A \sqrt{2A^2 + 9At + 8t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^A \sqrt{2(t-t_1)(t-t_2)}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_0^A |t - t_1|\sqrt{\frac{t-t_2}{t-t_1}}\,\mathrm{d}t$$

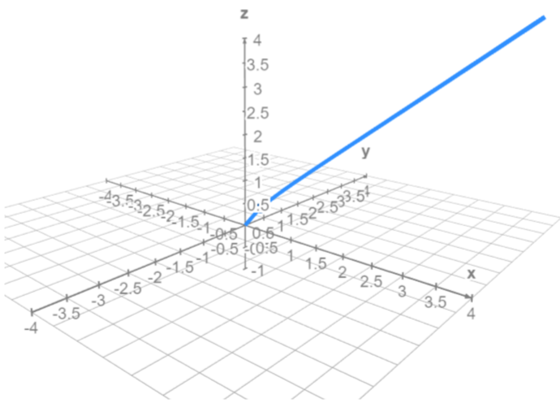
$$= \left| \begin{array}{c} z^2 = \frac{t-t_2}{t-t_1}, \\ \frac{z^2 t_1 - t_2}{z^2-1} = t, \\ \frac{t_1 - t_2}{z^2-1} = t - t_1, \\ \frac{-2z}{(z^2-1)^2}\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \sqrt{2}\int_{\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}}^{\sqrt{\frac{A+t_2}{A+t_1}}} \left|\frac{t_1 - t_2}{z^2 - 1}\right| \sqrt{z^2}\frac{-2z}{(z^2-1)^2}\,\mathrm{d}z = \sqrt{2}(t_1 - t_2)\int_{\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}}^{\sqrt{\frac{A+t_2}{A+t_1}}} \frac{-2z^2}{(z^2-1)^3}\,\mathrm{d}z =$$

$$= \sqrt{2}(t_1 - t_2)\int_{\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}}^{\sqrt{\frac{A+t_2}{A+t_1}}} \frac{A}{z+1} + \frac{B}{(z+1)^2} + \frac{C}{(z+1)^3} + \frac{D}{z-1} + \frac{E}{(z-1)^2} + \frac{F}{(z-1)^3}\,\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{\sqrt{2}(t_1 - t_2)}{8}\int_{\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}}^{\sqrt{\frac{A+t_2}{A+t_1}}} \frac{-1}{z+1} - \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{2}{(z+1)^3} + \frac{1}{z-1} - \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{2}{(z-1)^3}\,\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{\sqrt{2}(t_1 - t_2)}{8}\left[\ln\left(|z-1|\right) - \ln\left(|z+1|\right) + \frac{1}{(z+1)} - \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{(z-1)^2}\right]_{\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}}^{\sqrt{\frac{A+t_2}{A+t_1}}}$$

Vyšetřovaná křivka vypadá pro $A = 1$ jako


z
y
x

9.4 Aplikace křivkového integrálu 1. druhu

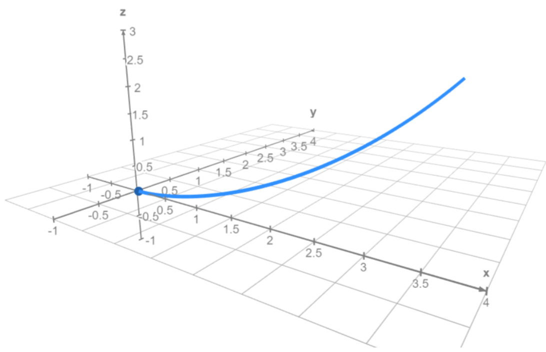
Př. 396 *Vypočtěte délku křivky* $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$ *od bodu* $[0, 0, 0]$ *do bodu* $[3, 3, 2]$.

Vidíme, že parametrizujeme křivku pro $t \in [0, 1]$, neboť počáteční bod získáme z rovnice $3t = 0$ a koncový bod z rovnice $3t = 3$. Délku křivky získáme jako křivkový integrál 1.druhu, kde integrujeme funkci $f = 1$. Počítáme tedy integrál

$$l = \int_C 1\,\mathrm{d}s = \int_0^1 \sqrt{9 + 36t^2 + 36t^4}\,\mathrm{d}t = 3\int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4}\,\mathrm{d}t = 3\int_0^1 \sqrt{(1 + 2t^2)^2}\,\mathrm{d}t = 3\int_0^1 1 + 2t^2\,\mathrm{d}t =$$

$$= 3\left[t + \frac{2t^3}{3}\right]_0^1 = 3\left(1 + \frac{2}{3}\right) = 5.$$

Zkoumaná křivka vypadá jako



Př. 397 *Vypočtěte délku křivky* $x = \mathrm{e}^{-t}\cos t,\ y = \mathrm{e}^{-t}\sin t,\ z = \mathrm{e}^{-t}$ *pro* $t \in [0, \infty)$.

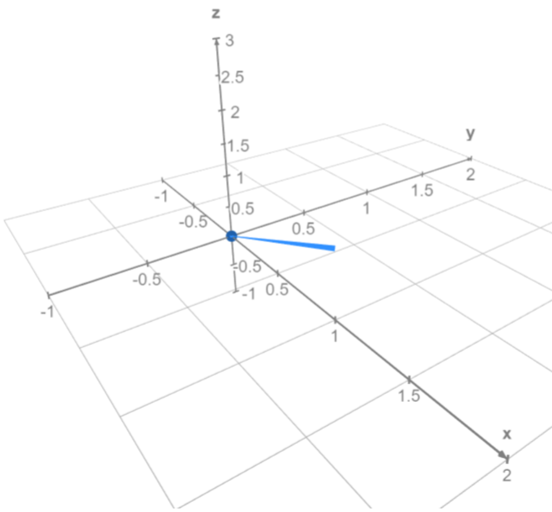
Počítáme

$$\begin{aligned} x' &= -\mathrm{e}^{-t}\cos t - \mathrm{e}^{-t}\sin t, \\ y' &= -\mathrm{e}^{-t}\sin t + \mathrm{e}^{-t}\cos t, \\ z' &= -\mathrm{e}^{-t}. \end{aligned}$$

Délku křivky získáme jako křivkový integrál 1.druhu, kde integrujeme funkci $f = 1$. Délka je tedy

$$\begin{aligned} l &= \int_C 1\,\mathrm{d}s = \int_0^\infty \sqrt{\mathrm{e}^{-2t}(\cos t + \sin t)^2 + \mathrm{e}^{-2t}(\cos t - \sin t)^2 + \mathrm{e}^{-2t}}\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\sqrt{\cos^2 t + 2\cos t \sin t + \sin^2 t + \cos^2 t - 2\cos t \sin t + \sin^2 t + 1}\,\mathrm{d}t = \\ &= \sqrt{3}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}\left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^\infty = \sqrt{3}\left(1 - \lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-t}\right) = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Vyšetřovaná křivka začíná v bodě $[1, 0, 1]$ a následně konverguje k počátku. Vypadá jako

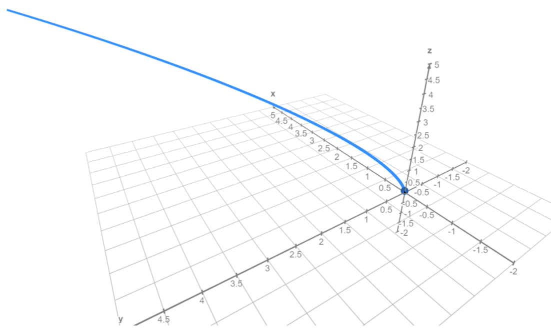


Př. 398 *Vypočtěte délku křivky danou průnikem ploch* $(x-y)^2 = (x+y)$, $x^2 - y^2 = \frac{9}{8}z$ *od bodu* $[0,0,0]$, *k bodu* $[x_0, y_0, z_0]$.

Nejdříve musíme zvolit vhodnou parametrizaci křivky, zavedeme vhodně transformaci $u = x - y$, $v = x + y$, která nám umožní výhodně popsat první plochu. Tímto dostaneme křivku danou vztahem $u^2 = v$, ale i druhou plochu můžeme vhodně přepsat jako $uv = \frac{9}{8}z^2$. Odsud se hned nabízí vhodná parametrizace $u = t$, $v = t^2$, $z = \frac{2\sqrt{2}t^{3/2}}{3}$. Dále vyjádříme $x = \frac{t+t^2}{2}$ a $y = \frac{t^2-t}{2}$ ze vztahů pro u a v čímž získáme parametrizace pro x, y i z. Nakonec potřebujeme určit interval pro t, dostaneme jej rovnou ze vztahu $t = u = x - y$ a tedy $t \in [0, x_0 - y_0]$. Zde předpokládáme, že je $x_0 - y_0 > 0$. Výpočet by se příliš nelišil pokud by bylo $x_0 - y_0 < 0$. Stačilo by obrátit meze, čímž by se integrál vynásobil -1 a ještě bychom ve výpočtu museli uvážit, kdy je $1 + 2t \geq 0$ a kdy $1 + 2t < 0$ vzhledem k odmocňování ve výpočtu. Počítáme

$$
\begin{aligned}
&\int_C 1\,\mathrm{d}s = \int_0^{x_0-y_0} \sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2t}\right)^2}\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_0^{x_0-y_0} \sqrt{2t^2 + 2t + \frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{x_0-y_0} \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}t\right)^2}\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{x_0-y_0} |1+2t|\,\mathrm{d}t = |t \geq 0 \Rightarrow 1 + 2t \geq 0| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[t + t^2\right]_0^{x_0-y_0} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x_0 - y_0 + (x_0 - y_0)^2\right).
\end{aligned}
$$

Křivka vypadá jako

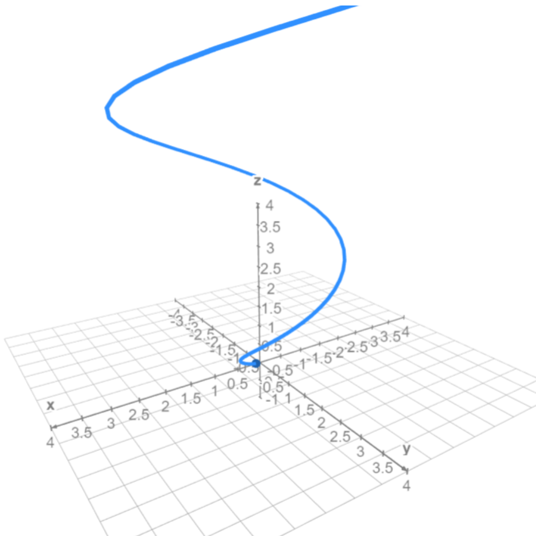


Př. 399 *Vypočtěte délku křivky* $x^2 + y^2 = Az$, $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{z}{A}$ *od bodu* $[0, 0, 0]$, *k bodu* $[x_0, y_0, z_0]$.

Nejdříve musíme nalézt parametrizaci křivky. Vzhledem k tvaru rovnice $x^2 + y^2 = Az$ vidíme, že válcové souřadnice nás mohou přivést na správnou cestu. Z první rovnice máme $\rho^2 = Az$ a z druhé máme $\frac{z}{A} = \operatorname{arctg} \frac{\rho \sin \varphi}{\rho \cos \varphi}$, z čehož plyne $z = A\varphi$. Pokud tedy volíme $\rho = t$, máme z rovností $z = \frac{\rho^2}{A}$ a $\varphi = \frac{z}{A}$ také vztah pro φ. Dostaneme parametrizaci $x = t \cos \frac{t^2}{A^2}$, $y = t \sin \frac{t^2}{A^2}$, $z = \frac{t^2}{A}$, pro $t \in \left[0, \sqrt{Az_0}\right]$. Zde předpokládáme, že je $z_0 > 0$. Navíc si všimněme, že je vzhledem k definičnímu oboru funkce $\operatorname{tg} x$ křivka daná jen pokud je $\frac{z}{A} < \frac{\pi}{2}$ a tedy $z_0 < \frac{\pi}{2} A$. Víme, že křivka prochází bodem $[0, 0, 0]$ a tedy musí být daná na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Pokud by bylo $z_0 < 0$ pak musí být také $A < 0$ aby měla rovnice $x^2 + y^2 = Az$ řešení.

$$\int_C 1 \,\mathrm{d}s = \int_0^{\sqrt{Az_0}} \sqrt{\left(\cos \frac{t^2}{A^2} - 2\frac{t^2}{A^2} \sin \frac{t^2}{A^2}\right)^2 + \left(\sin \frac{t^2}{A^2} + 2\frac{t^2}{A^2} \cos \frac{t^2}{A^2}\right)^2 + \frac{4t^2}{A^2}} \,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^{\sqrt{Az_0}} \sqrt{\cos^2 \frac{t^2}{A^2} + 4\frac{t^4}{A^4} \sin^2 \frac{t^2}{A^2} + \sin^2 \frac{t^2}{A^2} + 4\frac{t^4}{A^4} \cos^2 \frac{t^2}{A^2} + \frac{4t^2}{A^2}} \,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^{\sqrt{Az_0}} \sqrt{1 + \frac{4t^2}{A^2} + \frac{4t^4}{A^4}} \,\mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt{Az_0}} \sqrt{\left(1 + \frac{2t^2}{A^2}\right)^2} \,\mathrm{d}t = \left[t + \frac{2t^3}{3A^2}\right]_0^{\sqrt{Az_0}} =$$
$$= \sqrt{Az_0} + \frac{2\sqrt{z_0^3}}{3\sqrt{A}}.$$

Vyšetřovaná křivka pro $A = 1$ vypadá jako



Př. 400 *Vypočtěte délku čtyřúhelníku spojujícího body* $[0,0]$, $[1,0]$, $[0,1]$, $[2,2]$.

Vidíme, že tento čtyřúhelník můžeme parametrizovat přes 4 úsečky. Dostaneme

$$\begin{array}{cc} C_1 : x = 0, & C_3 : x = 1 + t, \\ y = t, & y = 2t, \\ C_2 : x = 2t, & C_4 : x = t, \\ y = 1 + t, & y = 0, \end{array}$$

vždy pro $t \in [0,1]$. Délku pak můžeme spočíst jedním integrálem

$$l = \int_0^1 1 \cdot \sqrt{1} + 1 \cdot \sqrt{4+1} + 1 \cdot \sqrt{1+4} + 1 \cdot \sqrt{1} \, \mathrm{d}t = 2(1+\sqrt{5}) \int_0^1 \mathrm{d}t = 2(1+\sqrt{5}).$$

Př. 401 *Vypočtěte délku paraboly*
$$y = \frac{x^2}{2},$$
pro $x \in [-1, 1]$.

Parametrizujeme křivku jednoduše jako $x = t$ a $y = \frac{t^2}{2}$. Počítáme

$$\begin{aligned}
l &= \int_{-1}^{1} 1\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} s \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 s}\,\mathrm{d}s \end{array} \right| = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 s}\sqrt{1 + \frac{\sin^2 s}{\cos^2 s}}\,\mathrm{d}s = \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 s}\sqrt{\frac{\cos^2 s + \sin^2 s}{\cos^2 s}}\,\mathrm{d}s = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 s}\,\mathrm{d}s = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos s}{(1-\sin^2 s)^2}\,\mathrm{d}s = \\
&= \left[\frac{\sin s}{2\cos^2 s}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos s}\,\mathrm{d}s = \left| \begin{array}{c} u = \frac{\sin s + 1}{\cos s} \\ \mathrm{d}u = \frac{\cos^2 s + \sin^2 s + \sin s}{\cos^2 s} = \frac{u}{\cos s}\,\mathrm{d}s \end{array} \right| = \\
&= \left[\frac{\sin s}{2\cos^2 s}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\int_{-1+\frac{2}{\sqrt{2}}}^{1+\frac{2}{\sqrt{2}}} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{\sin s}{2\cos^2 s}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + [\ln|u|]_{-1+\frac{2}{\sqrt{2}}}^{1+\frac{2}{\sqrt{2}}} = \\
&= \left[\frac{\sin s}{2\cos^2 s}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + \left[\ln\left|\frac{\sin s + 1}{\cos s}\right|\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \left[\frac{\sin s}{2\cos^2 s} + \ln\left|\frac{\sin s + 1}{\cos s}\right|\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \\
&= 2\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{2}}\right)\right].
\end{aligned}$$

Nyní bychom museli použít kalkulačku. Také je potřeba zamyslet, jak řešit daný integrál. Pro výpočet integrálu
$$\int \frac{\cos s}{(1-\sin^2 s)^2}\,\mathrm{d}s.$$
Můžeme použít nabízející se substituci a rozkládat na parciální zlomky. My jsme se v tomto případě rozhodli použít redukční formuli

$$\int \frac{1}{\cos^n x}\,\mathrm{d}x = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^{n-2} x},$$

kterou lze použít pro $n > 1$. Také můžeme funkci sekans uvažovat jako základní funkci a tedy používat vzorec
$$\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \sec x\,\mathrm{d}x = \ln|\operatorname{tg} x + \sec x| + C$$
a vynechat několik kroků výpočtu.

Př. 402 *Vypočtěte délku sinusoidy*

$$y = \sin x,$$

pro $x \in [0, \pi]$.

Opět parametrizujeme funkci $x = t$ a $y = \sin t$, a tak dosadíme do vzorce

$$l = \int_0^\pi 1\sqrt{1 + \cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \sqrt{2 - \sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

Opět se jedná o eliptický integrál a hledáme hodnotu

$$2\sqrt{2}E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Nyní můžeme využít tabulované hodnoty, kde nalezneme, že

$$E\left(\frac{1}{1,42}\right) \approx 1,352688327.$$

Délku můžeme tedy aproximovat jako

$$\int_0^\pi 1\sqrt{1 + \cos^2 t}\,\mathrm{d}t \approx 3,82598.$$

Př. 403 *Vypočtěte délku přirozeného logaritmu*

$$y = \ln x,$$

pro $x \in [1, 3]$.

Vidíme, že můžeme křivku parametrizovat jako $x = t$ a $y = \ln t$. Stejně tak můžeme však křivku parametrizovat jako $y = t$ a $x = \mathrm{e}^t$. Rozhodneme se pro jednu z těchto parametrizací a dostaneme

$$\int_1^3 1\sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_1^3 \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} s = \sqrt{t^2+1} \\ \mathrm{d}s = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{s}\,\mathrm{d}t \\ t^2 = s^2 - 1 \end{array} \right| =$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}} \frac{s^2}{t^2}\,\mathrm{d}s = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}} \frac{s^2 - 1 + 1}{s^2 - 1}\,\mathrm{d}s = [s]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{s-1} + \frac{-1}{s+1}\,\mathrm{d}s =$$

$$= \sqrt{10} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\left[\ln|s-1| - \ln|s+1|\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}} = \sqrt{10} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1} - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}.$$

Př. 404 *Vypočtěte hmotnost křivky, která vznikne průnikem válce $x^2+y^2=4$ a parabolického válce $z=\frac{x^2}{2}$ s hustotou danou jako $\rho(x,y,z)=x^2-y^2$.*

Křivku můžeme parametrizovat různými způsoby. První parametrizaci dostaneme nadvakrát přes $x=t$, $y=\pm\sqrt{4-t^2}$ a $z=\frac{t^2}{2}$, pro $t\in[-2,2]$. Druhou parametrizaci dostaneme skrze polární souřadnice jako $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=2\cos^2 t$, pro $t\in[0,2\pi]$. Zvolíme jednu z těchto parametrizací a dosadíme do vzorce. Hmotnost dostaneme jako integrál z hustoty, tj.

$$
\begin{aligned}
m &= \int_0^{2\pi} \left(4\cos^2 t - 4\sin^2 t\right)\sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + 16\cos^2 t\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \\
&= 8\int_0^{2\pi} \cos(2t)\sqrt{1+4\cos^2 t\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = 8\int_0^{2\pi}\cos(2t)\sqrt{1+\sin^2 2t}\,\mathrm{d}t = \left|\begin{array}{c} s=\sin 2t \\ \mathrm{d}s = 2\cos 2t\,\mathrm{d}t \end{array}\right| = \\
&= 4\int_0^{2\pi}\sqrt{1+s^2}\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Tento integrál dostaneme jako 4 násobek délky oblouku paraboly $y=\frac{x^2}{2}$ na intervalu $[0,2\pi]$, jak můžeme zjistit také z příkladu 401. Počítáme tedy

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\sqrt{1+s^2}\,\mathrm{d}s = \left|\begin{array}{c} s=\sinh u \\ \mathrm{d}s=\cosh u\,\mathrm{d}u \end{array}\right| = \int_0^{\operatorname{arcsinh}(2\pi)} \cosh u\sqrt{1+\sinh^2 u}\,\mathrm{d}u = \\
&= \int_0^{\operatorname{arcsinh}(2\pi)} \cosh u\sqrt{\cosh^2 u}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\operatorname{arcsinh}(2\pi)} \cosh^2 u\,\mathrm{d}u = \int_0^{\operatorname{arcsinh}(2\pi)} \left(\frac{\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u}}{2}\right)^2 \mathrm{d}u = \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\operatorname{arcsinh}(2\pi)} \mathrm{e}^{2u}+2+\mathrm{e}^{-2u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\left[\frac{\mathrm{e}^{2u}}{2}+2u-\frac{\mathrm{e}^{-2u}}{2}\right]_0^{\operatorname{arcsinh}(2\pi)} = \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{e}^{2\operatorname{arcsinh}(2\pi)}}{2}+2\operatorname{arcsinh}(2\pi)-\frac{\mathrm{e}^{-2\operatorname{arcsinh}(2\pi)}}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = \\
&= \frac{\mathrm{e}^{2\operatorname{arcsinh}(2\pi)}}{8}+\frac{\operatorname{arcsinh}(2\pi)}{2}-\frac{\mathrm{e}^{-2\operatorname{arcsinh}(2\pi)}}{8}.
\end{aligned}
$$

Hodnotu $\operatorname{arcsinh} x$ nyní musíme zjistit. Jedná se o inverzi k hyperbolickému sinu, máme tedy $\operatorname{arcsinh}(2\pi)\approx 2.537298$. Snadno tak dopočítáme hledanou hodnotu.

Př. 405 *Spočtěte hmotnost křivky, která vznikne průnikem válce $x^2+y^2=4$ a roviny $x+z=2$, $x \geq 0$, za předpokladu že máme její hustotu $\rho(x,y,z)=y$.*

Křivku můžeme parametrizovat různými způsoby. První parametrizaci dostaneme nadvakrát přes $x=t$, $y=\pm\sqrt{4-t^2}$ a $z=2-t$, pro $t\in[-2,2]$. Druhou parametrizaci dostaneme skrze polární souřadnice jako $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=2-2\cos t$, pro $t\in[0,\pi]$. Zvolíme jednu z těchto parametrizací a dosadíme do vzorce. Hmotnost dostaneme jako integrál z hustoty, tj.

$$m=\int_0^\pi 2\sin t\sqrt{4\sin^2 t+4\cos^2 t+4\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=4\int_0^\pi \sin t\sqrt{1+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=$$
$$=\left|\sin x \text{ osově symetrická přes osu } x=\frac{\pi}{2}\right|=8\int_0^{\pi/2}\sin t\sqrt{1+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=$$
$$=8\int_0^{\pi/2}\sin t\sqrt{2-\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=-8\int_1^0\sqrt{2-s^2}\,\mathrm{d}t=8\int_0^1\sqrt{2-s^2}\,\mathrm{d}t=\left|\begin{array}{c} s=\sqrt{2}\sin u\\ \mathrm{d}s=\sqrt{2}\cos u\,\mathrm{d}u\end{array}\right|=$$
$$=8\sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\cos u\sqrt{2-2\sin^2 u}\,\mathrm{d}t=16\int_0^{\pi/4}\cos^2 u\,\mathrm{d}t=16\int_0^{\pi/4}\frac{1+\cos 2u}{2}\,\mathrm{d}t=$$
$$=8\left[u+\frac{\sin 2u}{2}\right]_0^{\pi/4}=8\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=2\pi+4.$$

Př. 406 *Nalezněte hmotnost křivky, která je dána jako* $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, *pro* $t \in [0, 2\pi]$ *a její hustota je* $\rho(x, y, z) = 1 + x + z$.

Můžeme rovnou dosadit do vzorce a máme

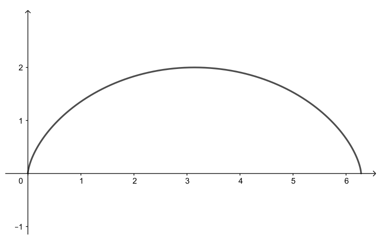
$$m = \int_0^{2\pi} (1 + \cos t + t) \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1}\, \mathrm{d}t = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} 1 + \cos t + t \, \mathrm{d}t =$$
$$= \sqrt{2} \left[t + \sin t + \frac{t^2}{2} \right]_0^{2\pi} = \sqrt{2} \left(2\pi + \frac{4\pi^2}{2} \right) = 2\sqrt{2} \left(\pi + \pi^2 \right).$$

Př. 407 *Určete délku cykloidy, která je dána parametricky jako* $x = At - A\sin t$, $y = A - A\cos t$, *pro* $t \in [0, 2\pi]$.

Abychom určili délku křivky, musíme spočítat $\int_C 1\,\mathrm{d}s$, přes danou křivku C. Dostaneme integrál

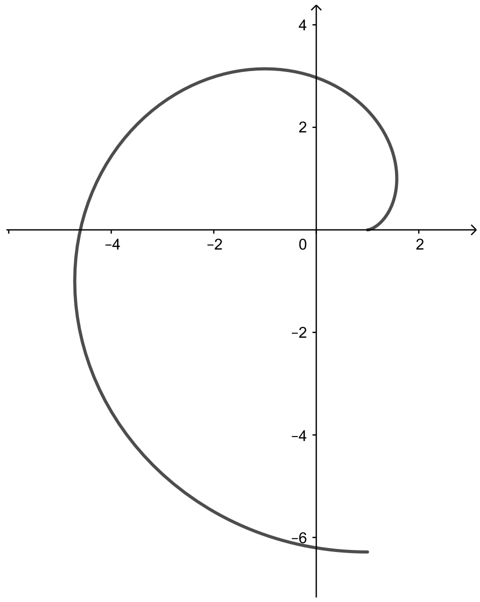
$$
\begin{aligned}
l &= \int_0^{2\pi} 1\sqrt{(A - A\cos t)^2 + A^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{A^2 - 2A^2\cos t + A^2\cos t + A^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{2A^2 - 2A^2\cos t}\,\mathrm{d}t = \\
&\left|\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1-\cos t}{2}\right| = \sqrt{2}A\int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t = \\
&= |\sin t \text{ je na } [0,\pi] \text{ kladný}| = 2A\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t = \\
&= 2A\left[-2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = 4A(-\cos\pi + \cos 0) = 8A.
\end{aligned}
$$

Pro $A = 1$ cykloida vypadá jako



Př. 408 *Určete délku evolventy, kružnice dané parametricky jako* $x = r(\cos t + t\sin t)$*,* $y = r(\sin t - t\cos t)$*, pro* $t \in [0, 2\pi]$*,* $r > 0$*.*

Pro jisté r vypadá křivka jako:



Křivka je daná parametrizací, proto můžeme rovnou počítat derivace parametrizace

$$x = r(-\sin t + \sin t + t\cos t) = rt\cos t,$$
$$y = r(\cos t - \cos t + t\sin t) = rt\sin t.$$

V odmocnině tak máme

$$\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{r^2t^2\cos^2 t + r^2t^2\sin^2 t} = rt$$

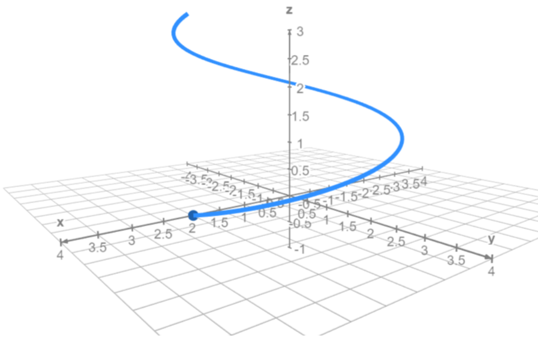
$$l = \int_0^{2\pi} 1 \cdot rt \,\mathrm{d}t = r\int_0^{2\pi} t \,\mathrm{d}t = r\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 2r\pi^2.$$

Př. 409 *Určete délku jednoho závitu šroubovice, která je dána rovnicemi* $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{3}{2\pi}t$, *pro* $t \in [0, 2\pi]$.

Počítáme

$$l = \int_0^{2\pi} 1\sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{9}{4\pi^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\sqrt{4 + \frac{9}{4\pi^2}}\,\mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{4 + \frac{9}{4\pi^2}} =$$
$$= \sqrt{16\pi^2 + 9}.$$

Závit šroubovice vypadá jako

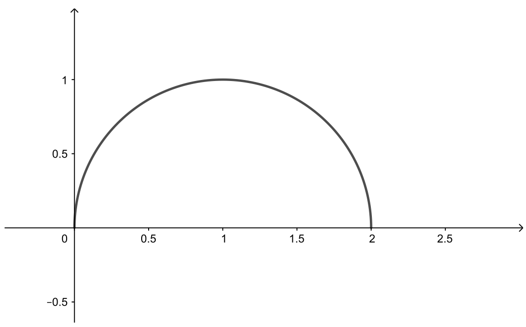


Př. 410 *Určete hmotnost části kružnice $x^2 + y^2 = 2x$, $y \geq 0$, je-li její délková hustota přímo úměrná vzdálenosti bodu od počátku.*

Úpravou na čtverec zjistíme, že křivka popisuje horní část kružnice s poloměrem 1 a středem $[1, 0]$. Tato křivka je tedy dána parametrizací $x = \cos t + 1$, $y = \sin t$, pro $t \in [0, \pi]$. Vzdálenost bodu $[x, y]$ od počátku je dána funkcí $\sqrt{x^2 + y^2}$, což udává hustotu bodu $[x, y]$. Hustota je tedy $\rho(x, y) = K\sqrt{x^2 + y^2}$, kde K je koeficient přímé úměrnosti. Abychom zjistili hmotnost křivky, počítáme

$$\begin{aligned}
m_1 &= \int_C K\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}s = K\int_0^\pi \sqrt{(\cos t + 1)^2 + \sin^2 t}\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \\
&= K\int_0^\pi \sqrt{2 + 2\cos t}\,\mathrm{d}t = \left|\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1 + \cos t}{2}\right| = K\sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t = \\
&= |\cos t \text{ je na } [0, \pi/2] \text{ kladný}| = 2K\int_0^\pi \cos\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t = 2K\left[2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^\pi = 4K.
\end{aligned}$$

Křivka vypadá jako



Zde uvažujeme klasickou vzdálenost/metriku danou pythagorovou větou. Co kdybychom však uvažovali vzdálenost v jiné metrice. Uvažme nejprve taxikářskou metriku $\rho_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. Dostaneme tak vzdálenost bodu $[x, y]$ od počátku jako $|x| + |y|$ a hustota je $\rho(x, y) = K|x| + K|y|$. Odvodíme takto novou hmotnost

$$\begin{aligned}
m_2 &= \int_C K|x| + K|y|\,\mathrm{d}s = K\int_0^\pi (|\cos t + 1| + |\sin t|)\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \\
&= K\int_0^\pi \cos t + 1 + \sin t\,\mathrm{d}t = K\left[t + \sin t - \cos t\right]_0^\pi = K(\pi + 2).
\end{aligned}$$

Taxikářská metrika je pořád celkem obvyklá. Další metriku máme $\rho_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$ což by nám dalo vzdálenost bodu $[x, y]$ od počátku jako $\max\{|x|, |y|\}$. Hustotu plynoucí z takovéto metriky je $\rho(x, y) = K\max\{|x|, |y|\}$. Hmotnost je

$$m_3 = \int_C K\max\{|x|, |y|\}\,\mathrm{d}s = K\int_0^\pi \max\{|1 + \cos t|, |\sin t|\}\,\mathrm{d}t.$$

Nyní musíme rozhodnout, vzhledem ke které funkci se realizuje maximum. Víme, že na intervalu $[0, \pi/2]$ je $1 + \cos t \geq \sin t$. Jak je to však na intervalu $(\pi/2, \pi]$? Předpokládejme, že na tomto intervalu platí nerovnost $\sin t > 1 + \cos t$ a upravujme

$$\begin{aligned}
\sin t &> 1 + \cos t \\
\sin t - \cos t &> 1 \\
(\sin t - \cos t)^2 &> 1 \\
1 - 2 \sin t \cos t &> 1 \\
-2 \sin t \cos t &> 0.
\end{aligned}$$

Poslední nerovnost je skutečně splněna a vzhledem k tomu, že je $\sin t - \cos t > 0$ jsou úpravy také ekvivalentní a původní nerovnost byla správně. Máme tedy

$$m_3 = K \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos t \,\mathrm{d}t + K \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin t \,\mathrm{d}t = K \left[t + \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + K \left[-\cos t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2K + K = 3K.$$

Př. 411 *Vypočtěte hmotnost křivky $x = A\cos t$, $y = B\sin t$, pro $t \in [0, 2\pi]$, $A > B > 0$, jejíž hustota je dána funkcí $h(x, y) = |y|$.*

Počítáme hmotnost elipsy, kterou získáme skrze křivkový integrál prvního druhu. Elipsu máme danou parametricky, stačí počítat integrál

$$
\begin{aligned}
m &= \int_C h(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} |B\sin t|\sqrt{A^2\sin^2 t + B^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \\
&= 2\int_0^{\pi} B\sin t\sqrt{A^2 + (B^2 - A^2)\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \left|\begin{array}{c} \frac{A}{\sqrt{A^2-B^2}}\sin z = \cos t \\ \frac{A}{\sqrt{A^2-B^2}}\cos z\,\mathrm{d}z = -\sin t\,\mathrm{d}t \end{array}\right| = \\
&= -2B\int_{\arcsin C}^{-\arcsin C} \frac{A}{\sqrt{A^2-B^2}}\cos z\sqrt{A^2 - \frac{A^2(B^2-A^2))}{A^2-B^2}\sin^2 z}\,\mathrm{d}z = \\
&= \frac{2BA^2}{\sqrt{A^2-B^2}}\int_{-\arcsin C}^{\arcsin C} \cos z\sqrt{\cos^2 z}\,\mathrm{d}z = \frac{2BA^2}{\sqrt{A^2-B^2}}\left[\frac{z}{2} + \frac{\sin 2z}{4}\right]_{-\arcsin C}^{\arcsin C} = \\
&= \frac{2BA^2}{\sqrt{A^2-B^2}}\left(\arcsin C + \frac{\sin 2\arcsin C}{2}\right) = \frac{2BA^2}{\sqrt{A^2-B^2}}\left(\arcsin C + C\frac{\sqrt{1-C^2}}{4}\right).
\end{aligned}
$$

Kde máme $C = \frac{\sqrt{A^2-B^2}}{A}$ a využíváme rovnosti $\sin(2\arcsin C) = \frac{C\sqrt{1-C^2}}{2}$ stejně jako lichosti funkcí $\sin x$, $\arcsin x$.

Př. 412 *Vypočtěte hmotnost křivky $x = At$, $y = \frac{A}{2}t^2$, $z = \frac{A}{3}t^3$ pro $t \in [0,1]$, $A > 0$, jejíž hustota je dána funkcí $h(x,y) = \sqrt{\frac{2y}{A}}$.*

Počítáme integrál

$$
\begin{aligned}
m &= \int_C h(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 \sqrt{\frac{2A}{2A}t^2}\sqrt{A^2 + A^2t^2 + A^2t^4}\,\mathrm{d}t = A\int_0^1 t\sqrt{1+t^2+t^4}\,\mathrm{d}t = \\
&= \left| \begin{array}{c} z = t^2 \\ \mathrm{d}z = 2t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{A}{2}\int_0^1 \sqrt{1+z+z^2}\,\mathrm{d}z = \\
&= \frac{A}{2}\left[\frac{3\ln|2\sqrt{z^2+z+1}+2z+1| + (4z+2)\sqrt{z^2+z+1}}{8}\right]_0^1 = \\
&= \frac{A}{16}\left(3\ln(2\sqrt{3}+3) + 6\sqrt{3} - 3\ln 3 - 2\right).
\end{aligned}
$$

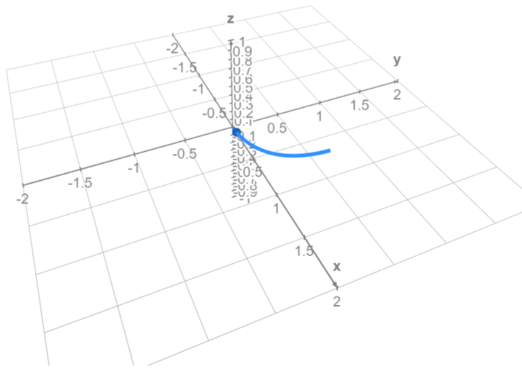
Integrál pod odmocninou lze získat více způsoby. Jeho vyřešení však není triviální.

$$
\begin{aligned}
&\int \sqrt{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x = \left|t = x + \frac{1}{2}\right| = \int \sqrt{t^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t = \\
&= \left| \begin{array}{c} t = \frac{\sqrt{3}}{2}\sinh u \\ \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{2}\cosh u\,\mathrm{d}u \end{array} \right| = \int \frac{\sqrt{3}}{2}\cosh u\sqrt{\frac{3}{4}\sinh^2 u + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u = \frac{3}{2}\int \cosh u\sqrt{\cosh^2 u}\,\mathrm{d}u = \\
&= \frac{3}{2}\int \cosh^2 u\,\mathrm{d}u = \frac{3}{2}\int \frac{1+\cosh 2u}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{3}{2}\left[\frac{u}{2} + \frac{\sinh 2u}{4}\right] + C = \\
&= \frac{3\operatorname{arcsinh}\frac{2t}{\sqrt{3}}}{4} + \frac{3\sinh u\cosh u}{4} + C = \frac{3\ln\left(\frac{2t}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{4t^2}{3}+1}\right)}{4} + \frac{3\frac{2t}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{4t^2}{3}+1}}{4} + C.
\end{aligned}
$$

Kde využíváme navíc vztahy

$$
\begin{aligned}
\cosh 2x &= \sinh^2 x + \cosh^2 x = 2\cosh^2 x - 1, \\
\cosh^2 x &= \frac{1+\cosh 2x}{2}, \\
\sinh 2x &= 2\sinh x\cosh x, \\
\cosh\operatorname{arcsinh} x &= \sqrt{x^2+1}, \\
\operatorname{arcsinh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}).
\end{aligned}
$$

Vyšetřovaná křivka vypadá pro $A = 1$ jako


x
y
z

Př. 413 *Spočtěte hmotnost funkce $f(x) = \cosh x$, je-li její hustota*

- $\rho_1(x, y) = 1$.
- $\rho_2(x, y) = \frac{1}{y^3}$.

Křivku parametrizujeme jednoduše jako $x = t$ a $y = \cosh t$, pro $t \in (-\infty, \infty)$. Poté platí $x' = 1$ a $y' = \sinh t$. Máme tedy integrál

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \sqrt{1 + \sinh^2 t} \,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\cosh^2 t} \,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \cosh t \,\mathrm{d}t = \\
&= [\sinh t]_{-\infty}^{\infty} = \lim_{t\to\infty} \sinh t - \lim_{t\to-\infty} \sinh t = \infty.
\end{aligned}$$

Podle očekávání vidíme, že nekonečná křivka s rovnoměrnou hustotou má také nekonečnou váhu. Druhá možnost nám dává

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh^3 t} \cdot \sqrt{1 + \sinh^2 t} \,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh^2 t} \,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sinh t}{\cosh t}\right]_{-\infty}^{\infty} = \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{\sinh t}{\cosh t} - \lim_{t\to-\infty} \frac{\sinh t}{\cosh t} = 2 \lim_{t\to\infty} \frac{\sinh t}{\cosh t} = 2 \lim_{t\to\infty} \operatorname{tgh} t = 2 \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{2t} - 1}{\mathrm{e}^{2t} + 1} = 2.
\end{aligned}$$

Zde využíváme vztahů pro hyperbolický tangens. Můžeme tento vzorec získat pokud uvážíme, že

$$\begin{aligned}
\sinh x &= \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \\
\cosh x &= \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}.
\end{aligned}$$

Všimněme si, že i zde platí

$$(\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

Př. 414 *Nalezněte těžiště čtyřúhelníku spojujícího body* $[0,0]$, $[1,0]$, $[0,1]$, $[2,2]$, *je-li hustota křivky dána jako* $\rho(x,y) = x + y$.

Vidíme, že tento čtyřúhelník můžeme parametrizovat přes 4 úsečky. Dostaneme

$$\begin{aligned} C_1 : x &= 0, & C_3 : x &= 1+t, \\ y &= t, & y &= 2t, \\ C_2 : x &= 2t, & C_4 : x &= t, \\ y &= 1+t, & y &= 0, \end{aligned}$$

vždy pro $t \in [0,1]$. Začneme výpočtem hmotnosti křivky, počítáme

$$\begin{aligned} m &= \int_0^1 (0+t)\cdot\sqrt{1} + (2t+1+t)\cdot\sqrt{4+1} + (1+t+2t)\cdot\sqrt{1+4} + (t+0)\cdot\sqrt{1}\,\mathrm{d}t = \\ &= 2\int_0^1 t + (3t+1)\sqrt{5} = 2\int_0^1 t + (3t+1)\sqrt{5}\,\mathrm{d}t = 2\left[\frac{t^2}{2} + 3\sqrt{5}\frac{t^2}{2} + \sqrt{5}t\right]_0^1 = \\ &= 2\left(\frac{1}{2} + 3\sqrt{5}\frac{1}{2} + \sqrt{5}\right) = 2\frac{1+5\sqrt{5}}{2} = 1 + 5\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Následně potřebujeme spočíst statické momenty

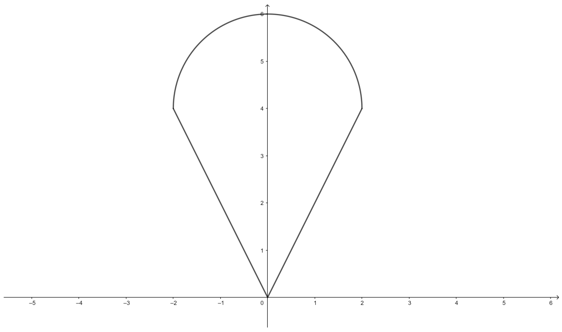
$$\begin{aligned} S_x &= \int_C y\rho(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 t\cdot t\sqrt{1} + (1+t)\cdot(3t+1)\sqrt{4+1} + 2t\cdot(1+3t)\sqrt{1+4} + 0\cdot t\sqrt{1}\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^1 t^2 + (3t+1+3t^2+t+2t+6t^2)\sqrt{5}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^2 + (1+6t+9t^2)\sqrt{5}\,\mathrm{d}t = \\ &= \left[\frac{t^3}{3} + (3t^2+t+3t^3)\sqrt{5}\right]_0^1 = \frac{1}{3} + 7\sqrt{5}. \\ S_y &= \int_C x\rho(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 0\cdot t\sqrt{1} + 2t\cdot(3t+1)\sqrt{4+1} + (1+t)\cdot(1+3t)\sqrt{1+4} + t\cdot t\sqrt{1}\,\mathrm{d}t = \\ &= \cdots = \frac{1}{3} + 7\sqrt{5}. \end{aligned}$$

S těmito momenty pak spočteme souřadnice těžiště

$$T = \left[\frac{S_x}{m}, \frac{S_y}{m}\right] = \left[\frac{\frac{1}{3}+7\sqrt{5}}{1+5\sqrt{5}}, \frac{\frac{1}{3}+7\sqrt{5}}{1+5\sqrt{5}}\right].$$

Pokud bychom si vykreslili vzniklou křivku, tak zjistíme, že je tato křivka osově symetrická přes osu $y = x$. Také hustota je symetrická přes tuto osu. Z těchto důvodů je jasné, že těžiště musí ležet na přímce $y = x$, a proto by nám stačilo spočítat jen jednu souřadnici těžiště.

Př. 415 *Spočtěte těžiště kostry draka, který je nakreslen na obrázku.*



jehož hustota roste směrem k vrchu a je přímo úměrná výšce.

Budeme chtít popsat křivku parametricky a vidíme, že se drak skládá z půlkružnice o poloměru 2. Jeho další části jsou pak tvořeny přímkami. Dostaneme parametrizaci

$$\begin{array}{ccc} C_1 : x = 2\cos t, & C_2 : x = t, & C_3 : x = t, \\ y = 2\sin t, & y = 2t, & y = -2t, \\ \text{pro } t \in [0, \pi] & \text{pro } t \in [0, 2] & \text{pro } t \in [-2, 0] \end{array}$$

Abychom nalezli těžiště, potřebujeme spočíst hmotnost křivky. Hustota křivky je dána jako $\rho(x, y) = Ay$, kde A je neznámá kladná konstanta. Počítáme tedy hmotnost

$$\begin{aligned} m_1 &= \int_0^\pi 2A\sin t\sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = 4A\int_0^\pi \sin t\,\mathrm{d}t = 4A\left[-\cos t\right]_0^\pi = 8A\pi^2, \\ m_2 &= \int_0^2 2At\sqrt{1+4}\,\mathrm{d}t = \sqrt{5}\left[At^2\right]_0^2 = 4\sqrt{5}A, \\ m_3 &= \int_{-2}^0 -2At\sqrt{1+4}\,\mathrm{d}t = \sqrt{5}\left[-At^2\right]_{-2}^0 = 4\sqrt{5}A. \end{aligned}$$

Celkovou hmotnost tedy dostaneme jako

$$m = m_1 + m_2 + m_3 = 8A\pi^2 + 8\sqrt{5}A$$

Nyní už zbývá dopočítat jen statické momenty. Využijeme integrály z funkcí $y\rho(x, y) = Ay^2$ a $x\rho(x, y) = Axy$.

$$\begin{aligned} S_x &= \int_C y\rho(x, y)\,\mathrm{d}s = \int_0^\pi 4A\sin^2 t\sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}\,\mathrm{d}t + \int_0^2 4At^2\sqrt{5}\,\mathrm{d}t + \int_{-2}^0 4At^2\sqrt{5}\,\mathrm{d}t = \\ &= 8A\left[-\frac{\sin 2x - 2x}{4}\right]_0^\pi + 4A\sqrt{5}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 + 4A\sqrt{5}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-2}^0 = 4A\pi + \frac{32}{3}A\sqrt{5} + \frac{32}{3}A\sqrt{5} = \\ &= 4A\pi + \frac{64}{3}A\sqrt{5}, \\ S_y &= \int_C x\rho(x, y)\,\mathrm{d}s = \int_0^\pi 4A\sin t\cos t\sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}\,\mathrm{d}t + \int_0^2 2At^2\sqrt{5}\,\mathrm{d}t - \int_{-2}^0 2At^2\sqrt{5}\,\mathrm{d}t = \\ &= 4A\int_0^\pi \sin 2t\,\mathrm{d}t + 2A\sqrt{5}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 t^2\,\mathrm{d}t - 2A\sqrt{5}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-2}^0 = 4A\left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

Těžiště má tedy souřadnice

$$T = \left[0, \frac{4A\pi + \frac{64}{3}A\sqrt{5}}{8A\pi^2 + 8\sqrt{5}A}\right] = \left[0, \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{8}{3}\sqrt{5}}{\pi^2 + \sqrt{5}}\right].$$

Vidíme, že kostra draka je symetrická přes osu y stejně jako hustota $\rho(x, y)$. Z těchto důvodů bychom mohli usuzovat, že těžiště musí ležet na ose y

9.5 Pokročilejší příklady

Př. 416 *V prostoru funkcí $C[0,3]$ s metrikou stejnoměrné konvergence mějme zadánu úsečku $C: X(t) = x^2 - t \cdot x + 1$, pro $t \in [1,2]$. Spočtěte délku této úsečky.*

Nejprve si rozmysleme, že metrika stejnoměrné konvergence na prostoru $C[a,b]$ je udána normou

$$||f||_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Vskutku, metriku získáváme z normy tak, že ji zavedeme jako

$$\rho_\infty(f,g) = ||f-g||_\infty.$$

Nyní máme tečný vektor $X'(t) = -x$ a jeho velikost můžeme spočítat jako

$$||X'(t)||_\infty = \sup_{x\in[0,3]} |X'(t)| = \sup_{x\in[0,3]} |-x| = \sup_{x\in[0,3]} x = 3.$$

Potom pokud počítáme délku křivky, tak ji získáme jako křivkový integrál

$$\int_C 1 \, \mathrm{d}s = \int_1^2 1 \cdot 3 \, \mathrm{d}t = 3.$$

Př. 417 *V prostoru funkcí $C[0,1]$ s metrikou stejnoměrné konvergence mějme zadánu křivku C parametricky jako $X(t) = x^2 \sin t$, pro $t \in [0, \pi]$. Spočtěte křivkový integrál*

$$\int_C X^2 \, \mathrm{d}s.$$

Tečný vektor křivky C je dán jako $X'(t) = x^2 \cos t$ a jeho velikost je potom

$$||X'(t)||_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |x^2 \cos t| = \sup_{x \in [0,1]} x^2 |\cos t| = |\cos t|.$$

Potom můžeme dosadit a počítat

$$\int_C X^2 \, \mathrm{d}s = \int_0^\pi \left(x^2 \sin t\right)^2 |\cos t| \, \mathrm{d}t = x^4 \int_0^\pi \sin^2 t |\cos t| \, \mathrm{d}t = 2x^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t \, \mathrm{d}t =$$
$$= 2x^4 \left[\frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2x^4}{3}.$$

Př. 418 *V prostoru $\mathbb{R}^2$ s taxikářskou metrikou mějme zadánu křivku C parametricky jako $x = t^2$, $y = 1 - t$, pro $t \in [0, 1]$. Spočtěte křivkový integrál*

$$\int_C xy \,\mathrm{d}s.$$

Rozmysleme si nejprve, že taxikářská metrika

$$\rho_1(A, B) = \sum_i |A_i - B_i|$$

je udána normou

$$||A||_1 = \sum_i |A_i|.$$

Potom pro tečný vektor t křivky C platí $x' = 2t$, $y' = -1$ a tedy $t = (2t, -1)$ a platí

$$||t|| = |2t| + |-1| = 2|t| + 1.$$

Potom můžeme počítat integrál

$$\int_C xy \,\mathrm{d}s = \int_0^1 t^2(1-t) \cdot (2|t| + 1)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 t^2(1-t)(2t+1) \,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^1 -2t^4 + t^3 + t^2 \,\mathrm{d}t = \left[-2\frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{11}{60}.$$

Př. 419 *Odhadněte délku elipsy*
$$9x^2 + 4y^2 = 36,$$
pro $y \geq 0$, *s přesností menší než* 10^{-3}.

Abychom spočetli délku, potřebujeme parametrizovat elipsu, což získáme obvyklou transformací
$$\begin{aligned} x &= 2\cos t, \\ y &= 3\sin t. \end{aligned}$$
A z omezení $3\sin t \geq 0$ vidíme, že $t \in [0, \pi]$. Již ze zadání víme, že se jedná o horní polovinu elipsy. Elipsa je zadána také jako $y = \frac{\sqrt{36-9x^2}}{2}$, pro $x \in [-2, 2]$. Stačí nám však spočítat délku poloviny elipsy pro $x \in [0, 2]$ nebo $t \in [0, \pi/2]$ a následně vše jen vynásobit dvěmi. Délku křivky máme
$$\begin{aligned} l &= 2\int_0^{\pi/2} 1\sqrt{4\sin^2 t + 9\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{9 - 5\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \\ &= 6\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{5}{9}\sin^2 t}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$
Nyní vidíme, že se jedná o hodnotu eliptického integrálu
$$E\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right),$$
který jsme si uváděli v kapitole o parametrických integrálech. Zde vidíme, odkud získal tento integrál své jméno. Víme, že můžeme integrál vyjádřit jako [11]
$$E(y) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2 \frac{y^{2n}}{1-2n}.$$
Dosadíme tedy do tohoto odhadu
$$E\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2 \frac{5^n}{(1-2n)9^n}.$$
Vezmeme-li sumu
$$\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2 \frac{5^n}{(2n-1)9^n},$$
vidíme, že tato suma má kladné členy a proto můžeme brát
$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left(\frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}(n+1)^2(n!)^2}\right)^2 \frac{5^{n+1}}{(2n+1)9^{n+1}} \left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right)^2 \frac{(2n-1)9^n}{5^n} = \\ &= \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{(n+1)^2}\frac{5\left(n-\frac{1}{2}\right)}{9} \leq \frac{5}{9}. \end{aligned}$$
Řada konverguje dle podílového kritéria. Můžeme tedy odhadnout chybu součtu řady po sečtení n členů jako
$$R_n \leq |a_n|\frac{5}{9(1-5/9)} = |a_n|\frac{5}{4}.$$

Zde využíváme odhad chyby dle Věty 4.5 v textu [4]. Prvních deset členů posloupnosti a_n je

$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
0.1388888889	0.0144675926	0.0033489798	0.0010174852	0.0003561198
$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$
$1.360180e - 04$	$5.513201e - 05$	$2.333060e - 05$	$1.020114e - 05$	$4.576344e - 06$

Vidíme tedy, že chceme-li chybu menší než $0,001$, stačí sečíst prvních 5 členů řady. Pokud bychom chtěli členy a_n odhadnout sami, tak můžeme využít Stirlingovu formuli

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{\mathrm{e}} \right)^n,$$

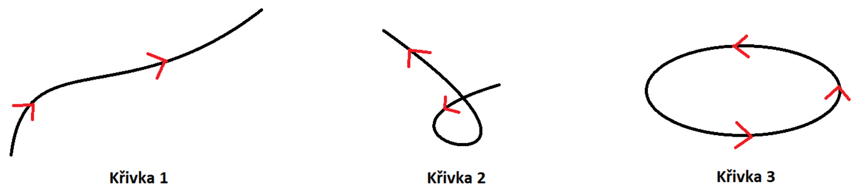
která je blízká i pro malé hodnoty n. Dostaneme tak

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^2 \frac{5^n}{(2n-1)9^n} \approx \left(\frac{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{\mathrm{e}} \right)^{2n}}{\pi n 2^{2n+1} \left(\frac{n}{\mathrm{e}} \right)^{2n}} \right)^2 \frac{5^n}{(2n-1)9^n} = \\ &= \left(\frac{\sqrt{4\pi n} 2^{2n}}{\pi n 2^{2n+1}} \right)^2 \frac{5^n}{(2n-1)9^n} = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi n}} \right)^2 \frac{5^n}{(2n-1)9^n} = \frac{5^n}{\pi n (2n-1)9^n} \leq \\ &\leq \frac{9^n}{3n(2n-1)9^n} \leq \frac{1}{3n \cdot n} = \frac{1}{3n^2}, \end{aligned}$$

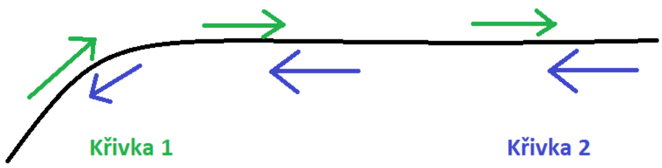
pro $n \in \mathbb{N}$.

10 Křivkový integrál 2.druhu

Nechť C je po částech hladká křivka. Nechť je na hladké křivce C definováno úplné/lineární uspořádání jejích bodů (o každé dvojci bodů lze říct, který bod přijde dřív), které odpovídá pohybu hmotného bodu B po křivce C, když se pohybuje v jednom směru (tj. nemůže se vracet). Pokud bod B dorazí do bodu, kterým již procházel, musí do tohoto bodu dorazit z jiného směru než z jakého při předchozích návštěvách vyrazil. Takovému uspořádání pak říkáme orientace a hladké křivce C s tímto uspořádáním budeme říkat orientovaná křivka. Pro jednoduchou křivku (křivka neprotíná sama sebe) chceme v podstatě určit její začátek a konec. Orientaci křivky můžeme reprezentovat následovně

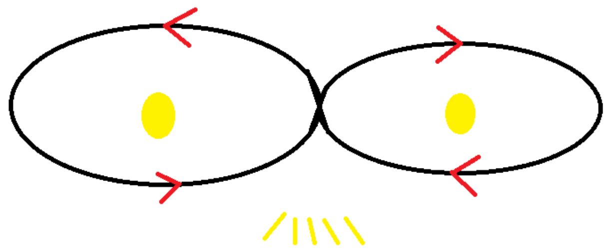


Pokud bychom uvažovali trajektorii bodu, který se po křivce C vrací tam a zpátky, můžeme rozdělit křivku na několik částí s jednotlivými částmi reflektujícími pohyb bodu. Můžeme si to představit jako dvě stejné křivky jen s opačnou orientací navzájem se překrývající



Nechť je hladká orientovaná křivka C parametrizovaná jako $x = \alpha(t)$, $y = \beta(t)$, $z = \gamma(t)$, pro $t \in [A, B]$. Potom řekneme, že parametrizace křivky C je souhlasná s její orientací, pokud směr pohybu (pro zvětšující se t) bodu $[\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)]$ po křivce C je stejný s orientací křivky C. V opačném případě se tato parametrizace nazývá nesouhlasná s orientací. Jednoduše řečeno, parametrizace nám udává v každém čase t bod křivky, ale s měnícím t se tento bod pohybuje po křivce. Nás zajímá, jestli pohyb tohoto bodu udaného parametrizací je stejný jako orientace křivky. Parametrizace nám udává hladkou orientovanou křivku jednoznačně až na orientaci, která může být opačná.

Pokud máme dvourozměrnou uzavřenou křivku C danou v obvyklé rovině xy, pak za kladnou orientaci považujeme orientaci, která jde proti směru hodinových ručiček. Tj. pokud máme jednoduchou uzavřenou křivku C, tak v bodě $[x, y]$ křivky C s největší y-ovou souřadnicí musí být křivka orientovaná zprava doleva. Pro některé křivky C však kladná orientace vůbec existovat nemusí. Například pokud křivka C není jednoduchá a vypadá následovně



Nechť funkce $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ jsou spojité ve všech bodech hladké orientované křivky C. Nechť křivka C je parametrizovaná jako $x=\alpha(t)$, $y=\beta(t)$, $z=\gamma(t)$, pro $t\in[A,B]$, pak křivkový integrál druhého druhu můžeme vyjádřit jako

$$\int_C P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z =$$
$$= \pm\int_A^B P(\alpha(t),\beta(t),\gamma(t))\alpha'(t) + Q(\alpha(t),\beta(t),\gamma(t))\beta'(t) + R(\alpha(t),\beta(t),\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t,$$

kde znaménko $\pm$ reprezentuje $+$, pokud je parametrizace souhlasná s orientací a $-$ pokud je nesouhlasná.

Pokud bychom uvažovali symbolicky derivace parametrizace jako

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \alpha'(t) \Rightarrow \mathrm{d}x = \alpha'(t)\,\mathrm{d}t,\\ y' &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \beta'(t) \Rightarrow \mathrm{d}x = \beta'(t)\,\mathrm{d}t,\\ z' &= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \gamma'(t) \Rightarrow \mathrm{d}x = \gamma'(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Dosazením těchto vztahů do integrálu a vytknutím $\mathrm{d}t$ bychom dostali převodovou formuli. Pokud bychom měli vektorovou funkci $F=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ a tečný vektor křivky $\overrightarrow{v} = (\alpha'(t),\beta'(t),\gamma'(t))$, pak můžeme křivkový integrál druhého integrál také vyjádřit jako

$$\int_C F\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_C P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z = \pm\int_A^B \langle F, \overrightarrow{v}\rangle\;\mathrm{d}t,$$

kde symbol $\langle\cdot,\cdot\rangle$ reprezentuje standardní skalární součin.

Je-li $P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$ diferenciál nějaké kmenové funkce K na množině V, pak pokud je C křivka ležící ve V, tak

$$\int_C P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z = K(B)-K(A),$$

kde A je počáteční bod křivky C a B je její koncový bod. Navíc se v takovém případě vektorové pole $F=(P,Q,R)$ nazývá potenciálové (alespoň na nějaké otevřené množině V, kde kmenová funkce existuje). Je-li V souvislá množina afunkce P,Q,R mají spojité parciální derivace, pak funkce $K(x,y,z)$ existuje, pokud jsou splněny rovnosti

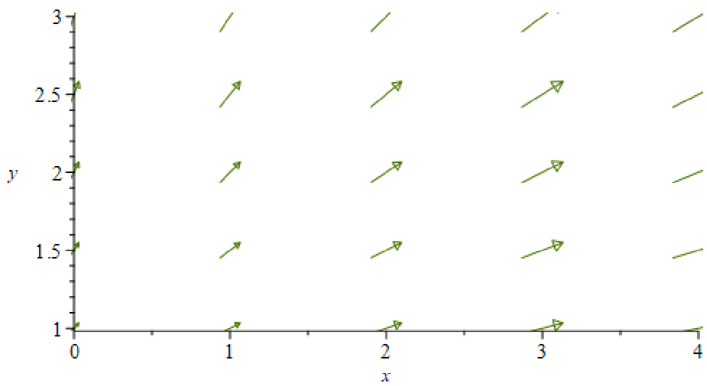
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}P(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y,z),\\ \frac{\partial}{\partial z}P(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}R(x,y,z),\\ \frac{\partial}{\partial z}Q(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y}R(x,y,z).\end{aligned}$$

Pohybuje-li se bod jednotkové hmotnosti ve vektorovém poli $F = (P,Q,R)$ po hladké křivce C, můžeme vypočíst jeho práci, která je při tomto pohybu vykonána, jako křivkový integrál 2. druhu

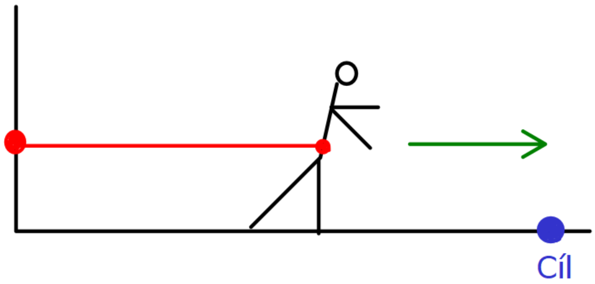
$$W = \int_C F\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

Orientace křivky C je v tomto případě udána směrem pohybu pracujícího bodu.

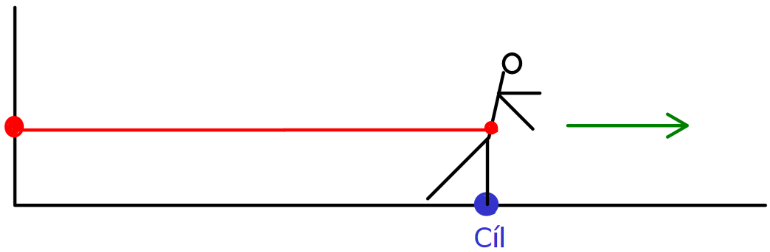
Mějme nějaké vektorové pole $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$. Toto vektorové pole reprezentuje působící vliv na uvažovaný hmotný bod v bodě $[x,y]$. Pokud v bodě $[x,y]$ vykreslíme působící vektor $(P(x,y), Q(x,y))$, dostali bychom například pro vektorové pole $F(x,y) = (1+x, y)$ následující obrázek



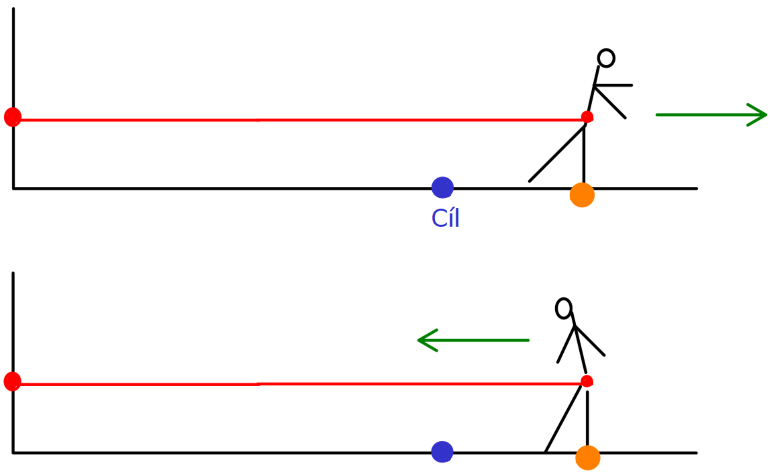
Zde ovšem vykreslujeme působící vektory pouze v některých bodech a ne ve všech. Jinak by situace byla nepřehledná. Křivkový integrál 2. druhu pak můžeme vnímat jako sčítání vlivů pole $F(x,y)$ na body $[x,y]$ ležících na křivce C. Potenciálové pole pak můžeme chápat jako speciální pole ve kterém když se pohybujeme, tak se jeho vlivy vzájemně ruší natolik, že nezáleží na trase pohybu hmotného bodu, ale pouze na tom do jakého bodu dorazíme. Uvažujme například potenciálovou energii v gravitačním poli, která závisí na pozici objektu a ne na způsobu, jakým se objekt do bodu dostal. Nebo uvažujme chodce, který je připevněn pružnou gumou ke zdi od které se vzdaluje a chce dojít do jistého bodu. Například takto



Chodec může do bodu dorazit různými způsoby. Může dojít do bodu a zde se zastavit. V takovémto případě na něj působí guma jen v jednom směru. A integrací bychom posčítali spojité působení tahu gumy.



Chodec by však mohl bod také přejít a pak se vrátit. V prvním případě by mu guma nejprve v pohybu bránila, ale při návratu by mu naopak pomáhala.



Za dostatečně hezkých předpokladů by se toto bránění navíc (poté co by už šel dál než chodec musel) vzájemně vyrušilo s pomocí, kterou by chodec získal (při návratu zpátky). Takové předpoklady by nastaly přesně v případě, kdy by byly působící síly potenciálové.

Uvažujme běžce ve větrném tunelu. Směr a síla větru foukajícího v tunelu jsou udány vektorovým polem $F = (2, 3)$. Tedy vítr fouká v každém bodě stejným směrem a stejnou silou. V reálné situaci bychom takové homogenní chování větru předpokládat nemohli. Běžec běží z bodu

$[-1, 0]$ do bodu $[2, 1]$. Všimněme si, že toto vektorové pole je potenciální, nezáleží tedy na trase jakou se vydá. Uvažujme, čtyři různé trasy po kterých může běžet. V prvním případě nechť běžec běží rovnou po přímce. Úsečku spojující dané body můžeme parametrizovat jako $x = -1 + 3t$, $y = t$, pro $t \in [0, 1]$. V takovém případě bychom měli celkový vliv větru V daný jako

$$V = \int_0^1 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \,\mathrm{d}t = 9.$$

Ve druhém případě uvažujme, že běžec běží po lomené čáře nejprve do bodu $[2, 0]$ a až poté do bodu $[2, 1]$. První pohyb bychom parametrizovali jako $x = -1 + 3t$, $y = 0$ a druhý pohyb pak jako $x = 2$, $y = t$. V obou případech pro $t \in [0, 1]$. Vliv větru bychom tak dostali jako

$$V = \int_0^1 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 \,\mathrm{d}t + \int_0^1 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \,\mathrm{d}t = 6 + 3 = 9.$$

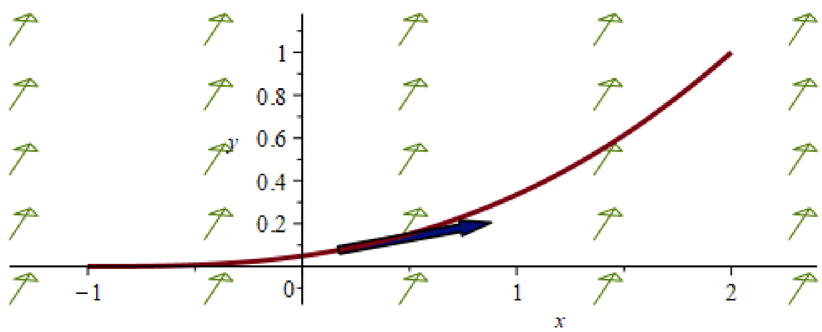
Ve třetím případě uvažujme, že běžec běží nejprve nejkratší možnou trasou do bodu $[6, -5]$, aby se z něj zase pro změnu vrátil do bodu $[2, 1]$. Máme zase dvě úsečky $x = -1 + 7t$, $y = -5t$ a $x = 6 - 4t$, $y = -5 + 6t$ obě znovu pro $t \in [0, 1]$. Tentokrát dostaneme vlivy větru jako

$$V = \int_0^1 2 \cdot 7 + 3 \cdot (-5) \,\mathrm{d}t + \int_0^1 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 6 \,\mathrm{d}t = \int_0^1 -1 \,\mathrm{d}t + \int_0^1 10 \,\mathrm{d}t = -1 + 10 = 9.$$

Nakonec uvažujme trasu po parametrizované křivce $x = -1 + 3t\,\mathrm{e}^{\frac{t-1}{2}}$ a $y = t^3\,\mathrm{e}^{t-1}$, pro $t \in [0, 1]$. Integrál se nyní zkomplikuje, ale i zde zůstane vliv větru stejný

$$V = \int_0^1 2 \cdot \left(\frac{3}{2}t + 3\right) \mathrm{e}^{\frac{t-1}{2}} + 3 \cdot (t^3 + 3t^2)\,\mathrm{e}^{t-1} \,\mathrm{d}t = \cdots = 9.$$

V integrálech vidíme, že vítr fouká po některých trasách běžci do zad z jistého úhlu a pomáhá mu v běhu. Po jiných trasách zase vidíme, že vítr nejdřív běžci škodí, ale poté mu naopak pomáhá o to víc, když běžec běží vzhledem ke větru pod ještě výhodnějším úhlem. V posledním případě není vliv větru vůbec zřejmý přesto však zůstává stejný. Pole je vskutku potenciálové. V tomto příkladě ignorujeme všechny ostatní vlivy běhu. Sledujeme pouze vliv větru v podobě vektorového pole. Poslední trasu si můžeme zobrazit spolu s vektorovým polem a tečným vektorem následovně



Vzhledem k převodu křivkových integrálů na riemannův integrál můžeme spojit za dostatečně hezkých předpokladů vzájemně křivkový integrál 1. a 2. druhu vztahem

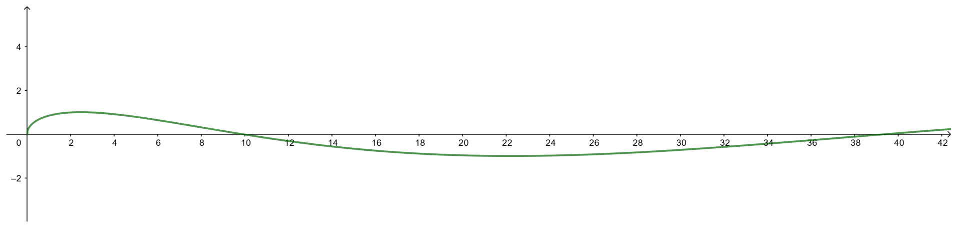
$$\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \pm\int_A^B P\cdot\alpha' + Q\cdot\beta' + R\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \pm\int_A^B \left[P\cdot\frac{\alpha'}{\sqrt{(\alpha')^2+(\beta')^2+(\gamma')^2}} + Q\cdot\frac{\beta'}{\sqrt{(\alpha')^2+(\beta')^2+(\gamma')^2}} + R\cdot\frac{\gamma'}{\sqrt{(\alpha')^2+(\beta')^2+(\gamma')^2}}\right]\sqrt{(\alpha')^2+(\beta')^2+(\gamma')^2}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \pm\int_C \langle (P,Q,R), T\rangle\ \mathrm{d}s = \pm\int_C \langle F, T\rangle\ \mathrm{d}s.$$

Tento vztah není určen přesně (je dán přesně až na znaménko), které bychom získali ze vztahu parametrizace a orientace křivky C. Symbol T označuje normovaný tečný vektor parametrizace křivky C a závorky $\langle\cdot,\cdot\rangle$ v posledním integrálu označují skalární součin.

10.1 Orientace

Př. 420 *Mějme křivku C parametrizovanou jako $x = t^2$, $y = -\sin(-t)$, pro $t \in [\pi, 2\pi]$. Tato křivka C je orientovaná v obvyklé rovině xy zprava doleva. Rozhodněte, zda je tato křivka parametrizovaná souhlasně nebo nesouhlasně.*

Podívejme se nejprve na podobu křivky C. Tato křivka začíná pro $t = \pi$ v bodě $[\pi^2, -\sin(-\pi)] = [\pi^2, 0]$. Potom se parametr t zvětšuje a protože je funkce $x = t^2$ rostoucí, posunujeme se s rostoucím t podél osy x doprava. Vyjádříme navíc ze vztahu $x = t^2$, že platí pro $x > 0$ také vztah $t = \sqrt{x}$. Potom dosazením do vztahu $y = -\sin(-t)$ (který můžeme upravit pro zjednodušení do podoby $y = \sin t$) dostaneme $y = \sin\sqrt{x}$. Tedy s rostoucím x se pohybujeme doprava a křivka C kopíruje graf funkce $f(x) = \sin\sqrt{x}$. Parametr t roste až do hodnoty $t = 2\pi$, kde křivka C končí v bodě $[4\pi^2, 0]$. Křivka C je však orientovaná zprava doleva. My se parametrizací posunujeme zleva doprava. Parametrizace je tedy nesouhlasná s naší orientací. Graf funkce $f(x) = \sin\sqrt{x}$ vypadá následovně



10.2 Obecná vektorová funkce

Př. 421 *Vypočtěte integrál*

$$I = \int_C -y \,\mathrm{d}x + x \,\mathrm{d}y, \quad \textit{pro} \quad C : x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0,$$

kde C je orientovaná po směru ručiček.

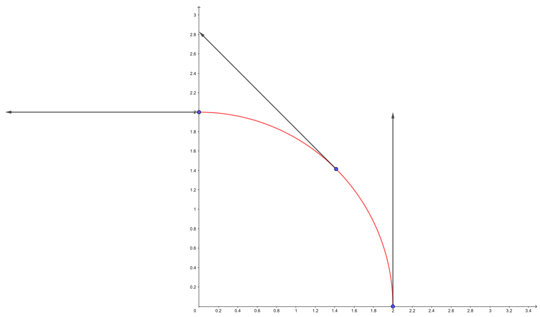
Jedná se o část kružnice s poloměrem 2, parametrizujeme tedy křivku pomocí polárních souřadnic jako $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, pro $t \in [0, \pi/2]$. Dosazením $t = 0$ dostaneme počáteční bod parametrizace, který je $[2, 0]$. Koncový je pak pro $t = \frac{\pi}{2}$ bod $[0, 2]$. Očividně jde parametrizace proti směru hodinových ručiček po kružnici křivky C. Vidíme tak, že tato parametrizace je opačná oproti orientaci křivky, která je zadána po směru hodinových ručiček. Před integrálem tak bude znaménko $-$. Můžeme počítat derivaci parametrizace jako

$$x' = -2\sin t,$$
$$y' = 2\cos t.$$

Tyto derivace nám určují tečný vektor ke křivce C jako $T = (-2\sin t, 2\cos t)$. V bodech B tak máme tečné vektory

bod B	parametr t	vektor T
$[1, 0]$	0	$(0, 2)$
$\left[\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$	$\frac{\pi}{4}$	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
$[0, 2]$	$\frac{\pi}{2}$	$(-2, 0)$

Vykreslené vektory spolu s křivkou vypadají potom takto:



I zde vidíme, že směr parametrizace určený tečnými vektory je opačný k orientaci křivky. Dostáváme ze základního převodního vzorce integrál

$$I = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} -2\sin t(-2\sin t) + 2\cos t 2\cos t \,\mathrm{d}t = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \,\mathrm{d}t = -4\,[t]_0^{\frac{\pi}{2}} = -2\pi.$$

Př. 422 *Vypočtěte integrál*

$$I = \int_C \left(x - \frac{1}{y}\right) \mathrm{d}y, \quad \textit{pro} \quad C : y = x^2, 1 \leq x \leq 2,$$

kde $[1,1]$ *je počátečním bodem.*

Křivka je daná explicitně, parametrizujeme ji tedy jednoduše jako $x = t$, $y = t^2$, pro $t \in [1,2]$. Počáteční bod má souřadnici $x = 1$ a tedy je orientace souhlasná s parametrizací. Tečný vektor křivky určený parametrizací získáme derivacemi

$$\begin{aligned} x' &= 1, \\ y' &= 2t. \end{aligned}$$

Počítáme

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \left(t - \frac{1}{t^2}\right) 2t \,\mathrm{d}t = \int_1^2 2t^2 - \frac{2}{t} \,\mathrm{d}t = \left[\frac{2t^3}{3} - 2\ln|t|\right]_1^2 = \\ &= \frac{16}{3} - \ln 2^2 - \frac{2}{3} + 0 = \frac{14}{3} - \ln 4. \end{aligned}$$

Podívejme se nyní na situaci, kdy bychom zvolili jinou parametrizaci křivky C. Takovou jinou parametrizací může být například $x = -t$ a $y = t^2$. Nyní $t \in [-2,-1]$ neboť pro

$$1 \leq \underbrace{-t}_{=x} \leq 2 \Rightarrow -2 \leq t \leq -1.$$

Tato parametrizace však nyní začíná pro $t = -2$ v bodě $[2,4]$ a končí pro $t = -1$ v bodě $[1,1]$ a tudíž jde parametrizace proti směru orientace. Integrál bychom tak měli

$$\begin{aligned} I &= -\int_{-2}^{-1} \left(-t - \frac{1}{t^2}\right) \cdot 2t \,\mathrm{d}t = -2\int_{-2}^{-1} -t^2 - \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t = -2\left[-\frac{t^3}{3} - \ln|t|\right]_{-2}^{-1} = \\ &= -2\left(\frac{1}{3} - \ln(1) - \frac{8}{3} + \ln(2)\right) = -2\left(-\frac{7}{3} + \ln(2)\right) = \frac{14}{3} - \ln 4. \end{aligned}$$

Všimněme si, že i přes jinou parametrizaci integrál vyjde stejně. Avšak jen pokud si dáme pozor na vztah orientace a parametrizace. V opačném případě by nám výsledek stejně vyjít nemusel.

Př. 423 *Spočtěte integrál*

$$I = \int_C 3\,\mathrm{d}y,$$

kde $C : x^2 + y^2 = 4,\ y \geq 0$ *orientovaná od bodu* $[-2, 0]$ *k bodu* $[2, 0]$.

Začneme tím, že parametrizujeme kružnici jako $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, pro $t \in [0, \pi]$. Tečný vektor určený parametrizací získáme derivacemi

$$x' = -2\sin t,$$
$$y' = 2\cos t.$$

Tato parametrizace začíná pro $t = 0$ v bodě $[2, 0]$ a končí pro $t = \pi$ v bodě $[-2, 0]$. Proto je parametrizace nesouhlasná s orientací křivky a dostáváme integrál

$$I = -\int_0^\pi 0 \cdot (-2\sin t) + 3 \cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t = -6\int_0^\pi \cos t\,\mathrm{d}t = -6\,[\sin t]_0^\pi = 0.$$

Př. 424 *Spočtěte integrál*

$$I = \int_C 2\,\mathrm{d}x,$$

kde $C : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$*,* $y \geq 0$ *orientovaná od bodu* $[-2, 0]$ *k bodu* $[2, 0]$*.*

Nejprve parametrizujeme křivku obvyklou parametrizací pro elipsy $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$, pro $t \in [0, \pi]$. Tato parametrizace pro $t = 0$ začíná v bodě $[2, 0]$. Vidíme tedy, že zvolená parametrizace není souhlasná s orientací. Tečný vektor určený parametrizací získáme derivacemi

$$\begin{aligned} x' &= -2\sin t, \\ y' &= 3\cos t. \end{aligned}$$

Dostáváme integrál

$$I = -\int_0^\pi 2 \cdot (-2\sin t) + 0 \cdot (2\cos t)\,\mathrm{d}t = 4\int_0^\pi \sin t\,\mathrm{d}t = 4\left[-\cos t\right]_0^\pi = 8.$$

Př. 425 *Spočtěte integrál*

$$I = \int_C x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y,$$

kde $C : y = \frac{x^2}{2}$*, orientovaná od bodu* $[-2,2]$ *k bodu* $[2,2]$*.*

Chceme parametrizovat křivku nejsnazší parametrizací $x = t$, $y = \frac{t^2}{2}$, pro $t \in [-2,2]$. Tato parametrizace začíná pro $t = -2$ v bodě $[-2,2]$. Proto je tato parametrizace souhlasná s orientací křivky. Tečný vektor křivky určený parametrizací získáme derivacemi

$$\begin{aligned} x' &= 1, \\ y' &= 2t. \end{aligned}$$

Počítáme

$$I = \int_{-2}^{2} t \cdot 1 + \frac{t^2}{2} \cdot t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8}\right]_{-2}^{2} = \frac{4}{2} + \frac{16}{8} - \frac{4}{2} - \frac{16}{8} = 0.$$

Př. 426 *Spočtěte integrál*

$$I = \int_C y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y,$$

kde $C : y = \mathrm{e}^{x/2} + \mathrm{e}^{-x/2}$*, začínající pro* $x = 2$ *a končící pro* $x = -2$*.*

Nejdříve parametrizujeme křivku nejsnazší parametrizací $x = t$, $y = \mathrm{e}^{t/2} + \mathrm{e}^{-t/2}$, pro $t \in [-2, 2]$. Vidíme, že tato parametrizace nesouhlasí s orientací křivky neboť počáteční bod parametrizace má souřadnici $x = -2$. Tečný vektor křivky určený parametrizací získáme derivacemi jako

$$\begin{aligned} x' &= 1, \\ y' &= \frac{\mathrm{e}^{t/2} - \mathrm{e}^{-t/2}}{2}. \end{aligned}$$

Dostaneme

$$\begin{aligned} I &= -\int_{-2}^{2} \left(\mathrm{e}^{t/2} + \mathrm{e}^{-t/2}\right) \cdot 1 + t \cdot \left(\frac{\mathrm{e}^{x/2} - \mathrm{e}^{-x/2}}{2}\right) \mathrm{d}t = |\text{základní vzorec a per partes }| = \\ &= -\left[2\,\mathrm{e}^{t/2} - 2\,\mathrm{e}^{-t/2} + (t-2)\,\mathrm{e}^{t/2} + (t+2)\,\mathrm{e}^{-t/2}\right]_{-2}^{2} = \\ &= -2\,\mathrm{e}^{1} + 2\,\mathrm{e}^{-1} - 4\,\mathrm{e}^{-1} + 2\,\mathrm{e}^{-1} - 2\,\mathrm{e}^{1} - 4\,\mathrm{e}^{-1} = -4\,\mathrm{e} - 4\,\mathrm{e}^{-1}. \end{aligned}$$

Př. 427 *Vypočtěte integrál*

$$I = \int_C x^2 \,\mathrm{d}x + y \,\mathrm{d}y + z \,\mathrm{d}z, \quad \textit{pro} \quad C : x^2 + y^2 = z^2, z = 1, x \geq 0, y \geq 0,$$

kde počáteční bod má nejmenší vzdálenost od osy x.

V rovině dané $z = 1$ máme $x^2 + y^2 = 1$. Vidíme proto, že se jedná o kružnici ve výšce 1 nad prvním kvadrantem. Libovolný bod křivky tak bude mít od osy x vzdálenost alespoň 1, díky trojúhelníkové nerovnosti. Avšak bod ležící nad osou x má vzdálenost právě 1 a všude jinde je tato vzdálenost větší, jedná se tedy o počáteční bod křivky. Volíme parametrizaci $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1$, pro $t \in [0, \pi/2]$. Vidíme, že křivka je orientovaná souhlasně. Tečný vektor křivky určený parametrizací získáme derivacemi

$$\begin{aligned} x' &= -\sin t, \\ y' &= \cos t, \\ z' &= 0. \end{aligned}$$

Počítáme

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t(-\sin t) + \sin t \cos t + 1 \cdot 0 \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t - \cos^2 t) \sin t \,\mathrm{d}t =$$

$$= \left| \begin{array}{c} u = \cos t \\ \mathrm{d}u = -\sin t \,\mathrm{d}t \\ t = 0 \to u = 1 \\ t = \frac{\pi}{2} \to u = 0 \end{array} \right| = -\int_1^0 u - u^2 \,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Př. 428 *Vypočtěte integrál*

$$I = \int_C (xy - y^2)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y, \quad \text{pro} \quad C : y^2 = 4x, 0 \le x \le 1,$$

kde křivka je orientovaná v obvyklé rovině xy shora dolů.

Křivka je dána explicitně funkcí $y^2 = 4x$, parametrizujeme ji tedy jako $y = t$, $x = \frac{t^2}{4}$, pro $t \in [0, 2]$. Vidíme, že parametrizace křivky začíná v bodě $[0, 0]$ a pokračuje do bodu $[1, 2]$. Křivka jde shora dolů a tedy od bodu $[1, 2]$ do bodu $[0, 0]$. Proto je naše parametrizace nesouhlasná. Parametrizace dává tečný vektor $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2t}{4}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1$. Počítáme

$$\begin{aligned} I &= -\int_0^2 \left(\frac{t^3}{4} - t^2\right)\frac{2t}{4} + \frac{t^2}{4} \cdot 1\,\mathrm{d}t = -\int_0^2 \frac{t^4}{8} - \frac{t^3}{2} + \frac{t^2}{4}\,\mathrm{d}t = \\ &= -\left[\frac{t^5}{40} - \frac{t^4}{8} + \frac{t^3}{12}\right]_0^2 = -\left(\frac{32 - 80}{40} + \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

Takto bychom však neměli celou křivku C. Interval $t \in [0, 2]$ odpovídá pouze hodnotám $y \ge 0$. Ale implicitní rovnici vyhovují také hodnoty pro $y < 0$, tj. z části $y = -\sqrt{4x}$. Proto musíme uvážit parametrizaci přes celý rozsah $t \in [-2, 2]$. V takovém případě bychom měli výsledek

$$I = -\left[\frac{t^5}{40} - \frac{t^4}{8} + \frac{t^3}{12}\right]_{-2}^2 = \frac{8}{15} - \frac{52}{15} = -\frac{44}{15}.$$

Př. 429 *Vypočtěte integrál*

$$I = \int_C y \,\mathrm{d}x + 2x \,\mathrm{d}y, \qquad \textit{pro} \qquad C : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, y \geq 0,$$

kde křivka je orientovaná tak, že počáteční bod má největší x-ovou souřadnici.

Jedná se o horní část elipsy, kterou parametrizujeme jako $x = \cos t$, $y = 2\sin t$, pro $t \in [0, \pi]$ a křivka je parametrizovaná souhlasně. Parametrizace dává tečný vektor $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sin t$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2\cos t$. Počítáme

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi 2\sin t(-\sin t) + 2\cos t \cdot 2\cos t \,\mathrm{d}t = \int_0^\pi -2\sin^2 t + 2\cos^2 t \,\mathrm{d}t = \\ &= |\sin^2 t = 1 - \cos^2 t| = \int_0^\pi 2\cos^2 t - 2 + 4\cos^2 t \,\mathrm{d}t = \int_0^\pi 6\cos^2 t - 2 \,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^\pi 3(1 + \cos 2t) - 2 \,\mathrm{d}t = \left[t + \frac{3\sin 2t}{2} \right]_0^\pi = \pi. \end{aligned}$$

Př. 430 *Vypočtěte integrál*

$$I = \int_C y(x^2+1)\,\mathrm{d}x + x(y^2-1)\,\mathrm{d}y$$

kde C je hranice oblasti $M: x^2+y^2-2x \leq 0, y \geq 0$ a je orientovaná kladně.

Křivku máme danou jako $x^2+y^2-2x=0$ pro $y \geq 0$. Úpravou na čtverec dostaneme $(x-1)^2+y^2 = 1$ a tedy se jedná o kružnici se středem $[1,0]$ a poloměrem 1. Parametrizaci dostaneme jako $x = 1+\cos t$, $y = \sin t$, pro $t \in [0,\pi]$. Křivka je pak parametrizovaná souhlasně, protože obíháme kružnici po směru hodinových ručiček. Parametrizace dává tečný vektor $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sin t$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos t$. Počítáme

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\pi \sin t[(1+\cos t)^2+1](-\sin t) + (1+\cos t)\overbrace{(\sin^2 t - 1)}^{=-\cos^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_0^\pi -\sin^2 t(2+2\cos t+\cos^2 t) - (1+\cos t)\cos^2 t\cos t\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_0^\pi (\cos^2 t - 1)(2+2\cos t+\cos^2 t) - \cos^3 t - \cos^4 t\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_0^\pi \cos^3 t + \cos^2 t - 2\cos t - 2\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_0^\pi \cos^3 t - 2\cos t\,\mathrm{d}t + \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} - 2t\right]_0^\pi = \left[-\frac{3t}{2}\right]_0^\pi = -\frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Zde využíváme, že platí $\int_0^\pi \cos^3 t - 2\cos t\,\mathrm{d}t = 0$, neboť funkce je „lichá“ přes bod $x = \frac{\pi}{2}$ a tedy plocha nad grafem i pod grafem je na $[0,\pi]$ stejná. Lichost přes bod $x = \frac{\pi}{2}$ se zde snadno ověří, pokud vhodně funkci posuneme a ověříme, že

$$L(x) = \cos^3\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin^3 x - 2\sin x$$

je lichá funkce. Toto však hned plyne z lichosti funkce $\sin x$ a z faktu, že je $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$.

K integrálu bychom měli přidat ještě část hranice na ose x, kterou bychom měli parametrizovanou jako $x = t$, $y = 0$, pro $t \in [0,2]$ kterážto část by byla také souhlasně orientovaná. Avšak snadno si rozmyslíme po dosazení za $y = 0$ a $y' = 0$, že tento integrál je nulový.

Př. 431 *Vypočtěte integrál*

$$I = \int_C (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x + (xy - y^2)\,\mathrm{d}y$$

kde C je hranice oblasti $M : x^2 + y^2 \leq 5$ a je orientovaná kladně.

Křivku máme danou rovností $x^2 + y^2 = 5$. Jedná se o kružnici s poloměrem $\sqrt{5}$, parametrizujeme ji tedy pomocí polárních souřadnic jako $x = \sqrt{5}\cos t$, $y = \sqrt{5}\sin t$, pro $t \in [0, 2\pi]$ a křivka je parametrizovaná souhlasně. Tečný vektor dostaneme z parametrizace

$$\begin{aligned} x' &= -\sqrt{5}\sin t, \\ y' &= \sqrt{5}\cos t. \end{aligned}$$

Počítáme

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \overbrace{(5\cos^2 t + 5\sin^2 t)}^{5}(-\sqrt{5}\sin t) + (5\sin t\cos t - 5\sin^2 t)\sqrt{5}\cos t\,\mathrm{d}t = \\ &= 5\sqrt{5}\,[\cos t]_0^{2\pi} + 5\sqrt{5}\int_0^{2\pi} \sin t\cos^2 t - \sin^2 t\cos t\,\mathrm{d}t = 0 + 5\sqrt{5}\cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Kde integrál $\int_0^{2\pi} \sin t\cos^2 t - \sin^2 t\cos t\,\mathrm{d}t$ můžeme jednotlivě spočítat pomocí dvou substitucí, nebo si všimneme, že se jedná opět o funkce „liché“ přes střed intervalu $x = \pi$. Stejně tak bychom si mohli všimnout, že je

$$\begin{aligned} \left(\cos^3 t\right)' &= -3\cos^2 t\sin t, \\ \left(\sin^3 t\right)' &= 3\sin^2 t\cos t. \end{aligned}$$

Můžeme tak integrovat i na základě porovnání pravých stran s integrovanou funkcí.

Př. 432 *Vypočtěte integrál*

$$I = \int_C y^2 \, \mathrm{d}x - x^2 \, \mathrm{d}y$$

kde C *je úsečka od bodu* $[0, 1]$ *k bodu* $[1, 0]$.

Parametrizujeme úsečku jako $x = t$, $y = 1 - t$, pro $t \in [0, 1]$ čímž dostaneme souhlasnou parametrizaci. Počítáme

$$I = \int_0^1 (1-t)^2 \cdot 1 - t^2 \cdot (-1) \, \mathrm{d}t = \int_0^1 1 - 2t + 2t^2 \, \mathrm{d}t = \left[t - t^2 + \frac{2t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Př. 433 *Vypočtěte integrál*

$$I = \int_C (x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}x + (y^2 - 2xy)\,\mathrm{d}y$$

kde C je parabola $y = x^2$ pro $-1 \leq x \leq 1$ orientovaná zleva doprava ve standardní rovině xy.

Křivka je daná explicitně, parametrizujeme tedy křivku jako $x = t$, $y = t^2$, pro $t \in [-1, 1]$. Tato parametrizace začíná v levém krajním bodě a pokračuje do pravého krajního bodu. Tudíž je parametrizace souhlasná s orientací křivky a dostáváme

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1} (t^2 - 2t^3) \cdot 1 + (t^4 - 2t^3)2t\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} 2t^5 - 4t^4 - 2t^3 + t^2\,\mathrm{d}t = \\
&= \left[\frac{2t^6}{6} - \frac{4t^5}{5} - \frac{2t^4}{4} + \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{2}{6} - \frac{4}{5} - \frac{2}{4} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{2}{6} + \frac{4}{5} - \frac{2}{4} - \frac{1}{3}\right) = \\
&= -\frac{14}{15}.
\end{aligned}$$

Př. 434 *Vypočtěte integrál*

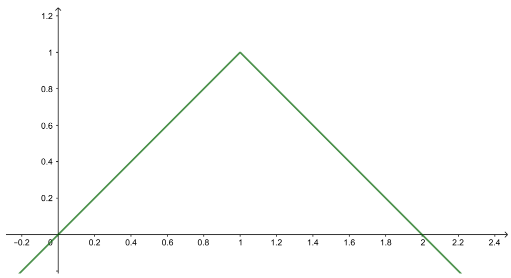
$$I = \int_C (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y$$

kde C je křivka $y = 1 - |1 - x|$ pro $0 \le x \le 2$ orientovaná zleva doprava.

Nejdříve parametrizujeme křivku jako $x = t$, $y = t$, pro $t \in [0,1]$ a $x = t$, $y = 2 - t$, pro $t \in [1,2]$. Obě tyto parametrizace začínají v levém krajním bodě a pokračují doprava. Proto jsou obě parametrizace souhlasné s orientací, dostáváme

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 (t^2 + t^2)1 + (t^2 - t^2)1\,\mathrm{d}t + \int_1^2 (t^2 + (2-t)^2)1 + (t^2 - (2-t)^2)(-1)\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_0^1 2t^2\,\mathrm{d}t + \int_1^2 (2t^2 - 4t + 4) - (4t - 4)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2t^3}{3}\right]_0^1 + \int_1^2 2t^2 - 8t + 8\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{2}{3} + \left[\frac{2t^3}{3} - 4t^2 + 8t\right]_1^2 = \frac{2}{3} + \left(\frac{16}{3} - 16 + 16 - \frac{2}{3} + 4 - 8\right) = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Funkce popisující křivku vypadá jednoduše jako posunutá absolutní hodnota se zlomem v $x = 1$ obrácená směrem dolů



Pokud bychom parametrizovali první polovinu křivky například jako $x = 1 - t$, $y = 1 - t$, dostali bychom první parametrizaci nesouhlasnou s orientací a museli bychom u prvního integrálu změnit znaménko.

Př. 435 *Vypočtěte integrál*

$$I = \int_C (x + y)\,\mathrm{d}x + (x - y)\,\mathrm{d}y$$

kde C je elipsa $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ orientovaná proti směru ručiček.

Parametrizujeme křivku C, která je elipsou. K tomu výhodně používáme zobecněné polární souřadnice $x = A\cos t$, $y = B\sin t$, pro $t \in [0, 2\pi]$. Tato parametrizace je souhlasná s orientací. Počítáme

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} (A\cos t + B\sin t)(-A\sin t) + (A\cos t - B\sin t)B\cos t\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^{2\pi} -(A^2 + B^2)\sin t\cos t + AB(\cos^2 t - \sin^2 t)\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^{2\pi} -\frac{A^2 + B^2}{2}\sin 2t + AB\cos 2t\,\mathrm{d}t = \\ &= -\frac{A^2 + B^2}{4}\left[-\cos 2t\right]_0^{2\pi} + \frac{AB}{2}\left[\sin 2t\right]_0^{2\pi} = -\frac{A^2 + B^2}{4}(-1 + 1) + \frac{AB}{2}(0 + 0) = 0. \end{aligned}$$

Druhou možností je všimnout si, že $\frac{\partial}{\partial y}(x + y) = 1 = \frac{\partial}{\partial x}(x - y)$. Tedy se jedná o diferenciál nějaké funkce $F(x, y)$. Nutně tak musí být $I = 0$.

Př. 436 *Vypočtěte integrál*

$$I = \int_C (2A - y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$$

kde C je oblouk cykloidy $x = A(t - \sin t)$, $y = A(1 - \cos t)$, pro $t \in [0, 2\pi]$, $A > 0$. Křivka je orientovaná souhlasně se zadanou parametrizací.

Tečný vektor dostaneme rovnou z parametrizace

$$\begin{aligned} x' &= A - A\cos t, \\ y' &= A\sin t. \end{aligned}$$

Počítáme

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} (2A - A + A\cos t)(A - A\cos t) + A(t - \sin t)A\sin t\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^{2\pi} A^2 - A^2\cos^2 t + A^2 t\sin t - A^2\sin^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} A^2 - A^2 + A^2 t\sin t\,\mathrm{d}t = \\ &= |\text{per partes}| = A^2\left[\sin t - t\cos t\right]_0^{2\pi} = -2A^2\pi. \end{aligned}$$

Př. 437 *Vypočtěte integrál*

$$I = \int_C \frac{x+y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x - \frac{x-y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$$

kde C je kružnice $x^2 + y^2 = A^2$ orientovaná proti směru hodinových ručiček.

Jedná se o kružnici s poloměrem A, volíme tedy parametrizaci $x = A\cos t$, $y = A\sin t$, pro $t \in [0, 2\pi]$, kde parametrizace je souhlasná s orientací křivky

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{A^2}\int_0^{2\pi} A(\cos t + \sin t)(-A\sin t) - A(\cos t - \sin t)A\cos t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{A^2}A^2\int_0^{2\pi} -\sin t\cos t - \sin^2 t - \cos^2 t + \sin t\cos t\,\mathrm{d}t = \\
&= -\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = -2\pi.
\end{aligned}$$

Př. 438 *Vypočtěte integrál*

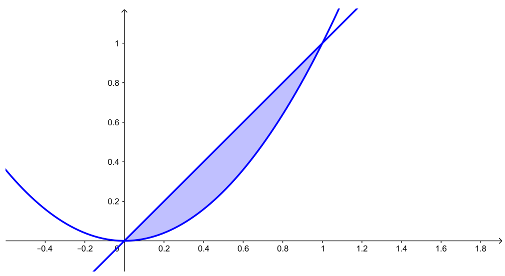
$$I=\int_C \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,\mathrm{d}y-\,\mathrm{d}x$$

kde C je hranice množiny, která je dána jako $y\le x$, $y\ge x^2$, orientovaná proti směru hodinových ručiček.

Křivku parametrizujeme po dvou částech, jako $x=t$, $y=t^2$, pro $t\in[0,1]$, která je souhlasná. Druhou část parametrizujeme jako $x=t$, $y=t$, pro $t\in[0,1]$, která není souhlasná. Počítáme

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^1 -1\cdot 1+2t\operatorname{arctg}\frac{t^2}{t}\,\mathrm{d}t-\int_0^1 -1\cdot 1+\operatorname{arctg}\frac{t}{t}\cdot 1\,\mathrm{d}t=\\
&=\int_0^1 2t\operatorname{arctg}t-1\,\mathrm{d}t-\int_0^1 -1+\operatorname{arctg}1\,\mathrm{d}t=|\text{per partes}|=\\
&=\left[2\frac{t^2\operatorname{arctg}t+\operatorname{arctg}t-t}{2}-t+t(1-\operatorname{arctg}1)\right]_0^1=\operatorname{arctg}1-1=\frac{\pi}{4}-1.
\end{aligned}$$

Křivka je hranicí množiny



Zde standardně převedeme integrovanou funkci pomocí per partes derivováním $\operatorname{arctg}x$ na integrál z racionální lomenné funkce.

Př. 439 *Vypočtěte integrál*

$$I = \int_C (y^2 - z^2)\,\mathrm{d}x + 2yz\,\mathrm{d}y - x^2\,\mathrm{d}z,$$

kde křivka C je dána jako $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, pro $t \in [0, 1]$ orientovaná ve směru růstu parametru.

Tečný vektor dostaneme derivací parametrizace jako

$$\begin{aligned} x' &= 1, \\ y' &= 2t, \\ z' &= 3t^2. \end{aligned}$$

Počítáme tudíž

$$I = \int_0^1 (t^4 - t^6) \cdot 1 + 2t^5 \cdot 2t - t^2 \cdot 3t^2\,\mathrm{d}t = \int_0^1 3t^6 - 2t^4\,\mathrm{d}t = \left[\frac{3t^7}{7} - \frac{2t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{7} - \frac{2}{5} = \frac{1}{35}.$$

Př. 440 *Vypočtěte integrál*

$$I = \int_C y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z,$$

kde křivka C je dána jako $x = A\cos t$, $y = A\sin t$, $z = Bt$, pro $t \in [0, 2\pi]$ orientovaná ve směru růstu parametru.

Počítáme integrál

$$I = \int_0^{2\pi} A\sin t(-A\sin t) + BtA\cos t + A\cos tB\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} AB(t+1)\cos t - A^2\sin^2 t\,\mathrm{d}t =$$

$$= AB\left[(t+1)\sin t + \cos t\right]_0^{2\pi} - \frac{A^2}{2}\int_0^{2\pi} 1 - \cos 2t\,\mathrm{d}t = -\frac{A^2}{2}\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{2\pi} = -A^2\pi.$$

Př. 441 *Vypočtěte integrál*

$$I = \int_C y^2\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{d}z,$$

kde křivka C je dána průnikem ploch $x^2+y^2+z^2 = A^2$ a $x^2+y^2 = Ax$, $z \geq 0$, $A > 0$. Křivka C je orientovaná proti směru hodinových ručiček při pohledu shora.

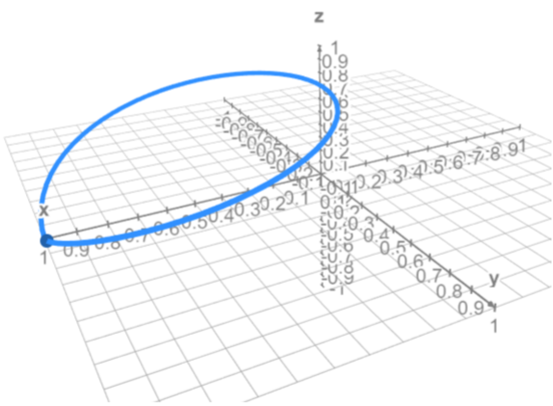
Nejdříve potřebujeme určit parametrizaci křivky. Vzhledem ke tvaru C můžeme zkusit vše transformovat do válcových souřadnic, neboť se jedná o průnik válce s poloměre $\frac{A}{2}$ a sféry s poloměrem A. Dostáváme $x = \frac{A}{2}\cos t + \frac{A}{2}$, $y = \frac{A}{2}\sin t$, $z = z$, pro $t \in [0, 2\pi]$. Následně máme

$$z = \sqrt{A^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{A^2 - Ax} = \sqrt{A^2 - \frac{A^2}{2}(1+\cos t)} = \sqrt{\frac{A^2}{2}(1-\cos t)},$$
$$z' = \frac{\frac{A^2}{2}\sin t}{\sqrt{\frac{A^2}{2}(1-\cos t)}} = \frac{A\sin t}{\sqrt{2-2\cos t}}$$

Navíc je tato parametrizace souhlasná s orientací křivky. Dostáváme tak integrál jako

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} -\frac{A^3}{8}\overbrace{\sin^3 t}^{\text{licha fce pres } x=\pi} + \frac{A^3}{4}(1-\cos t)\cos t + \frac{A^3}{8}\frac{\sin t(1+\cos t)^2}{\sqrt{2-2\cos t}}\,\mathrm{d}t = \\
&|u = 1-\cos t| = \frac{A^3}{4}\left[\sin t - \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{2\pi} + \frac{A^3}{8}\int \frac{(2-u)^2}{\sqrt{2u}}\,\mathrm{d}u = \\
&= -\frac{A^3}{4}\pi + \frac{A^3}{8\sqrt{2}}\int \frac{4}{\sqrt{u}} - 4\sqrt{u} + \sqrt{u^3}\,\mathrm{d}u = \\
&= -\frac{A^3}{4}\pi + \frac{A^3}{8\sqrt{2}}\left[8\sqrt{1-\cos t} - \frac{8}{3}\sqrt{(1-\cos t)^3} + \frac{2}{5}\sqrt{(1-\cos t)^5}\right]_0^{2\pi} = \\
&= -\frac{A^3}{4}\pi.
\end{aligned}$$

Hledaná křivka vypadá pro $A = 1$ jako



Př. 442 *Vypočtěte integrál*

$$\int_C (y^2 - z^2)\,\mathrm{d}x + (z^2 - x^2)\,\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}z,$$

kde křivka C je hranice části sféry, která je dána jako $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, pro $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Využijeme sférické souřadnice $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$. Křivka se skládá ze tří částí.

$$\begin{aligned}
C_1 &: \rho = 1, \varphi = t, \theta = \frac{\pi}{2}, \text{ pro } t \in [0, \pi/2], \text{ v rovině } xy,\\
C_2 &: \rho = 1, \varphi = \pi/2, \theta = t, \text{ pro } t \in [0, \pi/2], \text{ v rovině } yz,\\
C_3 &: \rho = 1, \varphi = 0, \theta = t, \text{ pro } t \in [0, \pi/2], \text{ v rovině } xz.
\end{aligned}$$

Jednotlivé parametrizace tak máme

	C_1	C_2	C_3
x	$\cos t$	0	$\sin t$
y	$\sin t$	$\sin t$	0
z	0	$\cos t$	$\cos t$

a jejich tečné vektory

	C_1	C_2	C_3
x'	$-\sin t$	0	$\cos t$
y'	$\cos t$	$\cos t$	0
z'	0	$-\sin t$	$-\sin t$

Musíme tedy počítat tři integrály přes tři parametrizace. Výsledkem pak bude jejich součet. Všimněme si, že parametrizace C_2 a C_3 směřují svrchu dolů a parametrizace křivky C_1 spojuje jejich koncové body v půdorysně. Křivka je uzavřená a parametrizace křivek C_1 a C_3 je opačná k parametrizaci křivky C_2. Orientace křivky není zadána, avšak integrál dostaneme až na znaménko orientace jako $I_1 - I_2 + I_3$. Už musíme jen spočítat jednotlivé integrály. První z nich je

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t - 0)(-\sin t) + (0 - \cos^2 t)\cos t + (\cos^2 t - \sin^2 t)\cdot 0\,\mathrm{d}t =\\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t + \cos^3 t\,\mathrm{d}t = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t(1 - \cos^2 t) + \cos t(1 - \sin^2 t)\,\mathrm{d}t =\\
&= \left| \begin{array}{c} u = \cos t \\ \mathrm{d}u = -\sin t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} z = \sin t \\ \mathrm{d}z = \cos t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| =\\
&= \int_1^0 1 - u^2\,\mathrm{d}u - \int_0^1 1 - z^2\,\mathrm{d}z = -2\left[z - \frac{z^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Druhý pak

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t - \cos^2 t)\cdot 0 + (\cos^2 t - 0)\cos t + (0 - \sin^2 t)(-\sin t)\,\mathrm{d}t =\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t + \sin^3 t\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Nakonec třetí integrál máme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (0 - \cos^2 t)\cos t + (\cos^2 t - \sin^2 t)\cdot 0 + (\sin^2 t - 0)(-\sin t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t + \sin^3 t\,\mathrm{d}t = -\frac{4}{3}.$$

Neboť je druhá křivka orientovaná opačně, než zbylé dvě, dostáváme celkem integrál jako ± 4, vzhledem k orientaci křivky C.

Př. 443 *Vypočtěte křivkový integrál*

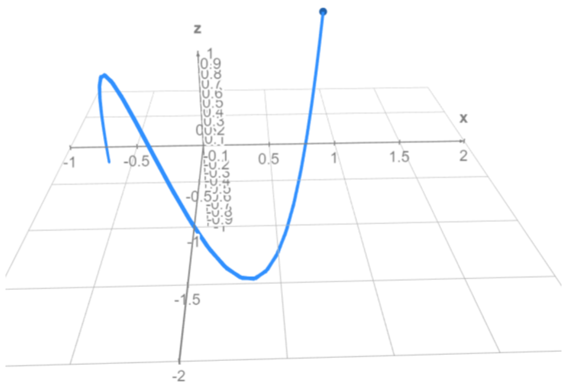
$$\int_C y^2 z^2 \,\mathrm{d}x + x^2 z^2 \,\mathrm{d}y + x^2 y^2 \,\mathrm{d}z,$$

kde C křivka parametrizovaná jako $x = A\cos t$, $y = A\cos 2t$, $z = A\cos 3t$, pro $t \in [0, 2\pi]$ s libovolnou orientací.

Integrál se můžeme pokoušet počítat. Všimněme si však, že se jedná o uzavřenou křivku, neboť $[x(0), y(0), z(0)] = [x(2\pi), y(2\pi), z(2\pi)]$ avšak vzhledem k 2π periodičnosti funkce je opisovaná křivka na intervalu $[\pi, 2\pi]$ stejná jako opisovaná křivka na intervalu $[-\pi, 0]$. Vzhledem k sudosti funkce $\cos t$ je navíc křivka na intervalu $[-\pi, 0]$ stejná jako na intervalu $[0, \pi]$, pouze s opačnou parametrizací. Rozdělíme-li křivku C na dvě části, C_1 pro $t \in [0, \pi]$ a C_2 pro $t \in [\pi, 2\pi]$, máme

$$\int_{C_1} P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z = -\int_{C_2} P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

Celkový integrál je tedy 0. Vyšetřovaná uzavřená křivka vypadá pro jisté A následovně



Situaci můžeme také ilustrovat pokud zavedeme v křivce C_2 substituci $t = -s$

$$\begin{aligned} x &= A\cos t = A\cos s, \\ y &= A\cos 2t = A\cos 2s, \\ z &= A\cos 3t = A\cos 3s. \end{aligned}$$

Zde je pro $t \in [-\pi, 0]$ rozsah $s \in [\pi, 0]$. Tento interval není zrovna správně zapsaný, ale ilustruje, že máme vskutku stejnou křivku jen s opačnou orientací, neboť začínáme pro $s = \pi$.

Př. 444 *Najděte nějaké funkce P, Q a R tak aby platilo*

$$I = \int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = 2,$$

kde křivka C je daná parametricky jako $x = t^2 + 1$, $y = t^3 \sin t$, $z = -\frac{2}{t} + 1$, pro $t \in [1, 2]$.

Integrál bychom řešili jako

$$I = \int_1^2 P \cdot 2t + Q \cdot \left(3t^2 \sin t + t^3 \cos t\right) + R \cdot \frac{2}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Vidíme, že situaci si výrazně ulehčíme, pokud bychom volili $Q = R = 0$ čímž bychom dostali pouze integrál

$$I = 2\int_1^2 P \cdot t\,\mathrm{d}t.$$

Pokud by navíc funkce P byla jen konstantní, redukuje se tato situace ještě více jako

$$I = 2P\int_1^2 t\,\mathrm{d}t = 2P\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^2 = P\,(4-1)\,.$$

Vzhledem k tomu, že je $I = 2$ máme hned $P = \frac{3}{2}$. Toto řešení je však poněkud triviální. Předpokládejme, že hledané funkce P, Q, R mají být nekonstantní. Potom se situace zkomplikuje. Řešíme integrál

$$I = \int_1^2 P \cdot 2t + Q \cdot \left(3t^2 \sin t + t^3 \cos t\right) + R \cdot \frac{2}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Můžeme si všimnout dalšího zjednodušení a to pokud je $P = \frac{1}{t}$. Jak však volit funkci $P(x, y, z)$ aby po dané křivce platilo $P = \frac{1}{t}$. Ze vztahu $x = t^2 + 1$ můžeme vyjádřit $t = \sqrt{x^2 - 1}$, a proto je takovou funkcí například $P = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. Obdobné zjednodušení bychom dostali pokud by bylo $Q = \frac{1}{t^2}$, což můžeme dostat pro $Q = \frac{1}{x-1}$. Stejně tak pro $R = t^2 = x - 1$. Ještě bychom měli někde zadat parametr, abychom měli dost volnosti pro finální výsledek. Volme například $P = \frac{A}{\sqrt{x^2-1}}$. Tím dostaneme

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 2A + 3\sin t + t\cos t + 2\,\mathrm{d}t = 2 + 2A + \left[-3\cos t + t\sin t\right]_1^2 - \int_1^2 \sin t\,\mathrm{d}t = \\ &= 2 + 2A + 3\cos 1 - 3\cos 2 + 2\sin 2 - \sin 1 + \left[\cos t\right]_1^2 = \\ &= 2 + 2A + 2\cos 1 - 2\cos 2 + 2\sin 2 - \sin 1. \end{aligned}$$

Máme-li navíc informaci, že $I = 2$ je potom

$$A = \cos 2 - \cos 1 + \frac{\sin 1}{2} - \sin 2.$$

10.3 Nezávislost na integrační cestě

Př. 445 *Ověřte, že výraz je totálním diferenciálem nějaké funkce a vypočtěte integrál*

$$\int_C y \,\mathrm{d}x + x \,\mathrm{d}y,$$

kde křivka C vede od bodu $A = [-1, 2]$ do bodu $B = [2, 3]$.

Máme $P(x, y) = y$ a $Q(x, y) = x$, kde předpokládáme, že pro nějakou neznámou funkci $F(x, y)$ platí, že je $F_x = P$ a $F_y = Q$. Neboť jsou funkce P a Q spojité a mají spojité parciální derivace, musela by platit pro neznámou funkci $F(x, y)$ Schwartzova věta, tj. $F_{xy} = F_{yx}$. Proto musíme ověřit, že platí $F_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} P(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y) = F_{xy}$. Vskutku

$$\frac{\partial}{\partial y} P(x, y) = 1 = \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y).$$

Jedná se tedy o totální diferenciál nějaké neznámé funkce $F(x, y)$. Hledaný integrál získáme pomocí této funkce jako $F(B) - F(A)$. Musíme však nejprve určit funkci $F(x, y)$. Neboť

$$\begin{aligned} F_x(x, y) &= P(x, y) \\ F(x, y) = \int F_x(x, y) \,\mathrm{d}x &= \int P(x, y) \,\mathrm{d}x = \int y \,\mathrm{d}x = xy + C(y), \end{aligned}$$

kde $C(y)$ je neznámá funkce proměnné y. Snadno si můžeme rozmyslet zpětným ověřením, že platí $\frac{\partial}{\partial x} F = y + \frac{\partial}{\partial x} C(y) = y$, že je vše v pořádku. Navíc platí $F_y(x, y) = Q(x, y)$ a tedy

$$\begin{aligned} x + C'(y) &= F_y(x, y) = x \\ C'(y) &= 0 \\ C(y) = \int C'(y) \,\mathrm{d}y &= \int 0 \,\mathrm{d}y = K, \end{aligned}$$

kde $K \in \mathbb{R}$. Dostáváme tedy $F(x, y) = xy + K$ a proto $F(B) - F(A) = 6 - (-2) = 8$.

Předpokládejme, že bychom chtěli určit integrál po přímce spojující body A a B, tj. parametrizujme křivku jako $x = -1 + 3t$, $y = 2 + t$, pro $t \in [0, 1]$. Integrál bychom tak dostali taky pomocí základní formule jako

$$\int_0^1 (2 + t) \cdot 3 + (3t - 1) \cdot 1 \,\mathrm{d}t = \int_0^1 6t + 5 \,\mathrm{d}t = \left[3t^2 + 5t\right]_0^1 = 8.$$

Skutečně nám i takto integrál vyšel stejně a dostali bychom jej pro libovolnou parametrizaci.

Př. 446 *Ověřte, že výraz je totálním diferenciálem nějaké funkce a vypočtěte integrál*

$$\int_C x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y,$$

kde křivka C vede od bodu $A = [0, 1]$ do bodu $B = [3, -4]$.

Máme $P(x, y) = x$ a $Q(x, y) = y$ a dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial y} P(x, y) = 0 = \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y).$$

Jedná se tedy o totální diferenciál nějaké neznámé funkce $F(x, y)$. Dostáváme

$$F(x, y) = \int F_x(x, y)\,\mathrm{d}x = \int P(x, y)\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + C(y),$$

kde $C(y)$ je neznámá funkce proměnné y. Navíc

$$\begin{aligned} F_y &= C'(y) = y \\ C(y) &= \int C'(y)\,\mathrm{d}y = \int y\,\mathrm{d}y = \frac{y^2}{2} + K, \end{aligned}$$

kde $K \in \mathbb{R}$. Dostáváme tedy $F(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + K$ a proto $F(B) - F(A) = \frac{9}{2} + \frac{16}{2} - \frac{0}{2} - \frac{1}{2} = 4 + 8 = 12$.

Př. 447 *Ověřte, že výraz je totálním diferenciálem nějaké funkce a vypočtěte integrál*

$$\int_C (x+y)\,\mathrm{d}x + (x-y)\,\mathrm{d}y,$$

kde křivka C vede od bodu $A = [0,1]$ do bodu $B = [2,3]$.

Máme $P(x,y) = x + y$ a $Q(x,y) = x - y$ a dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial y} P(x,y) = 1 = \frac{\partial}{\partial x} Q(x,y).$$

Jedná se tedy o totální diferenciál nějaké neznámé funkce $F(x,y)$. Dostáváme

$$F(x,y) = \int F_x(x,y)\,\mathrm{d}x = \int P(x,y)\,\mathrm{d}x = \int x + y\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + xy + C(y),$$

kde $C(y)$ je neznámá funkce proměnné y. Navíc

$$F_y = x + C'(y) = Q(x,y) = x - y$$
$$C(y) = \int C'(y)\,\mathrm{d}y = \int -y\,\mathrm{d}y = -\frac{y^2}{2} + K,$$

kde $K \in \mathbb{R}$. Dostáváme tedy $F(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} + K$ a proto $F(B) - F(A) = \frac{4}{2} + 6 - \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 8 - 4 = 4$.

Př. 448 *Ověřte, že výraz je totálním diferenciálem nějaké funkce a vypočtěte integrál*

$$\int_C (x-y)\,\mathrm{d}x + (y-x)\,\mathrm{d}y,$$

kde křivka C vede od bodu $A = [1,-1]$ do bodu $B = [1,1]$.

Máme $P(x,y) = x - y$ a $Q(x,y) = y - x$ a dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial y} P(x,y) = -1 = \frac{\partial}{\partial x} Q(x,y).$$

Jedná se tedy o totální diferenciál nějaké neznámé funkce $F(x,y)$. Dostáváme

$$F(x,y) = \int F_x(x,y)\,\mathrm{d}x = \int P(x,y)\,\mathrm{d}x = \int x - y\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - xy + C(y),$$

kde $C(y)$ je neznámá funkce proměnné y. Navíc

$$\begin{aligned} F_y &= -x + C'(y) = y - x \\ C(y) &= \int C'(y)\,\mathrm{d}y = \int y\,\mathrm{d}y = \frac{y^2}{2} + K, \end{aligned}$$

kde $K \in \mathbb{R}$. Dostáváme tedy $F(x,y) = \frac{x^2}{2} - xy + \frac{y^2}{2} + K = \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 + K$ a proto $F(B) - F(A) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2 = -2$.

Př. 449 *Ověřte, že výraz je totálním diferenciálem nějaké funkce a vypočtěte integrál*

$$\int_C \frac{y}{x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{x}\,\mathrm{d}y,$$

kde křivka C vede od bodu $A = [2,1]$ do bodu $B = [1,2]$.

Máme $P(x,y) = \frac{y}{x^2}$ a $Q(x,y) = -\frac{1}{x}$ a dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y) = \frac{1}{x^2} = \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y).$$

Jedná se tedy o totální diferenciál nějaké neznámé funkce $F(x,y)$. Dostáváme

$$F(x,y) = \int F_x(x,y)\,\mathrm{d}x = \int P(x,y)\,\mathrm{d}x = \int \frac{y}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{y}{x} + C(y),$$

kde $C(y)$ je neznámá funkce proměnné y. Navíc

$$\begin{aligned} F_y &= -\frac{1}{x} + C'(y) = -\frac{1}{x} \\ C(y) &= \int C'(y)\,\mathrm{d}y = \int 0\,\mathrm{d}y = K, \end{aligned}$$

kde $K \in \mathbb{R}$. Dostáváme tedy $F(x,y) = -\frac{y}{x} + K$ a proto $F(B) - F(A) = -\frac{2}{1} - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$.

Př. 450 *Ověřte, že výraz je totálním diferenciálem nějaké funkce a vypočtěte integrál*

$$\int_C \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y,$$

kde křivka C vede od bodu $A=[1,0]$ do bodu $B=[6,8]$ a neprochází počátkem.

Máme $P(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ a $Q(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ a dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y) = -\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} = \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y).$$

Jedná se tedy o totální diferenciál nějaké neznámé funkce $F(x,y)$. Dostáváme

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int F_x(x,y)\,\mathrm{d}x = \int P(x,y)\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x = \\ &= \left| \begin{array}{c} t = x^2+y^2 \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C(y) = \sqrt{x^2+y^2} + C(y), \end{aligned}$$

kde $C(y)$ je neznámá funkce proměnné y. Navíc

$$\begin{aligned} F_y = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} + C'(y) &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ C(y) = \int C'(y)\,\mathrm{d}y &= \int 0\,\mathrm{d}y = K, \end{aligned}$$

kde $K \in \mathbb{R}$. Dostáváme tedy $F(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+K$ a proto $F(B)-F(A)=\sqrt{36+64}-1=9$.

Př. 451 *Ověřte, že výraz je totálním diferenciálem nějaké funkce a vypočtěte integrál*

$$\int_C (x^4 + 4xy^3)\,\mathrm{d}x + (6x^2y^2 - 5y^4)\,\mathrm{d}y,$$

kde křivka C vede od bodu $A = [-2, -1]$ do bodu $B = [3, 0]$.

Máme $P(x, y) = x^4 + 4xy^3$ a $Q(x, y) = 6x^2y^2 - 5y^4$ a dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial y} P(x, y) = 12xy^2 = \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y).$$

Jedná se tedy o totální diferenciál nějaké neznámé funkce $F(x, y)$. Dostáváme

$$F(x, y) = \int F_x(x, y)\,\mathrm{d}x = \int P(x, y)\,\mathrm{d}x = \int x^4 + 4xy^3\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{x^5}{5} + \frac{4x^2y^3}{2} + C(y) = \frac{x^5}{5} + 2x^2y^3 + C(y),$$

kde $C(y)$ je neznámá funkce proměnné y. Navíc

$$F_y = 6x^2y^2 + C'(y) = 6x^2y^2 - 5y^4$$
$$C(y) = \int C'(y)\,\mathrm{d}y = \int -5y^4\,\mathrm{d}y = -y^5 + K,$$

kde $K \in \mathbb{R}$. Dostáváme tedy $F(x, y) = \frac{x^5}{5} + 2x^2y^3 - y^5 + K$ a proto $F(B) - F(A) = \frac{3^5}{5} - \left(-\frac{32}{5} - 8 + 1\right) = \frac{243+32}{5} + 7 = 62.$

Př. 452 *Ověřte, že výraz je totálním diferenciálem nějaké funkce a vypočtěte integrál*

$$\int_C \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right) \mathrm{d}x + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right) \mathrm{d}y,$$

kde křivka C vede od bodu $A = [1, \pi]$ do bodu $B = [2, \pi]$, kde křivka C neprotíná osu y.

Máme $P(x, y) = \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)$ a $Q(x, y) = \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)$ a dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x, y) = -2\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x} = \frac{\partial}{\partial x}Q(x, y)$$

Jedná se tedy o totální diferenciál nějaké neznámé funkce $F(x, y)$. Můžeme si vybrat přes kterou proměnnou chceme integrovat první a z toho nám vyplývá daný integrál. Integrál z funkce $\int P(x, y)\,\mathrm{d}x$ bychom museli roztrhnout na dvě části a pro integrování části obsahující kosinus bychom museli zavést vhodně substituci $t = \frac{y}{x}$. Stejně tak můžeme nejdřív hledat funkci vzhledem k proměnné x, podle toho co se nám zdá výhodnější. Dostáváme

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int F_y(x, y)\,\mathrm{d}y = \int Q(x, y)\,\mathrm{d}y = \int \sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\,\mathrm{d}y = \\ &= |\text{per partes}| = -x\cos\frac{y}{x} + y\sin\frac{y}{x} + x\cos\frac{y}{x} + C(x) = y\sin\frac{y}{x} + C(x), \end{aligned}$$

kde $C(x)$ je neznámá funkce proměnné x. Navíc

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x} + C'(x) = 1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x} \\ C(x) &= \int C'(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x = x + K, \end{aligned}$$

kde $K \in \mathbb{R}$. Dostáváme tedy $F(x, y) = y\sin\frac{y}{x} + x + K$ a proto $F(B) - F(A) = \pi\sin\frac{\pi}{2} + 2 - \pi\sin\pi - 1 = \pi + 1$.

Př. 453 *Ověřte, že výraz je totálním diferenciálem nějaké funkce a vypočtěte integrál*

$$\int_C \mathrm{e}^x \cos y \,\mathrm{d}x - \mathrm{e}^x \sin y \,\mathrm{d}y,$$

kde křivka C vede od bodu $A = [0,0]$ do bodu $B = [M,N]$, kde $M,N \in \mathbb{R}$.

Máme $P(x,y) = \mathrm{e}^x \cos y$ a $Q(x,y) = -\mathrm{e}^x \sin y$ a dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial y} P(x,y) = -\mathrm{e}^x \sin y = \frac{\partial}{\partial x} Q(x,y).$$

Jedná se tedy o totální diferenciál nějaké neznámé funkce $F(x,y)$. Dostáváme

$$F(x,y) = \int F_x(x,y)\,\mathrm{d}x = \int P(x,y)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x \cos y \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \cos y + C(y),$$

kde $C(y)$ je neznámá funkce proměnné y. Všimněme si zde, že je zde $\cos y$ bráno jako konstanta. Navíc

$$\begin{aligned} F_y &= -\mathrm{e}^x \sin y + C'(y) = -\mathrm{e}^x \sin y \\ C(y) &= \int C'(y)\,\mathrm{d}y = \int 0 \,\mathrm{d}y = K, \end{aligned}$$

kde $K \in \mathbb{R}$. Dostáváme tedy $F(x,y) = \mathrm{e}^x \cos y + K$ a proto $F(B) - F(A) = \mathrm{e}^M \cos N - 1$.

Př. 454 *Ověřte, že výraz je totálním diferenciálem nějaké funkce a vypočtěte integrál*

$$\int_C x\,\mathrm{d}x + y^2\,\mathrm{d}y - z^3\,\mathrm{d}z,$$

kde křivka C vede od bodu $A = [1, 1, 1]$ do bodu $B = [2, 3, -4]$.

Máme $P(x, y, z) = x$, $Q(x, y, z) = y^2$ a $R(x, y, z) = -z^3$ a předpokládejme, že existuje funkce $F(x, y, z)$ pro niž je to totálním diferenciálem. Tedy $F_x = P$, $F_y = Q$, $F_z = R$. Neboť jsou však funkce P, Q, R spojité a mají spojité parciální derivace, muselo by dle Schwartzovy věty platit, že je $F_{xy} = F_{yx}$, $F_{yz} = F_{zy}$, $F_{xz} = F_{zx}$, proto dostáváme

$$\begin{aligned} F_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y}P(x, y, z) = 0 = \frac{\partial}{\partial x}Q(x, y, z) = F_{yx}, \\ F_{xz} &= \frac{\partial}{\partial z}P(x, y, z) = 0 = \frac{\partial}{\partial x}R(x, y, z) = F_{zx}, \\ F_{yz} &= \frac{\partial}{\partial z}Q(x, y, z) = 0 = \frac{\partial}{\partial y}R(x, y, z) = F_{zy}. \end{aligned}$$

Tato podmínka je navíc postačující podmínkou na to, aby funkce $F(x, y, z)$ existovala. Tudíž se jedná o totální diferenciál nějaké funkce $F(x, y, z)$. Máme

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= \int F_x(x, y, z)\,\mathrm{d}x = \int P(x, y, z)\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{x^2}{2} + C(y, z), \end{aligned}$$

kde $C(y, z)$ je neznámá funkce proměnných y, z. Parciální derivací této derivace $\frac{\partial}{\partial x}C(y, z) = 0$ vidíme, že tato neznámá funkce derivaci F_x neovlivní a tedy ani funkci $P(x, y, z)$. Navíc

$$\begin{aligned} C_y &= F_y = Q(x, y, z) = y^2 \\ C(y, z) &= \int C_y(y, z)\,\mathrm{d}y = \int y^2\,\mathrm{d}y = \frac{y^3}{3} + K(z), \end{aligned}$$

kde $K(z)$ je neznámá funkce proměnné z. Nakonec

$$\begin{aligned} K'(z) &= F_z = R(x, y, z) = -z^3 \\ K(z) &= \int -z^3\,\mathrm{d}z = -\frac{z^4}{4} + L, \end{aligned}$$

kde $L \in \mathbb{R}$. Dostáváme tedy $F(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{z^4}{4} + L$ a proto $F(B) - F(A) = \frac{4}{2} + \frac{27}{3} - \frac{4 \cdot 64}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = -53 - \frac{7}{12}$.

Př. 455 *Ověřte, že výraz je totálním diferenciálem nějaké funkce a vypočtěte integrál*

$$\int_C yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z,$$

kde křivka C vede od bodu $A = [1, 2, 3]$ do bodu $B = [6, 1, 1]$.

Máme $P(x, y, z) = yz$, $Q(x, y, z) = xz$ a $R(x, y, z) = xy$, dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}P(x, y, z) = z &= \frac{\partial}{\partial x}Q(x, y, z),\\
\frac{\partial}{\partial z}P(x, y, z) = y &= \frac{\partial}{\partial x}R(x, y, z),\\
\frac{\partial}{\partial z}Q(x, y, z) = x &= \frac{\partial}{\partial y}R(x, y, z).
\end{aligned}$$

Jedná se tedy o totální diferenciál nějaké neznámé funkce $F(x, y, z)$. Dostáváme

$$\begin{aligned}
&F(x, y, z) = \int F_x(x, y, z)\,\mathrm{d}x = \int P(x, y, z)\,\mathrm{d}x = \int yz\,\mathrm{d}x = \\
&= xyz + C(y, z),
\end{aligned}$$

kde $C(y, z)$ je neznámá funkce. Navíc

$$\begin{aligned}
xz + C_y = F_y &= Q(x, y, z) = xz\\
C(y, z) = \int C_y(y, z)\,\mathrm{d}y &= \int 0\,\mathrm{d}y = K(z),
\end{aligned}$$

kde $K(z)$ je neznámá funkce. Tedy $F(x, y, z) = xyz + K(z)$. Nakonec

$$\begin{aligned}
xy + K'(z) = F_z &= R(x, y, z) = xy\\
K(z) &= \int 0\,\mathrm{d}z = L,
\end{aligned}$$

kde $L \in \mathbb{R}$. Dostáváme tedy $F(x, y, z) = xyz + L$ a proto $F(B) - F(A) = 6 - 3! = 0$.

Př. 456 *Ověřte, že výraz je totálním diferenciálem nějaké funkce a vypočtěte integrál*

$$\int_C \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}y + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}z,$$

kde křivka C vede od bodu ležícím na sféře $x^2+y^2+z^2 = A^2$ do bodu ležícím na sféře $x^2+y^2+z^2 = B^2$, pro $A > 0, B > 0$.

Máme $P(x,y,z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $Q(x,y,z) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ a $R(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}P(x,y,z) &= -\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y,z),\\
\frac{\partial}{\partial z}P(x,y,z) &= -\frac{xz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = \frac{\partial}{\partial x}R(x,y,z),\\
\frac{\partial}{\partial z}Q(x,y,z) &= -\frac{yz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = \frac{\partial}{\partial y}R(x,y,z).
\end{aligned}$$

Jedná se tedy o totální diferenciál nějaké funkce $F(x,y,z)$. Dostáváme

$$\begin{aligned}
&F(x,y,z) = \int F_x(x,y,z)\,\mathrm{d}x = \int P(x,y,z)\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}x = \\
&= \sqrt{x^2+y^2+z^2} + C(y,z),
\end{aligned}$$

kde $C(y,z)$ je neznámá funkce. Funkci $F(x,y,z)$ zde dostaneme substitucí $t = x^2+y^2+z^2$ nebo ji taky můžeme uhádnout podle z procesu derivování funkcí P, Q, R. V dalším kroku máme

$$\begin{aligned}
\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + C_y = F_y = Q(x,y,z) &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\
C(y,z) = \int C_y(y,z)\,\mathrm{d}y &= \int 0\,\mathrm{d}y = K(z),
\end{aligned}$$

kde $K(z)$ je neznámá funkce. Tedy $F(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + K(z)$. Nakonec

$$\begin{aligned}
\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + K'(z) = F_z = R(x,y,z) &= \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\
K(z) &= \int 0\,\mathrm{d}z = L,
\end{aligned}$$

kde $L \in \mathbb{R}$. Celkově tak máme $F(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + L$ a proto $F(B) - F(A) = B - A$.

Př. 457 *Ukažte, že je vektorové pole potenciálové (tj. je totálním diferenciálem) a vypočtěte integrál*

$$\int_C (x^2 + yz)\,\mathrm{d}x + (y^2 + xz)\,\mathrm{d}y + (z^2 + xy)\,\mathrm{d}z,$$

kde křivka C *vede z bodu* $[1, -2, 3]$ *do bodu* $[2, 3, 4]$.

Máme $P(x, y, z) = x^2 + yz$, $Q(x, y, z) = y^2 + xz$ a $R(x, y, z) = z^2 + xy$, dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}P(x, y, z) = z = \frac{\partial}{\partial x}Q(x, y, z),\\ \frac{\partial}{\partial z}P(x, y, z) = y = \frac{\partial}{\partial x}R(x, y, z),\\ \frac{\partial}{\partial z}Q(x, y, z) = x = \frac{\partial}{\partial y}R(x, y, z).\end{aligned}$$

Jedná se tedy o totální diferenciál nějaké funkce $F(x, y, z)$. Dostáváme

$$\begin{aligned}&F(x, y, z) = \int F_x(x, y, z)\,\mathrm{d}x = \int P(x, y, z)\,\mathrm{d}x = \int x^2 + yz\,\mathrm{d}x =\\ &= \frac{x^3}{3} + xyz + C(y, z),\end{aligned}$$

kde $C(y, z)$ je neznámá funkce. V dalším kroku máme

$$\begin{aligned}xz + C_y = F_y = Q(x, y, z) = y^2 + xz\\ C(y, z) = \int C_y(y, z)\,\mathrm{d}y = \int y^2\,\mathrm{d}y = \frac{y^3}{3} + K(z),\end{aligned}$$

kde $K(z)$ je neznámá funkce. Tedy $F(x, y, z) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + xyz + K(z)$. Nakonec

$$\begin{aligned}xy + K'(z) = F_z = R(x, y, z) = z^2 + xy\\ K(z) = \int z^2\,\mathrm{d}z = \frac{z^3}{3} + L,\end{aligned}$$

kde $L \in \mathbb{R}$. Celkově tak máme $F(x, y, z) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^3}{3} + xyz + L$ a proto $F(B) - F(A) = 56 + \frac{1}{3}$.

Př. 458 *Najděte nějakou kmenovou funkci F a funkci P tak, aby bylo udané vektorové pole potenciálové pokud navíc víte, že platí*

$$I = \int_C P\,\mathrm{d}x + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y - \frac{xy}{z^2}\,\mathrm{d}z = -4,$$

kde křivka C začíná v bodě $[4,1,4]$ a končí v bodě $[-2,2,2]$.

Aby bylo vektorové pole potenciálové, musí být splněny podmínky

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}P(x,y,z) &= \frac{1}{z} + \frac{1}{y^2} = \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y,z),\\ \frac{\partial}{\partial z}P(x,y,z) &= -\frac{y}{z^2} = \frac{\partial}{\partial x}R(x,y,z).\end{aligned}$$

Jak tedy volit funkci P? Integrací druhé podmínky dostaneme

$$P = -\int \frac{y}{z^2}\,\mathrm{d}z = \frac{y}{z} + \alpha(x,y),$$

pro nějakou neznámou funkci $C_1(x,y)$. Zderivujeme-li tuto podmínku znovu vzhledem k proměnné y dostaneme

$$\begin{aligned}P_y = \frac{1}{z} + \alpha_y &= \frac{1}{z} + \frac{1}{y^2}\\ \alpha_y &= \frac{1}{y^2}\\ \alpha &= -\frac{1}{y} + \beta(x).\end{aligned}$$

Funkci $\beta(x)$ není neznáme přesně, ale víme, že se jedná o funkci proměnné x. Kmenovou funkci F pak dostaneme podobně jako

$$\begin{aligned}F &= -\int \frac{xy}{z^2}\,\mathrm{d}z = \frac{xy}{z} + \gamma(x,y),\\ F_y &= \frac{x}{z} + \gamma_y = \frac{x}{z} + \frac{x}{y^2},\\ \gamma &= \int \frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}y = -\frac{x}{y} + \delta(x),\\ F &= \frac{xy}{z} - \frac{x}{y} + \delta(x)\\ F_x &= \frac{y}{z} - \frac{1}{y} + \delta' = \frac{y}{z} - \frac{1}{y} + \beta(x)\\ \delta' &= \beta(x).\end{aligned}$$

Neboť má být vektorové pole F potenciálové, dostaneme

$$I = -4 = F(-2,2,2) - F(4,1,4) = -2 + 1 + \delta(-2) - (1 - 4 + \delta(4)) = 2 + \delta(-2) - \delta(4)$$
$$\delta(4) - \delta(-2) = 6.$$

Hledáme vhodnou funkci $\delta(x)$, která by splňovala tuto rovnost. Takovou funkcí může být například $\delta(x) = Ax$, pro nějakou konstantu A. V takovém případě bychom měli

$$\begin{aligned}4A + 2A &= 6\\ A &= 1.\end{aligned}$$

V takovém případě je potom $F = \frac{xy}{z} - \frac{x}{y} + x$ a $P = \frac{y}{z} - \frac{1}{y} + 1$.

10.4 Aplikace křivkového integrálu 2. druhu

Př. 459 *Vypočtěte práci, která je vykonána při přemístění bodu jednotkové hmotnosti ve vektorovém poli*

$$F = \frac{\boldsymbol{k}}{x^2 + y^2 + z^2},$$

po křivce, která je dána průnikem ploch $x^2 + y^2 = 4$ *a* $x + z = 2$*. Dráha bodu začíná v* $[2, 0, 0]$ *a končí v* $[-2, 0, 4]$ *a obíháme stejnou dráhu maximálně jednou.*

Práci hmotného bodu spočteme jako křivkový integrál 2. druhu. Nejprve parametrizujeme křivku C. Protože křivka leží na válci $x^2+y^2 = 4$, můžeme ji parametrizovat pomocí válcových souřadnic jako $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$. Protože však křivka leží také v rovině $x + z = 2$ dostaneme také vztah $z = 2 - x = 2 - 2\cos t$ a máme tak již kompletní parametrizaci křivky C. Křivka začíná v bodě $[2, 0, 0]$ a pokud bychom ze soustavy $2\cos t = 2$, $\sin t = 0$, $2 - 2\cos t = 0$ vyjádřili parametr t, dostali bychom $t = 0$. Obdobným způsobem bychom dostali koncový bod pro $t = \pi$. Nutně vidíme, že křivka je orientovaná souhlasně s parametrizací. Tečný vektor ke křivce C je daný jako

$$v = (-2\sin t, 2\cos t, 2\sin t).$$

Práci tak máme

$$\begin{aligned} W &= \int_0^\pi \frac{1}{4\cos^2 t + 4\sin^2 t + 4(1-\cos t)^2} \cdot 2\sin t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\sin t}{1 + (1-\cos t)^2} \, \mathrm{d}t = \\ &= |s = \cos t| = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{1}{1+(1-s)^2} \, \mathrm{d}s = |r = s - 1| = \frac{1}{2}\int_{-2}^0 \frac{1}{1+r^2} \, \mathrm{d}r = \\ &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg} r\right]_{-2}^0 = \frac{1}{2}\left(0 - \operatorname{arctg}(-2)\right) = \frac{\operatorname{arctg} 2}{2} \approx 0,55. \end{aligned}$$

Tohle je však jen jedna možnost. V tomto výpočtu jsme tiše předpokládali, že je $y \geq 0$ což vidíme z intervalu $t \in [0, \pi]$. Avšak stejně tak se můžeme pohybovat po druhé části křivky C, kde je $t \in [\pi, 2\pi]$. V tomto případě by však byla parametrizace nesouhlasná a dostali bychom úplně stejným způsobem

$$W = -\int_\pi^{2\pi} \frac{1}{4\cos^2 t + 4\sin^2 t + 4(1-\cos t)^2} \cdot 2\sin t \, \mathrm{d}t$$

Vzhledem k periodičnosti integrované funkce by však vyšel tento výsledek stejně.

Př. 460 *Vypočtěte práci, která je vykonána při přemístění bodu jednotkové hmotnosti ve vektorovém poli*

$$F = \frac{z\boldsymbol{k}}{x^2 + y^2 + z^2},$$

po křivce, která je dána průnikem ploch $x^2 + y^2 = 4$ a $x^2 + (z-2)^2 = 4$. Dráha bodu začíná v $[2,0,2]$ a končí v $[0,2,0]$ a křivku obíháme nejvýše jednou. Ukažte jak se výsledek liší v závislosti na orientaci křivky C.

Práci hmotného bodu spočteme jako křivkový integrál 2. druhu. Nejprve parametrizujeme křivku C. Protože křivka leží na válci $x^2+y^2 = 4$, můžeme ji parametrizovat pomocí válcových souřadnic jako $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$. Protože však křivka leží také na válci $x^2 + (z-2)^2 = 4$ můžeme do této rovnice dosadit z druhého vztahu $x^2 - 4 = y^2$ čímž získáme

$$(z-2)^2 = y^2.$$

Takto snadno dostaneme $z = 2 \pm |y| = 2 \pm 2|\sin t|$. Neboť na křivce leží bod $[0,2,0]$ musíme zvolit větev $z = 2 - 2|\sin t|$ neboť pro $z = 2 + |y|$ je $z > 2$. Počáteční bod získáme pro $t = 0$ a koncový pro $t = \frac{\pi}{2}$. Parametrizace je tedy souhlasná s orientací a $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. V takovém případě by pak platilo $z = 2 - 2\sin t$. Tečný vektor parametrizace máme $v = (-2\sin t, 2\cos t, -2\cos t)$. Práci bychom tudíž měli

$$\begin{aligned}
W_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 - 2\sin t}{4 + 4(1-\sin t)^2} \cdot (-2)\cos t \,\mathrm{d}t = |s = \sin t| = -\int_0^1 \frac{1-s}{4 + 4(1-s)^2}\,\mathrm{d}s = \\
&= |r = s - 1| = -\int_{-1}^0 \frac{-r}{1+r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\int_{-1}^0 \frac{2r}{1+r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\left[\ln|1+r^2|\right]_{-1}^0 = \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln(1) - \ln 2\right) = -\ln\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

I zde si musíme uvědomit, že volba intervalu $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ odpovídá pouze jedné části křivky. Stejně tak bychom mohli bodem pohybovat po části $t \in \left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$. Specifikace počátečního bodu zde totiž nestačí k určení správné části křivky. Navíc takový pohyb by byl nesouhlasný s naší orientací. V takovém případě bychom měli

$$z = \begin{cases} 2 - 2\sin t, & t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \\ 2 + 2\sin t, & t \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Z těchto důvodů bychom rozdělili křivku na dvě části C_1 pro $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ a druhou část C_2 pro $t \in [\pi, 2\pi]$. Tím bychom měli práci jako

$$\begin{aligned}
W_2 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2 - 2\sin t}{4 + 4(1-\sin t)^2} \cdot (-2)\cos t\,\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{2 + 2\sin t}{4 + 4(1+\sin t)^2} \cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t = |s = \sin t| = \\
&= -\int_0^1 \frac{1-s}{1 + (1-s)^2}\,\mathrm{d}s + \int_{0(t=\pi)}^{-1\left(t=\frac{3\pi}{2}\right)} \frac{1+s}{1+(1+s)^2}\,\mathrm{d}s + \int_{-1\left(t=\frac{3\pi}{2}\right)}^{0(t=2\pi)} \frac{1+s}{1+(1+s)^2}\,\mathrm{d}s = \\
&= |r = s - 1| = \int_{-1}^0 \frac{r}{1+r^2}\,\mathrm{d}r - \int_{-1}^0 \frac{1+s}{1+(1+s)^2}\,\mathrm{d}s + \int_{-1}^0 \frac{1+s}{1+(1+s)^2}\,\mathrm{d}s = \\
&= \int_{-1}^0 \frac{r}{1+r^2}\,\mathrm{d}r = -\ln\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

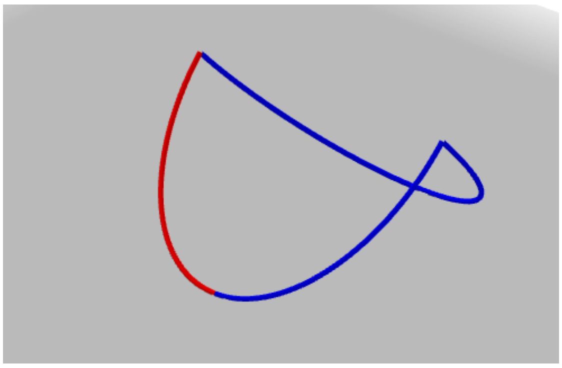
I zde vidíme, že je práce stejná nezávisle na volbě orientace a závisí pouze na počátečním bodě. Ačkoliv by se to mohlo zdát, vektorové pole zde není potenciálové. Zkusme ale například uvažovat v prvním případě W_1 pouze pro $t \in [0, \pi]$ a ve druhém případě W_2 pro $t \in [\pi, 2\pi]$. Potom bychom měli pomocí stejných argumentů, že

$$W_1 = -2 \ln \sqrt{2}.$$

Zatímco práce přes druhou křivku by nám vyšla (jak jsme již spočítali) jako

$$W_2 = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{2 + 2\sin t}{4 + 4(1 + \sin t)^2} \cdot 2\cos t \, \mathrm{d}t = 0.$$

Uvažovanou křivku C můžeme vykreslit



Červená část popisuje křivku pro $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ a modrá část popisuje křivku pro $t \in \left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$.

Př. 461 *Vypočtěte práci, která je vykonána při přemístění bodu jednotkové hmotnosti ve vektorovém poli*

$$F = (y, x, xyz),$$

po křivce, která je dána šroubovicí $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = t$, *pro* $t \in [0, 2\pi]$. *Dráha bodu stoupá do výšky.*

Práci dostaneme jako křivkový integrál 2.druhu. Navíc je křivka parametrizovaná a vidíme, že vzhledem k orientaci a vztahu $z = t$ je tato parametrizace souhlasná s orientací. Tečný vektor ke křivce je daný jako

$$v = (-2\sin t, 2\cos t, 1).$$

Máme tak vše co potřebujeme znát k převedení křivkového integrálu na Riemannův integrál funkce jedné proměnné. Rovnou můžeme počítat práci jako integrál ze skalárního součinu vektorového pole a tečného vektoru

$$\begin{aligned}
W &= \int_0^{2\pi} 2\sin t \cdot (-2)\sin t + 2\cos t \cdot 2\cos t + 4t \sin t \cos t \cdot 1 \, \mathrm{d}t = \\
&= \int_0^{2\pi} -4\sin^2 t + 4\cos^2 t + 2t \sin 2t \, \mathrm{d}t = |\text{per partes}| = \\
&= \int_0^{2\pi} 4\cos 2t \, \mathrm{d}t + \left[-2t \frac{\cos 2t}{2} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} -\cos 2t \, \mathrm{d}t = \\
&= [2\sin 2t]_0^{2\pi} - 2\pi + \left[\frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{2\pi} = -2\pi.
\end{aligned}$$

Př. 462 *Vypočtěte práci, která je vykonána při přemístění bodu jednotkové hmotnosti ve vektorovém poli*

$$F = (y, x),$$

po křivce, která je dána sinusoidou $y = \sin x$, pro $t \in [0, \pi]$. Dráha bodu začíná v okamžiku $x = \pi$ a končí v bodě $x = 0$.

Práci dostaneme jako křivkový integrál 2.druhu. Křivka je zadaná explicitně, a proto ji můžeme parametrizovat hned jako $x = t$ a $y = \sin t$, pro $t \in [0, \pi]$. Tato parametrizace je nesouhlasná s orientací. Tečný vektor parametrizace máme

$$v = (1, \cos t).$$

Práci bychom tak měli

$$W = -\int_0^\pi \sin t \cdot 1 + t \cdot \cos t \,\mathrm{d}t = |\text{per partes}| = -\left[-\cos t + t \sin t\right]_0^\pi + \int_0^\pi \sin t \,\mathrm{d}t =$$
$$= \left[\cos t - t \sin t - \cos t\right]_0^\pi = \left[-t \sin t\right]_0^\pi = 0.$$

Všimněme si však také, že uvedené vektorové pole je potenciálové neboť $P = y$ a $Q = x$ splňují $P_x = 1 = Q_y$. Z těchto důvodů by stačilo spočítat práci pouze dosazením bodů do kmenové funkce. Tu bychom měli

$$F = \int P \,\mathrm{d}x = \int y \,\mathrm{d}x = xy + C(y),$$
$$x + C' = Q = x \Rightarrow C' = 0,$$

a tedy $F(x, y) = xy + K$, pro nějakou konstantu $K \in \mathbb{R}$. Práci bychom tedy měli

$$W = F(\pi, 0) - F(0, 0) = 0 - 0 = 0.$$

Př. 463 *Vypočtěte práci, která je vykonána při přemístění bodu jednotkové hmotnosti ve vektorovém poli*

$$F = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j},$$

po řetězovce $y = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$. *Bod začíná pohyb v okamžiku* $x = -2$ *a končí v okamžiku* $x = 2$.

Práci dostaneme jako křivkový integrál 2.druhu. Křivka je zadaná explicitně, a proto ji můžeme parametrizovat hned jako $x = t$ a $y = \mathrm{e}^{\frac{t}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$. Na druhou stranu nic nám nebrání volit malinko lepší parametrizaci jako $x = 2t$, $y = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}$, pro $t \in [-1, 1]$. Takto se vyhneme zlomkům v tečném vektoru parametrizace, a proto se rozhodneme pro tuto druhou parametrizaci. Tečný vektor parametrizace je

$$v = (2, \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}).$$

Práci tak máme

$$W = \int_{-1}^{1} 2t \cdot 2 + \underbrace{\left(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}\right)\left(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}\right)}_{(a+b)(a-b)} \,\mathrm{d}t = \left[2t^2\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-2t} \,\mathrm{d}t =$$

$$= 0 + \left[\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{\mathrm{e}^2}{2} + \frac{\mathrm{e}^{-2}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-2}}{2} - \frac{\mathrm{e}^2}{2} = 0.$$

I zde si všimněme, že je vektorové pole potenciálové neboť funkce $P = x$, $Q = y$ splňují $P_y = 0 = Q_x$. Z těchto důvodů by stačilo spočítat práci pouze dosazením bodů do kmenové funkce. Tu bychom měli

$$F = \int P \,\mathrm{d}x = \int x \,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + C(y),$$

$$C' = Q = y \Rightarrow C = \int y \,\mathrm{d}y = \frac{y^2}{2} + K,$$

a tedy $F(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + K$, pro nějakou konstantu $K \in \mathbb{R}$. Práci bychom tedy měli

$$W = F\left(2, \mathrm{e}^1 + \mathrm{e}^{-1}\right) - F\left(-2, \mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^1\right).$$

Vzhledem k tomu, že se tyto body liší pouze o x-ovou souřadnici, tak máme

$$W = \frac{2^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2} = 0.$$

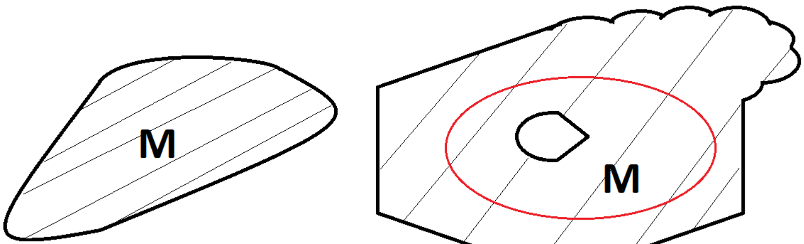
11 Greenova věta

Nechť M je jednoduše souvislá oblast a C je uzavřená, jednoduchá (neprotíná sama sebe), kladně orientovaná (proti směru hodinových ručiček) křivka v M. Nechť funkce P, Q, P_y, Q_x jsou na množině $\overline{M}$ spojité, pak platí

$$\int_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint_G Q_x(x,y) - P_y(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde G je množina, kterou uvnitř ohraničuje křivka C.

Množina M je jednoduše souvislá, pokud lze každou jednoduchou uzavřenou křivku C ležící v množině M spojitě stáhnout do bodu.

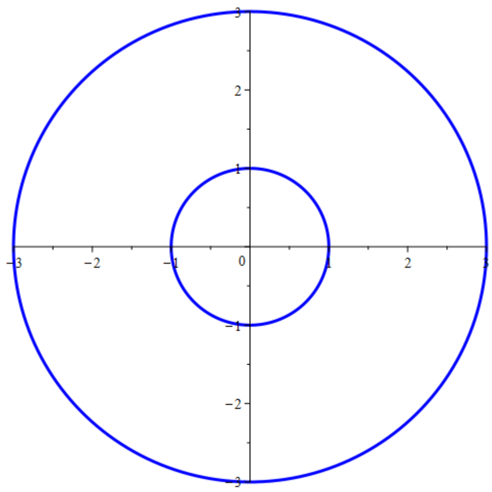


Jednoduše souvislá M

Není jednoduše souvislá

(červená smyčka nelze stáhnout spojitě do bodu)

Uvažujme po částech hladkou křivku C, která je dána parametricky jako $x = (2+\operatorname{sgn}^* t)\cos t$, $y = (2+\operatorname{sgn}^* t)\sin t$, pro $t \in [-2\pi, 2\pi]$, kde uvažujeme funkci $\operatorname{sgn}^* x = \operatorname{sgn} x$, pro $x \neq 0$ a $\operatorname{sgn}^* 0 = 1$. Křivka je orientovaná souhlasně s parametrizací. Takto zadaná křivka sice není hladká, ale je hladká na intervalech $[-2\pi, 0)$ a $[0, 2\pi]$, tedy je po částech hladká. Pokud bychom si ji zobrazili, vypadala by následovně



Křivku tvoří dvě nesouvislé kružnice a není jisté, zda bychom takovou množinu mohli ještě nazývat křivkou. Dvě kružnice mezi sebou uzavírají množinu M vymezenou nerovnostmi jako

$1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$. Tato množina dozajista není souvislá. Počítejme tedy následující křivkový integrál 2. druhu pro $P(x,y) = x+1$, $Q(x,y) = x + y^2$. Máme

$$\int_C x + 1\,\mathrm{d}x + (x+y^2)\,\mathrm{d}y = \int_{-2\pi}^{0} (\cos t + 1)\cdot(-\sin t) + (\cos t + \sin^2 t)\cdot \cos t\,\mathrm{d}t +$$
$$+ \int_0^{2\pi} (3\cos t + 1)\cdot(-3\sin t) + (3\cos t + 9\sin^2 t)\cdot 3\cos t\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_{-2\pi}^{0} -\frac{\sin 2t}{2} - \sin t + \cos^2 t + \sin^2 t\cos t\,\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} -\frac{9\sin 2t}{2} - 3\sin t + 9\cos^2 t + 27\sin^2 t\cos t\,\mathrm{d}t =$$
$$= \left[\frac{\cos 2t}{4} + \cos t + \frac{2t + \sin 2t}{4} + \frac{\sin^3 t}{3}\right]_{-2\pi}^{0} + \left[\frac{9\cos 2t}{4} + 3\cos t + 9\frac{2t+\sin 2t}{4} + 9\sin^3 t\right]_0^{2\pi} =$$
$$= \pi + 9\pi = 10\pi.$$

Pokud bychom se pokusili daný integrál převést pomocí Greenovy věty dostali bychom $Q_x(x,y) - P_y(x,y) = 1$ a integrál přes množinu M by pro polární souřadnice dal

$$\int_1^3 \int_0^{2\pi} \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = 2\pi\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_1^3 = (9-1)\,\pi = 8\pi.$$

Navíc pokud bychom integrovali i přes část kruhu vynechanou uprostřed, tj. pokud bychom integrovali přes množinu $x^2 + y^2 \leq 9$, dostali bychom jenom 9π (což můžeme také vidět z předchozího výpočtu). Ani v jednom případě bychom nedostali správný výsledek u křivkového integrálu.

Př. 464 *Pomocí Greenovy věty transformujte křivkový integrál*

$$I = \int_C \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + y\left(xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)\right)\,\mathrm{d}y,$$

kde křivka C ohraničuje nějakou množinu M.

Za předpokladu, že křivka C a M splňují požadavky Greenovy věty, můžeme brát $P(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $Q(x,y) = y\left(xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)\right)$. Zde musíme samozřejmě předpokládat, že je $x + \sqrt{x^2+y^2} > 0$ na $\overline{M}$, aby byly tyto funkce spojité. Potom je

$$\begin{aligned} Q_x &= y^2 + y\frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x + \sqrt{x^2+y^2}} = y^2 + y\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2}, \\ P_y &= \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{aligned}$$

A tedy

$$\begin{aligned} Q_x - P_y &= y^2 + \frac{y\sqrt{x^2+y^2}+xy}{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \\ &= y^2 + \frac{y(x^2+y^2) + xy\sqrt{x^2+y^2} - y\left(x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2\right)}{\left(x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}} = y^2. \end{aligned}$$

Což dává, že dostaneme integrál jako

$$I = \pm \iint_M y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

vzhledem k orientaci křivky C.

Př. 465 *Pomocí Greenovy věty transformujte křivkový integrál*

$$I = \int_C (x+y)^2 \,\mathrm{d}x - (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y,$$

kde křivka C je obvod trojúhelníka $[1,1]$, $[3,2]$, $[2,5]$ *orientovaná v kladném směru.*

Křivka C splňuje požadavky Greenovy věty stejně jako funkce $P(x,y) = (x+y)^2$,$Q(x,y) = -x^2-y^2$. Navíc máme

$$\begin{aligned} Q_x &= -2x \\ P_y &= 2(x+y) \end{aligned}$$

A integrál dostaneme jako

$$I = \iint_M -4x-2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je trojúhelník, jenž je ohraničen přímkami spojujícími zadané body. Jedná se o pčímky $y=\frac{1}{2}(x+1)$, $y=4x-3$, $y=-3x+11$. Integrál tedy dostaneme jako dvojnásobný integrál

$$I = \int_1^2 \int_{\frac{x+1}{2}}^{4x-3} -4x-2y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_2^3 \int_{\frac{x+1}{2}}^{-3x+11} -4x-2y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Př. 466 *Pomocí Greenovy věty vypočtěte křivkový integrál*

$$I = \int_C -x^2 y \,\mathrm{d}x + xy^2 \,\mathrm{d}y, \quad \textit{pro} \quad C : x^2 + y^2 = A^2, A > 0$$

křivku orientovanou v kladném směru.

Křivka C splňuje požadavky Greenovy věty stejně jako funkce $P(x, y) = -x^2 y$, $Q(x, y) = xy^2$. Dostáváme integrál

$$I = \iint_M Q_x - P_y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \iint_M y^2 - (-x^2) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \iint_M x^2 + y^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y,$$

kde M je dána jako $x^2 + y^2 \leq A^2$, neboť křivka C je hranicí kruhu o poloměru A se středem v počátku. Využijeme transformace do polárních souřadnic, abychom dostali

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^A \rho^2 \cdot \rho \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^A = \frac{\pi A^4}{2}.$$

Př. 467 *Vypočtěte integrál*

$$I = \int_C (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x + (xy - y^2)\,\mathrm{d}y$$

kde C je hranice oblasti $M : x^2 + y^2 \leq 5$ a je orientovaná kladně.

Všimněme si, že křivka C je hranicí kruhu, a tedy je uzavřená. Protože se jedná o hranici kruhu, je také jednoduchá. Kruh je jednoduše souvislá množina a křivka C je orientovaná kladně. Proto jsou splněny požadavky Greenovy věty na křivku C a množinu M. Funkce $P = x^2 + y^2$, $Q = xy + y^2$ mají všechny derivace spojité, a proto také splňují požadavky věty. Navíc máme

$$Q_x - P_y = y - 2y = -y.$$

A integrací takovéto funkce bychom si dozajista ulehčili něco práce. Integrál dostaneme z Greenovy věty jako

$$I = -\iint_M y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\int_0^{\sqrt{5}} \int_0^{2\pi} \rho \sin\varphi \cdot \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = -\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{\sqrt{5}} [-\cos\varphi] = 0.$$

Př. 468 *Vypočtěte integrál*

$$I = \int_C y(x^2+1)\,\mathrm{d}x + x(y^2-1)\,\mathrm{d}y$$

kde C je hranice oblasti $M : x^2+y^2-2x \leq 0, y \geq 0$ a je orientovaná kladně.

Všimněme si, že křivka C je hranicí části kruhu. Stačí vztah upravit na čtverec $(x-1)^2+y^2=1$. Máme však pouze polovinu kruhu neboť $y \geq 0$. Protože se jedná o hranici poloviny kruhu, je křivka C jednoduchá. Navíc kruh stejně jako jeho půlka jsou jednoduše souvislé množiny. Navíc křivka C je orientovaná kladně. Proto jsou splněny požadavky Greenovy věty na křivku C a množinu M. Funkce $P = y(x^2+1)$, $Q = x(y^2-1)$ mají všechny derivace spojité, a proto také splňují požadavky věty. Navíc máme

$$Q_x - P_y = y^2 - 1 - (x^2+1) = y^2 - x^2 - 2.$$

Integrál tak můžeme počítat užitím Greenovy věty jako

$$I = -\iint_M y^2 - x^2 - 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Neboť se jedná o posunutou polovinu kružnice, mohli bychom zavést vhodně transformaci $x = 1+\rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, pro $\rho \in [0,1]$ a $\varphi \in [0,\pi]$. Takto bychom dostali

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \int_0^\pi \left(\rho^2\sin^2\varphi - 1 - 2\rho\cos\varphi - \rho^2\cos^2\varphi - 2\right)\cdot\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = \\
&= \int_0^1 \int_0^\pi -\rho^3\cos 2\varphi - 2\rho^2\cos\varphi - 3\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = \\
&= -\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \left[\frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^\pi - \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 [\sin\varphi]_0^\pi - 3\pi\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Př. 469 *Pomocí Greenovy věty vypočtěte křivkový integrál*

$$I = \int_C (x+y)\,\mathrm{d}x - (x-y)\,\mathrm{d}y, \qquad \textit{pro} \qquad C : \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1, A > 0, B > 0$$

křivku orientovanou v kladném směru.

Křivka C splňuje požadavky Greenovy věty stejně jako funkce $P(x,y) = x+y$, $Q(x,y) = y-x$. Dostáváme tedy integrál

$$\iint_M -1 - 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je dána jako $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} \leq 1$, neboť křivka C tvoří hranici elipsy a M je tedy jejím vnitřkem. Využijeme transformaci do zobecněných polárních souřadnic $x = A\rho\cos\varphi$, $y = B\rho\sin\varphi$, $|J| = AB\rho$, čímž dostaneme

$$I = -2\int_0^{2\pi}\int_0^1 AB\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = -4AB\pi\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 = -2AB\pi.$$

Př. 470 *Pomocí Greenovy věty vypočtěte křivkový integrál*

$$I = \int_C \mathrm{e}^x(1-\cos y)\,\mathrm{d}x - \mathrm{e}^x(y-\sin y)\,\mathrm{d}y,$$

kde C je křivka s kladnou orientací, která ohraničuje množinu $0 < x < \pi$, $0 < y < \sin x$.

Křivka C splňuje požadavky Greenovy věty stejně jako funkce $P(x,y) = \mathrm{e}^x(1-\cos y)$, $Q(x,y) = -\mathrm{e}^x(y-\sin y)$. Derivace těchto funkcí jsou

$$\begin{aligned} P_y &= \mathrm{e}^x \sin y, \\ Q_x &= -\mathrm{e}^x(y-\sin y), \end{aligned}$$

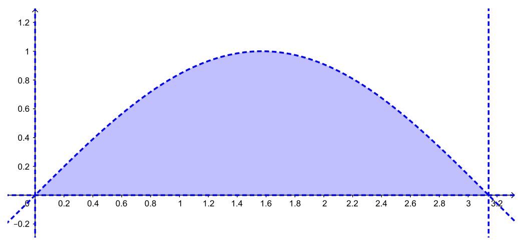
Dostáváme tedy integrál

$$I = \iint_M -\mathrm{e}^x(y-\sin y) - \mathrm{e}^x \sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_M y\,\mathrm{e}^x\;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je dána skrze nerovnosti $0 < x < \pi$, $0 < y < \sin x$, které jsou splněny, neboť $\sin x \geq 0$ na zadaném intervalu. Počítáme

$$\begin{aligned} &-\int_0^\pi \int_0^{\sin x} y\,\mathrm{e}^x\;\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = -\int_0^\pi \mathrm{e}^x \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sin x} \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^\pi \mathrm{e}^x\,\frac{1-\cos 2x}{2}\;\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\,[\mathrm{e}^x]_0^\pi + \frac{1}{4}\int_0^\pi \mathrm{e}^x \cos 2x\,\mathrm{d}x = \\ &= |2 \times \text{per partes}\,| = \frac{1}{4}(1-\mathrm{e}^\pi) + \frac{1}{4}\left[\frac{\mathrm{e}^x(2\sin 2x + \cos 2x)}{5}\right]_0^\pi = \\ &= \frac{1}{4}(1-\mathrm{e}^\pi) + \frac{\mathrm{e}^\pi - 1}{20} = \frac{5 - 5\,\mathrm{e}^\pi + \mathrm{e}^\pi - 1}{20} = \frac{1-\mathrm{e}^\pi}{5}. \end{aligned}$$

Vyšetřovaná množina vypadá jako



Př. 471 *Pomocí Greenovy věty vypočtěte křivkový integrál*

$$I = \int_C \mathrm{e}^{-x^2+y^2} \cos 2xy \, \mathrm{d}x + \mathrm{e}^{-x^2+y^2} \sin 2xy \, \mathrm{d}y,$$

kde C je kružnice $x^2 + y^2 = A^2$.

Křivka C splňuje požadavky Greenovy věty stejně jako funkce $P(x, y) = \mathrm{e}^{-x^2+y^2} \cos 2xy$, $Q(x, y) = \mathrm{e}^{-x^2+y^2} \sin 2xy$ a tedy

$$\begin{aligned} Q_x &= -2x \, \mathrm{e}^{-x^2+y^2} \sin 2xy + 2y \, \mathrm{e}^{-x^2+y^2} \cos 2xy, \\ P_y &= 2y \, \mathrm{e}^{-x^2+y^2} \cos 2xy - 2x \, \mathrm{e}^{-x^2+y^2} \sin 2xy. \end{aligned}$$

Dohromady pak dostáváme $Q_x - P_y = 0$, a proto počítáme integrál

$$I = \iint_M 0 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

kde M je dána jako $x^2+y^2 \leq A^2$. Vzhledem k povaze M, zavedeme polární souřadnice, abychom dostali

$$I = \int_0^A \int_0^{2\pi} 0 \cdot \rho \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\rho = \int_0^A [K]_0^{2\pi} \, \mathrm{d}\rho = \int_0^A K - K \, \mathrm{d}\rho = [L]_0^A = L - L = 0.$$

Což jsme samozřejmě věděli již z definice integrálu $\iint_M 0 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$.

Př. 472 *Rozhodněte, o kolik se liší integrály*

$$\int_{C_1} (x+y)^2 \,\mathrm{d}x - (x-y)^2 \,\mathrm{d}y \quad a \quad \int_{C_2} (x+y)^2 \,\mathrm{d}x - (x-y)^2 \,\mathrm{d}y,$$

kde C_1 je úsečka spojující body $[1,1]$, $[2,6]$ a C_2 je parabola $y = ax^2 + bx + c$ spojující body $[1,1]$, $[2,6]$ a navíc procházející bodem $[0,0]$. Obě zadané křivky začínají v bodě $[1,1]$.

Pokud bychom spojili křivky do jedné, byla by část C_2 orientovaná kladně a naopak část C_1 orientovaná záporně. Je-li tedy spojená uzavřená křivka $C_1 \cup C_2$ orientovaná kladně, pak je

$$\int_{C_1 \cup C_2} (x+y)^2 \,\mathrm{d}x - (x-y)^2 \,\mathrm{d}y = \int_{C_2} (x+y)^2 \,\mathrm{d}x - (x-y)^2 \,\mathrm{d}y - \int_{C_1} (x+y)^2 \,\mathrm{d}x - (x-y)^2 \,\mathrm{d}y.$$

Tudíž můžeme rozdíl integrálů dopočítat jako křivkový integrál přes uzavřenou křivku $C_1 \cup C_2$ orientovanou kladně. Greenova věta umožňuje výhodně řešit integrály přes uzavřené křivky skrze derivace $P_y = 2(x+y)$, $Q_y = -2(x-y)$ jako

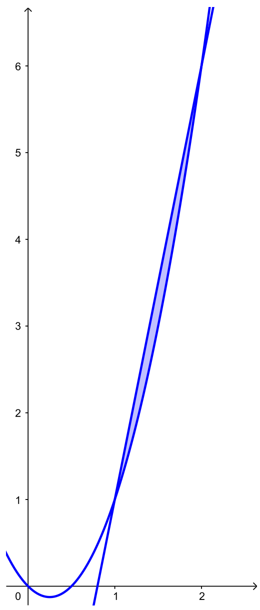
$$\iint_M Q_x - P_y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_M -2(x-y) - 2(x+y) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_M 4x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je ohraničená přímkou a parabolou, které spojují body $[1,1]$ a $[2,6]$.

Tyto nalezneme jako z lineárních soustav rovnic jako $y = 5x - 4$ a $y = 2x^2 - x$. Protože je parabola obrácená vzhůru a protíná přímku ve dvou bodech, musí mezi těmito body platit $5x - 4 \geq 2x^2 - x$. Takto počítáme integrál

$$\begin{aligned} -\int_1^2 \int_{2x^2-x}^{5x-4} 4x \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= -\int_1^2 4x \left[5x - 4 - 2x^2 + x\right] \,\mathrm{d}x = \\ &= \int_1^2 8x^3 - 24x^2 + 16x \,\mathrm{d}x = \left[2x^4 - 8x^3 + 8x^2\right]_1^2 = \\ &= 32 - 64 + 32 - (2 - 8 + 8) = -2. \end{aligned}$$

Absolutní hodnota rozdílu mezi integrály je 2. Vyšetřovaná množina vypadá jako



Př. 473 *Vypočtěte křivkový integrál*

$$I = \int_C (\mathrm{e}^x \sin y - By)\,\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x \cos y - B)\,\mathrm{d}y$$

kde C je horní půlkružnice $x^2 + y^2 = Ax$ orientovaná kladně a $A > 0, B > 0$.

Vidíme, že se po úpravě na čtverec jedná o horní polovinu kružnice $\left(x - \frac{A}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{A^2}{4}$. Abychom si usnadnili výpočet, spočteme křivkový integrál I_1 přes úsečku D, která spojuje body $[0,0]$ a $[A,0]$. Spojením křivek C a D vznikne kladně orientovaná uzavřená křivka $C \cup D$. Spočteme Greenovou větou integrál I_2 přes křivku $C \cup D$ skrze množinu, kterou ohraničuje. Nakonec hledaný integrál I dostaneme jako rozdíl $I = I_2 - I_1$.

Úsečka spojující body $[0,0]$ a $[A,0]$ je jednoduše parametrizovaná jako $x = t$, $y = 0$, pro $t \in [0,A]$. Dostáváme tedy hned

$$I_1 = \int_0^A \left(\mathrm{e}^t \sin 0 - B \cdot 0\right) \cdot 1 + \left(\mathrm{e}^t \cos 0 - B\right) \cdot 0\,\mathrm{d}t \int_0^A 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

Z tohoto důvodu také vidíme, že je $I = I_2$. Následně máme $P(x,y) = \mathrm{e}^x \sin y - By$, $Q(x,y) = \mathrm{e}^x \cos y - B$ a

$$\begin{aligned} Q_x &= \mathrm{e}^x \cos y, \\ P_y &= \mathrm{e}^x \cos y - B, \end{aligned}$$

z čehož máme

$$\iint_M B\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je dána jako horní polovina kruhu $x^2 + y^2 \leq Ax$, $y \geq 0$. Zvolíme tedy polární souřadnice $x = \rho\cos\varphi + \frac{A}{2}$, $y = \rho\sin\varphi$, kde $\rho \in [0, A/2]$, $\varphi \in [0,\pi]$. Dostaneme

$$I = B \int_0^\pi \int_0^{\frac{A}{2}} \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = B\pi \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\frac{A}{2}} = \frac{A^2 B\pi}{8}.$$

Př. 474 *Užitím křivkového integrálu vypočtěte obsah plochy ohraničené křivkou C danou jako $x = A\cos t$, $y = B\sin t$, pro $t \in [0, 2\pi]$, $A > 0, B > 0$.*

Vyšetřovaná množina tvoří vnitřek elipsy a víme, že její hranicí je samotná elipsa. Vidíme, že křivka je parametrizovaná kladně. Hledáme $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ aby $Q_x - P_y = 1$, neboť pak můžeme spojit přes Greenovu větu integrály

$$S = \iint_M 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_M Q_x - P_y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_C P \, \mathrm{d}x + Q \, \mathrm{d}y.$$

Jak však volit P a Q? Zvolíme-li například $P = (K-1)y$ a $Q = Kx$, pro nějaké $K \in \mathbb{R}$, pak je rovnost splněna triviálně. Můžeme tedy volit například $Q(x,y) = x$, nebo $P(x,y) = -y$, nebo $P(x,y) = -y/2$ a $Q(x,y) = x/2$. Plochu tedy dostaneme skrze

$$S = \int_C x \, \mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} A\cos t B\cos t \, \mathrm{d}t = AB \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} \, \mathrm{d}t =$$
$$= AB\pi + AB \left[\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = AB\pi.$$

Jinou volbou bychom ekvivalentně dostali

$$S = -\int_C y \, \mathrm{d}x = -\int_0^{2\pi} B\sin t(-A\sin t) \, \mathrm{d}t = AB \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} \, \mathrm{d}t =$$
$$= AB\pi + AB \left[-\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = AB\pi.$$

Př. 475 *Užitím křivkového integrálu vypočtěte obsah plochy ohraničené křivkou C danou jako $x = A\cos^3 t$, $y = B\sin^3 t$, pro $t \in [0, 2\pi]$, $A > 0, B > 0$.*

Vidíme, že křivka je parametrizovaná kladně a že se jedná o asteroidu. Hledáme $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ tak aby $Q_x - P_y = 1$, neboť pak můžeme spojit přes Greenovu větu integrály

$$S = \iint_M 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_M Q_x - P_y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y.$$

Můžeme například volit $Q(x,y) = x$, nebo $P(x,y) = -y$, nebo $P(x,y) = -y/2$ a $Q(x,y) = x/2$. Navíc máme tečný vektor parametrizace

$$\begin{aligned} x' &= -3A\sin t\cos^2 t, \\ y' &= 3B\cos t\sin^2 t. \end{aligned}$$

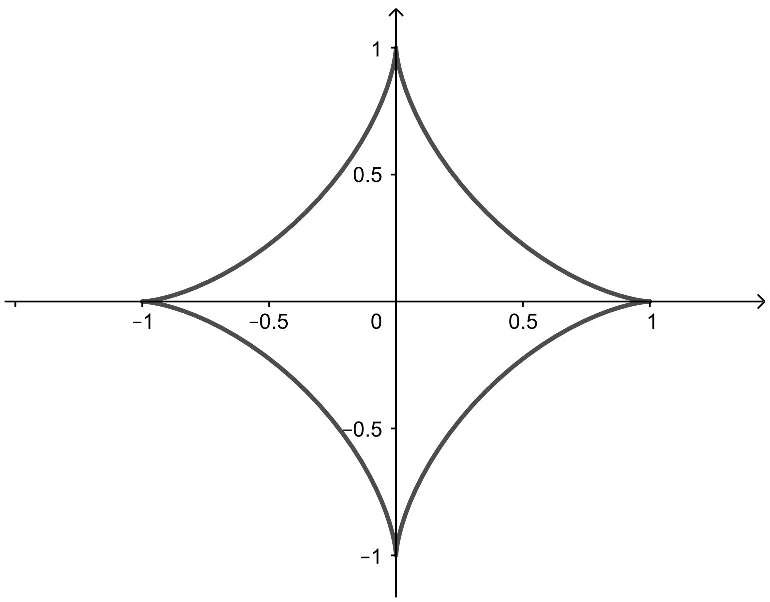
Plochu tedy dostaneme skrze pro jistou volbu P a Q jako

$$S = \int_C x\,\mathrm{d}y = A\cos^3 t \cdot 3B\sin^2 t\cos t\,\mathrm{d}t = 3AB\int_0^{2\pi} \cos^4 t\sin^2 t\,\mathrm{d}t.$$

Vidíme, že volba P a Q nám předurčuje obtížnost výpočtu. Zvolíme-li jiné P, Q můžeme dostat také

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_C -y\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3AB\sin^4 t\cos^2 t + 3AB\sin^2 t\cos^4 t\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{3AB}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t \cdot \frac{4}{4} = \frac{3AB}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\,\mathrm{d}t = \frac{3AB}{8}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4t}{2}\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{3AB}{8}\pi - \frac{3AB}{8}\left[\frac{\sin 4t}{8}\right]_0^{2\pi} = \frac{3AB}{8}\pi. \end{aligned}$$

Křivka pro $A = 1$, $B = 1$ ohraničuje množinu



Př. 476 *Užitím křivkového integrálu vypočtěte obsah plochy ohraničené skrze* $(x+y)^2 = Ax$ *a osu* x*, pro* $A > 0$*.*

Hledáme $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ tak aby $Q_x - P_y = 1$, neboť pak můžeme spojit přes Greenovu větu integrály

$$S = \iint_M 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \iint_M Q_x - P_y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_C P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y.$$

Můžeme například volit $Q(x,y) = x$, nebo $P(x,y) = -y$, nebo $P(x,y) = -y/2$ a $Q(x,y) = x/2$. My zvolíme variantu $P = -y$. Chtěli bychom také pochopit, jak zhruba vypadá vyšetřovaná množina. Nejdříve nalezneme průsečíky křivek $(x+y)^2 = Ax$ a osy x dané rovností $y = 0$. Dosazením máme $x^2 - Ax = x(x-A) = 0$, čímž získáme průsečíky $[0,0]$ a $[A,0]$. Část hranice je tedy dána osou x spojující tyto body jako $x = t$, $y = 0$, pro $t \in [0,A]$. Nyní chceme parametrizovat zbylou část křivky. Z nerovnosti $0 \leq (x+y)^2 = Ax$ vidíme pro $A > 0$, že $x \geq 0$. Vyjádříme-li $y = \pm\sqrt{Ax} - x$, vidíme, že křivka se skládá ze dvou funkcí. Část $y = -\sqrt{Ax} - x$ prochází bodem $[0,0]$ a následně je vždy záporná, a proto nikdy znovu osu x neprotne.

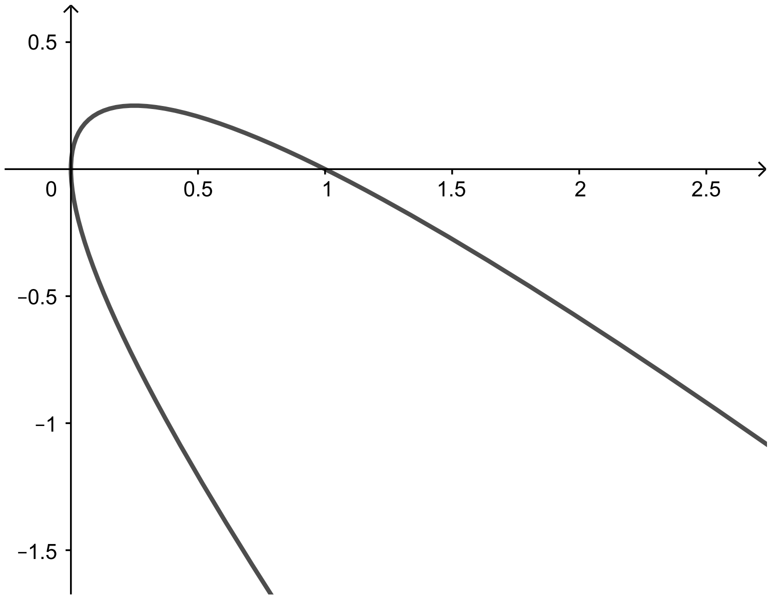
Tudíž nás zajímá pouze část $y = \sqrt{Ax} - x$, která pro $x \to \infty$ dává $y \to -\infty$ a protíná osu x v bodech $[0,0]$ a $[A,0]$. Z toho vidíme, že křivka se nachází na intervalu $[0,A]$ nad osou x. Můžeme tedy brát rovnou parametrizaci $x = t$, $y = \sqrt{At} - t$, pro $t \in [0,A]$. Spodní hranice množiny je tvořena osou x a je parametrizovaná kladně. Horní část množiny je tvořena implicitně zadanou křivkou a její parametrizace jde proti kladné orientaci křivky výsledné uzavřené křivky. První část plochy dostaneme jako

$$I_1 = \int_{C_1} -y \,\mathrm{d}x = \int_0^A 0 \cdot 1 \,\mathrm{d}t = 0,$$

což odpovídá části osy x. Druhou část plochy skrze křivku dostaneme jako

$$I_2 = \int_{C_2} -y \,\mathrm{d}x = \int_0^A (t - \sqrt{At}) \cdot 1 \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{2\sqrt{At^3}}{3}\right]_0^A = \frac{A^2}{2} - \frac{2\sqrt{A^4}}{3} = -\frac{A^2}{6}.$$

Vzhledem k tomu, že parametrizace jde proti kladné orientaci, tak musíme vynásobit $I_2 \cdot (-1)$ a celou plochu dostaneme jako $S = I_1 - I_2 = \frac{A^2}{6}$. Implicitně daná funkce nám udává pro jisté A následující křivku


0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
−0.5
−1
−1.5

Př. 477 *Užitím křivkového integrálu vypočtěte obsah plochy ohraničené skrze $x^3 + y^3 = 3Axy$, pro $A > 0$.*

Hledáme $P(x, y)$ a $Q(x, y)$ tak aby $Q_x - P_y = 1$, neboť pak můžeme spojit přes Greenovu větu integrály

$$S = \iint_M 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_M Q_x - P_y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_C P \, \mathrm{d}x + Q \, \mathrm{d}y.$$

Můžeme například volit $Q(x, y) = x$, nebo $P(x, y) = -y$, nebo $P(x, y) = -y/2$ a $Q(x, y) = x/2$. My zvolíme variantu $P = -y$. Nejdříve potřebujeme nalézt vhodnou parametrizaci. Položíme-li $y = tx$ a dosadíme-li, dostaneme

$$x^3 + t^3x^3 = 3Atx^2 \Rightarrow x^2(x + xt^3 - 3At) = 0.$$

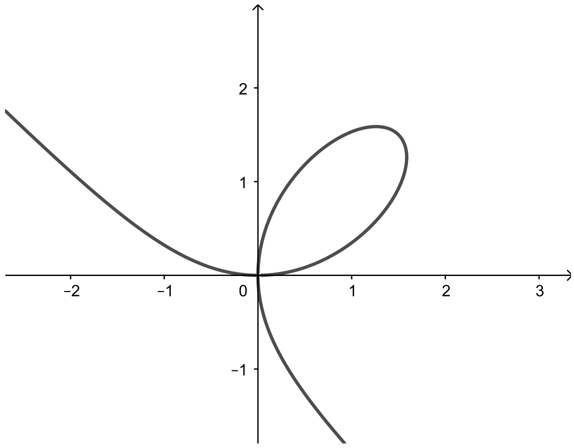
Tato rovnost je obecně splněna pro $x \neq 0$ jen pro $x = \frac{3At}{1+t^3}$ a dosazením do $y = tx$ dostaneme $y = \frac{3At^2}{1+t^3}$ hledanou parametrizaci. Dále si všimneme, že pro $t > 0$ dostáváme také $x > 0$, $y > 0$ a pro $t = 0$ bod $[0, 0]$. Navíc pro $t \to \infty$ je $x \to 0$, $y \to 0$. Křivka ohraničuje nějakou plochu pro $t \in [0, \infty)$. Patrně bychom měli ještě ověřit, že křivka neprotne samu sebe jinde než v krajních bodech intervalu a tedy, že je jednoduchá. Avšak je-li $y = tx$ a křivka protne samu sebe v různých t_1 a t_2, tak musí platit $t_1x = y = t_2x$ a tudíž $(t_1 - t_2)x = 0$. tato rovnost může nastat jen pokud je $x = 0$ což odpovídá jen situaci kdy $t = 0$ nebo $t \to 0$. Body křivky jsou svázané rovností $y = tx$. Pro $t < 1$ musí nutně platit, že je $y < x$ a tedy body křivky leží pod osou $y = x$. Pro $t > 1$ platí ze stejného důvodu $y > x$ a body leží nad osou $y = x$. Proto vidíme, že je parametrizace orientovaná proti běhu hodinových ručiček a je tedy souhlasná s kladnou orientací.

Plochu množiny tedy získáme pro $x' = \frac{3A-6At^3}{(1+t^3)^2}$ jako

$$\begin{aligned} S &= -\int_C y \, \mathrm{d}x = -\int_0^\infty \frac{3At^2}{1+t^3} \frac{3A - 6At^3}{(1+t^3)^2} \, \mathrm{d}t = -9A^2 \int_0^\infty \frac{1 - 2t^3}{(1+t^3)^3} t^2 \, \mathrm{d}t = \\ &= \left| \begin{array}{c} z = 1 + t^3 \\ \mathrm{d}z = 3t^2 \, \mathrm{d}t \end{array} \right| = -3A^2 \int_1^\infty \frac{3 - 2z}{z^3} \, \mathrm{d}z = -3A^2 \int_1^\infty \frac{3}{z^3} - \frac{2}{z^2} \, \mathrm{d}z = -3A^2 \left[\frac{2}{z} - \frac{3}{2z^2} \right]_1^\infty = \\ &= 3A^2 \left(\lim_{z \to \infty} \left(\frac{3}{2z^2} - \frac{2}{z} \right) - \frac{3}{2} + 2 \right) = \frac{3A^2}{2}. \end{aligned}$$

Obsah je tedy $\frac{3A^2}{2}$.

Implicitně daná funkce nám pro $A = 1$ udává křivku


2
1
−2
−1
0
1
2
3
−1

Př. 478 *Užitím křivkového integrálu vypočtěte obsah plochy ohraničené skrze* $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$ *a* $x \geq 0$*,* $y \geq 0$*.*

Pomocí Greenovy věty svážeme dohromady plochu a křivkový integrál pomocí vztahu

$$S = \iint_M 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = -\int_C y \,\mathrm{d}y.$$

Potřebujeme však získat představu o podobě vyšetřované množiny. Jisté hranice množiny jsou udány nerovnostmi $x \geq 0$, $y \geq 0$. Zjistěme tedy, zda implicitně daná funkce protíná osy x a y. Najdeme průsečíky s osami. Pro $y = 0$ dostaneme $x^3 - x^2 = x^2(x-1) = 0$ a pro $x = 0$ dostaneme $y^3 - y^2 = y^2(y-1) = 0$. Implicitní funkce protíná osy v bodech $[0,1]$ a $[1,0]$. Navíc pokud parametrizujeme implicitně danou funkci v polárních souřadnicích dostaneme

$$\begin{aligned}
\rho^3 \cos^3 \varphi + \rho^3 \sin^3 \varphi &= \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi \\
\rho^2 &= \rho^3(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi) \\
\rho &= \frac{1}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}.
\end{aligned}$$

Z nerovností víme, že se nacházíme v prvním kvadrantu. Proto je $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ a také z odvozeného vztahu je $\rho > 0$. V prvním kvadrantu má křivka kladný poloměr, neprotne sama sebe a odsekává nám z prvního kvadrantu vyšetřovanou množinu M. Další hranici pak udávají jak vidíme osy x a y.

Další parametrizaci získáme, položíme-li $y = xt$ a dosadíme $x^3(t^3+1) = x^2(t^2+1)$. Tato rovnost je pro obecné x splněna jen pokud je $x = \frac{t^2+1}{t^3+1}$ a ze vztahu $y = tx$ dostaneme $y = \frac{t^3+t}{t^3+1}$. Pro $t = 0$ získáme bod $[1,0]$ a pro $t \to \infty$ máme bod $[0,1]$. Tato část je parametrizovaná souhlasně s kladnou orientací a navíc máme

$$x' = \frac{-t^4 - 3t^2 + 2t}{(t^3+1)^2}.$$

První část plochy je tudíž dána jako

$$I_1 = \int_C -y \,\mathrm{d}x = \int_0^\infty -\frac{t^3+t}{t^3+1} \frac{-t^4 - 3t^2 + 2t}{(t^3+1)^2} \,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{t^2(t^2+1)(t^3+3t-2)}{(t^3+1)^3} \,\mathrm{d}t.$$

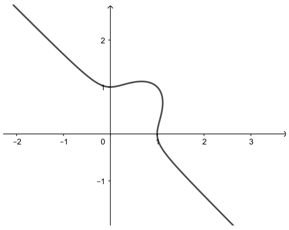
Vzhledem ke tvaru jmenovatele můžeme použít Ostrogradského metodu a integrál se tedy rovná

$$\left[\frac{P(t)}{(t^3+1)^2}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{Q(t)}{t^3+1} \,\mathrm{d}t.$$

Kde $P(t)$ je neznámý polynom stupně 5 a $Q(t)$ neznámý polynom stupně 2. Metodou neurčitých koeficientů bychom dostali

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left[\frac{-4t^5 + t^4 - 8t^3 - t^2 - 2t - 2}{6(t^3+1)^2}\right]_0^\infty + \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{t+1}{t^3+1} \,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{2}{6} + \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{1}{t^2 - t + 1} \,\mathrm{d}t = \frac{2}{6} + \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{1}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^\infty = \frac{1}{3} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \\
&= \frac{1}{3} + \frac{4\pi}{9\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Další části plochy dostaneme přes parametrizaci části osy. Vždy bychom zda však dostali 0, neboť je zde buď $x' = 0$ nebo $y = 0$. Celková plocha je tak pouze $S = I_1$. Implicitně daná funkce udává křivku



Př. 479 *Užitím křivkového integrálu vypočtěte obsah plochy jednoho oblouku cykloidy* $x = A(t - \sin t)$, $y = A(1 - \cos t)$, *pro* $t \in [0, 2\pi]$.

Plochu opět spojíme skrze Greenovu větu s integrálem $\int_C x \, \mathrm{d}y$ přes uzavřenou křivku C ohraničující vyšetřovanou množinu. vybereme si tentokrát část s $\mathrm{d}y$, protože derivace parametrizace y má méně členů než derivace parametrizace x. Vidíme, že $y > 0$ na intervalu $(0, 2\pi)$ a $y = 0$ pro $t = 0$ nebo $t = 2\pi$. Proto je plocha ohraničena cykloidou a osou x. První část křivky je tedy daná jako $x = t$, $y = 0$, pro $t \in [0, 2A\pi]$. Počítáme tedy

$$I_1 = \int_C x \, \mathrm{d}y = \int_0^{2A\pi} t \cdot 0 \, \mathrm{d}t = 0.$$

Druhá část křivky je pak dána jako

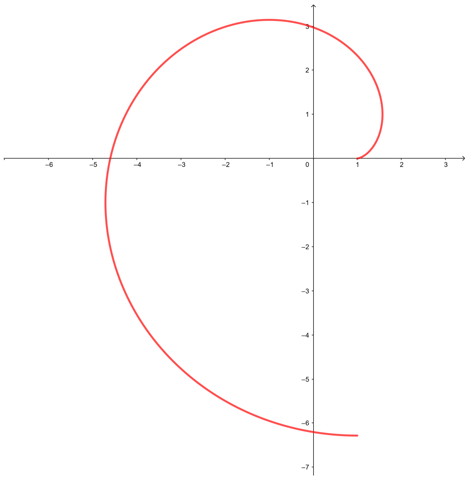
$$\begin{aligned} I_2 &= \int_C x \, \mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} A(t - \sin t) A \sin t \, \mathrm{d}t = A^2 \int_0^{2\pi} t \sin t - \sin^2 t \, \mathrm{d}t = \\ &= \left| \text{per partes a vzorec } \sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2} \right| = \\ &= \left[\frac{(\cos x + 2) \sin x - x(2 \cos x + 1)}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{-6\pi}{2} = -3\pi \end{aligned}$$

Horní polovina hranice plochy je udána parametrizovanou křivkou a jde od bodu $[0, 0]$ do bodu $[2\pi, 0]$. Jdeme tedy po směru hodinových ručiček a tudíž je tato parametrizace záporná, dostáváme plochu $S = I_1 - I_2 = 3\pi$.

Př. 480 *Užitím křivkového integrálu vypočtěte obsah plochy ohraničené evolventou* $x = A(\cos t + t\sin t)$*,* $y = A(\sin t - t\cos t)$*, pro* $t \in [0, 2\pi]$*,* $A > 0$*.*

Chtěli bychom spojit vyšetřovanou plochu spolu s parametrizovanou křivkou pomocí Greenovy věty. K tomu bychom si však měli udělat také představu o podobě křivky. Určíme-li vzdálenost bodu od počátku dostaneme $x^2 + y^2 = A^2 + A^2t^2$. Vzdálenost tedy začíná na hodnotě A a poté neustále roste. Zkusme určit průsečíky křivky s osami. Průsečík s osou x máme pro $y = A(\sin t - t\cos t) = 0$, což odpovídá pro $\cos t \neq 0$ rovnosti $t = \operatorname{tg} t$. Ze znalosti grafu funkce $\operatorname{tg} t$ víme, že na intervalu $[0, 2\pi]$ máme pouze dva průsečíky a to pro $t_1 = 0$ a pro jisté $t_2 \in \left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$. Je-li $\cos t = 0$ tak rovnou vidíme, že $y \neq 0$. Navíc je y spojitou funkcí proměnné t a pro $t = \frac{\pi}{2}$ máme $y\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ tudíž je $y > 0$ na intervalu $(0, t_2)$ z podobného důvodu je pak $y < 0$ na intervalu $(t_2, 2\pi]$. Průsečíky s osou y dostaneme pro $x = A(\cos t + t\sin t) = 0$ a je-li $\sin t \neq 0$ tak je dostaneme z rovnosti $t = -\operatorname{cotg} t$. Ze znalosti grafu funkce $\operatorname{cotg} t$ dostaneme, že existují pouze dva průsečíky a to $t_3 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $t_4 \in \left[3\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$. Derivace $y' = t\sin t$ ukazuje, že $y(t)$ nejprve roste na intervalu $(0, \pi)$ a následně klesá po zbytek intervalu. Obdobně sledujeme chování funkce $x(t)$ vzhledem k $x' = t\cos t$. Nyní máme hrubou představu o podobě křivky. Křivka obíhá okolo počátku se zvětšující se vzdáleností. Začíná v bodě $[A, 0]$ a končí v bodě $[A, -2\pi]$.

Druhou představu o křivce můžeme získat z toho, že se jedná o evolventu. Evolventa je křivka, kterou opisuje bod na přímce, která se otáčí okolo fixní kružnici. Pozice bodu na přímce navíc lineárně roste. Obrázek křivky pro $A = 1$ vypadá následovně



První hranice udávající plochu skrze Greenovu větu dává

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_C x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} A(\cos t + t\sin t)A(\cos t - \cos t + t\sin t)\,\mathrm{d}t = \\
&= A^2 \int_0^{2\pi} t\sin t\cos t + t^2\sin^2 t\,\mathrm{d}t = A^2 \int_0^{2\pi} \frac{t\sin 2t + t^2(1-\cos 2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \\
&= |\text{per partes}| = \frac{A^2}{2}\left[\frac{2t^3 - 6t\cos 2t - (3t^2-3)\sin 2t}{6}\right]_0^{2\pi} = \frac{A^2}{2}\frac{16\pi^3 - 12\pi}{6} = \\
&= A^2\pi\frac{4\pi^2-3}{3}.
\end{aligned}$$

Druhou část plochy získáme z integrálu

$$I_2 = \int_{C_2} x\,\mathrm{d}y,$$

kde křivka C_2 je úsečka spojující body $[A, 0]$ a $[A, -2\pi]$. Tato přímka je dána jako $x = A$ a $y = -2\pi + t$, pro $t \in [0, 2\pi]$. Máme tedy

$$I_2 = \int_0^{2\pi} A \cdot 1 \,\mathrm{d}t = 2A\pi.$$

Neboť jsou obě tyto křivky parametrizovány souhlasně s kladnou orientací, je celková plocha $S = I_1 + I_2 = A^2\pi\frac{4\pi^2-3}{3} + 2A\pi$.

Př. 481 *Vypočtěte integrál*

$$I = \int_C y \,\mathrm{d}x + 2x \,\mathrm{d}y, \quad \textit{pro} \quad C : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, y \geq 0,$$

kde křivka je orientovaná tak, že počáteční bod má největší x-ovou souřadnici.

Všimněme si, že křivka C je částí elipsy. Máme však pouze polovinu elipsy neboť $y \geq 0$. Křivka je očividně jednoduchá, ale není uzavřená. Aby se jednalo o uzavřenou křivku, museli bychom ji doplnit o spojnici začátku a konce křivky C, tj. o další křivku $C_2 : x = t$, $y = 0$, pro $t \in [-1, 1]$. Sjednocením těchto dvou křivek bychom pak dostali uzavřenou křivku. Původní křivka C tvoří horní polovinu elipsy, která je orientovaná zprava doleva. Doplníme-li ji poté o základnu C_2, bude vzniklé sjednocení orientováno v kladném směru. Funkce $P = y$, $Q = 2x$ mají všechny derivace spojité, a proto bychom integrál mohli spočítat pomocí Greenovy věty. Máme

$$Q_x - P_y = 2 - 1 = 1.$$

Integrál tak můžeme počítat rovnou jako

$$I = \iint_M 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

Jedná se tedy o plochu poloviny elipsy. Obsah elipsy bychom dostali podle vzorce jako $S = ab\pi$, kde a a b jsou délky os elipsy. Z implicitní rovnice $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ víme, že $a = 1$ a $b = 2$. Polovina tohoto obsahu tak je

$$I = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Protože jsme však k výsledku přidali ještě integrál přes základnu C_2, musíme tuto část zase odečíst. Tento integrál by nám dal

$$\int_{C_2} y \,\mathrm{d}x + 2x \,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} 0 \cdot 1 + 2t \cdot 0 \,\mathrm{d}t = 0,$$

Tedy původní hodnota souhlasí.

Př. 482 *Vypočtěte integrál*

$$I = \int_C (xy - y^2)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y, \qquad \textit{pro} \qquad C : y^2 = 4x, 0 \le x \le 1,$$

kde křivka je orientovaná v obvyklé rovině xy shora dolů.

Křivka je částí paraboly. Integrál bychom mohli spočítat pokud bychom si tuto část parametrizovali, ale také bychom mohli integrál převést na dvojný integrál. Pokud bychom křivku C doplnili o část C_2 : danou jako $x = 1$, $y = t$, pro $t = [-2, 2]$, dostali bychom uzavřenou jednoduchou křivku a navíc by tato výsledná křivka byla orientovaná v kladném směru. To plyne z toho, že parabola je orientovaná shora dolů a spojnice jejího začátku leží napravo od paraboly a stoupá zdola nahoru. Pro funkci

$$Q_x - P_y = 1 - x + 2y$$

bychom dostali křivkový integrál jako

$$I = \iint_M 1 - x + 2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Množina uzavřená uvnitř křivky je dána nerovnostmi $-2 \le y \le 2$, $\frac{y^2}{4} \le x \le 1$. Tohle všechno bychom snadno dostali také z obrázku. Potom bychom měli integrál

$$I = \int_{-2}^{2} \int_{\frac{y^2}{4}}^{1} 1 - x + 2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-2}^{2} \left[x - \frac{x^2}{2} + 2xy\right]_{\frac{y^2}{4}}^{1} \mathrm{d}y =$$
$$= \int_{-2}^{2} \frac{1}{2} + 2y - \frac{y^2}{4} + \frac{y^4}{32} - \frac{y^3}{2}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y}{2} + y^2 - \frac{y^3}{12} + \frac{y^5}{5 \cdot 32} - \frac{y^4}{8}\right]_{-2}^{2} = \frac{16}{15}$$

Nesmíme však zapomínat na část, kterou jsme si přidali křivkou C_2. Její integrál jsme k integrálu přidali a tedy bychom jej také měli odečíst. Tuto část bychom měli

$$\int_{C_2} (xy - y^2)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \int_{-2}^{2} (t - t^2) \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 4$$

Tuto část jsme k integrálu I přidali, a proto ji musíme zase odečíst. Správně bychom měli

$$I = \frac{16}{15} - 4 = -\frac{44}{15}$$

12 Plošný integrál 1.druhu

V následující části uvažujme pod pojmem plocha oboustrannou plochu, tj. plochu která má rub a líc. Příkladem jednostranné plochy je například Möbiův pásek. Pro parametrizace v následující sekci navíc uvažujme, že zobrazení $[u, v] \mapsto [\alpha(u, v), \beta(u, v), \gamma(u, v)]$ je prosté na vnitřku množiny M.

Nechť S je plocha daná parametricky jako $x = \alpha(u, v)$, $y = \beta(u, v)$, $z = \gamma(u, v)$, pro $[u, v] \in M$, kde $M^\circ \neq \emptyset$. Nechť hranice množiny M je tvořena jednoduchou, uzavřenou křivkou. (**dořešit tento předpoklad, jak tam přesně vystupuje**) Předpokládejme, že funkce α, β, γ mají na M spojité parciální derivace a předpokládejme, že matice

$$\mathrm{Mat} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} \tag{3}$$

má hodnost $h(\mathrm{Mat}) = 2$ v každém bodě $[u, v] \in M$. Potom řekneme, že tato plocha je hladká.

Nechť S je hladká plocha daná jako $x = \alpha(u, v)$, $y = \beta(u, v)$, $z = \gamma(u, v)$, pro $[u, v] \in M$ a $f(x, y, z)$ je spojitá ve všech bodech plochy S. Potom plošný integrál prvního druhu můžeme převést jako

$$\iint_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \iint_M f(\alpha(u, v), \beta(u, v), \gamma(u, v))\sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

kde

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2, \\ F &= \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}. \end{aligned}$$

Speciálně je-li $z = g(x, y)$ funkce proměnných x, y, která má spojité parciální derivace, pak dostáváme

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}S &= \iint_M f(x, y, g(x, y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= \iint_M f(x, y, g(x, y))\sqrt{1 + (g_x)^2 + (g_y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Tyto vzorce můžeme odvodit také pokud uvažujeme matici

$$\begin{aligned} \overrightarrow{n} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} - \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \\ &= \boldsymbol{i}\overbrace{\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}}^{=A(u,v)} + \boldsymbol{j}\overbrace{\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}}^{=B(u,v)} + \boldsymbol{k}\overbrace{\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}}^{=C(u,v)} = (A, B, C)\,. \end{aligned}$$

Zde symboly $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ můžeme chápat jako jednotkové vektory standardní báze a používáme zde Laplaceův rozvoj determinantu. Pouze bychom museli zavést determinant i pro situace, kde na některých pozicích máme vektory. Další cestou jak můžeme $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ vnímat je čistě symbolicky, kde se jedná o parametr určující na které pozici vektoru se jeho koeficient nachází. Vektor $\overrightarrow{n}$ je normálový vektor plochy S udaný parametrizací a za předpokladu, že plocha S je hladká je tento vektor nenulový. Potom můžeme převést

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_M f(\alpha(u,v),\beta(u,v),\gamma(u,v))\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Zde vidíme, že $||\overrightarrow{n}|| = \sqrt{A^2+B^2+C^2}$. Předpoklad (3) udávající $h(\mathrm{Mat}) = 2$ nám říká, že tečné vektory parametrizace $\overrightarrow{n}_u = (x_u, y_u, z_u)$ a $\overrightarrow{n}_v = (x_v, y_v, z_v)$ jsou lineárně nezávislé a tedy tvoří bázi tečné roviny $x = \alpha(u_0,v_0) + \alpha_u(u_0,v_0)\cdot t + \alpha(u_0,v_0)_v \cdot s$, $y = \beta(u_0,v_0) + \beta_u(u_0,v_0)\cdot t + \beta_v(u_0,v_0)\cdot s$, $z = \gamma(u_0,v_0) + \gamma_u(u_0,v_0)\cdot t + \gamma(u_0,v_0)\cdot s$, pro $t, s \in \mathbb{R}$. Normálový vektor udaný parametrizací bychom potom dostali jako vektorový součin $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{n}_u \times \overrightarrow{n}_v$.

Máme-li hladkou plochu S, pak její parametrizace udává nějakou jinou plochu $\overline{S}$, která může a nemusí být shodná s naší plochou S. Plochy S a $\overline{S}$ se mohou lišit pouze o znaménko normálových vektorů, ale mohou být také stejné, tj. $\overrightarrow{n}(\overline{S}) = \pm\overrightarrow{n}(S)$.

Pokud je plocha S daná sjednocení konečného počtu hladkých ploch $S = \cup_{i=1}^k S_i$, pak můžeme rozdělit

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \sum_{i=1}^k \iint_{S_i} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S.$$

Povrch plochy S dostaneme jako plošný integrál prvního druhu

$$P = \iint_S 1\,\mathrm{d}S.$$

Hmotnost plochy S jejíž hustota je dána funkcí $\rho(x,y,z)$ spočteme jako plošný integrál z hustoty

$$m = \iint_S \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S.$$

Těžiště plochy S jejíž hustota je dána funkcí $\rho(x,y,z)$ získáme skrze stacionární momenty

$$S_{xy} = \iint_S z\rho\,\mathrm{d}s,$$
$$S_{xz} = \iint_S y\rho\,\mathrm{d}s,$$
$$S_{yz} = \iint_S x\rho\,\mathrm{d}s.$$

Souřadnice těžiště pak jsou

$$\left[\frac{S_{yz}}{m}, \frac{S_{xz}}{m}, \frac{S_{xy}}{m}\right],$$

kde m je hmotnost plochy S.

Př. 483 *Parametrizujte následující plochy každou alespoň pomocí tří parametrizací a určete jejich množiny M přes které jsou plochy parametrizované.*

1. *Implicitně danou plochu* $2x - y + z = 3$.
2. *Rovinu* τ, *která je rovnoběžná s vektory* $s_1 = (1, -1, 0)$, $s_2 = (-2, 3, 2)$ *a prochází bodem* $[0, 0, 1]$.
3. *Trojúhelník s vrcholy* $A = [0, -1, 1]$, $B = [2, 2, 3]$ *a* $C = [0, 0, -1]$.
4. *Část válcové plochy* $y^2 + z^2 = 4$, *která se nachází v prvním kvadrantu* $x \geq 0$, $y \geq 0$.
5. *Konečný kousek paraboloidu* $z = 6 - 2x^2 - 2y^2$ *omezený rovinami* $z = -2$ *a* $x - y = 1$.
6. *Kousek dvojtého kuželu* $z^2 = x^2 + y^2$, *který je vymezen rovinami* $y \geq 0$ *a* $z \geq -1$.
7. *Plochu, která je vyříznuta z grafu spojité funkce* $g(x, y)$ *eliptickým válcem* $4x^2 + y^2 \leq 9$.
8. *Nakloněnou válcovou plochu* $(x - z)^2 + y^2 = 1$.
9. *Torus daný implicitně* $(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 = 16(x^2 + y^2)$.
10. *Plochu* S, *která vznikne následujícím způsobem. Spojitá křivka* C *se nachází v polorovině* xy *pro* $y \geq 0$ *a tvoří rotační plochu* S, *která vznikne rotací křivky* C *okolo osy* x *po kružnici.*
11. *Rotační plochu, kterou získáme z Astroidy* $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$, *když ji rotujeme okolo osy* x *dokola o* $180°$.
12. *Astroidioidu (neoficiální název), která je daná implicitně jako* $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = 1$.
13. *Plochu* S, *která vznikne následujícím způsobem. Spojitá křivka* C *se nachází v polorovině* xy *pro* $y \geq 0$ *a tvoří rotační plochu* S, *která vznikne rotací křivky* C *okolo osy* x *po skoro kružnici* $y^4 + z^4 = r^4$.
14. *Helicoid* S *daný implicitně jako* $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} z$, *pro* $-\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2}$ *uvnitř válce* $x^2 + y^2 \leq 1$ *a* $z = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(y)$, *pro* $x = 0$. ***!!!!! Tady by to melo byt pokryte nerovnosti na z mozna tak krome pocatku... jeste se na to podivat***
15. *Zobecněný helicoid* S *daný parametricky jako* $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = uv$, *pro* $u \in [0, 1]$ *a* $v \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

1. Plocha S je implicitně daná rovina udaná explicitně funkcí $z = 3 - 2x + y$, kde můžeme použít nejsnazší možnou parametrizaci $x = u$, $y = v$ a $z = 3 - 2u + v$. Neboť se však jedná o rovinu, víme, že ji lze popsat ze znalosti 3 bodů, které neleží na přímce. Dosazením do funkce určíme, že v rovině leží body $[1, -1, 0]$, $[1, 1, 2]$ a $[0, -2, 1]$. Tyto body nejsou kolineární, a proto z nich můžeme vytvořit dva vektory např. $s_1 = (0, 2, 2)$ a $s_2 = (1, 1, -1)$ a takto dostaneme další parametrické vyjádření roviny

$$
\begin{aligned}
x &= 1 + v, \\
y &= -1 + 2u + v, \\
z &= 2u - v.
\end{aligned}
$$

Třetí parametrizaci bychom dostali například pokud bychom vyměnili některý z vektorů s_1, s_2 za vektor opačný. Všechny tyto parametrizace jsou pak dané pro $[u, v] \in \mathbb{R}^2$.

2. Je-li rovina rovnoběžná s vektory s_1 a s_2 dostaneme rovnou parametrizaci

$$\begin{aligned} x &= u - 2v, \\ y &= -u + 3v, \\ z &= 1 + 2v. \end{aligned}$$

Protože je rovina rovnoběžná s vektorem $(1, -1, 0)$ je také rovnoběžná s vektorem $(2, -2, 0)$ a tudíž máme také parametrizaci

$$\begin{aligned} x &= 2u - 2v, \\ y &= -2u + 3v, \\ z &= 1 + 2v. \end{aligned}$$

Vektorovým součinem vektorů s_1, s_2 dostaneme vektor kolmý k těmto vektorům a máme $s_1 \times s_2 = (-2, -2, 1)$. Takto víme, že hledaná rovina je rovnoběžná s rovinou $-2x-2y+z+D = 0$, $D \in \mathbb{R}$. Dosazením udaného bodu $[0, 0, 1]$ určíme, že naše rovina splňuje $D = -1$ a tedy můžeme získat rovinu také explicitně pro $z = 1+2x+2y$ což vede na třetí parametrizaci $x = u$, $y = v$ a $z = 1 + 2u + 2v$. Všechny tyto parametrizace jsou pak dané pro $[u, v] \in \mathbb{R}^2$.

3. Zadaný trojúhelník můžeme dostat jako konvexní kombinaci udaných bodů, tj.

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C,$$

kde platí, že $\lambda_i \geq 0$, pro všechny i a $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1$. Z této sumy můžeme vyjádřit $\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \lambda_3$ a dosazením do rovnice dostaneme parametrizaci

$$A + \lambda_2(B - A) + \lambda_3(C - A),$$

pro $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_3 \geq 0$ a ze vztahu $\lambda_1 \geq 0$ máme také $\lambda_2 + \lambda_3 \leq 1$. Nahradíme-li lambdy za parametry u a v dostaneme parametrizaci

$$\begin{aligned} x &= 0 + 2u + 0v, \\ y &= -1 + 3u + v, \\ z &= 1 + 2u - 2v, \end{aligned}$$

přes trojúhelník $M : u \geq 0,\ v \geq 0,\ u + v \leq 1$. Stejným způsobem jako jsme nahradili λ_1 bychom mohli naopak nahradit λ_2 a λ_3 a dostali bychom další dvě parametrizace z rovnic

$$\begin{aligned} B + \lambda_1(A - B) + \lambda_3(C - B), \\ C + \lambda_1(A - C) + \lambda_2(B - C). \end{aligned}$$

4. Plocha S udává válcovou plochu vzhledem k proměnným y a z s poloměrem $r = 2$. Vhodně ji tedy můžeme parametrizovat užitím válcových souřadnic $y = \rho \cos \varphi$, $z = \rho \sin \varphi$. Poloměr je zde fixní a úhel se mění. Proto budeme mít $y = 2 \cos u$, $z = 2 \sin u$. Třetí proměnná udává výšku válce a není svázaná s proměnnými y, z,tj. $x = v$. Neboť je $v = x \geq 0$ a $y = 2 \cos u \geq 0$ máme množinu M omezenou $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ a $v \geq 0$. Jedná se tedy o nekonečný obdélník.

   Další parametrizaci můžeme dostat pokud bychom uvážili, jiné pořadí proměnných v polárních souřadnicích, tj. pro $z = 2 \cos u$, $y = 2 \sin u$. Potom máme z podobných důvodů $M : v \geq 0$ a $u \in [0, \pi]$, přičemž $x = v$ zůstává stejné.

   Třetí parametrizaci můžeme získat například tak, že si vyjádříme pro $y \geq 0$ implicitní rovnice $y = \sqrt{4 - z^2}$. Potom bychom dostali také parametrizaci $z = u$, $y = \sqrt{4 - u^2}$, pro $u \in [-2, 2]$. Role $x = v$ zůstává i zde stejná.

5. Paraboloid je dán explicitně, můžeme tedy rovnou parametrizovat $x = u$, $y = v$ a $z = 6 - 2u^2 - 2v^2$. Tato plocha je ohraničena rovinou $z = -2$ a tedy platí, že buď je $z \geq -2$ nebo je $z \leq -2$. Pro $u \to \infty$, $v \to \infty$ máme z tvaru funkce, že $z \to -\infty$, a proto aby byla plocha konečná nemůžeme mít část $z \leq -2$, ale musí platit $z \geq -2$. Dosazením parametrizace za z dostaneme $u^2 + v^2 \leq 3$. Rovina $x - y = 1$ pak vymezuje část této plochy v poloprostoru $x - y \geq 1$ nebo $x - y \leq 1$. Ze zadání však není jasné, o kterou část plochy se jedná. První parametrizace je tedy zadaná přes množinu $M : u^2 + v^2 \leq 3$ a $u - v \lesseqgtr 1$, kde symbol $\lesseqgtr$ odkazuje na nejistotu o kterou část plochy se jedná.

   Druhou parametrizaci bychom dostali, pokud bychom k popisu plochy uvážili válcové souřadnice $x = u \cos v$, $y = u \sin v$ čímž bychom po dosazení dostali $z = 6 - 2u^2$. Neboť je $6 - 2u^2 = z \geq 0$ máme $u^2 \leq 3$. Dále máme $u \cos v - u \sin v \lesseqgtr 1$. Z této nerovnosti bychom mohli vyjádřit parametr u, ale museli bychom uvážit měnící znaménka. Uvažme tedy pro jednoduchost, že je $x - y \geq 1$. Projekce plochy S do půdorysny xy bude vymezena nerovnostmi $x^2 + y^2 \leq 3$ a $x - y \geq 1$. Průnik hranic těchto vymezení dostaneme v bodech, kde přímka protne kružnici a tyto body jsou

$$\left[\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right].$$

   Spojnice počátku s průsečíkem ležícím v prvním kvadrantu má úhel

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_1 &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} < \frac{1 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = 1, \\ \varphi_1 &< \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

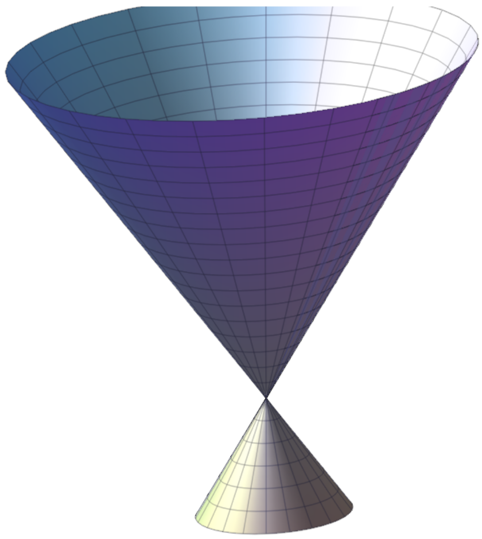
   Druhý úhel pak dostaneme obdobně jako $\varphi_2 > -\frac{3\pi}{4}$. Z těchto důvodů je funkce $\cos v - \sin v > 0$ a vyjádříme tak z nerovnosti $u \cos v - u \sin v \lesseqgtr 1$, že platí $u \geq \frac{1}{\cos v - \sin v}$.

   Třetí parametrizaci této plochy získáme, pokud bychom upravili první parametrizaci jako $x = -u$, $y = -v$ a $z = 6 - 2u^2 - 2v^2$ Což nám dá stále stejně $u^2 + v^2 \leq 3$ a $v - u \lesseqgtr 1$. Nebo bychom mohli také uvážit, že ze vztahu $z = 6 - 2u^2$ bychom mohli vyjádřit $u = \sqrt{3 - \frac{z}{6}}$ a tento vztah bychom mohli dosadit do polárních souřadnic. Pouze bychom zde vyjádřili pomocí parametru $z = w$ a měli bychom $x = \sqrt{3 - \frac{w}{6}} \cos v$, $y = \sqrt{3 - \frac{w}{6}} \sin v$, $z = w$.

6. Zadaný kužel můžeme vyjádřit explicitně jako $z \pm \sqrt{x^2 + y^2}$ čímž bychom dostali jeho dvě části pro $z \geq 0$ a $z \leq 0$. Musíme zde rozdělit kužel na dvě podplochy S_1 pro $z \geq 0$ a S_2 pro $z \leq 0$, kde můžeme následně parametrizovat obě plochy jako $x = u$, $y = v$ a $z = \pm\sqrt{u^2 + v^2}$. V takovémto případě máme vymezení $y = v \geq 0$ a $z \geq -1$ nám udá pro podplochu S_2, že $z = -\sqrt{u^2 + v^2} \geq -1$, což znamená $u^2 + v^2 \leq 1$. Naopak pro podplochu S_1 máme $z \geq 0 \geq -1$ a tedy je zde tato podmínka splněna triviálně a nic nového nám nedá. Máme tak plochu S parametrizovanou přes dvě podplochy.

   Druhou parametrizaci dostaneme pokud užijeme polární souřadnice jako $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z^2 = u^2$. I v tomto případě musíme uvážit, že je nezbytné položit $z = \pm u$, což ale pro $u \geq 0$ nepopíšeme jednou funkcí.. I zde musíme rozložit plochu na dvě podplochy. Z podmínky $y \geq 0$ vidíme, že v obou případech musí být $v \in [0, \pi]$. Pro část $z \geq 0$ nám podmínka $z \geq -1$ stále nic nedá, ale v části pro $z \leq 0$ máme $z = -u$ a to nám dává $-u \geq -1 \Rightarrow u \leq 1$.

   Třetí parametrizaci můžeme získat tehdy kdy uvážíme, že je tento dvojtý kužel tvořen v rovině $y = 0$, $x \geq 0$ reprezentován funkcí $x = |z|$, pro $z \geq -1$. Následně bychom kužel dostali pokud bychom rotovali graf této funkce okolo osy z po kružnici.Tyto kružnice by měly pro pevné z vždy poloměr $r = |z|$ a kružnici můžeme výhodně parametrizovat pomocí polárních souřadnic. Tedy $x = |z| \cos v$, $y = |z| \sin v$, pro $v \in [0, 2\pi]$. Zavedeme-li tedy druhý parametr jako $z = u$ máme parametrizaci $x = |u| \cos v$, $y = |u| \sin v$, když $u \geq -1$ a $v \in [0, 2\pi]$. Tuto parametrizaci bychom dostali i u druhé parametrizace, pokud bychom vyjádřili rovnost $z = \pm u$ jako $u = |z|$. Avšak všimněme si ještě něčeho. V tomto postupu nám nic nebrání uvažovat rovnou celou rovinu xy ve které bychom dostali objekt rovnou rotací křivky $x = z$ okolo osy z. Čtvrtou parametrizaci bychom tudíž dostali stejným způsobem jako $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u$, když $u \geq -1$ a $v \in [0, 2\pi]$.



7. vnitřek eliptického válce dostaneme pomocí zobecněných polárních souřadnic jako $x = \frac{3}{2} u \cos v$, $y = u \sin v$ pro libovolnou výšku z. Dosazením do funkce $g(x, y)$ bychom pak dostali také třetí složku parametrizace $z = g\left(\frac{3}{2} u \cos v, u \sin v\right)$. Vzhledem k tomu, že se nyní nacházíme uvnitř válce měli bychom hned $u \in [0, 1]$ a $v \in [0, 2\pi]$. Další dvě parametrizace bychom mohli dostat pokud bychom upravili zvolené polární souřadnice. Stejně tak bychom mohli vynechat polární souřadnice a parametrizovat plochu jako $x = u$, $y = v$ a $z = g(u, v)$, kde bychom pouze popisovali hůře oblast parametrizace M. Eliptický válec by nám v půdorysně dal pouze elipsu a tedy bychom ji mohli vhodně také popsat pro $x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ a $-\sqrt{9 - 4x^2} \leq y \leq \sqrt{9 - 4x^2}$. Nebo naopak z druhého pohledu jako $y \in [-3, 3]$ a $-\frac{\sqrt{9-y^2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{9-y^2}}{2}$.

8. Máme zde kosou válcovou plochu s poloměrem $r = 1$ udanou implicitně $(x - z)^2 + y^2 = 1$. Chceme popsat všechny body, které splňují tuto implicitní rovnici. Jedná-li se o část válce, mohli bychom vhodně využít válcové souřadnice $x = \cos u$, $y = \sin u$, $z = v$ avšak po dosazení do rovnice dostaneme

$$(\cos u - v)^2 + \sin^2 v = 1 - 2v \cos u + v^2 \neq 1.$$

Očividně tyto body nesplňují implicitní rovnici. Kdybychom však v závorce dostali pouze $\cos u$, měli bychom již vhodnou parametrizaci. Upraví-li vhodně parametrizaci dostaneme

$x = \cos u + v$, $y = \sin u$, $z = v$ což již bude odpovídat. Neboť výška není nijak omezena máme $v \in \mathbb{R}$ a úhly popisující kružnice dávají $u \in [0, 2\pi]$.

Druhou parametrizaci bychom dostali například pokud bychom uvažovali namísto $z = v$ třeba $z = v^3$. Potom bychom měli parametrizaci $x = \cos u + v^3$, $y = \sin u$, $z = v^3$ stále pro $v \in \mathbb{R}$ a $u \in [0, 2\pi]$. Třetí parametrizaci bychom naopak měli pokud bychom místo úhlu u uvažovali úhel jako u^2. To by vedlo na parametrizaci $x = \cos u^2 + v$, $y = \sin u^2$, $z = v$ stále pro $v \in \mathbb{R}$ avšak zde je potom $u \in [0, \sqrt{2\pi}]$.

9. Podívejme se nejprve na rovnici, která nám zde vystupuje: $(x^2+y^2+z^2+3)^2 = 16(x^2+y^2)$. V rovnici vidíme na dvou místech výraz x^2+y^2, který se chová rozumně vzhledem k polárním souřadnicím. Zaveďme tedy $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ a dosaďme toto vyjádření do rovnice. Dostaneme

$$(r^2 + z^2 + 3)^2 = 16r^2.$$

Zde vystupuje r jako nezáporný poloměr. Můžeme tedy tuto rovnici postupně upravit do tvaru

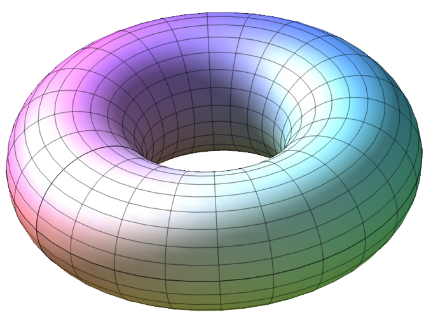
$$\begin{aligned} r^2 + z^2 + 3 &= 4r \\ r^2 - 4r + 4 + z^2 &= 1 \\ (r-2)^2 + z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Nyní již rozpoznáme rovnici kružnice s posunutým středem. Zaveďme znovu polární souřadnice $r = R\cos\theta + 2$, $z = R\sin\theta$ abychom dostali opětovným dosazením

$$\begin{aligned} R^2 &= 1 \\ R &= 1. \end{aligned}$$

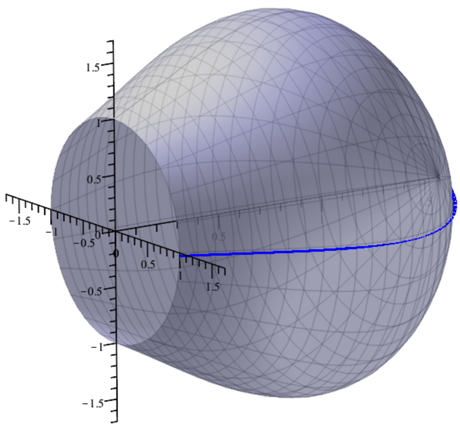
Pokud bychom dosadili zpětně po jednotlivých krocích za R a za r (nahradíme také $\varphi = u$, $\theta = v$) dostaneme parametrizaci $x = (\cos v + 2)\cos u$, $y = (\cos v + 2)\sin u$, $z = \sin v$. Vzhledem k povaze odvozených parametrů zde máme $u \in [0, 2\pi]$ a $v \in [0, 2\pi]$.

Druhou parametrizaci můžeme dostat pokud bychom zaměnili v kružnicích parametrizace roli $\sin\varphi$ a $\cos\varphi$ dostali bychom další podobnou parametrizaci $x = (\cos v + 2)\sin u$, $y = (\cos v + 2)\cos u$, $z = \sin v$ znovu pro $u \in [0, 2\pi]$ a $v \in [0, 2\pi]$. Třetí parametrizaci bychom mohli dostat pokud bychom naopak prohodili roli $\sin\theta$ a $\cos\theta$ a tedy $x = (\sin v + 2)\cos u$, $y = (\sin v + 2)\sin u$, $z = \cos v$ taktéž pro $u \in [0, 2\pi]$ a $v \in [0, 2\pi]$.



10. Uvažujme, že křivka C je daná parametricky v polorovině $y \geq 0$ jako $x = \alpha(t)$, $y = \beta(t)$, pro $t \in [a, b]$. Všimněme si, že z definice spojité křivky 9 víme, že takové parametrické rovnice existují. Následně plocha vzniká tak, že pro nějaký bod $[x(t), y(t)]$ vzniká kružnice v rovině $x = \alpha(t)$ se středem na ose x a poloměrem $r = \beta(t)$. Sjednocením všech takových kružnic pak dostaneme plochu S. Takovouto kružnici bychom mohli parametrizovat standardně jako $y = \beta(t)\cos v$, $z = \beta(t)\sin v$, pro $v \in [0, 2\pi]$. Neboť máme ještě zadané $x = \alpha(t)$ a $t \in [a, b]$, je tato plocha parametrizovaná kompletně.

    Druhou parametrizaci bychom dostali, pokud bychom v parametrizaci křivky nahradili parametr t například za $-t$, tj. $x = \alpha(-t)$, $y = \beta(-t)\cos v$, $z = \beta(-t)\sin v$, pro $v \in [0, 2\pi]$ pro $t \in [-b, -a]$, $v \in [0, 2\pi]$. Třetí parametrizaci bychom dostali obdobně, pokud bychom nahradili parametr t za posun v čase např. $t-1$ a stejně tak parametr v za posun v čase $v-\pi$ čímž bychom obdobně dostali $x = \alpha(t-1)$, $y = \beta(t-1)\cos(v-\pi)$, $z = \beta(t-1)\sin(v-\pi)$, pro $v \in [0, 2\pi]$ pro $t \in [a+1, b+1]$, $v \in [\pi, 3\pi]$. Uvažujme také, že v uvedeném postupu není nezbytně nutné, aby byly křivka C pouze v polorovině $y \geq 0$, ale mohla by se nacházet přímo v rovině xy, pouze bychom museli dořešit poloměr, který by mohl být nyní záporný. To by ale vadit nemělo vzhledem ke znaménkům $\sin v$, $\cos v$.

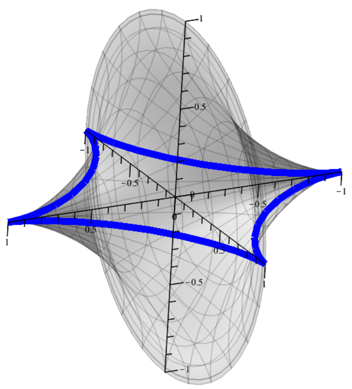


11. Plocha zde vzniká podobně jako v předchozím bodě a tedy pokud nalezneme parametrizaci křivky C, dostaneme také parametrizaci plochy. Všimněme si navíc, že Astroida je symetrická přes osu x (stejně jako přes osu y). Plochu tedy dostaneme, pokud bude celá Astroida C rotovat okolo osy x jen o $180°$. Druhou variantou je, pokud uvážíme jen část Astroidy v polorovině $y \geq 0$. Potom bychom však tuto horní polovinu křivky museli rotovat o celých $360°$. Již víme, že Astroidu lze v polorovině $y \geq 0$ parametrizovat jako $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, pro $t \in [0, \pi]$. Její rotací okolo osy x tak dostaneme plochu S jako $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t \cos u$, $z = \sin^3 t \sin u$, pro $t \in [0, \pi]$ a $u\ in[0, 2\pi]$. Druhou parametrizaci hned dostáváme, pokud bychom křivku C uvažovali rovnou v celé rovině xy a to jako $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, pro $t \in [0, 2\pi]$, potom bychom však tuto křivku rotovali okolo osy x jen o již zmíněných $180°$. Máme tedy $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t \cos u$, $z = \sin^3 t \sin u$, pro $t \in [0, 2\pi]$ a $u\ in[0, \pi]$.

Třetí parametrizaci získáme, pokud bychom uvažovali, že platí rovnosti

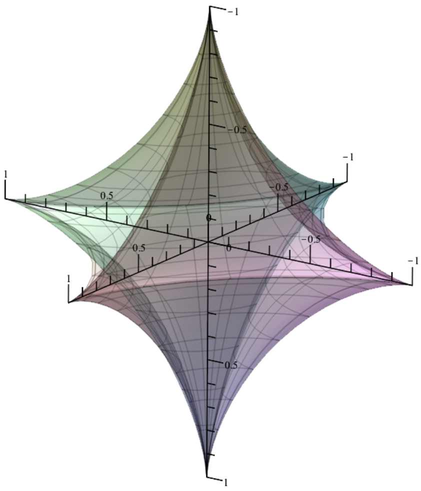
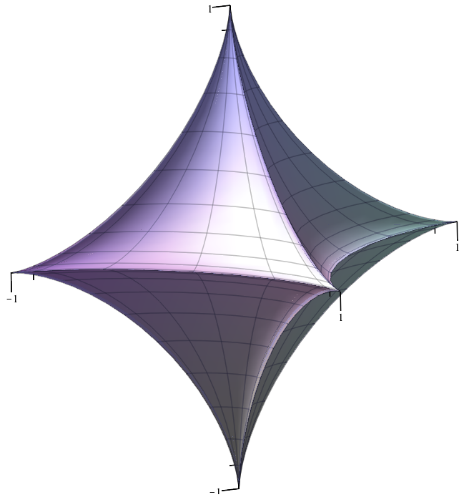
$$\cos^3 t = \frac{3\cos t + \cos(3t)}{4},$$
$$\sin^3 t = \frac{3\sin t - \sin(3t)}{4}.$$

Z těchto vztahů tak dostaneme další parametrizaci Astroidy a tedy i naší plocha S jako $x = \frac{3\cos t+\cos(3t)}{4}$, $y = \frac{3\sin t-\sin(3t)}{4}\cos u$, $z = \frac{3\sin t-\sin(3t)}{4}\sin u$, pro $t \in [0,\pi]$ a $u \in [0, 2\pi]$.

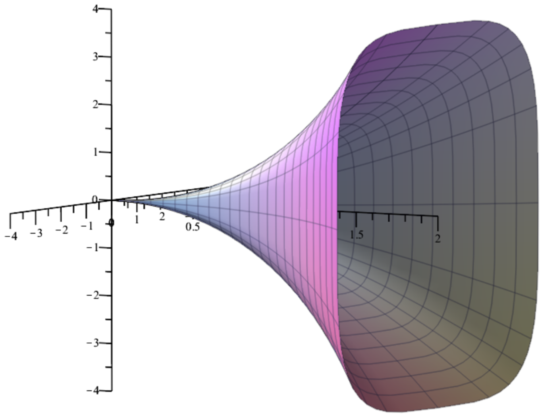


12. Všimněme si první, že pokud bychom měli pouze rovnici $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ měli bychom Astroidu. Zde bychom se mohli inspirovat pro vhodnou parametrizaci plochy. Zmiňme první podobnost mezi rovnicí $x^2 + y^2 = 1$, která udává kružnici a rovnicí $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, která udává sférickou plochu. K parametrizaci kruhu i sférické plochy využíváme goniometrickou jedničku $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Stejný princip však aplikujeme i u Astroidy při její parametrizaci, kde vhodně upravíme polární souřadnice, aby se správně umocnily. Z těchto detailů vidíme, že bychom mohli vhodně upravit sférické souřadnice, abychom dosáhli stejného. Mějme $x = \cos^3 u \sin^3 v$, $y = \sin^3 u \sin^3 v$, $z = \cos^3 v$, pro $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0,\pi]$. Vidíme, že poté co se nám třetí mocniny a odmocniny vyruší, dostaneme stejnou situaci jako pro sférické souřadnice.

    Druhou parametrizaci bychom dostali, pokud uvážíme na základě samotného principu sférických souřadnic, že můžeme plochu parametrizovat stejnými parametrickými rovnicemi jen přes jinou množinu M. Mějme $x = \cos^3 u \sin^3 v$, $y = \sin^3 u \sin^3 v$, $z = \cos^3 v$, pro $u \in [0,\pi]$, $v \in [0, 2\pi]$. Zatímco v půdorysně tak měříme jen 180°, tak odchylku od kladné poloosy z měříme celých 360°. Třetí parametrizaci získejme na základě jiné úvahy. Vzniklou plochu S bychom dostali také pokud bychom uvažovali křivku Atroidy v polorovině $y \geq 0$, která by rotovala po dráze Astroidy okolo osy x. Zmíněnou křivku C dostaneme stejně jako v předchozím případě jako $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, pro $t \in [0,\pi]$. Obdoba poloměr rotace by tak byla daná jako $y = \sin^3 t$ a pohybovali bychom se po dráze, které bychom znovu určili pomocí Astroidových souřadnic jako $y = \sin^3 t \cos^3 u$, $z = \sin^3 t \sin^3 u$, pro $u \in [0, 2\pi]$. I tato třetí parametrizace je obdobná předchozím dvěma, ale úvahově jsme k ní došli jinak. Všimněme si, že tak jako zde rotujeme Astroidu okolo osy x, tak bychom ji mohli rotovat také okolo osy y s podobnými argumenty.

13. Tuto plochu bychom mohli popsat principielně podobně, jako předchozí příklady. Pouze se musíme zamyslet, jak parametrizovat kružnici $y^4+z^4 = r^4$. Polární souřadnice by nás mohly navést na pokus $y = \sqrt{\cos t}$, $z = \sqrt{\sin t}$, avšak tato parametrizace by fungovala jen pokud je $\cos x \geq 0$, $\sin x \geq 0$. Popsali bychom tak jen jednu $1/4$ zobecněné kružnice. Uvažme, že bychom uvažovali namísto toho $y = \sqrt{|\cos t|}$, $z = \sqrt{|\sin t|}$. Nyní bychom měli parametrické rovnice definované pro libovolné t, ale stejně by zůstalo $y \geq 0$, $z \geq 0$. Chtěli bychom pokrýt všechny kombinace znamének u y a z. Toto nám normálně zajišťuje znaménko $\sin t$ a $\cos t$. Informace o tomto znaménku se nedostane ven z odmocniny, mohly bychom si však přidat uměle. Vezměme parametrizaci $y = \operatorname{sgn} \cos t \sqrt{|\cos t|}$, $z = \operatorname{sgn} \sin t \sqrt{|\sin t|}$, která nám již udá všechny body zobecněné kružnice $y^4 + z^4 = 1$. Pouze poloměr bychom museli přidat obvyklým způsobem, kde by nám ani nemělo vzhledem ke znaménkům vadit, že by byl někde záporný. Pro křivku C danou jako $y = x^2$ na intervalu $[0, 1]$ bychom tak dostali například parametrizaci $x = t$, $y = t^2 \operatorname{sgn} \cos u \sqrt{|\cos u|}$, $z = t^2 \operatorname{sgn} \sin u \sqrt{|\sin u|}$, pro $t \in [0, 1]$ a $u \in [0, 2\pi]$. Další části již řešit nebudeme vzhledem k jejich podobnosti s ostatními body.



14. Při popisu Helicoidu si všimněme, že zde vystupuje podíl $\frac{y}{x}$. Kdybychom zavedli polární souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, dostaneme snadno $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi$. Ze vztahu plochy $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} z$ tak dostaneme jednoduchý vztah $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} z$. To by nás mohlo přivést na myšlenku, že plochu vhodně parametrizujeme pomocí válcových souřadnic jako $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = v$, pro $v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Neboť je plocha S daná uvnitř válce $x^2 + y^2 \leq 1$, tak dostáváme také rozsah $u \in [0,1]$. Všimněme, si tuto parametrizaci bychom mohli použít i pro v mimo rozsah $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ a navíc by zde plocha S spojitě navazovala. Funkce $\operatorname{tg} z$ nám však vymezuje interval, kde můžeme plochu S uvažovat svým definičním oborem. Na druhou stranu pro φ máme stejný problém. Z těchto důvodů je zde doplnění pro $x = 0$.

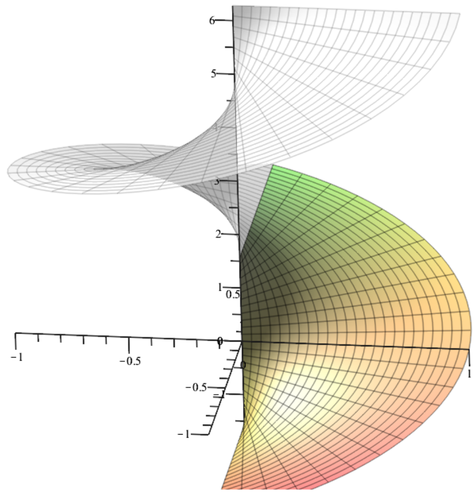
    Druhou parametrizaci bychom mohli zkusit dostat pokud bychom namísto válcových souřadnic uvážili sférické souřadnice. Tedy $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$. Potom ze vztahu pro $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} z$ dostaneme

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} z = \operatorname{tg}\left(u\cos v\right).$$

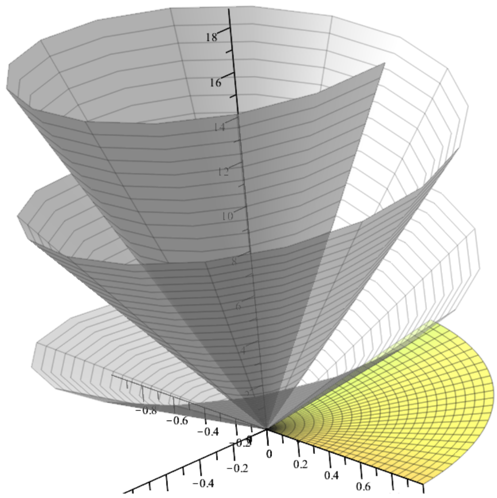
    A tedy $\varphi = u\cos v$. Při této paramertizaci bychom museli rozvážit důsledky našeho rozhodnutí. Poloměr u je tentokrát vzdálenost bodu od počátku, ale tato vzdálenost by výrazně závisela na úhlu. Všimněme si však, že plochu můžeme také jednoduše parametrizovat jako $x = u$, $y = v$ a

$$z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{v}{u}, & u \neq 0, \\ \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} v, & u = 0, \end{cases}$$

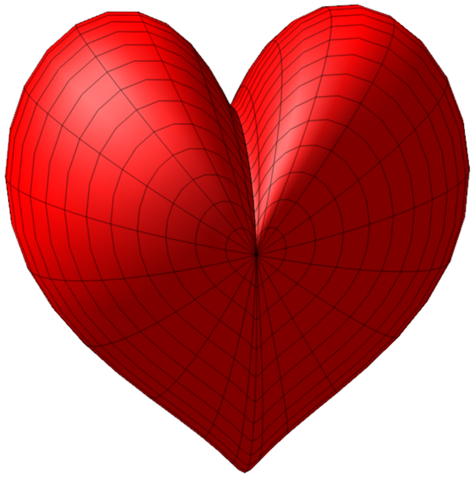
    kde máme $u \in [-1,1]$ a $v \in [-\sqrt{1-u^2}, \sqrt{1-u^2}]$. Třetí parametrizaci bychom mohli dostat také pokud bychom uvážili, že stejnou parametrizaci máme i na množině $v \in [-1,1]$ a $u \in [-\sqrt{1-u^2}, \sqrt{1-u^2}]$.



15. První parametrizaci máme rovnou ze zadání. Druhou bychom dostali, pokud si uvědomíme, že platí vztahy $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, $v = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ a ze vztahu $z = uv$ také $z = \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ čímž vidíme, že bychom mohli dostat plochu také jednoduše pro $x \in (0, 1]$ a $y \in \left[0, \sqrt{1 - x^2}\right]$. Nějakou třetí parametrizaci bychom také jistě získali. Například pokud bychom nahradili v zadání parametr u za $-u$.



16. Nakonec si uvedeme ještě obrázek následující zajímavé plochy.



Př. 484 *Rozhodněte zda následující parametrizace popisují uvedenou plochu.*

1. *Plocha* $S: x^2+y^2+z^2=1$*, parametrizace* $x=\cos u \sin v$*,* $y=\sin u \sin v$*,* $z=\cos v$ *přes množinu* $u \in [0,2\pi]$*,* $v \in [0,2\pi]$*.*
2. *Plocha* $S: x^2+y^2+z^2=1$*, parametrizace* $x=\cos u \sin v$*,* $y=\sin u \sin v$*,* $z=\cos v$ *přes množinu* $u \in [0,\pi]$*,* $v \in [0,2\pi]$*.*
3. *Plocha* $S: x^2+y^2+z^2=1$*, parametrizace* $x=\cos u \sin v$*,* $y=\sin u \sin v$*,* $z=\cos v$ *přes množinu* $u \in \left[\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$*,* $v \in [0,2\pi]$*.*
4. *Plocha* $S: z^2+y^2=1$*, parametrizace* $x=\cos u$*,* $y=\sin u$*,* $z=v$ *přes množinu* $u \in [0,2\pi]$*,* $v \in \mathbb{R}$*.*
5. *Plocha* $S: x^2+y^2=1$*, parametrizace* $x=\cos^2 u-\sin^2 u$*,* $y=2\sin u \cos u$*,* $z=v^3$ *přes množinu* $u \in [0,\pi]$*,* $v \in \mathbb{R}$*.*

1. Plocha S je sférickou plochou se středem $S=[0,0,0]$ a poloměrem $r=1$ Stejně tak v parametrizaci poznáme sférické souřadnice se středem $S=[0,0,0]$ a poloměrem $r=1$. Otázkou zůstává, zda množina parametrů udává celou sféru. Parametr u udává projekci sféry do roviny xy. Zde by se mělo jednat o kruh také s poloměrem $r=1$. V tomto ohledu se zdá být vše v pořádku, neboť popisujeme dokola celých 360°. Parametr v popisuje odchylku bodu od kladné poloosy z. I v tomto ohledu se zdá být vše v pořádku, neboť popisujeme celých 360° odchylky. Všimněme si však, že body plochy S popisujeme 2×. Pokud bychom vzali například bod $[1,0,0]$, který leží na sféře, tak tento bod dostaneme jak pro volbu parametrů $u=0$, $v=\frac{\pi}{2}$, tak také pro $u=\pi$, $v=\frac{3\pi}{2}$. Vskutku, všimněme si, že

$$\begin{aligned}
x &= 1 = \cos 0 \sin \frac{\pi}{2} = -\cos 0 \sin \frac{3\pi}{2} = \cos \pi \sin \frac{\pi}{2},\\
y &= 0 = \sin 0 \sin \frac{\pi}{2} = \sin \pi \sin \frac{3\pi}{2},\\
z &= 0 = \cos \frac{\pi}{2} = \cos \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

   Stejné odvození bychom mohli provést i pro ostatní body. Z těchto důvodů se nejedná o správnou parametrizaci plochy S.

2. Podobně jako v předchozím bodě se musíme ptát, zda množina parametrů popisuje celou plochu S a zda udává parametrizace prosté zobrazení na vnitřku množiny M. Všimněme si, že pro $v \in [0,\pi]$ popisuje parametrizace polovinu sféry s $y \geq 0$. To vidíme rovnou ze znalosti sférických souřadnic. Dále pak můžeme přepsat parametrizaci jako

$$\begin{aligned}
x &= \cos u \sin v = -\cos u \sin(v-\pi),\\
y &= \sin u \sin v = -\sin u \sin(v-\pi),\\
z &= \cos v = -\cos(v-\pi).
\end{aligned}$$

   A pro $v \in [\pi,2\pi]$ popisujeme znovu polovinu koule, tentokrát pro $y \leq 0$. Znaménka mínus nám zde pouze udávají, že začínáme oproti normální situaci v bodech splňujících $x<0$ a $z<0$ a až pro $v>\frac{\pi}{2}$ dostáváme kladné hodnoty. Parametrizace tedy skutečně odpovídá ploše S.

3. Stejná situace jako v předchozím bodech. I zde bychom si mohli rozmyslet, že parametry u udávají nejprve pro $v \in [0,\pi]$ polovinu sféry pro $x \geq 0$ a poté snadno určíme vhodným posunutím, že pro $v \in [\pi,2\pi]$ dostaneme druhou polovinu sféry, kde je $x \leq 0$.

4. Je pravdou, že plochu tvoří válec a parametrizace také popisuje válec. Tyto válce však nejsou stejné. Dosadíme-li parametrizaci do rovnice, dostaneme

$$\sin^2 u + v^2 = 1$$

Pravděpodobně bychom nalezli nějaké body, které tuto rovnici řeší. My však chceme, aby tuto rovnici splňovaly všechny body množiny parametrů. Vidíme tedy, že válce jsou vskutku různé.

5. Plocha S udává válec, ale parametrizace válcové souřadnice nepřipomíná. Všimněme si však, že můžeme parametrizaci přepsat do tvaru $x = \cos 2u$, $y = \sin 2u$ a $z = v^3$. Jednoduchá substituce $w = 2u$ by nám dala $x = \cos w$, $y = \sin w$ a $z = v^3$, pro $w \in [0, 2\pi]$. Navíc třetí mocnina tvoří bijektivní zobrazení a tedy další substituce $t = v^3$ dává $x = \cos 2u$, $y = \sin 2u$ a $z = t$, pro $t \in \mathbb{R}$. Nyní již poznáváme v parametrizaci cylindrické souřadnice pro poloměr $r = 1$. Vskutku v tomto případě se jedná o správnou parametrizaci plochy S.

Př. 485 *Je dána plocha* $S : z = 6 - \sqrt{x^2 + y^2}$*,* $y \leq 0$*. Spočtěte velikost její normály.*

Plocha S je dána explicitně funkcí $z = f(x, y) = 6 - \sqrt{x^2 + y^2}$. Chceme tedy určit normálový vektor $n = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right) = (-f_x, -f_y, 1)$. Dostáváme tedy

$$n = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1\right).$$

Velikost tohoto vektoru pak dostaneme ve standardní eukleidovské normě jako

$$||n|| = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1} = \sqrt{2}.$$

Př. 486 *Vypočtěte plošný integrál*
$$\iint_S xy\,\mathrm{d}S$$
pokud je $S : x^2 + y^2 = 4,\ 0 \le z \le 3,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x \ge 0.$

Zde nemáme explicitní vyjádření některé proměnné vůči ostatním. Musíme tedy plochu S vhodně parametrizovat. Neboť plocha S je částí válcové plochy, využijeme vhodně válcové souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$.

Dosazením do rovností a nerovností dostaneme, že $z \in [0,3]$, $\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2 = 4$, $\rho\sin\varphi \ge 0$ a $\rho\cos\varphi \ge 0$, z čehož plyne $\varphi \in [0, \pi/2]$. Plochu tedy máme vhodně parametrizovanou na $M : [0,\pi/2] \times [0,3]$ přes $x = 2\cos u$, $y = 2\sin u$, $z = v$. Parciální derivace těchto parametrizací dostaneme jako
$$\begin{array}{rrrr} x_u = & -2\sin u, & x_v = & 0, \\ y_u = & 2\cos u, & y_v = & 0, \\ z_u = & 0, & z_v = & 1. \end{array}$$
Pomocí těchto derivací tak spočítáme
$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = 4\sin^2 u + 4\cos^2 u = 4, \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = 0 + 0 + 1^2 = 1, \\ F &= \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0 + 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$
Dostáváme tedy integrál
$$\iint_M 4\cos u \sin u \underbrace{\sqrt{4 \cdot 1 - 0}}_{=2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 4\int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin 2u}_{=2\sin u\cos u}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 12\left[-\frac{\cos 2u}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$= 12\frac{1+1}{2} = 12.$$

Př. 487 *Určete povrch rotačního paraboloidu $z = 6 - x^2 - y^2$ nad rovinou $z = 0$.*

Chceme počítat plochu paraboloidu pomocí plošného integrálu z jedničky, tj.

$$P = \iint_S 1 \,\mathrm{d}S,$$

Zde je plocha S dána explicitně, z čehož odvodíme pomocí parciálních derivací $z_x = -2x$, $z_y = -2y$, že

$$P = \iint_M 1\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

Potřebujeme ještě určit množinu M, přes kterou je plocha S parametrizována. Plocha je dána explicitně $z = 6 - x^2 - y^2$ pro $z \geq 0$ z čehož dohromady získáme dosazením $M : x^2 + y^2 \leq 6$. Vzhledem k tvaru množiny M a integrované funkce, zavedeme polární souřadnice $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, pro $\rho \in [0, \sqrt{6}]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Dostáváme

$$P = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{6}} \rho\sqrt{1 + 4\rho^2} \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi = |\text{integrál neobsahuje prom. } \varphi| = 2\pi \int_0^{\sqrt{6}} \rho\sqrt{1 + 4\rho^2} \,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \left| \begin{array}{c} t = 1 + 4\rho^2 \\ \mathrm{d}t = 8\rho \,\mathrm{d}\rho \end{array} \right| = \frac{2\pi}{8} \int_1^{25} \sqrt{t} \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} \left[\frac{2\sqrt{t^3}}{3} \right]_1^{25} = \frac{\pi}{6} (125 - 1) = \frac{62\pi}{3}.$$

Př. 488 *Určete povrch horní části sféry* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$.

Plochu počítáme pomocí plošného integrálu 1. druhu

$$P = \iint_S 1 \, \mathrm{d}S.$$

Potřebujeme parametrizovat plochu S. Zde můžeme vyjádřit $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, nebo použijeme sférické souřadnice, vždyť se jedná o část sféry. Přesněji se pro $z \geq 0$ jedná o horní polovinu sféry a tedy můžeme ignorovat část $z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Parametrizujeme-li plochu sférickými souřadnicemi je poloměr sféry pevný $r = 2$ a chceme popsat jen horní polovinu sféry, tedy $x = 2\cos u \sin v$, $y = 2\sin u \sin v$, $z = 2\cos v$, pro $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, \pi/2]$.

Pro první variantu určujeme

$$P = \iint_M \sqrt{\frac{x^2}{4 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{4 - x^2 - y^2} + 1} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_M \sqrt{\frac{4}{4 - x^2 - y^2}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Zde musíme určit množinu M, ta je však dána jako $x^2 + y^2 \leq 4$, což snadno vidíme, pokud si představíme plochu S nebo použijeme nerovnost $\sqrt{4 - x^2 - y^2} \geq 0$ a množinu odvodíme. Množina M je kruh, proto volíme transformaci do polárních souřadnic a dopočteme

$$P = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{2\rho}{\sqrt{4 - \rho^2}} \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi = \left| \begin{array}{c} t = 4 - \rho^2 \\ \mathrm{d}t = -2\rho \, \mathrm{d}\rho \end{array} \right| = -2\pi \int_4^0 \frac{1}{\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t =$$
$$= 2\pi \left[2\sqrt{t} \right]_0^4 = 8\pi.$$

Pro druhou variantu musíme určit

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cos u \sin v & 2\sin u \cos v \\ 0 & -2\sin v \end{vmatrix} = -4\cos u \sin^2 v,$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2\sin v \\ -2\sin u \sin v & 2\cos u \cos v \end{vmatrix} = -4\sin u \sin^2 v,$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2\sin u \sin v & 2\cos u \cos v \\ 2\cos u \sin v & 2\sin u \cos v \end{vmatrix} =$$
$$= -4\sin^2 u \sin v \cos v - 4\cos^2 u \sin v \cos v = -4\sin v \cos v.$$

Dohromady dostáváme

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{\underbrace{16\cos^2 u \sin^4 v + 16\sin^2 u \sin^4 v}_{=16\sin^4 v} + 16\sin^2 v \cos^2 v} =$$
$$= \sqrt{16\sin^4 v + 16\sin^2 v \left(1 - \sin^2 v\right)} = \sqrt{16\sin^2 v} = 4|\sin v|.$$

Plošný integrál 1. druhu P můžeme převést pomocí převodové formule na dvojný integrál

$$P = \iint_M \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin v| \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u = 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v \, \mathrm{d}v =$$
$$= 8\pi \left[-\cos v \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 8\pi.$$

V závislosti na tvaru integrované funkce a plochy S může být jeden ze zvolených přístupů jednodušší, než druhý.

Př. 489 *Vypočtěte plošný integrál*

$$I = \iint_S \frac{1}{\sqrt{R^2 - z^2}} \, \mathrm{d}S,$$

kde S je část válcové plochy $x^2 + y^2 = R^2$, $0 \le z \le H$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $R > H > 0$.

Chceme parametrizovat část válce, proto volíme válcové souřadnice. Tedy $x = R\cos u$, $y = R\sin u$, $z = v$, kde $u \in [0, \pi/2]$, $v \in [0, H]$. Následně můžeme počítat

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R\cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = R\cos u,$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -R\sin u & 0 \end{vmatrix} = R\sin u,$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -R\sin u & 0 \\ R\cos u & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dohromady dostaneme $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = R$ a tedy

$$I = \int_0^H \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{\sqrt{R^2 - v^2}} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \frac{\pi}{2} \int_0^H \frac{R}{R\sqrt{1 - \left(\frac{v}{R}\right)^2}} \, \mathrm{d}u$$

$$= \frac{\pi}{2} R \left[\arcsin\left(\frac{v}{R}\right)\right]_0^H = \frac{R\pi}{2} \arcsin\left(\frac{H}{R}\right).$$

Př. 490 *Vypočtěte plošný integrál*

$$I = \iint_S x^2 + y^2 \,\mathrm{d}S,$$

kde S je dána jako $z^2 = 9(x^2 + y^2)$, $-1 \leq z \leq 2$.

Plochu S můžeme explicitně vyjádřit odmocněním jako $z = \pm 3\sqrt{x^2 + y^2}$. Znaménko odpovídá situaci, kde je $z \geq 0$ nebo $z \leq 0$. Avšak na ploše nastávají oba tyto případy. Plochu S bychom tedy rozdělily na dvě části, tj. dvě podplochy a integrál zpočítáme přes tyto plochy. První podplocha je $S_1 : z = 3\sqrt{x^2 + y^2}$, pro $0 \leq z \leq 2$, kterou parametrizujeme jako $x = u$, $y = v$ a $z = 3\sqrt{u^2 + v^2}$ přes množinu $M_1 : 0 \leq u^2 + v^2 \leq \frac{4}{9}$, kterou získáme po umocnění a úpravě z nerovnosti $0 \leq z \leq 2$. Druhou podplochu máme $S_2 : z = -3\sqrt{x^2 + y^2}$, pro $-1 \leq z \leq 0$ a parametrizujeme ji jako $x = u$, $y = v$, $z = -3\sqrt{u^2 + v^2}$ přes množinu $M_2 : 0 \leq u^2 + v^2 \leq \frac{1}{9}$.

První integrál spočítáme jako

$$I_1 = \iint_{M_1} (x^2 + y^2)\sqrt{1 + \frac{9x^2 + 9y^2}{x^2 + y^2}} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \iint_{M_1} (x^2 + y^2)\sqrt{1 + 9} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

Použijeme-li polární souřadnice dostaneme

$$I_1 = \sqrt{10} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{2}{3}} \rho^2 \cdot \rho \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi = 2\sqrt{10}\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\frac{2}{3}} = \sqrt{10}\pi \frac{32}{324} = \sqrt{10}\pi \frac{8}{81}.$$

Druhý integrál dostaneme obdobnou cestou

$$I_2 = \sqrt{10} \iint_{M_2} (x^2 + y^2) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \sqrt{10} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{3}} \rho^3 \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi =$$
$$= 2\sqrt{10}\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\frac{1}{3}} = \sqrt{10}\pi \frac{1}{162}.$$

Dohromady tedy máme $I = I_1 + I_2 = \sqrt{10}\pi \frac{17}{162}$.

Druhou možností jak integrál spočíst je využít polární souřadnice a parametrizovat plochu S přes $x = u \cos v$, $y = u \sin v$. Z čehož získáme $z^2 = 9u^2$ a dostaneme opět dvě podplochy $S_1 : z = 3u$, pro $u \in [0, 2/3]$, $v \in [0, 2\pi]$ a $S_2 : z = -3u$, pro $u \in [0, 1/3]$, $v \in [0, 2\pi]$. Normálový vektor pak dostaneme skrze funkce

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin v & u \cos v \\ \pm 3 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \pm 3u \cos v = \pm 3u \cos v,$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \pm 3 & 0 \\ \cos v & -u \sin v \end{vmatrix} = -1 \cdot \pm 3u \sin v = \pm 3u \sin v,$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \end{vmatrix} = u \cos^2 v + u \sin^2 v = u.$$

Norma normálového vektoru je potom $||\overrightarrow{n}|| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{\underbrace{9u^2 \cos^2 v + 9u^2 \sin^2 v}_{=9u^2} + u^2} = \sqrt{10}u$. Což nám dá integrály

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{2}{3}} u^2 \cdot \sqrt{10}u \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \quad \text{a} \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{3}} u^2 \cdot \sqrt{10}u \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v$$

Vidíme, že dostáváme stejný výsledek jako v první části.

Př. 491 *Vypočtěte obsah plochy* $S : z = \sqrt{x^2 + y^2}$, *vymezené nerovnostmi* $z \leq 7$, $y \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}x$, $y \geq \sqrt{3}x$.

Počítáme integrál

$$P = \iint_S 1 \, \mathrm{d}S,$$

kde parametrizujeme explicitně danou plochu S přes $x = u$, $y = v$, $z = \sqrt{u^2 + v^2}$, pro množinu $M : 49 \geq z^2 = u^2 + v^2 \geq 0$, $v \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}u$, $v \geq \sqrt{3}u$. Integrál tedy počítáme jako

$$P = \iint_M \sqrt{1 + \frac{u^2}{u^2 + v^2} + \frac{v^2}{u^2 + v^2}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \sqrt{2} \iint_M 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Potřebujeme tedy určit dvojný integrál přes množinu M. K tomu opět využijeme polárních souřadnic, neboť se jedná o část kruhu. Z nerovnosti $49 \geq z^2 = u^2 + v^2 \geq 0$ dostaneme snadno $\rho \in [0, 7]$ a nyní potřebujeme analyzovat ostatní nerovnosti. Všimněme si, že pokud je $u \geq 0$, potom je $v \geq \sqrt{3}u$ a tedy také $v \geq 0$. Naopak pokud je $u < 0$ máme $v \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}u$, a proto znovu $v \geq 0$. Dohromady tak musí vždy platit $v \geq 0$ a proto je $\sin\varphi \geq 0$, tj. φ musí splňovat $0 \leq \varphi \leq \pi$. Pro $u \geq 0$ je $v \geq \sqrt{3}u \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}u$ a tudíž

$$\rho \sin\varphi \geq \sqrt{3}\rho \cos\varphi \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi \geq \sqrt{3},$$

což odpovídá nerovnosti $\varphi \geq \frac{\pi}{3}$ (v prvním kvadrantu spadne do množiny M tato část). Pro $u < 0$ je $\cos\varphi < 0$ a navíc nás zajímá pouze nerovnost $v \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}u$ neboť je $-\frac{\sqrt{3}}{3}u > \sqrt{3}u$. Za těchto podmínek dostaneme z nerovnosti

$$\rho \sin\varphi \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}\rho \cos\varphi \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi \leq -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

čemuž odpovídá ve druhém kvadrantu nerovnost $\varphi \leq \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$. Obdobně bychom si mohli množinu prostě nakreslit a dostali bychom stejné rozsahy. Takto je však můžeme vyjádřit také analyticky. Celkově vyhodnotíme, které úhly patří do M, a dostaneme $\varphi \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$. Celkem máme integrál

$$P = \sqrt{2} \int_0^7 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} \rho \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\rho = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^7 = \frac{49\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Př. 492 *Vypočtěte plošný integrál*

$$I = \iint_S x^2 + y^2 \,\mathrm{d}S,$$

kde S je dána implicitně jako $2x + 3y + z = 6$, pro $x^2 + y^2 \leq 1$.

Plocha je udána implicitní rovnicí roviny, kterou můžeme převést do explicitního tvaru $z = 6 - 2x - 3y$. Proto parametrizujeme plochu jako $x = u$, $y = v$, $z = 6 - 2u - 3v$ přes množinu $M : u^2 + y^2 \leq 1$, která je kruhem. Dostaneme tedy integrál

$$\iint_M (x^2 + y^2)\sqrt{1 + 4 + 9} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \sqrt{14} \iint_M x^2 + y^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

Což při použití polárních souřadnic dá

$$I = \sqrt{14} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^2 \cdot \rho \,\mathrm{d}\rho = 2\sqrt{14}\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{14}\pi}{2}.$$

Př. 493 *Vypočtěte plošný integrál*

$$I = \iint_S x^2 + y^2 \, \mathrm{d}S,$$

kde S je dána implicitně jako $x^2 + y^2 = 1$ a je vymezena ohraničením $0 \leq z \leq 6 - 2x - 3y$.

Neboť se jedná o část válcové plochy s poloměrem $r = 1$ využijeme válcové souřadnice. Dostaneme tak $x = \cos u$, $y = \sin u$, $z = v$. Množinu přes kterou je plocha parametrizovaná dostaneme pokud si uvědomíme, že v půdorysně plocha tvoří celý kruh, a proto $u \in [0, 2\pi]$. Navíc dosazením do vymezení máme $0 \leq v \leq 6 - 2\cos u - 3\sin u$. Zde vidíme, že skutečně máme v půdorysně celý kruh neboť $0 \leq 6 - 2\cos u - 3\sin u$ pro $u \in [0, 2\pi]$. Pokud by tomu tak nebylo, museli bychom omezit tento interval. Dále spočítáme

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos u,$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\sin u & 0 \end{vmatrix} = \sin u,$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Integrál tedy dostaneme jako

$$\begin{aligned} I &= \iint_M (\cos^2 u + \sin^2 u)\sqrt{\cos^2 u + \sin^2 u + 0^2} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \iint_M 1 \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{6-2\cos u - 3\sin u} 1 \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u = \int_0^{2\pi} 6 - 2\cos u - 3\sin u \, \mathrm{d}u = \\ &= [6u - 2\sin u + 3\cos u]_0^{2\pi} = 12\pi. \end{aligned}$$

Př. 494 *Vypočtěte obsah plochy* $S : z = 2x^2 + 2y^2$, $y \geq 0$, $z \leq 4$.

Plochu máme danou explicitně, a proto je normálový vektor daný jako $n = (-4x, -4y, 1)$. Tudíž počítáme integrál

$$P = \iint_S 1 \,\mathrm{d}S = \iint_M \sqrt{1 + (4x)^2 + (4y)^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

Množinu M máme danou vymezením $4 \geq z = 2x^2 + 2y^2$, a $y \geq 0$. Z tohoto důvodu je odmocněním a spojením nerovností dohromady $0 \leq y \leq \sqrt{2 - x^2}$, kde $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ jinak by výraz pod odmocninou neměl smysl. Množina M Je dána jako horní polovina kruhu s poloměrem $\sqrt{2}$. Proto transformujeme integrál do polárních souřadnic $\rho \in [0, \sqrt{2}]$, $\varphi \in [0, \pi]$. Počítáme

$$P = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\pi} \rho \sqrt{1 + 16\rho^2} \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\rho = \left| \begin{array}{c} t = 1 + 16\rho^2 \\ \mathrm{d}t = 32\rho \,\mathrm{d}\rho \end{array} \right| = \frac{\pi}{32} \int_1^{33} \sqrt{t} \,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{\pi}{32} \left[\frac{2\sqrt{t^3}}{3} \right]_1^{33} = \frac{\pi}{48} (33\sqrt{33} - 1).$$

Př. 495 *Vypočtěte obsah plochy* $S : z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \le 2y$.

Všimněme si, že plocha S je rotační plochou což bychom snadno zjistili například z jejich vrstevnic vzhledem k ose z. Na základě těchto úvah parametrizujeme plochu skrze polární souřadnice jako $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u$, pro $u^2 \le 2u\sin v$. Neboť je $u \ge 0$ lze poslední nerovnost modifikovat do tvaru $u \le \sin v$ a navíc neboť $u \ge 0$ máme také $\sin v \ge 0$, pročež je $v \in [0, \pi]$.

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin v & u\cos v \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -u\cos v,$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos v & -u\sin v \end{vmatrix} = -u\sin v,$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{vmatrix} = u\cos^2 v + u\sin^2 v = u.$$

Počítáme tedy integrál

$$P = \iint_M \sqrt{\underbrace{u^2\cos^2 v + u^2\sin^2 v}_{=u^2} + u^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \sqrt{2}\int_0^\pi \int_0^{2\sin v} \overbrace{|u|}^{u\ge 0 \Rightarrow |u| = u} \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^\pi \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^{2\sin v} \mathrm{d}v = 2\sqrt{2}\int_0^\pi \underbrace{\sin^2 v}_{=\frac{1-\cos 2v}{2}} \,\mathrm{d}v = 2\sqrt{2}\left[\frac{v}{2} - \frac{\sin 2v}{4}\right]_0^\pi = \sqrt{2}\pi.$$

V první variantě výpočtu jsme uvažovali, že je plocha rotační a vycházeli jsme s parametrizací z této informace. Také bychom si mohli všimnout, že plocha je dána explicitně a tudíž druhou variantou je parametrizovat plochu jako $x = u$, $y = v$ a $z = \sqrt{u^2 + v^2}$ čímž dostaneme

$$\iint_M \sqrt{1 + \frac{u^2}{u^2 + v^2} + \frac{v^2}{u^2 + v^2}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \sqrt{2}\iint_M \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Kde stačí spočítat pouze obsah množiny M, ta je však dána jako $u^2 + v^2 \le 2v \Rightarrow u^2 + (v-1)^2 \le 1$. Tedy se jedná o obsah jednotkové kružnice, který je jednoduše π.

Př. 496 *Vypočtěte obsah plochy* $S: 2x+3y+z=6,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0.$

Plocha S je rovinou a je dána explicitně přes množinu $M: x\geq 0,\ y\geq 0,\ 2x+3y\leq 6$. Z poslední nerovnosti dostaneme vymezení $y\leq \frac{6-2x}{3}$ a všimněme si, že nerovnost $0\leq y\leq \frac{6-2x}{3}$ má smysl jen pro $x\leq 3$. Dostáváme

$$P=\iint_M \sqrt{1+4+9}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sqrt{14}\int_0^3\int_0^{\frac{6-2x}{3}}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\sqrt{14}\int_0^3\frac{6-2x}{3}\,\mathrm{d}x=$$
$$=\sqrt{14}\left[\frac{6x-x^2}{3}\right]_0^3=\sqrt{14}\frac{18-9}{3}=3\sqrt{14}.$$

Př. 497 *Vypočtěte obsah plochy* $S: z = \sqrt{2x^2 + 2y^2},\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \leq 1.$

Plocha je dána explicitně a tudíž máme normálový vektor rovnou $n = (-4x, -4y, 1)$. Plocha je potom parametrizována přes množinu $M : 2x^2 + 2y^2 = z \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0$. Jedná se tedy o čtvrtinu kruhu v prvním kvadrantu. Máme tedy integrál

$$P = \iint_M \sqrt{1 + \frac{4x^2}{2x^2 + 2y^2} + \frac{4y^2}{2x^2 + 2y^2}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \sqrt{3} \iint_M \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

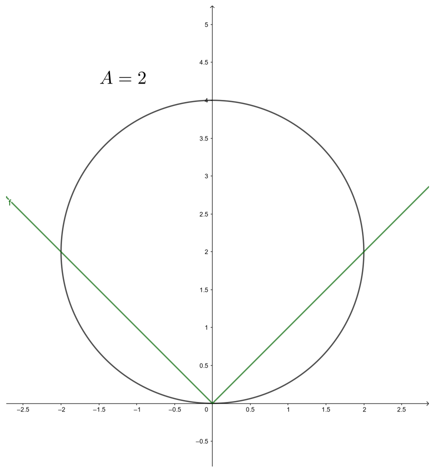
Množina M je čtvrtina kruhu s poloměrem $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Proto je celkový obsah $\sqrt{3}\frac{\pi r^2}{4} = \frac{\sqrt{3}\pi}{8}$.

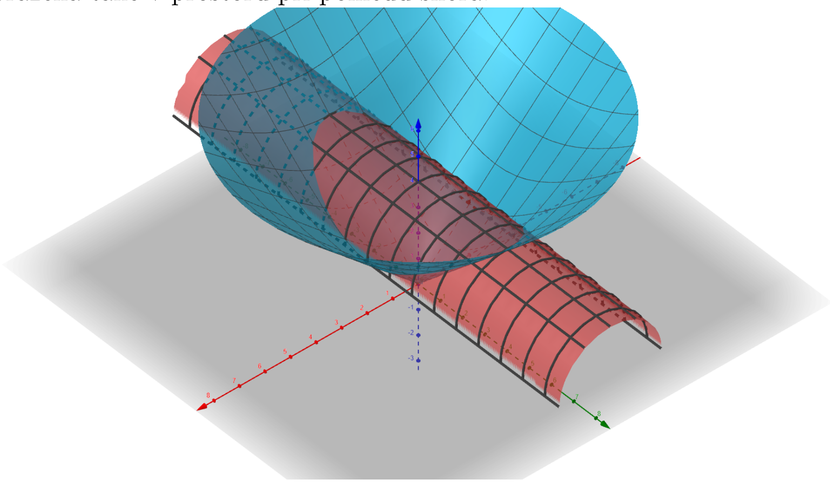
Př. 498 *Vypočtěte*

$$I = \int_S z \, \mathrm{d}S,$$

kde S *je část plochy* $x^2 + z^2 = 2Az$, $A > 0$, *která je zdola ohraničená průnikem s plochou* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Úpravou na čtverec upravíme rovnost $x^2 + z^2 = 2Az$ do tvaru $x^2 + (z - A)^2 = A^2$ a hned tedy vidíme, že se jedná o válcovou plochu vzhledem k proměnným x a z s poloměrem A. Neboť se jedná o část válcové plochy, využijeme vhodně válcové souřadnice $x = A\cos u$, $z = A\sin u + A$, $y = v$. V řezu pro $y = 0$ vidíme, že $u \in [0, \pi]$. Tento fakt vyplývá z toho, že projekce plochy S do roviny $y = 0$ je přesně horní polokružnice $z = A + \sqrt{A^2 - x^2}$. V řezech pro jiné y bychom dostali válcovou plochu vždy jako stejný kruh. Avšak funkce $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ je pro $y = 0$ jednoduchou funkcí $z = |x|$, ale např. pro $y = 1$ máme $= z = \sqrt{x^2 + 1} \geq |x|$ a tato funkce odřízne v rovině $y = 1$ z kružnice menší část. Plocha tak v projekci do roviny xz bude pouze polokružnicí $z = A + \sqrt{A^2 - x^2}$ a v dalších vrstvách nám nic nového nevznikne. Plocha S je zobrazena pro $A = 2$ na následujících obrázcích, kde vidíme řez v rovině $y = 0$ a zde se jedná pouze o horní půlkružnici. Dále je zde pak plocha vyobrazena také v prostoru při pohledu shora.





Hodnota druhého parametru $y = v$ závisí na u. Ohraničení pro y vyplývá z faktu, že pro pevné x a z na ploše S je rozsah y vymezen shora i zdola plochou $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Hraniční body rozsahu pro y tak vyjádříme jako $y = \pm\sqrt{z^2 - x^2} = \pm A\sqrt{2\sin^2 u + 2\sin u}$. Dále dopočítáme

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ A\cos u & 0 \end{vmatrix} = -A\cos u,$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A\cos u & 0 \\ -A\sin u & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -A\sin u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -A\sin u.$$

Velikost normálového vektoru je proto $||n|| = A$. Takže máme integrál

$$\begin{aligned}
I &= \iint_M A(\sin u + 1) \cdot A \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = A^2 \int_0^\pi \int_{-A\sqrt{2\sin^2 u + 2\sin u}}^{A\sqrt{2\sin^2 u+2\sin u}} (\sin u + 1)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \\
&= 2\sqrt{2}A^3 \int_0^\pi \sqrt{(\sin u + 1)^3 \sin u}\,\mathrm{d}u = \left| \begin{array}{c} z = \operatorname{tg} \frac{u}{2} \\ \frac{2\,\mathrm{d}z}{z^2+1} = \mathrm{d}u \\ \sin u = \frac{2z}{1+z^2} \end{array} \right| = \\
&= 2\sqrt{2}A^3 \int_0^\infty \frac{2z\sqrt{\left(\frac{z^2+2z+1}{1+z^2}\right)^3 \frac{2z}{1+z^2}}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = 8A^3 \int_0^\infty \frac{(z+1)^3\sqrt{z}}{(z^2+1)^3}\,\mathrm{d}z = \\
&= 16A^3 \int_0^\infty \frac{(y^2+1)^3 y^2}{(y^4+1)^3}\,\mathrm{d}y = |\text{Ostrogradského metoda}\,| = \\
&= 16A^3 \left[\frac{7y^7 - 3y^5 + 3y^3 - 7y}{16(y^4+1)^2}\right]_0^\infty + 16A^3 \frac{7}{16} \int_0^\infty \frac{y^2+1}{y^4+1}\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Nyní potřebujeme spočítat integrál z racionální funkce. K tomu bychom použili rozklad na parciální zlomky, ale musíme nejprve faktorizovat jmenovatele. Polynom ve jmenovateli nemá reálné kořeny, ale vidíme, že můžeme rozložit $y^4 + 1 = (y^2 + i)(y^2 - i)$ odkud bychom mohli určit všechny kořeny polynomy a rozložit tak $y^4 + 1$ v reálném oboru. Další variantou je rozložit polynom rovnou pomocí vzorce

$$x^4 + C^2 = (x^2 + \sqrt{2A}x + A)(x^2 - \sqrt{2A}x + A).$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{y^2+1}{y^4+1}\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty \frac{y^2+1}{(y^2+\sqrt{2}y+1)(y^2-\sqrt{2}y+1)}\,\mathrm{d}y = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{y^2+\sqrt{2}y+1} + \frac{1}{y^2-\sqrt{2}y+1}\,\mathrm{d}y = |\text{úprava na čtverec a subst.}| = \\
&= \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right]_0^\infty = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{2} - (\operatorname{arctg}(1) + \operatorname{arctg}(-1)) = \\
&= \frac{\sqrt{2}\pi}{2} - (\operatorname{arctg}(1) - \operatorname{arctg}(1)) = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Spojíme-li tento výpočet s předchozím dostaneme

$$I = A^3 \lim_{y\to\infty} \frac{7y^7 - 3y^5 + 3y^3 - 7y}{(y^4+1)^2} - A^3\frac{0}{(0^4+1)^2} + 7A^3\frac{\sqrt{2}\pi}{2} = 7A^3\frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$$

Zvolené válcové souřadnice popisují plochu vzhledem k ose $S = [0, y, A]$ avšak také bychom ji mohli popisovat vzhledem k ose y, pak by byl rozsah pro u jiný a to $u \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$. Hlavní rozdíl by zde vzniknul u poloměru, který by byl nově závislý na úhlu u. Parametrizace $x = r\cos u$, $z = r\sin u$ by nám po dosazení do $x^2 + z^2 = 2Az$ dala $r^2 = 2Ar\sin u$ a tedy bychom měli parametrizaci $x = 2A\sin u\cos u = A\sin 2u$, $z = 2A\sin^2 u$, $y = v$. Normálový vektor je potom

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2A\sin 2u & 0 \end{vmatrix} = -2A\sin 2u,$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2A\sin 2u & 0 \\ 2A\cos 2u & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2A\cos 2u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2A\cos 2u.$$

Velikost tohoto normálového vektoru je proto $||n|| = 2A$. Takže bychom získali integrál

$$I = \iint_M 2A\sin^2 u \cdot 2A \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 4A^2 \iint_M \sin^2 u \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Rozsah parametru v bychom určili nyní stejným způsobem jenom s tím rozdílem, že tentokrát by platilo $y = \pm\sqrt{z^2 - x^2} = \pm\sqrt{-4A^2\sin^2 u\cos 2u}$. Dostali bychom se tak po dalších úpravách k integrálu

$$I = 8A^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^2 u\sqrt{-4A^2\sin^2 u\cos 2u}\,\mathrm{d}u = 16A^3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^3 u\sqrt{-\cos 2u}\,\mathrm{d}u.$$

S řešením tohoto integrálu bychom patrně začali substitucí $t = \cos u$, kde bychom museli následně vyřešit integrál

$$\int (t^2 - 1)\sqrt{1 - 2t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Př. 499 *Vypočtěte*

$$I = \int_S x + y + z \,\mathrm{d}S,$$

kde S je plocha $x^2 + y^2 + z^2 = A^2$, $z \geq 0$.

Plocha S je sférou o poloměru $r = A$ a středem v bodě $[0, 0, 0]$. Parametrizujeme ji pomocí klasických sférických souřadnic jako $x = A \cos u \sin v$, $y = A \sin u \sin v$, $z = A \cos v$, pro $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, \pi/2]$. Navíc

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A \cos u \sin v & A \sin u \cos v \\ 0 & -A \sin v \end{vmatrix} = -A^2 \cos u \sin^2 v,$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -A \sin v \\ -A \sin u \sin v & A \cos u \cos v \end{vmatrix} = -A^2 \sin u \sin^2 v,$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -A \sin u \sin v & A \cos u \cos v \\ A \cos u \sin v & A \sin u \cos v \end{vmatrix} =$$
$$= -A^2 \sin^2 u \sin v \cos v - A^2 \cos^2 u \sin v \cos v = -A^2 \sin v \cos v.$$

Počítáme tedy

$$I = A \iint_M (\cos u \sin v + \sin u \sin v + \cos v) \sqrt{A^4(\underbrace{\sin^4 v + \sin^2 v \cos^2 v}_{=\sin^2 v})} \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v =$$
$$= A^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\cos u + \sin u) \sin v + \cos v) \overbrace{|\sin v|}^{=\sin v} \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}u =$$
$$= A^3 \int_0^{2\pi} \cos u + \sin u \,\mathrm{d}u \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 v \,\mathrm{d}v + 2A^3\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overbrace{\cos v \sin v}^{t=\sin v} \,\mathrm{d}v =$$
$$= A^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 v \,\mathrm{d}v \,[\sin v - \cos v]_0^{2\pi} + 2A^3\pi \int_0^1 t \,\mathrm{d}t = 2A^3\pi \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = A^3\pi.$$

Př. 500 *Vypočtěte*

$$I = \int_S x^2 + y^2 \,\mathrm{d}S,$$

kde S je povrch tělesa ohraničeného nerovnostmi $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1$.

Plocha S je sjednocením dvou ploch. Horní podstavou tělesa $S_1 : z = 1$, na množině $M : x^2+y^2 \le 1$ a pláštěm tělesa udaným $S_2 : z = \sqrt{x^2+y^2}$, také na množině $M : x^2+y^2 \le 1$. Jedná se zde o kužel, který stojí na své špičce. Plocha S_1 je dána explicitně a máme tedy snadno její normálový vektor $n_1 = (0,0,1)$. Takže první integrál dostaneme jako

$$I_1 = \iint_M (x^2+y^2)\sqrt{1+0+0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

I druhá plocha S_2 je dána explicitně a její normálový vektor je dán jako $n = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$. Druhý integrál tudíž spočítáme jako

$$I_2 = \iint_M (x^2+y^2)\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^3\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Dohromady tedy máme $I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2}$.

Př. 501 *Vypočtěte*

$$I = \iint_S \frac{1}{(1+x+y)^2}\,\mathrm{d}S,$$

kde S je povrch tělesa ohraničeného $x+y+z \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Těleso je tvořeno jednotkovým simplexem. Ten má 4 stěny, kde tři leží v rovinách určených osovým křížem a nakonec rovinou $z = 1-x-y$. Plocha S se tudíž skládá ze čtyř menších ploch. Jsou to

$$\begin{aligned}
S_1 :& x = 0, \text{ přes } M_1 : y+z \leq 1, y \geq 0, z \geq 0, n_1 = (1,0,0)\\
S_2 :& y = 0, \text{ přes } M_2 : x+z \leq 1, x \geq 0, z \geq 0, n_2 = (0,1,0)\\
S_3 :& z = 0, \text{ přes } M_3 : x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, n_3 = (0,0,1)\\
S_4 :& z = 1-x-y, \text{ přes } M_3 : x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, n_4 = (1,1,1)
\end{aligned}$$

Počítáme

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iint_{M_1} \frac{1}{(1+y)^2}\sqrt{1+0+0}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{1-y} \frac{1}{(1+y)^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1-y}{(1+y)^2}\,\mathrm{d}y = \\
&|\text{parc. zlomky }| = \int_0^1 \frac{-1}{1+y} + \frac{2}{(1+y)^2}\,\mathrm{d}y = \left[-\ln|1+y| - \frac{2}{1+y}\right]_0^1 = \\
&= -\ln 2 - 1 - (0-2) = 1 - \ln 2,
\end{aligned}$$

$$I_2 = \iint_{M_2} \frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{1-z} \frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = 1 - \ln 2,$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \iint_{M_3} \frac{1}{(1+x+y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{(1+x+y)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \left[-\frac{1}{1+x+y}\right]_0^{1-x} \mathrm{d}x = \int_0^1 -\frac{1}{2} + \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \left[\ln|1+x| - \frac{x}{2}\right]_0^1 = \left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right),
\end{aligned}$$

$$I_4 = \iint_{M_3} \frac{1}{(1+x+y)^2}\sqrt{1+1+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sqrt{3} I_3 = \sqrt{3}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right).$$

Dohromady tedy máme $I = 2 - 2\ln 2 + (1+\sqrt{3})\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3-\sqrt{3}}{2} + (\sqrt{3}-1)\ln 2$.

Př. 502 *Vypočtěte*

$$I = \iint_S |xyz| \,\mathrm{d}S,$$

kde S je část plochy $z = x^2 + y^2$, která je ohraničená shora rovinou $z = 1$.

Plocha S je udána částí paraboloidu, který je vymezen rovinou shora pro $z \leq 1$. Navíc je dána explicitně a tedy je její normálový vektor $n = (-2x, -2y, 1)$ a máme ji parametrizovánu přes množinu $M : x^2 + y^2 \leq 1$, což můžeme ověřit dosazením do nerovnosti $z \leq 1$. Počítáme

$$\begin{aligned}
&\iint_M |xy(x^2+y^2)|\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho|\rho^4 \cos\varphi \sin\varphi|\sqrt{1+4\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \int_0^{2\pi} |\cos\varphi \sin\varphi|\,\mathrm{d}\varphi \int_0^1 \rho^5 \sqrt{1+4\rho^2}\,\mathrm{d}\rho = \left| \begin{array}{c} t = 1+4\rho^2 \\ \frac{t-1}{4} = \rho^2 \\ \mathrm{d}t = 8\rho\,\mathrm{d}\rho \end{array} \right| = \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \frac{1}{8}\int_1^5 \frac{(t-1)^2}{16}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{32}\int_0^1 s\,\mathrm{d}s \int_1^5 t^{5/2} - 2t^{3/2} + t^{1/2}\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{64}\left[\frac{2t^{7/2}}{7} - \frac{4t^{5/2}}{5} + \frac{2t^{3/2}}{3}\right]_1^5 = \frac{125\sqrt{5}-1}{420}.
\end{aligned}$$

Zde využíváme faktu, že funkce $g(x) = |\cos x \sin x|$ je nezáporná a periodická s periodou $\frac{\pi}{2}$. Vskutku uvědomme si, že platí

$$g\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \left|\overbrace{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}^{=-\sin x}\overbrace{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}^{=\cos x}\right| = g(x).$$

Proto platí

$$\int_0^{2\pi} g(x)\,\mathrm{d}x = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Př. 503 *Vypočtěte*

$$\iint_S z\,\mathrm{d}S,$$

kde S dána jako $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = v$, pro $u \in [0, A]$, $v \in [0, 2\pi]$, $A > 0$.

Plochu máme parametrizovanou, spočítáme pouze normálový vektor

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin v & u\cos v \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sin v,$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \cos v & -u\sin v \end{vmatrix} = -\cos v,$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{vmatrix} = u.$$

Proto počítáme integrál

$$\iint_M v\sqrt{\underbrace{\sin^2 v + \cos^2 v}_{=1} + u^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi} v\,\mathrm{d}v \int_0^A \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u =$$

$$= \left| \begin{array}{c} u = \operatorname{tg} t \\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} \end{array} \right| = \left[\frac{v^2}{2}\right]_0^{2\pi} \int_0^{\operatorname{arctg} A} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{4\pi^2}{2}\int_0^{\operatorname{arctg} A} \frac{\sqrt{\frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t}}}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \left| t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos t > 0 \right| = 2\pi^2 \int_0^{\operatorname{tg} A} \frac{1}{\cos^3 t}\,\mathrm{d}t = 2\pi^2 \int_0^{\operatorname{arctg} A} \frac{\cos t}{\cos^4 t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \left| \begin{array}{c} s = \sin t \\ \mathrm{d}s = \cos t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = 2\pi^2 \int_0^{\sin \operatorname{arctg} A} \frac{\mathrm{d}s}{(1-s^2)^2} = \left| \begin{array}{c} \text{parc. zlomky a vztah} \\ \sin \operatorname{arctg} A = \frac{A}{\sqrt{A^2+1}} \end{array} \right| =$$

$$= 2\pi^2 \int_0^{\frac{A}{\sqrt{A^2+1}}} \frac{1}{4(1-s)} + \frac{1}{4(1-s)^2} + \frac{1}{4(1+s)} + \frac{1}{4(1+s)^2}\,\mathrm{d}s =$$

$$= \frac{\pi^2}{2}\left[-\ln|1-s| + \ln|1+s| - \frac{1}{1+s} + \frac{1}{1-s}\right]_0^{\frac{A}{\sqrt{A^2+1}}} =$$

$$= \frac{\pi^2}{2}\left(\ln\left|\frac{1+\frac{A}{\sqrt{A^2+1}}}{1-\frac{A}{\sqrt{A^2+1}}}\right| + \frac{2\frac{A}{\sqrt{A^2+1}}}{1-\frac{A^2}{A^2+1}}\right) = \frac{\pi^2}{2}\left(\ln\frac{\sqrt{A^2+1}+A}{\sqrt{A^2+1}-A} + \frac{2\frac{A}{\sqrt{A^2+1}}}{\frac{1}{A^2+1}}\right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{2}\left(\ln\frac{(\sqrt{A^2+1}+A)^2}{A^2+1-A^2} + 2A\sqrt{A^2+1}\right) = \pi^2\left(\ln(\sqrt{A^2+1}+A) + A\sqrt{A^2+1}\right).$$

Př. 504 *Vypočtěte hmotnost paraboloidu $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ pro $z \in [0, 1]$ a jehož hustota je dána funkcí $h(x, y, z) = z$.*

Hledáme-li hmotnost tělesa, počítáme plošný integrál

$$m = \iint_S h(x, y, z) \,\mathrm{d}S.$$

Plocha je dána explicitně přes množinu $M : x^2 + y^2 \leq 2$. Počítáme tedy rovnou

$$\begin{aligned}
m &= \iint_M \frac{x^2 + y^2}{2} \sqrt{1 + x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \sqrt{1 + \rho^2} \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \left| \begin{array}{c} t^2 = 1 + \rho^2 \\ 2t \,\mathrm{d}t = 2\rho \,\mathrm{d}\rho \end{array} \right| = \pi \int_1^{\sqrt{3}} t(t^2 - 1)\sqrt{t^2} \,\mathrm{d}t = \pi \int_1^{\sqrt{3}} t^4 - t^2 \,\mathrm{d}t = \\
&= \pi \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{5}\pi + \frac{2\pi}{15}.
\end{aligned}$$

Př. 505 *Vypočtěte hmotnost polosféry* $x^2 + y^2 + z^2 = A^2$*,* $z \geq 0$*, jejíž hustota je dána jako* $h(x,y,z) = \frac{z}{A}$*.*

Hledáme-li hmotnost tělesa, počítáme plošný integrál

$$m = \iint_S h(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_S \frac{z}{A}\,\mathrm{d}S.$$

Neboť je $z \geq 0$ lze plochu vyjádřit explicitně jako $z = \sqrt{A^2 - x^2 - y^2}$. Navíc je plocha parametrizovaná přes množinu $M : x^2 + y^2 \leq A^2$, kterou odvodíme rovněž z nerovnosti $z \geq 0$. Proto můžeme rovnou určit normálový vektor

$$n = \left(-\frac{x}{\sqrt{A^2 - x^2 - y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{A^2 - x^2 - y^2}}, 1 \right).$$

Hmotnost tedy dostaneme integrálem

$$\begin{aligned} m &= \iint_M \frac{\sqrt{A^2 - x^2 - y^2}}{A} \sqrt{1 + \frac{x^2}{A^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{A^2 - x^2 - y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= \iint_M \frac{\sqrt{A^2 - x^2 - y^2}}{A} \sqrt{\frac{A^2 - x^2 - y^2 + x^2 + y^2}{A^2 - x^2 - y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_M 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Vidíme, že hmotnost je v tomto případě stejná jako obsah kružnice s poloměrem A, pro obsah však máme daný jasný vzorec a hmotnost je tedy $m = A^2\pi$.

Př. 506 *Vypočtěte*

$$I = \iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S,$$

kde plocha S je daná parametricky jako $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = uv$, pro $u \in [0,1]$ a $v \in [0,6\pi]$. Funkce $f(x,y)$ je

a) $f(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{p-x^2-y^2}}$, *pro* $p > 1$.

b) $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{p-x^2-y^2}}$, *pro* $p > 1$.

Plochu máme parametrizovanou, spočítáme pouze normálový vektor

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin v & u\cos v \\ v & u \end{vmatrix} = u(\sin v - v\cos v),$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ \cos v & -u\sin v \end{vmatrix} = -u(v\sin v + \cos v),$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{vmatrix} = u.$$

Nezávisle na podobě funkce $f(x,y,z)$ vystupuje v integrálu vždy velikost normálového vektoru

$$\begin{aligned}
||\overrightarrow{n}|| &= \sqrt{u^2 + u^2(\sin v - v\cos v)^2 + u^2(v\sin v + \cos v)^2} = \\
&= u\sqrt{1 + \sin^2 v + v^2\cos^2 v - 2v\sin v\cos v + \cos^2 v + v^2\sin^2 v + 2v\sin v\cos v +} = u\sqrt{2+v^2}.
\end{aligned}$$

V bodě *a*) řešíme integrál

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iint_M \frac{uv}{\sqrt{p-u^2}} \cdot u\sqrt{2+v^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_0^1 \overbrace{\frac{u^2}{\sqrt{p-u^2}}}^{u=\sqrt{p}\sin t}\,\mathrm{d}u \int_0^{6\pi} \overbrace{v\sqrt{2+v^2}}^{g'(v)\cdot g(v)}\,\mathrm{d}v = \\
&= \sqrt{p}\int_0^{\arcsin\frac{1}{\sqrt{p}}} \frac{p\sin^2 t}{\sqrt{p - p\sin^2 t}}\cos t\,\mathrm{d}t \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{(2+v^2)^3}}{\frac{3}{2}}\right]_0^{6\pi} = \\
&= p\int_0^{\arcsin\frac{1}{\sqrt{p}}} \frac{\sin^2 t}{|\cos t|}\cos t\,\mathrm{d}t \cdot \frac{1}{3}\left(\sqrt{(2+36\pi^2)^3} - \sqrt{8}\right) = |\cos t > 0| = \\
&= \frac{\sqrt{8}p}{3}\left(\sqrt{(1+18\pi^2)^3} - 1\right)\int_0^{\arcsin\frac{1}{\sqrt{p}}} \sin^2 t\cos t\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{\sqrt{8}p}{3}\left(\sqrt{(1+18\pi^2)^3} - 1\right)\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\arcsin\frac{1}{\sqrt{p}}} = \left|\sin(2\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}\right| = \\
&= \frac{\sqrt{2}p}{3}\left(\sqrt{(1+18\pi^2)^3} - 1\right)\left(\arcsin\frac{1}{p} - \frac{1}{\sqrt{p}}\sqrt{1-\frac{1}{p}}\right) = \\
&= \frac{\sqrt{2}p}{3}\left(\sqrt{(1+18\pi^2)^3} - 1\right)\left(\arcsin\frac{1}{p} - \frac{\sqrt{p-1}}{p}\right).
\end{aligned}$$

V bodě $b)$ řešíme naopak integrál

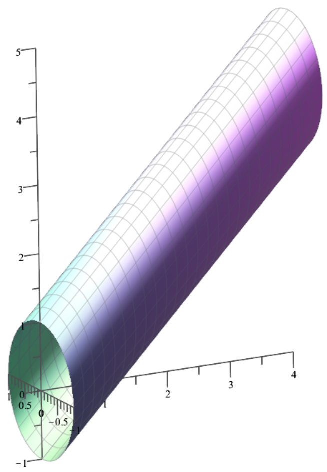
$$
\begin{aligned}
I_2 &= \iint_M \frac{u}{\sqrt{p-u^2}} \sqrt{2+v^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_0^1 \overbrace{\frac{u}{\sqrt{p-u^2}}}^{t=p-u^2}\,\mathrm{d}u \int_0^{6\pi} \sqrt{2+v^2}\,\mathrm{d}v = \left| \begin{array}{c} v = \sqrt{2}\sinh s \\ \mathrm{d}v = \sqrt{2}\cosh s\,\mathrm{d}s \end{array} \right| \\
&= -\frac{1}{2}\int_p^{p-1} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \int_0^{\operatorname{arcsinh} 3\sqrt{2}\pi} \sqrt{\underbrace{2+2\sinh^2 s}_{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}}\,\cosh s\,\mathrm{d}s = \\
&= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{t}\right]_{p-1}^{p} \cdot \sqrt{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh} 3\sqrt{2}\pi} \underbrace{\sqrt{\cosh^2 s}}_{=\cosh s} \cosh s\,\mathrm{d}s = \left| \cosh^2 x = \frac{\cosh(2x)+1}{2} \right| = \\
&= \frac{\sqrt{p}-\sqrt{p-1}}{\sqrt{2}} \int_0^{\operatorname{arcsinh} 3\sqrt{2}\pi} \cosh(2s)+1\,\mathrm{d}s = \frac{\sqrt{p}-\sqrt{p-1}}{\sqrt{2}} \left[\frac{\sinh(2s)}{2} + s\right]_0^{\operatorname{arcsinh} 3\sqrt{2}\pi} = \\
&= \left| \sinh(2 \operatorname{arcsinh} x) = 2x\sqrt{x^2+1} \right| = \frac{\sqrt{p}-\sqrt{p-1}}{\sqrt{2}} \left(3\sqrt{2}\pi\sqrt{18\pi^2+1} + \operatorname{arcsinh}(3\sqrt{2}\pi)\right).
\end{aligned}
$$

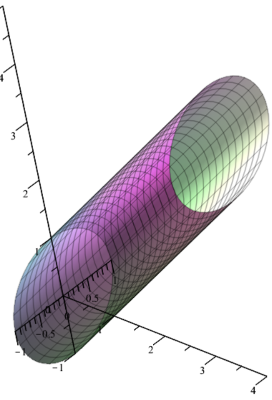
Př. 507 *Spočtěte plošný integrál*

$$I = \iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S,$$

kde plocha S je daná jako kosý válec $(x-z)^2+y^2=1$, pro $x \in [0,4]$, $y \geq 0$ a funkce $f(x,y,z) = y \operatorname{arcsinh}(x-z)$.

Nejprve parametrizujeme plochu a spočteme její normálový vektor. Jedná se o kosý válec s poloměrem 1, můžeme jej parametrizovat jako $x = \cos u + v$, $y = \sin u$, $z = v$. Nyní se musíme zamyslet přes jakou množinu M je válec parametrizován. Tento válec je vymezen rozsahem $x \in [0,4]$. První si všimněme, že například ve výšce $z = v = 2$ dostaneme $x = \cos u + 2$ a pro libovolné u toto x splňuje podmínku $x \in [0,4]$. Navíc máme podmínku $y \geq 0$. Z těchto důvodů můžeme volit rozsah parametrizace $u \in [0,\pi]$. Rozsah výšky v je pak závislý na zvoleném úhlu u a to ze vztahu $0 \leq \cos u + v \leq 4$. Dostaneme $-\cos u \leq v \leq 4 - \cos u$. Tento kosý válec vypadá ze dvou různých úhlů následovně





Následovně můžeme spočítat normálový vektor jako

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos u$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\sin u & 1 \end{vmatrix} = \sin u,$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin u & 1 \\ \cos u & 0 \end{vmatrix} = -\cos u.$$

Velikost normálového vektoru tak máme

$$||\overrightarrow{n}||^2 = \cos^2 u + \sin^2 u + \cos^2 u = 1 + \cos^2 u.$$

Spočteme plošný integrál z funkce $f(x, y, z)$ ten je

$$I = \int_0^\pi \int_{-\cos u}^{4-\cos u} y \operatorname{arcsinh}(x-z)\sqrt{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \int_0^\pi \int_{-\cos u}^{4-\cos u} \sin u \operatorname{arcsinh}(\cos u)\sqrt{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$$
$$= 4\int_0^\pi \sin u \operatorname{arcsinh}(\cos u)\sqrt{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}u = \left| \begin{array}{c} t = \cos u \\ \mathrm{d}t = -\sin u\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = 4\int_{-1}^1 \operatorname{arcsinh}(t)\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \left| \begin{array}{c} t = \sinh s \\ \mathrm{d}t = \cosh s\,\mathrm{d}s \end{array} \right| = 4\int_{\operatorname{arcsinh}(-1)}^{\operatorname{arcsinh}(1)} s\sqrt{1+\sinh^2 s}\,\mathrm{d}s = 4\int_{\operatorname{arcsinh}(-1)}^{\operatorname{arcsinh}(1)} s\cosh s\,\mathrm{d}s =$$
$$= \left| \begin{array}{cc} u = s & u' = 1 \\ v' = \cosh s & v = \sinh s \end{array} \right| = 4\left[s\sinh s\right]_{\operatorname{arcsinh}(-1)}^{\operatorname{arcsinh}(1)} - 4\int_{\operatorname{arcsinh}(-1)}^{\operatorname{arcsinh}(1)} \sinh s\,\mathrm{d}s =$$
$$= 4\left[s\sinh s - \cosh s\right]_{\operatorname{arcsinh}(-1)}^{\operatorname{arcsinh}(1)} = 4\left(\operatorname{arcsinh}(1) - \cosh\operatorname{arcsinh}(1) + \operatorname{arcsinh}(-1) + \cosh\operatorname{arcsinh}(-1)\right) =$$
$$= 4\left(-\sqrt(2) + \sqrt(2)\right) = 0.$$

Zde využíváme lichosti funkce $\operatorname{arcsinh} x$ a vztahu

$$\cosh\operatorname{arcsinh}(x) = \sqrt{1+x^2}.$$

Př. 508 *Vypočtěte*

$$I = \iint_S z^p - y^p \,\mathrm{d}S,$$

kde plocha S vzniká rotací křivky $C : y = x^2$, pro $x \in [0,2]$ kolem dokola osy x. Parametr $p \in \mathbb{N}$.

Plochu S musíme nejprve parametrizovat. K tomu může použít parametrizaci rotující křivky C jako $x = t$, $y = t^2$, pro $t \in [0,2]$. Pokud tato křivka rotuje dokola osy x, vzniká vždy pro pevné x kružnice s poloměrem $y = x^2$, kterou můžeme popsat dobře v polárních souřadnicích. Tudíž dostaneme parametrizaci plochy jako $x = t$, $y = t^2 \cos v$, $z = t^2 \sin v$, pro $v \in [0, 2\pi]$ a $t \in [0,2]$. Plochu máme parametrizovanou, spočítáme nyní normálový vektor

$$A = \begin{vmatrix} y_t & y_v \\ z_t & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2t\cos v & -t^2 \sin v \\ 2t \sin v & t^2 \cos v \end{vmatrix} = 2t^3,$$

$$B = \begin{vmatrix} z_t & z_v \\ x_t & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2t\sin v & t^2 \cos v \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -t^2 \cos v,$$

$$C = \begin{vmatrix} x_t & x_v \\ y_t & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2t\cos v & -t^2 \sin v \end{vmatrix} = -t^2 \sin v.$$

Velikost normálového vektoru je

$$||\overrightarrow{n}|| = \sqrt{4t^6 + t^4\cos^2 v + t^4 \sin^2 v} = \sqrt{4t^6 + t^4} = t^2\sqrt{4t^2+1}.$$

Hledaný integrál je

$$I = \iint_M (t^{2p}\sin^p v - t^{2p}\cos^p v)t^2\sqrt{4t^2+1}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}v = \int_0^2 t^{2p+2}\sqrt{4t^2+1}\,\mathrm{d}t \int_0^{2\pi} \sin^p v - \cos^p v \,\mathrm{d}v.$$

Řešme nejprve první integrál

$$A = \int t^{2p+2}\sqrt{4t^2+1}\,\mathrm{d}t = \begin{vmatrix} t = \frac{\sinh z}{2} \\ \mathrm{d}t = \frac{\cosh z}{2}\,\mathrm{d}z \end{vmatrix} = \frac{1}{2^{2p+2}} \int \sinh^{2p+2} z \overbrace{\sqrt{\sinh^2 z + 1}}^{=\cosh z} \cosh z \,\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{1}{2^{2p+2}} \int \sinh^{2p+2} z \cosh^2 z \,\mathrm{d}z = \frac{1}{2^{2p+2}} \int \sinh^{2p+2} z \,\mathrm{d}z - \frac{1}{2^{2p+2}} \int \sinh^{2p+4} z \,\mathrm{d}z =$$

K vyřešení tohoto integrálu budeme potřebovat vhodnou redukční formuli. Počítejme pro $k \in \mathbb{N} \cap [3, \infty)$ integrál

$$\begin{aligned} F_k = \int \sinh^k x \,\mathrm{d}x &= \begin{vmatrix} u = \sinh^{k-1} x & u' = (k-1)\sinh^{k-2} x \cosh x \\ v' = \sinh x & v = \cosh x \end{vmatrix} = \\ &= \sinh^{k-1} x \cosh x - (k-1) \int \sinh^{k-2} x \cosh^2 x \,\mathrm{d}x = \\ &= \sinh^{k-1} x \cosh x - (k-1) \int \sinh^{k-2} x - \sinh^k \,\mathrm{d}x = \\ &= \sinh^{k-1} x \cosh x - (k-1)F_{k-2} + (k-1)F_k. \end{aligned}$$

Vyřešením této rovnice pro F_k dostaneme vztah

$$F_k = \frac{\sinh^{k-1} x \cosh x - (k-1)F_{k-2}}{2-k}.$$

Navíc si snadno rozmyslíme za pomoci vztahu $\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$, že platí

$$F_k = \begin{cases} \cosh x, & k = 1, \\ \frac{\cosh 2x}{4} - \frac{x}{2}, & k = 2. \end{cases}$$

Neboť je $p \geq 1$ dostaneme v integrálu A, že

$$A = \frac{1}{2^{2p+2}} F_{2p+2} - \frac{1}{2^{2p+2}} F_{2p+4} = \frac{1}{2^{2p+2}} \left(F_{2p+2} + \frac{\sinh^{2p+3} z \cosh z - (2p+3) F_{2p+2}}{2p+2} \right) =$$
$$= \frac{1}{2^{2p+2}(2p+2)} \left(\sinh^{2p+3} z \cosh z - F_{2p+2} \right).$$

Výslednou hodnotu bychom takto dostali nyní induktivně. Podívejme se však nejprve na druhou část integrálu

$$B = \int_0^{2\pi} \sin^p v - \cos^p v \, \mathrm{d}v = \begin{cases} [-\cos v - \sin v]_0^{2\pi} = 0, & p = 1, \\ \left[-\frac{\sin 2v}{2} \right]_0^{2\pi} = 0, & p = 2. \end{cases}.$$

Pro $p > 2$ bychom pak mohli aplikovat redukční formule podobně jako v předchozí části. Dle obecně známého vzorce platí

$$B = \left[\frac{-\sin^{p-1} x \cos x - \sin x \cos^{p-1} x}{p} \right]_0^{2\pi} + \frac{p-1}{p} \int_0^{2\pi} \sin^{p-2} x - \cos^{p-2} x \, \mathrm{d}x =$$
$$= 0 + \frac{p-1}{p} \int_0^{2\pi} \sin^{p-2} x - \cos^{p-2} x \, \mathrm{d}x.$$

Neboť je $B = 0$ pro $p = 1$ a $p = 2$ platí také pomocí indukčního předpokladu, že $B = 0$ pro libovolné p. Hodnotu A bychom dokázali odvodit podobně pomocí indukce, ale není to nutné. Platí jednoduše $I = 0$.

Př. 509 *Vypočtěte*

$$I = \iint_S y^2 \, \mathrm{d}S,$$

kde S je torus $(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 = 16(x^2 + y^2)$.

Na základě dřívějšího příkladu a na základě informace, že se jedná o Torus dostaneme parametrizaci $x = (\cos v + 2)\cos u$, $y = (\cos v + 2)\sin u$, $z = \sin v$ pro $u \in [0, 2\pi]$ a $v \in [0, 2\pi]$. Normálový vektor parametrizace má tak složky

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\cos v + 2)\cos u & -\sin v \sin u \\ 0 & \cos v \end{vmatrix} = (\cos^2 v + 2\cos v)\cos u,$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos v \\ -(\cos v + 2)\sin u & -\sin v \cos u \end{vmatrix} = (\cos^2 v + 2\cos v)\sin u,$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(\cos v + 2)\sin u & -\sin v \cos u \\ (\cos v + 2)\cos u & -\sin v \sin u \end{vmatrix} = \sin v \cos v + 2\sin v.$$

Velikost normálového vektoru parametrizace je

$$\begin{aligned} ||\overrightarrow{n}|| &= \sqrt{(\cos v + 2)^2 \cos^2 v \cos^2 u + (\cos v + 2)^2 \cos^2 v \sin^2 u + \sin^2 v (\cos v + 2)^2} = \\ &= \sqrt{(\cos v + 2)^2 \cos^2 v + \sin^2 v (\cos v + 2)^2} = \sqrt{(\cos v + 2)^2} = \cos v + 2. \end{aligned}$$

Integrál tak vyjde

$$\begin{aligned} I &= \iint_M (\cos v + 2)^3 \sin^2 u \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \int_0^{2\pi} \overbrace{\sin^2 u}^{=\frac{1-\cos 2u}{2}} \, \mathrm{d}u \int_0^{2\pi} (\cos v + 2)^3 \, \mathrm{d}v = \\ &= \left[\frac{u}{2} - \frac{\sin 2u}{4}\right]_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \overbrace{\cos^3 v}^{t=\sin v} + 6 \overbrace{\cos^2 v}^{=\frac{1+\cos 2u}{2}} + 12\cos v + 8 \, \mathrm{d}v = \\ &= \pi \left[\sin v - \frac{\sin^3 v}{3} + 6\left(\frac{v}{2} + \frac{\sin 2v}{4}\right) + 12\sin v + 8v\right]_0^{2\pi} = \\ &= \pi\,(6\pi + 16\pi) = 22\pi^2. \end{aligned}$$

Př. 510 *Vypočtěte*

$$I=\iint_S y^2+z^2\,\mathrm{d}S,$$

kde plocha S je Helicoid $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=v$, pro $u\in[0,1]$, $v\in[0,7\pi]$.

Plocha je daná rovnou parametricky, nalezneme tedy její normálový vektor.

$$A=\begin{vmatrix} y_u & y_v\\ z_u & z_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sin v & u\cos v\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\sin v,$$

$$B=\begin{vmatrix} z_u & z_v\\ x_u & x_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ \cos v & -u\sin v\end{vmatrix}=-\cos v,$$

$$C=\begin{vmatrix} x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\end{vmatrix}=u.$$

Velikost normálového vektoru parametrizace je

$$||\overrightarrow{n}||=\sqrt{\sin^2 v+\cos^2 v+u^2}=\sqrt{1+u^2}.$$

Tudíž hledaný integrál spočteme

$$\begin{aligned}
I&=\iint_M (u^2\sin^2 v+v^2)\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\\
&=\int_0^1 u^2\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u\int_0^{7\pi}\overbrace{\sin^2 v}^{=\frac{1-\cos 2v}{2}}\,\mathrm{d}v+\int_0^1\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u\int_0^{7\pi}v^2\,\mathrm{d}v=\left|\begin{array}{c}u=\operatorname{tg}t\\ \mathrm{d}u=\frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t\end{array}\right|=\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\sqrt{1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}\frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t\left[\frac{v}{2}-\frac{\sin 2v}{4}\right]_0^{7\pi}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}\frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t\left[\frac{v^3}{3}\right]_0^{7\pi}=\\
&=\frac{7\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 t}{\cos^4 t}\sqrt{\frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\cos^2 t}}\,\mathrm{d}t+\frac{7^3\pi^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{|\cos t|}\frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=|\cos t>0|=\\
&=\frac{7\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 t}{\cos^5 t}\,\mathrm{d}t+\frac{7^3\pi^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^3 t}\,\mathrm{d}t=\left|\begin{array}{c}z=\sin t\\ \mathrm{d}z=\cos t\,\mathrm{d}t\end{array}\right|=\\
&=\frac{7\pi}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{z^2}{\cos^6 t}\cos t\,\mathrm{d}t+\frac{7^3\pi^3}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{(1-\sin^2 t)^2}\,\mathrm{d}z=\\
&=\frac{7\pi}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{z^2}{(1-z^2)^3}\,\mathrm{d}z+\frac{7^3\pi^3}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{(1-z^2)^2}\,\mathrm{d}z=|\text{parc. zlomky}|=\\
&=\frac{7\pi}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{16(z-1)}-\frac{1}{16(z-1)^2}-\frac{1}{8(z-1)^3}-\frac{1}{16(z+1)}-\frac{1}{16(z+1)^2}+\frac{1}{8(z+1)^3}\,\mathrm{d}z+\\
&+\frac{7^3\pi^3}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{4(z+1)}+\frac{1}{4(z+1)^2}-\frac{1}{4(z-1)}+\frac{1}{4(z-1)^2}\,\mathrm{d}z=\\
&=\frac{7\pi}{2}\left[\frac{1}{16}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|+\frac{1}{16(z-1)}+\frac{1}{16(z-1)^2}+\frac{1}{16(z+1)}-\frac{1}{16(z+1)^2}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\\
&=\frac{7^3\pi^3}{3}\left[\frac{1}{4}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|-\frac{1}{4(z+1)}-\frac{1}{4(z-1)}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}.
\end{aligned}$$

Nyní zbývá do integrálu pouze dosadit meze a získali bychom konečnou reálnou hodnotu.

Př. 511 *Vypočtěte*

$$I = \iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S,$$

kde S je sférická plocha $\frac{x^2}{4} - z^2 = 1$, vymezená ohraničením $x \geq 1$, $z \leq 0$ a $|y| \leq 2$. Funkce $f(x,y,z)$ je zadaná jako

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x+y \geq 1, \\ z, & x+y < 1. \end{cases}$$

Plocha S je zadaná explicitně a jako takovou ji můžeme snadno parametrizovat jako $x = u$, $y = v$ a $z = \frac{u^2}{4} - 1$. Omezení $z \leq 0$ nám potom dá vymezení $u^2 \leq 4$ a tedy po odmocnění a připojení podmínky $x \geq 1$ máme $1 \leq u \leq 2$ a $-2 \leq v \leq 2$. Normálový vektor plochy dostaneme rovnou jako $\overrightarrow{n} = \left(-\frac{u}{2}, 0, 1\right)$. Počítáme tedy integrál

$$\iint_{[1,2]\times[-2,2]} f\left(u, v, \frac{u^2}{4} - 1\right) \cdot \sqrt{\frac{u^2}{4} + 1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Protože funkce f je daná po částech, musíme pro potřeby výpočtu rozdělit integrál na dvě části

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_1^2 \int_{-2}^{1-u} f\left(u, v, \frac{u^2}{4} - 1\right) \sqrt{\frac{u^2}{4} + 1}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \int_1^2 \int_{-2}^{1-u} \left(\frac{u^2}{4} - 1\right) \sqrt{\frac{u^2}{4} + 1}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \\
&= \int_1^2 \left(\frac{u^2}{4} - 1\right)(3-u) \sqrt{\frac{u^2}{4} + 1}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{8} \int_1^2 (-u^3 + 3u^2 + u - 3)\sqrt{u^2+4}\,\mathrm{d}u = \\
&= \left| \begin{array}{ll} t = u^2 + 4 & u = 2\sinh s \\ \mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u & \mathrm{d}u = 2\cosh s\,\mathrm{d}s \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{8} \left(\int_5^8 \frac{-t+5}{2}\,\mathrm{d}t + 2 \int_{\operatorname{arcsinh} \frac{1}{2}}^{\operatorname{arcsinh} 1} (24\sinh^2 s - 3) \sqrt{\underbrace{4\sinh^2 + 4}_{=4\cosh^2 s}} \cosh s\,\mathrm{d}s \right) = \\
&= \frac{1}{16} \left[-\frac{t^2}{2} + 5t \right]_5^8 + \frac{3}{2} \int_{\operatorname{arcsinh} \frac{1}{2}}^{\operatorname{arcsinh} 1} \sinh^2 s \cosh^2 s - \cosh^2 s\,\mathrm{d}s = \\
&= \frac{1}{16} \left(-32 + 40 + \frac{25}{2} - 25 \right) + \frac{3}{2} \int_{\operatorname{arcsinh} \frac{1}{2}}^{\operatorname{arcsinh} 1} \frac{\sinh^2 2s}{4} - \frac{\cosh 2s + 1}{2}\,\mathrm{d}s = \\
&= \frac{1}{16} \left(-5 + \frac{1}{2} \right) + \frac{3}{2} \int_{\operatorname{arcsinh} \frac{1}{2}}^{\operatorname{arcsinh} 1} \frac{\cosh 4s - 1}{8} - \frac{\cosh 2s + 1}{2}\,\mathrm{d}s = \\
&= -\frac{5}{16} + \frac{1}{32} + \frac{3}{2} \left[\frac{\sinh 4s}{32} - \frac{\sinh 2s}{4} + \frac{3s}{8} \right]_{\operatorname{arcsinh} \frac{1}{2}}^{\operatorname{arcsinh} 1} = \\
&= -\frac{5}{16} + \frac{1}{32} + \frac{3}{2} \left[\frac{\sinh 2s \cosh 2s}{16} - \frac{\sinh 2s}{4} + \frac{3s}{8} \right]_{\operatorname{arcsinh} \frac{1}{2}}^{\operatorname{arcsinh} 1}.
\end{aligned}$$

Druhý integrál je pak

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_1^2 \int_{1-u}^2 \frac{1}{u} \cdot \sqrt{\frac{u^2}{4}+1}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \int_1^2 \frac{1+u}{u} \cdot \sqrt{\frac{u^2}{4}+1}\,\mathrm{d}u = \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{u^2+4}\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{u}{u^2}\sqrt{u^2+4}\,\mathrm{d}u = \left|\begin{array}{cc} t^2 = u^2+4 & u = 2\sinh s \\ 2t\,\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u & \mathrm{d}u = 2\cosh s\,\mathrm{d}s \end{array}\right| = \\
&= \int_{\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}}^{\operatorname{arcsinh}1} \sqrt{4\cosh^2 s}\cdot\cosh s\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} \frac{t^2}{t^2-4}\,\mathrm{d}t = \\
&= 2\int_{\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}}^{\operatorname{arcsinh}1} \cosh^2 s\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} 1 + \frac{4}{(t-2)(t+2)}\,\mathrm{d}t = \\
&= 2\int_{\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}}^{\operatorname{arcsinh}1} \frac{\cosh 2s+1}{2}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} 1 + \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\,\mathrm{d}t = \\
&= \left[\frac{\sinh 2s}{2} + s\right]_{\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}}^{\operatorname{arcsinh}1} + \frac{1}{2}\left[t + \ln|t-2| - \ln|t+2|\right]_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}}.
\end{aligned}
$$

Celkový integrál tak dostaneme jako

$$
I = -\frac{5}{16} + \frac{1}{32} + \left[\frac{3\sinh 2s\cosh 2s}{32} + \frac{\sinh 2s}{8} + \frac{25s}{16}\right]_{\operatorname{arcsinh}\frac{1}{2}}^{\operatorname{arcsinh}1} + \frac{1}{2}\left[t + \ln\frac{|t-2|}{|t+2|}\right]_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} \approx 2,05.
$$

Př. 512 *Vypočtěte*
$$I = \iint_S \min\{1, x^2+y^2, 5-x^2-y^2\}\,\mathrm{d}S,$$
kde S *je rovina* $z = 4 + x - y$ *vymezená na čtverci* $[0,2]^2$.

Plocha je daná explicitně a tak dostaneme rovnou normálový vektor $\overrightarrow{n} = (-1,1,1)$ jehož velikost je jednoduše $||\overrightarrow{n}|| = \sqrt{3}$. Dostaneme tak plošný integrál jako
$$I = \sqrt{3}\int_0^2\int_0^2 \min\{1, x^2+y^2, 5-x^2-y^2\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Musíme však zjistit, jak vypadá integrovaná funkce $f(x,y) = \{1, x^2+y^2, 5-x^2-y^2\}$. Nejdříve si všimněme, že pro $x^2+y^2 \le 1$ je také $x^3+y^3 \le 1$ a tedy ke zde $f(x,y) = x^2+y^2$. Pro $x^2+y^2 > 1$ je však již
$$f(x,y) = \min\{1, 5-x^2-y^2\}.$$

Nerovnost $5-x^2-y^2 > 1$ pokud je $x^2+y^2 < 4$. Tento kruh leží v prvním kvadrantu zcela uvnitř čtverce $[0,2]^2$. Dostáváme tak rozdělení
$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2, & 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}, \\ 1, & 1 < x^2+y^2 \le 4, \\ 5-x^2-y^2, & \sqrt{4-x^2} < y < 2. \end{cases}$$

Dostáváme tak v integrálu 4 části. počítejme je postupně
$$I_1 = \sqrt{3}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2+y^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \sqrt{3}\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = \sqrt{3}\frac{\pi}{2}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}},$$
$$I_2 = \sqrt{3}\int_0^1\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \sqrt{3}\int_0^1 \sqrt{4-x^2}-\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{cc} x = 2\sin t & x = \sin s \\ \mathrm{d}x = 2\cos t\,\mathrm{d}t & \mathrm{d}x = \cos s\,\mathrm{d}s \end{array}\right| =$$
$$= |\cos x > 0 \text{ na ob. integrace}| = 2\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4-4\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t + \sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 s}\cos s\,\mathrm{d}s =$$
$$= 4\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \underbrace{\cos^2 t}_{=\frac{1+\cos 2t}{2}}\,\mathrm{d}t + \sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 s\,\mathrm{d}s = 4\sqrt{3}\left[\frac{2t+\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \sqrt{3}\left[\frac{2s+\sin 2s}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$= \sqrt{3}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3}\frac{\pi}{4},$$
$$I_3 = \sqrt{3}\int_1^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \sqrt{3}\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} x = 2\sin t \\ \mathrm{d}x = 2\cos t\,\mathrm{d}t \end{array}\right| =$$
$$= 2\sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}x = 4\sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}x = 4\sqrt{3}\left[\frac{2t+\sin 2t}{4}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{3}\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Poslední část je pak nejsložitější vzhledem k vystupujícím funkcím

$$
\begin{aligned}
I_4 &= \sqrt{3}\int_0^2 \int_{\sqrt{4-x^2}}^2 5 - x^2 - y^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\
&= \sqrt{3}\int_0^2 (5-x^2)(2-\sqrt{4-x^2})\,\mathrm{d}x + \sqrt{3}\int_0^2 \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{3} - \frac{8}{3}\,\mathrm{d}x = \\
&= \sqrt{3}\left[10x - \frac{2x^3}{3} - \frac{8}{3}x\right]_0^2 + 2\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((4\sin^2 t - 5)\sqrt{4-4\sin^2 t} + \frac{\sqrt{(4-4\sin^2 t)^3}}{3}\right)\cos t\,\mathrm{d}t = \\
&= \sqrt{3}\left(20 - \frac{16}{3} - \frac{16}{3}\right) + 2\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\sin^2 t\cos^2 t - 10\cos^2 t + \frac{8\cos^4 t}{3}\,\mathrm{d}t = \\
&= \sqrt{3}\left(20 - \frac{32}{3}\right) + 2\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 2t\, \underbrace{-10\cos^2 t + \frac{8}{3}\frac{3\cos^2 t}{4}}_{=-8\cos^2 t}\,\mathrm{d}t + \sqrt{3}\frac{16}{3}\underbrace{\left[\frac{\cos^3 t\sin t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} = \\
&= \frac{28}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos 4t - 4(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{28}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{3}\left[-\frac{3t^2}{2} - \frac{\sin 4t}{4} - 2\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= \frac{28}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\frac{3\pi^2}{4}.
\end{aligned}
$$

Celkově nám tak integrál dává dohromady

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \sqrt{3}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3}\frac{\pi}{4} + \sqrt{3}\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{28}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\frac{3\pi^2}{4} = \\
&= \frac{56+\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{4}(\pi - 3\pi^2) \approx 5,61.
\end{aligned}
$$

Zde jsme při výpočtu využili redukční formuli

$$
\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x = \frac{\sin x\cos^3 x}{4} + \frac{3}{4}\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x.
$$

Př. 513 *Vypočtěte*

$$I = \iint_S f(x, y, z) \, \mathrm{d}S,$$

kde S je sférická plocha $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, pro funkci

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x^2 + y^2, & z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, \\ 0, & z < \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

Všimněme si, že funkce $f(x, y, z)$ je na jisté části plochy nulová. Plošný integrál tak na této části musí být nutně také nulový. Uvažujeme tedy vlastně pouze integrál

$$I = \iint_S x^2 + y^2 \, \mathrm{d}S,$$

pro plochu S danou $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ a vymezenou nerovností $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$. Neboť je plocha sférou o poloměru 2 a se středem v bodě $[0, 0, 0]$. Proto je jednoduše parametrizace S daná $x = 2 \cos u \sin v$, $y = 2 \sin u \sin v$, $z = 2 \cos v$. Na podmínce $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ si všimněme, že je rotační okolo osy z a tedy $u \in [0, 2\pi]$. Bod plochy $[0, 0, 2]$ na ose z podmínku splňuje a vzhledem ke spojitosti vystupujících funkcí je $v \in [0, ?]$, kde koncový bod musíme určit. Získáme jej z průsečíků plochy $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ se sférou. Dostaneme tak rovnici

$$2x^2 + 2y^2 = 16.$$

Toto jsou souřadnice kružnice průsečíků v půdorysně. Nám však stačí k určení koncového úhlu pouze jeden bod a tedy zvolíme-li $y = 0$ získáme například bod $[\sqrt{8}, 0, \sqrt{8}]$. Zajímá nás odchylka tohoto bodu od kladné poloosy z a tedy pomocí trojúhelníků nebo rovnou ze vztahu pro $y = 0$, kde $z = |x|$ dostaneme, že $v \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Složky normálového vektoru dostaneme jako

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \cos u \sin v & 2 \sin u \cos v \\ 0 & -2 \sin v \end{vmatrix} = -4 \cos u \sin^2 v,$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \sin v \\ -2 \sin u \sin v & 2 \cos u \cos v \end{vmatrix} = -4 \sin u \sin^2 v,$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 \sin u \sin v & 2 \cos u \cos v \\ 2 \cos u \sin v & 2 \sin u \cos v \end{vmatrix} =$$
$$= -4 \sin^2 u \sin v \cos v - 4 \cos^2 u \sin v \cos v = -4 \sin v \cos v.$$

Jeho velikost je pak

$$||\overrightarrow{n}||^2 = 16(\overbrace{\underbrace{\cos^2 u \sin^4 v + \sin^2 u \sin^4 v}_{=\sin^4 v} + \sin^2 v \cos^2 v}^{=\sin^2 v}) = 16 \sin^2 v.$$

Ještě než spočteme integrál, můžeme dosadit parametrizaci do integrálu

$$x^2 + y^2 = 4(\cos^2 u \sin^2 v + \sin^2 u \sin^2 v) = 4 \sin^2 v.$$

Integrál tak máme

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4 \sin^2 v \cdot 4 \sin v \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u = 32\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 v \, \mathrm{d}v = \begin{vmatrix} x = \cos t \\ \mathrm{d}x = -\sin t \, \mathrm{d}t \end{vmatrix} = 32\pi \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 1 - t^2 \, \mathrm{d}t =$$
$$= 32\pi \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = 32\pi \left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{24} \right) = 32\pi \left(\frac{2}{3} - \frac{5\sqrt{2}}{12} \right).$$

Př. 514 *Spočtěte plošný integrál*

$$I = \iint_S \sqrt{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}}\, \mathrm{d}S,$$

kde S *je daná jako* $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{z^2} = 1$ *a nachází se v prvním oktantu.*

Plocha S je tvořena Astroidioidou a můžeme ji parametrizovat podobně jako sféru funkcemi $x = \cos^3 u \sin^3 v$, $y = \sin^3 u \sin^3 v$, $z = \cos^3 v$, přes množinu $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, \pi]$. My však řešíme jen část této plochy v 1. oktantu a tedy $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ a $v \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Složky normálového vektoru dostaneme

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\sin^2 u \cos u \sin^3 v & 3\sin^3 u \sin^2 v \cos v \\ 0 & -3\sin v \cos^2 v \end{vmatrix} = -9\sin^2 u \cos u \sin^4 v \cos^2 v,$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3\sin v \cos^2 v \\ -3\sin u \cos^2 u \sin^3 v & 3\cos^3 u \sin^2 v \cos v \end{vmatrix} = -9\sin u \cos^2 u \sin^4 v \cos^2 v,$$

$$\begin{aligned} C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -3\sin u \cos^2 u \sin^3 v & 3\cos^3 u \sin^2 v \cos v \\ 3\sin^2 u \cos u \sin^3 v & 3\sin^3 u \sin^2 v \cos v \end{vmatrix} = \\ &= -9\sin^4 u \cos^2 u \sin^5 v \cos v - 9\sin^2 u \cos^4 u \sin^5 v \cos v = -9\sin^2 u \cos^2 u \sin^5 v \cos v. \end{aligned}$$

Velikost normálového vektoru pak dostaneme

$$\begin{aligned} ||\overrightarrow{n}||^2 &= 81\sin^4 u \cos^2 u \sin^8 v \cos^4 v + 81\sin^2 u \cos^4 u \sin^8 v \cos^4 v + 81\sin^4 u \cos^4 u \sin^{10} v \cos^2 v = \\ &= 81\sin^2 u \cos^2 u \sin^8 v \cos^4 v + 81\sin^4 u \cos^4 u \sin^{10} v \cos^2 v = \\ &= 81\sin^2 u \cos^2 u \sin^8 v \cos^2 v(\cos^2 v + \sin^2 u \cos^2 u \sin^2 v). \end{aligned}$$

Integrovaná funkce nám dává

$$f^2 = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \cos^2 u \sin^2 v + \sin^2 u \sin^2 v = \sin^2 v.$$

Plošný integrál máme

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v \sqrt{81 \sin^2 u \cos^2 u \sin^8 v \cos^2 v (\cos^2 v + \sin^2 u \cos^2 u \sin^2 v)}\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}u \\
&= 9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u \cos u \sin^5 v \cos v \sqrt{\cos^2 v + \sin^2 u \cos^2 u \sin^2 v}\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}u = \\
&= \left| \begin{array}{cc} t = \sin^2 u & s = \sin^2 v \\ \mathrm{d}t = 2 \sin u \cos u\, \mathrm{d}u & \mathrm{d}s = 2 \sin v \cos v\, \mathrm{d}v \end{array} \right| = \frac{9}{4} \int_0^1 \int_0^1 s^2 \sqrt{1 - s + t(1-t)s}\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t = \\
&= \left| \begin{array}{c} A = 1 + (-1 + t - t^2)s \\ \mathrm{d}A = -1 + t - t^2\, \mathrm{d}s \end{array} \right| = \frac{9}{4} \int_0^1 \frac{-1}{t^2 - t + 1} \int_1^{t-t^2} \frac{(A-1)^2}{(t^2 - t + 1)^2} \sqrt{A}\, \mathrm{d}A\, \mathrm{d}t = \\
&= -\frac{9}{4} \int_0^1 \frac{1}{(t^2 - t + 1)^3} \int_1^{t-t^2} A^{\frac{5}{2}} - 2A^{\frac{3}{2}} + A^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}A\, \mathrm{d}t = \\
&= -\frac{9}{4} \int_0^1 \frac{1}{(t^2 - t + 1)^3} \left[\frac{2A^{\frac{7}{2}}}{7} - \frac{4A^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2A^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_1^{t-t^2} \mathrm{d}t = \\
&= -\frac{9}{4} \int_0^1 \frac{(t-t^2)^{\frac{3}{2}}}{(t^2 - t + 1)^3} \left(\frac{2(t-t^2)^2}{7} - \frac{4(t-t^2)}{5} + \frac{2}{3} \right) - \frac{16}{105(t^2 - t + 1)^3}\, \mathrm{d}t = \\
&= \left| \begin{array}{c} t = \sin^2 u \\ t - t^2 = \sin^2 u - \sin^4 u = \sin^2 u \cos^2 u \end{array} \right| = \\
&= \underbrace{-\frac{9}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 u \cos^3 u}{(1 - \sin^2 u \cos^2 u)^3} \left(\frac{2 \sin^4 u \cos^4 u}{7} - \frac{4 \sin^2 u \cos^2 u}{5} + \frac{2}{3} \right) \mathrm{d}t}_{=I_1} + \underbrace{\frac{12}{35} \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{(2t-1)^2}{4} + \frac{3}{4} \right)^3}\, \mathrm{d}t}_{=I_2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_1 &= -18 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 2u}{(4 - \sin^2 2u)^3} \left(\frac{\sin^4 2u}{56} - \frac{\sin^2 2u}{5} + \frac{2}{3} \right) \mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} B = \cos 2u \\ \mathrm{d}B = -2 \sin 2u \end{array} \right| = \\
&= -9 \int_{-1}^1 \frac{1 - B^2}{(4 - (1 - B^2))^3} \left(\frac{(1-B^2)^2}{56} - \frac{1 - B^2}{5} + \frac{2}{3} \right) \mathrm{d}B = \\
&= -9 \int_{-1}^1 \frac{(1-B^2)^3}{56(3+B^2)^3} - \frac{(1-B^2)^2}{5(3+B^2)^3} + \frac{2(1-B^2)}{3(3+B^2)^3}\, \mathrm{d}B = \\
&= -\frac{9}{7 \cdot 2^4} \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{(1-B^2)^3}{(3+B^2)^3}\, \mathrm{d}B}_{=I_3} + \frac{9}{5} \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{(1-B^2)^2}{(3+B^2)^3}\, \mathrm{d}B}_{=I_4} - 6 \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{(1-B^2)}{(3+B^2)^3}\, \mathrm{d}B}_{=I_5},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \left| \begin{array}{c} C = 2t - 1 \\ \mathrm{d}C = 2\, \mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{12}{35} \int_{-1}^1 \frac{32}{(C^2+3)^3}\, \mathrm{d}C = \frac{12 \cdot 32}{35} \left(\left[\frac{C}{12(x^2+3)^2} \right]_{-1}^1 + \frac{3}{12} \int_{-1}^1 \frac{1}{(C^2+3)^2}\, \mathrm{d}C \right) = \\
&= \frac{32}{35} \left(\frac{1}{8} + 3 \left(\left[\frac{C}{6(C^2+3)} \right]_{-1}^1 + \frac{1}{6} \int_{-1}^1 \frac{1}{C^2+3}\, \mathrm{d}C \right) \right) = \frac{4 + 96 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} \left[\frac{\operatorname{arctg} \frac{C}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} \right]_{-1}^1 \right)}{35} = \\
&= \frac{4}{7} + \frac{16\sqrt{3}\pi}{315},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int_{-1}^{1} \frac{64}{(B^2+3)^3} - \frac{48}{(B^2+3)^2} + \frac{12}{B^2+3} - 1 \,\mathrm{d}B = \\
&= 64 \left[\frac{B}{12(B^2+3)^2}\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \frac{16}{(B^2+3)^2} - \frac{48}{(B^2+3)^2} + \frac{12}{B^2+3} \,\mathrm{d}B - 2 = \\
&= \frac{2}{3} - 32 \left[\frac{B}{6(B^2+3)}\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \frac{-\frac{16}{3}}{B^2+3} + \frac{12}{B^2+3} \,\mathrm{d}B - 2 \\
&= \frac{2}{3} - \frac{8}{3} - 2 + \frac{20}{3} \left[\frac{\operatorname{arctg} \frac{B}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}\right]_{-1}^{1} = -4 + \frac{20\pi\sqrt{3}}{27}, \\
I_4 &= \int_{-1}^{1} \frac{16}{(B^2+3)^3} - \frac{8}{(B^2+3)^2} + \frac{1}{B^2+3} \,\mathrm{d}B = \\
&= 16 \left[\frac{B}{12(B^2+3)^2}\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \frac{4}{(B^2+3)^2} - \frac{8}{(B^2+3)^2} + \frac{1}{B^2+3} \,\mathrm{d}B \\
&= \frac{1}{6} - 4 \left[\frac{B}{6(B^2+3)}\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \frac{-\frac{2}{3}}{B^2+3} + \frac{1}{B^2+3} \,\mathrm{d}B \\
&= \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left[\frac{\operatorname{arctg} \frac{B}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}\right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}\,\pi}{27}, \\
I_5 &= \int_{-1}^{1} \frac{4}{(B^2+3)^3} - \frac{1}{(B^2+3)^2} \,\mathrm{d}B = 4 \left[\frac{B}{12(B^2+3)^2}\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \frac{1}{(B^2+3)^2} - \frac{1}{(B^2+3)^2} \,\mathrm{d}B = \frac{1}{24}.
\end{aligned}
$$

Celkový výsledek by vyšel jako daná lineární kombinace těchto hodnot.

Př. 515 *Určete těžiště plochy S dané jako kosý válec $(x-z)^2+y^2=1$, pro $x\in[1,4]$ kde hustota plochy je dána funkcí $\rho(x,y,z)=x$.*

Při hledání těžiště budeme počítat plošné integrály z plochy S. Proto si nejprve parametrizujeme plochu a spočteme její normálový vektor. Jedná se o kosý válec s poloměrem 1, můžeme jej parametrizovat jako $x=\cos u+v$, $y=\sin u$, $z=v$. Nyní se musíme zamyslet přes jakou množinu M je válec parametrizován. Tento válec je vymezen pouze rozsahem $x\in[1,4]$. První si všimněme, že například ve výšce $z=v=2$ dostaneme $x=\cos u+2$ a pro libovolné u toto x splňuje podmínku $x\in[1,4]$. Podmínku proto splňuje libovolné $u\in[0,2\pi]$. Vidíme zde, že rozsah výšky v je závislý na zvoleném úhlu u a to ze vztahu $1\le\cos u+v\le 4$. Dostaneme $1-\cos u\le v\le 4-\cos u$. Následovně můžeme spočítat normálový vektor jako

$$A=\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=\cos u$$

$$B=\begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\sin u & 1 \end{vmatrix}=\sin u,$$

$$C=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\sin u & 1 \\ \cos u & 0 \end{vmatrix}=-\cos u.$$

Velikost normálového vektoru tak máme

$$||\overrightarrow{n}||^2=\cos^2 u+\sin^2 u+\cos^2 u=1+\cos^2 u.$$

Pro výpočet těžiště budeme jako první potřebovat spočíst hmotnost plochy jako plošný integrál z její hustoty.

$$\begin{aligned} m&=\int_0^{2\pi}\int_{1-\cos u}^{4-\cos u} x\cdot\sqrt{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u=\int_0^{2\pi}\int_{1-\cos u}^{4-\cos u}(\cos u+v)\sqrt{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u=\\ &=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2 u}\left[v\cos u+\frac{v^2}{2}\right]_{1-\cos u}^{4-\cos u}\mathrm{d}u=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2 u}\left(3\cos u+\frac{15}{2}-3\cos u\right)\mathrm{d}u=\\ &=\frac{15}{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}u=\frac{15}{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2-\sin^2 u}\,\mathrm{d}u=\frac{15}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\frac{\sin^2 u}{2}}\,\mathrm{d}u=\\ &=\frac{60}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{\sin^2 u}{2}}\,\mathrm{d}u=30\sqrt{2}E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\approx 57,3. \end{aligned}$$

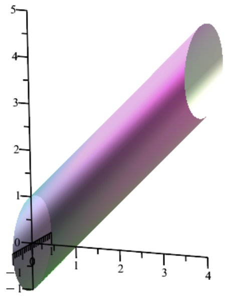
Výsledek dostáváme jako eliptický integrál, jehož definici můžeme najít v předchozích kapitolách 1. Navíc zde využíváme symetričnosti funkce $\sqrt{1+\cos^2(x)}$ přes osy $y=\pi$ a $y=\frac{\pi}{2}$. K výpočtu těžiště pak potřebujeme také dopočítat další momenty

$$
\begin{aligned}
S_{xy} &= \iint_S z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\int_{1-\cos u}^{4-\cos u} (v\cos u + v^2)\sqrt{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos^2 u}\left[\frac{v^2}{2}\cos u + \frac{v^3}{3}\right]_{1-\cos u}^{4-\cos u} \mathrm{d}u = \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos^2 u}\left(-3\cos^2 u + \frac{15}{2}\cos u + 3\cos^2 u - 15\cos u + 21\right)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos^2 u}\left(-\frac{15}{2}\cos u + 21\right)\mathrm{d}u = 21\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}u = 84\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}u \\
&= 84\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2-\sin^2 u}\,\mathrm{d}u = 84\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{\sin^2 u}{2}}\,\mathrm{d}u = 84\sqrt{2}E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 160,4, \\
S_{xz} &= \iint_S y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\int_{1-\cos u}^{4-\cos u} \sin(u)(\cos u + v)\sqrt{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \\
&= \int_0^{2\pi} \sin u\sqrt{1+\cos^2 u}\left[v\cos u + \frac{v^2}{2}\right]_{1-\cos u}^{4-\cos u}\mathrm{d}u = \frac{15}{2}\int_0^{2\pi}\sin u\sqrt{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}u = \\
&= \frac{15}{2}\int_0^{2\pi}\sin u\sqrt{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}u = 0, \\
S_{yz} &= \iint_S x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\int_{1-\cos u}^{4-\cos u} (\cos u + v)^2\sqrt{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{1-\cos u}^{4-\cos u} (\cos^2 u + 2v\cos u + v^2)\sqrt{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{1-\cos u}^{4-\cos u} (\cos^2 u + v\cos u)\sqrt{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u + S_{xy} = \\
&= \int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2 u}\left[v\cos^2 u + \frac{v^2}{2}\cos u\right]_{1-\cos u}^{4-\cos u}\mathrm{d}u + S_{xy} = \\
&= \int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2 u}\left(\frac{15}{2}\cos u\right)\mathrm{d}u + S_{xy} = S_{xy}.
\end{aligned}
$$

Zde využíváme faktu, že funkce $\cos(x)\sqrt{1+\cos^2(x)}$ je symetrická přes osu $x=\pi$. A „lichá“ na intervalu $[0,\pi]$ přes bod $\left[\frac{\pi}{2},0\right]$. Tento fakt vyplývá rovnou z toho, že samotná funkce $\cos x$ je symetrická přes osu $x=\pi$. Stejně tak funkce $\sin u\sqrt{1+\cos^2 u}$ je zase „lichá“ přes bod $[\pi,0]$. Ze znalosti statických momentů získáme souřadnice těžiště jako

$$
T = \left[\frac{S_{yz}}{m},\frac{S_{xz}}{m},\frac{S_{xy}}{m}\right] = \left[\frac{S_{xy}}{m},0,\frac{S_{xy}}{m}\right] = \left[\frac{84\sqrt{2}E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{30\sqrt{2}E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)},0,\frac{84\sqrt{2}E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{30\sqrt{2}E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\right] = \left[\frac{14}{5},0,\frac{14}{5}\right].
$$

Vyšetřovaný válec vypadá následujícím způsobem


5
4
3
2
1
0
1
2
3
4

Př. 516 *Určete těžiště plochy S dané parametricky jako $x = \cos u$, $y = \sin u$, $z =$ pro $u \in [0, 2\pi]$ a $v \in [\cos u, 1 + \sin u]$, kde hustota plochy je dána funkcí $\rho(x, y, z) = x^2$.*

Plochu máme parametrizovanou a můžeme rovnou nalézt její normálový vektor

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos u,$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\sin u & 0 \end{vmatrix} = \sin u,$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

K určení těžiště potřebujeme nejprve vypočíst její hmotnost jako integrál z hustoty

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{2\pi} \int_{\cos u}^{1+\sin u} x^2 \cdot \sqrt{\cos^2 u + \sin^2 u} \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u = \int_0^{2\pi} \int_{\cos u}^{1+\sin u} \cos^2 u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 u(1 + \sin u - \cos u) \, \mathrm{d}u = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2u}{2} + \sin u \cos^2 u - \cos^3 u \, \mathrm{d}u = \\ &= \left[\frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4} - \frac{\cos^3}{3} \right]_0^{2\pi} - \int_{u=0}^{u=2\pi} 1 - t^2 \, \mathrm{d}t = \\ &= \left[\frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4} - \frac{\cos^3 u}{3} \right]_0^{2\pi} - \int_{u=0}^{u=2\pi} 1 - t^2 \, \mathrm{d}t = \pi - \left[\sin u - \frac{\sin^3 u}{3} \right]_0^{2\pi} = \pi. \end{aligned}$$

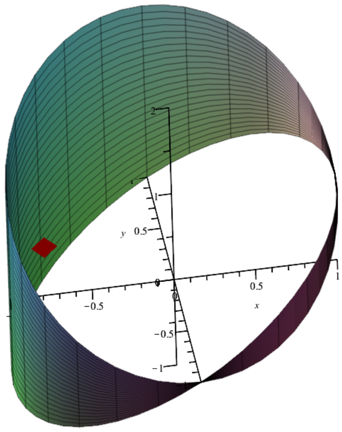
Souřadnice těžiště pak získáme pomocí statických momentů

$$\begin{aligned} S_{xy} &= \iint_S z\rho(x, y, z) \, \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi} \int_{\cos u}^{1+\sin u} v \cos^2 u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u = \int_0^{2\pi} \cos^2 u \left[\frac{v^2}{2} \right]_{\cos u}^{1+\sin u} \mathrm{d}u = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 u + 2 \sin u \cos^2 u + \sin^2 u \cos^2 u - \cos^4 u \, \mathrm{d}u = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos^2 u(1 - \cos^2 u)}_{=\sin^2 u \cos^2 u} + 2 \sin u \cos^2 u + \frac{\sin^2 2u}{4} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 2 \sin u \cos^2 u + \frac{1 - \cos 4u}{4} \, \mathrm{d}u = \\ &= \frac{1}{2} \left[-2 \frac{\cos^3 u}{3} + \frac{u}{4} - \frac{\sin 4u}{16} \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}, \\ S_{xz} &= \iint_S y\rho(x, y, z) \, \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi} \int_{\cos u}^{1+\sin u} \sin u \cos^2 u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u = \int_0^{2\pi} \sin u \cos^2 u(1 + \sin u - \cos u) \, \mathrm{d}u = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 2u}{4} + \sin u \cos^2 u - \sin u \cos u \, \mathrm{d}u = \left[\frac{u}{8} - \frac{\sin 4u}{32} - \frac{\cos^3 u}{3} - \frac{\sin^2 u}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}, \\ S_{yz} &= \iint_S x\rho(x, y, z) \, \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi} \int_{\cos u}^{1+\sin u} \cos^3 u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u = \int_0^{2\pi} \cos^3 u(1 + \sin u - \cos u) \, \mathrm{d}u = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos u(1 - \sin^2 u) + \sin u \cos^3 u - \cos^2 u(1 - \sin^2 u) \, \mathrm{d}u = \\ &= \left[\sin u - \frac{\sin^3 u}{3} - \frac{\cos^4 u}{4} \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 2u}{4} - \frac{1 + \cos 2u}{2} \, \mathrm{d}u = \left[\frac{u}{8} - \frac{\sin 4u}{32} - \frac{u}{2} - \frac{\sin 2u}{4} \right]_0^{2\pi} = \\ &= \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

Ze znalosti statických momentů získáme souřadnice těžiště jako

$$T = \left[\frac{S_{yz}}{m}, \frac{S_{xz}}{m}, \frac{S_{xy}}{m}\right] = \left[\frac{-\frac{3\pi}{4}}{\pi}, \frac{\frac{\pi}{4}}{\pi}, \frac{\frac{\pi}{4}}{\pi}\right] = \left[-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right].$$

Plochu i s jejím těžištěm si můžeme také vykreslit.



Př. 517 *Vypočtěte*

$$\iint_S z \, \mathrm{d}S,$$

kde S je möbiova páska daná parametricky jako $x = 4 + u\cos\frac{v}{2}$, $y = v$, $z = u\sin\frac{v}{2}$, pro $u \in [-\pi, \pi]$, $v \in [0, 2\pi]$.

Technicky vzato definujeme plošné integrály pouze pro dvojstranné plochy a möbiův pásek tento požadavek nesplňuje. Nic nám však nebrání pokusit se přesto spočítat plošný integrál pomocí převodové formule. Plochu máme parametrizovanou a můžeme rovnou nalézt její normálový vektor

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sin\frac{v}{2} & \frac{u}{2}\cos\frac{v}{2} \end{vmatrix} = -\sin\frac{v}{2},$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\frac{v}{2} & \frac{u}{2}\cos\frac{v}{2} \\ \cos\frac{v}{2} & -\frac{u}{2}\sin\frac{v}{2} \end{vmatrix} = -\frac{u}{2},$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\frac{v}{2} & -\frac{u}{2}\sin\frac{v}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos\frac{v}{2}.$$

Velikost normálového vektoru tak splňuje

$$||\overrightarrow{n}||^2 = \sin^2\frac{v}{2} + \frac{u^2}{4} + \cos^2\frac{v}{2} = 1 + \frac{u^2}{4}.$$

Pokud by byl plošný integrál definován, splňoval by

$$I = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{2\pi} u\sin\frac{v}{2}\sqrt{1+\frac{u^2}{4}}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \int_0^{2\pi}\sin\frac{v}{2}\,\mathrm{d}v\int_{-\pi}^{\pi} u\sqrt{1+\frac{u^2}{4}}\,\mathrm{d}u =$$

$$= \left[-2\sin\frac{v}{2}\right]_0^{2\pi}\left[\frac{4\sqrt{\left(1+\frac{u^2}{4}\right)^3}}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Př. 518 *Vypočtěte*

$$I = \iint_S w^2 + y^2 \,\mathrm{d}S,$$

kde S je plocha daná implicitně jako $w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 4$ a vymezena průnikem plochou $w^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Plocha S je čtyřrozměrnou sférou s poloměrem $r = 2$ a středem $S = [0, 1, 0, 0]$. Můžeme ji tedy výhodně parametrizovat pomocí zobecněných sférických souřadnic

$$\begin{aligned} w &= 2\cos A \sin B \sin C, \\ x &= 2\sin A \sin B \sin C, \\ y &= 2\cos B \sin C, \\ z &= 2\cos C. \end{aligned}$$

Princip je zde stejný jako když z polárních souřadnic tvoříme sférické souřadnice. Začneme sférickými souřadnicemi pro w, x, y a přidáme odchylku od osy z pomocí nového úhlu reprezentovaného zde parametrem C. K jedné proměnné přidáme $\cos C$ a k ostatním $\sin C$. Plocha je daná parametry pro $A \in [0, 2\pi]$, $B \in [0, \pi]$, $C \in [0, \pi]$. Všimněme si, že tato parametrizace nám neudává plochu, ale objekt o dimenzi větší podobně jako kružnice udává křivka, ale sféra již plochu. Dále musíme uvážit vymezení průnikem s plochou $w^2 + y^2 + z^2 = 4$. Zkombinujeme-li tyto dvě rovnice dohromady dostaneme jednoduchý vztah

$$0 = x^2 = 4\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C \Rightarrow \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C = 0.$$

Pokud by platilo $\sin^2 C = 0$, tak je také $\sin C = 0$ a z parametrizace také $w = y = 0$. Potom by plocha $w^2 + y^2 + z^2 = 4$ nebyla plochou, ale pouze dvojcí bodů. Pokud by dále $\sin^2 B = 0$, tak je také $\sin B = 0$ a zase $w = 0$ což by znamenalo, že plocha $w^2 + y^2 + z^2 = 4$ by byla jen křivkou. Podmínka $\sin^2 A = 0$ nám však takový problém nezpůsobí a máme tedy nutně $A = 0$ nebo $A = \pi$. Obě tyto volby vyhovují našim rovnicím a tedy si pro jednoduchost vybereme verzi $A = 0$. Plocha S je konečně daná jako

$$\begin{aligned} w &= 2\sin B \sin C, \\ x &= 0, \\ y &= 2\cos B \sin C, \\ z &= 2\cos C. \end{aligned}$$

Máme-li hotovou parametrizaci, dostaneme tečné vektory parametrizace jako $t_B = (2\cos B \sin C, 0, -2\sin B \sin C, 0)$ a $t_C = (2\sin B \cos C, 0, 2\cos B \cos C, -2\sin C)$. Jejich vektorový součin pak máme

$$n_1 = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2\sin B \sin C & 2\cos B \cos C \end{vmatrix} = 0,$$

$$n_2 = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2\sin B \sin C & 2\cos B \cos C \\ 0 & -2\sin C \end{vmatrix} = 4\sin B \sin^2 C,$$

$$n_3 = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ w_u & w_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2\sin C \\ 2\cos B \sin C & 2\sin B \cos C \end{vmatrix} = 4\sin B \sin^2 C.$$

$$n_4 = \begin{vmatrix} w_u & w_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cos B \sin C & 2\sin B \cos C \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Velikost normálového vektoru tak splňuje

$$||\overrightarrow{n}||^2 = 16\sin^2 B\sin^4 C + 16\sin^2 B\sin^4 C = 32\sin^2 B\sin^4 C.$$

Integrovaná funkce zase pro změnu splňuje

$$w^2 + y^2 = 4\sin^2 B\sin^2 C + 4\cos^2 B\sin^2 C = 4\sin^2 C.$$

Integrál tak máme

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\pi \int_0^\pi 4\sin^2 C \cdot \sqrt{32}\sin B\sin^2 C\,\mathrm{d}C\,\mathrm{d}B = 16\sqrt{2}\int_0^\pi \overbrace{\sin^4 C}^{=\sin^2 C(1-\cos^2 C)}\,\mathrm{d}C \int_0^\pi \sin B\,\mathrm{d}B = \\
&= 16\sqrt{2}\int_0^\pi \sin^2 C - \sin^2 C\cos^2 C\,\mathrm{d}C\,[-\cos C]_0^\pi = 16\sqrt{2}\int_0^\pi \frac{1-\cos 2C}{2} - \frac{\sin^2 2C}{4}\,\mathrm{d}C(1+1) = \\
&= 32\sqrt{2}\left(\left[\frac{2C - \sin 2C}{4}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1-\cos 4C}{8}\,\mathrm{d}C\right) = 32\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left[\frac{C}{8} - \frac{\sin 4C}{32}\right]_0^\pi\right) \\
&= 32\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 32\sqrt{2}\cdot\frac{3\pi}{8} = 12\sqrt{2}\pi.
\end{aligned}$$

13 Plošný integrál 2.druhu

Nechť S je hladký kousek plochy parametrizovaný jako $x = \alpha(u, v)$, $y = \beta(u, v)$, $z = \gamma(u, v)$, pak normálový vektor v bodě $[x, y, z](u, v)$ je dán jako

$$n = \pm(A(u, v), B(u, v), C(u, v)),$$

kde

$$A(u,v) = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}, \; B(u,v) = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}, \; C(u,v) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

Nechť S je hladký kousek plochy parametrizovaný jako $x = \alpha(u, v)$, $y = \beta(u, v)$, $z = \gamma(u, v)$ přes množinu M, pak plošný integrál druhého druhu můžeme převést jako

$$\begin{aligned} &\iint_S P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= \pm \iint_M P(\alpha(u,v),\beta(u,v),\gamma(u,v))A(u,v) + Q(\alpha(u,v),\beta(u,v),\gamma(u,v))B(u,v) + \\ &+ R(\alpha(u,v),\beta(u,v),\gamma(u,v))C(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \end{aligned}$$

kde znaménko odpovídá znaménku normálového vektoru

$$n = \pm(A(u, v), B(u, v), C(u, v))$$

Je-li funkce $z = f(x, y)$ dána explicitně, pak dostáváme

$$n = (-f_x, -f_y, 1)$$

Př. 519 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde plocha je dána jako $S : x^2 + y^2 = 1$, *pro* $z \in [0,1]$ *a normále míří vně.*

Plochu S orientujeme jako $x = \cos u$, $y = \sin u$, $z = v$, přes množinu $M : u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0,1]$ a dále

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos u$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\sin u & 0 \end{vmatrix} = \sin u$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Směr vektoru $(\cos u, \sin u, 0)$ určíme např. v bodě $A = [1, 0, z]$ volbou $u = 0$ a jemu příslušící vektor $(1, 0, 0)$, který směřuje v bodě A vně plochy S. Tedy integrál dostaneme jako

$$\iint_M \cos u \cdot \cos u + \sin u \cdot \sin u + v \cdot 0 \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint_M 1\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 2\pi$$

Př. 520 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde plocha je dána jako $S : z = \sqrt{x^2+y^2}$, $z \le 2$ *a normále míří vně.*

Plocha z je dána explicitně přes množinu $M : x^2+y^2 \le 4$. Proto z parametrizace máme vektor

$$\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$$

Jedná se o rotační plochu směřující vzhůru. Proto vektor směřující vně míří dolů a tedy třetí složka je záporná. Obdobně pokud zvolíme například bod $[1,0,z]$ a vektor určený parametrizací v něm je $n = (-1,0,1)$, který míří k počátku a tedy směřuje dovnitř. Tedy integrál počítáme jako

$$\begin{aligned}
&-\iint_M \frac{-xy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{-y\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} + x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(\frac{\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}{\rho} + \rho\sin\varphi - \rho^2\cos^2\varphi\right)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \int_0^2 \rho^2\,\mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \cos\varphi\sin\varphi + \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi - \int_0^2 \rho^3\,\mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi - \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{16}{4}\int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\varphi = -4\pi
\end{aligned}$$

Př. 521 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z,$$

kde plocha je dána jako $S : z = x^2 + y^2$, $z \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ *a normále míří dovnitř.*

Plocha je dána explicitně přes množinu $M : x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Navíc parametrizace nám dává vektor $(-2x, -2y, 1)$, který je orientovaný dovnitř. Počítáme integrál

$$\iint_M xy \cdot (-2y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = -2 \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^4 \cos\varphi \sin^2\varphi \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\rho =$$
$$= -2 \int_0^2 \rho^4 \, \mathrm{d}\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin^2\varphi \, \mathrm{d}\varphi = -2 \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^2 \int_0^1 t^2 \, \mathrm{d}t = -2 \frac{32}{5} \frac{1}{3} = -\frac{64}{15}$$

Př. 522 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z,$$

kde plocha je dána jako $S: x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$, $y \leq 0$ *a normále míří vně.*

Plochu máme parametrizovanou jako $x = 2\cos u \sin v$, $y = 2\sin u \sin v$, $z = 2\cos v$, přes množinu M danou $u \in [\pi, 2\pi]$, $v \in [0, \pi/2]$. Dále počítáme

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cos u \sin v & 2\sin u \cos v \\ 0 & -2\sin v \end{vmatrix} = -4\cos u \sin^2 v$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2\sin v \\ -2\sin u \sin v & 2\cos u \cos v \end{vmatrix} = -4\sin u \sin^2 v$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2\sin u \sin v & 2\cos u \cos v \\ 2\cos u \sin v & 2\sin u \cos v \end{vmatrix} = -4\sin v \cos v$$

Zvolíme-li například bod $[2, 0, 0]$ pro $u = 2\pi$, $v = \pi/2$ dostaneme touto parametrizací vektor $(-4, 0, 0)$, který míří dovnitř. Tedy počítáme integrál

$$-\iint_M -8\cos^2 u \sin^3 v - 8\sin^2 u \sin^3 v \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 8\iint_M \sin^3 v \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v =$$
$$= 8\int_\pi^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 v \,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = -8\pi\int_1^0 1 - t^2 \,\mathrm{d}t = -8\pi\left[\frac{t^3}{3} - t\right]_0^1 = \frac{16\pi}{3}$$

Př. 523 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S xz \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

kde plocha je dána jako $S : x + y + z = 1,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0$ *a normále míří nahoru.*

Plochu máme danou explicitně $z = 1 - x - y$ přes množinu $M : x \in [0, 1]$, $0 < y < 1 - x$. Vektor určený parametrizací je dán jako $(1, 1, 1)$, což odpovídá orientaci normálového vektoru. Počítáme

$$\iint_M x(1 - x - y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{1-x} x - x^2 - xy \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 \left[xy - x^2 y - \frac{xy^2}{2} \right]_0^{1-x} = \int_0^1 x - x^2 - x^2 + x^3 - \frac{x - 2x^2 + x^3}{2} \, \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x - 2x^2 + x^3 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{24}$$

Př. 524 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S y \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z + z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}z,$$

kde plocha je dána jako $S : x + z = 1$*, ohraničená* $x^2 + y^2 \leq 1$ *a normále míří nahoru.*

Jedná se o část plochy vyseknuté válcem, plocha je dána explicitně jako $z = 1 - x$ přes množinu $M : x^2 + y^2 \leq 1$. Vektor tímto určený je $(1, 0, 1)$, který směřuje vzhůru. Tedy počítáme integrál

$$\iint_M y \cdot 1 + (1 - x) \cdot 0 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \iint_M y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\rho =$$
$$= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi = 0$$

Př. 525 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde plocha je dána jako $S : \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. *Normálový vektor směřuje dovnitř.*

Jedná se o jednu osminu elipsoidu, kterou můžeme parametrizovat jako $x = 2\cos u \sin v$, $y = \sin u \sin v$, $z = 3\cos v$, přes $u \in [0, \pi/2]$, $v \in [0, \pi/2]$ čtverec. Navíc

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos u \sin v & \sin u \cos v \\ 0 & -3\sin v \end{vmatrix} = -3\cos u \sin^2 v$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3\sin v \\ -2\sin u \sin v & 2\cos u \cos v \end{vmatrix} = -6\sin u \sin^2 v$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2\sin u \sin v & 2\cos u \cos v \\ \cos u \sin v & \sin u \cos v \end{vmatrix} = -2\sin v \cos v$$

Takže nám parametrizace určuje vektor $(-3\cos u \sin^2 v, -6\sin u \sin^2 v, -2\sin v \cos v)$, který směřuje dovnitř elipsoidu. Počítáme tedy

$$\begin{aligned}
&\iint_M -6\cos^2 u \sin^3 v - 6\sin^2 u \sin^3 v - 6\sin v \cos^2 v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\
&= -6\iint_M \sin^3 v + \sin v \cos^2 v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = -6\iint_M \sin v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\
&= -6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = -3\pi\left[-\cos v\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -3\pi
\end{aligned}$$

Př. 526 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S xy^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

kde plocha je dána jako $S : x + y + z = 1$*, pro* $x > 0$*,* $y > 0$*,* $z > 0$*. Normálový vektor směřuje dovnitř.*

Plocha S je částí jednotkového simplexu a je dána explicitně jako $z = 1 - x - y$ přes množinu $M : x \in (0, 1)$, $0 < y < 1 - x$. Dostáváme tedy vektor $(1, 1, 1)$, který směřuje nahoru, který je opačný s normálovým vektorem. To vidíme, neboť třetí souřadnice je kladná a tedy vektor směřuje vzhůru, normála však míří dolů. Počítáme tedy

$$-\iint_M xy^2 \cdot 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = -\int_0^1 x \int_0^{1-x} y^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = -\int_0^1 x \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x} \mathrm{d}x =$$
$$= -\int_0^1 x \frac{(1-x)^3}{3} \, \mathrm{d}x = -\int_1^0 (1-t)\frac{t^3}{3} \cdot (-1) \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\left[\frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{5}\right]_0^1 =$$
$$= -\frac{1}{3}\frac{5-4}{20} = -\frac{1}{60}$$

Př. 527 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z + y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}z + (z^2 - 1) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y,$$

kde plocha je dána jako $S : x^2 + y^2 = 1$, *pro* $0 \le z \le 1$. *Normálový vektor směřuje ven.*

Jedná se o část válcové plochy, proto parametrizujeme S jako $x = \cos u$, $y = \sin u$, $z = v$, přes množinu $M : u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, 1]$. Navíc počítáme

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos u$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\sin u & 0 \end{vmatrix} = \sin u$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Tedy dostáváme vektor $(\cos u, \sin u, 0)$. Tento směřuje vně a tedy odpovídá normálovému vektoru. Počítáme

$$\iint_M \cos u \cdot \cos u + \sin u \cdot \sin u + (v^2 - 1) \cdot 0 \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi} \int_0^1 1 \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v = 2\pi$$

Př. 528 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S x^2y^2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

kde plocha je dána jako $S: 4x^2+y^2+z^2=1$*, pro* $z\geq 0$*. Normálový vektor směřuje vně.*

Plocha S je polovinou elipsoidu. Parametrizujeme jej jako $x=\frac{1}{2}\cos u\sin v$, $y=\sin u\sin v$, $z=\cos v$, přes množinu $M: u\in[0,2\pi]$, $v\in[0,\pi/2]$. Dopočítáme

$$A=\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos u\sin v & \sin u\cos v \\ 0 & -\sin v \end{vmatrix}=-\cos u\sin^2 v$$

$$B=\begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -\sin v \\ -\frac{1}{2}\sin u\sin v & \frac{1}{2}\cos u\cos v \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\sin u\sin^2 v$$

$$C=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}\sin u\sin v & \frac{1}{2}\cos u\cos v \\ \cos u\sin v & \sin u\cos v \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\sin v\cos v$$

Dostáváme tedy vektor $\left(-\cos u\sin^2 v,-\frac{1}{2}\sin u\sin^2 v,-\frac{1}{2}\sin v\cos v\right)$, který směřuje dovnitř elipsoidu. Počítáme

$$\begin{aligned}
&-\iint_M \frac{1}{4}\cos^2 u\sin^2 v\sin^2 u\sin^2 v\cos v\cdot(-\frac{1}{2}\sin v\cos v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\\
&=\frac{1}{8}\iint_M \cos^2 u\sin^2 u\sin^5 v\cos^2 v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\cos^2 u\sin^2 u\,\mathrm{d}u\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 v\cos^2 v\,\mathrm{d}v=\\
&=-\frac{1}{32}\int_0^{2\pi}\sin^2 2u\,\mathrm{d}u\int_1^0(1-t^2)^2t^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{32}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4u}{2}\,\mathrm{d}u\int_0^1 t^2-2t^4+t^6\,\mathrm{d}t=\\
&=\frac{1}{64}\left[u-\frac{\sin 4u}{4}\right]_0^{2\pi}\left[\frac{t^3}{3}-2\frac{t^5}{5}+\frac{t^7}{7}\right]_0^1=\frac{\pi}{32}\left(\frac{35-42+15}{105}\right)=\frac{\pi}{420}
\end{aligned}$$

Př. 529 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y - (x+y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}z$$

kde plocha je dána jako $S : x^2 + y^2 = z$*, pro* $0 \le z \le 1$*. Normálový vektor směřuje vně.*

Jedná se o část paraboloidu. Parametrizujeme jej skrze válcové souřadnice jako $x = u\cos v$, $y = u \sin v$, $z = u^2$, přes množinu $M : u \in [0,1]$, $v \in [0, 2\pi]$. Počítáme

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin v & u\cos v \\ 2u & 0 \end{vmatrix} = -2u^2 \cos v$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & 0 \\ \cos v & -u\sin v \end{vmatrix} = -2u^2 \sin v$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{vmatrix} = u$$

Dostáváme vektor $(-2u^2 \cos v, -2u^2 \sin v, u)$. Tento vektor směřuje vzhůru a tedy dovnitř. Počítáme tedy

$$\begin{aligned}
&-\iint_M u^2 \cdot u - (u\cos v + u \sin v)(-2u^2 \sin v) \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v = \\
&= -\iint_M u^3(1 + 2\sin v \cos v + 2\sin^2 v) \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v = \\
&= -\int_0^1 u^3 \,\mathrm{d}u \int_0^{2\pi} 1 + 2\sin v \cos v + 2\sin^2 v \,\mathrm{d}v = \\
&= -\left[\frac{u^4}{4}\right]_0^1 \int_0^{2\pi} 1 + \sin 2v + 2\frac{1-\cos 2v}{2} \,\mathrm{d}v = -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} 2 \,\mathrm{d}v = -\frac{4\pi}{4} = -\pi
\end{aligned}$$

Př. 530 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S xz \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + x^2 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + y^2 z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde plocha je dána jako $S : x^2 + y^2 = 1$, *pro* $0 \le z \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$. *Normálový vektor směřuje dovnitř.*

Jedná se o část válcové plochy, parametrizujeme ji jako $x = \cos u$, $y = \sin u$, $z = v$, přes množinu $M : u \in [0, \pi/2]$, $v \in [0, 1]$. Navíc

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos u$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\sin u & 0 \end{vmatrix} = \sin u$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Což dává vektor $(\cos u, \sin u, 0)$, který směřuje vně plochy. Proto počítáme

$$\begin{aligned}
&-\iint_M v\cos^2 u + \cos^2 u \sin^2 u + v \sin^2 u \cdot 0 \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 v\cos^2 u + \cos^2 u \sin^2 u \,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 u}{2} + \cos^2 u \sin^2 u \,\mathrm{d}u = \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2u}{4} + \frac{\sin^2 2u}{4} \,\mathrm{d}u = -\left[\frac{u}{4} + \frac{\sin 2u}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4u}{8} \,\mathrm{d}u = \\
&= -\frac{\pi}{8} - \left[\frac{u}{8} - \frac{\sin 2u}{32}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3\pi}{16}
\end{aligned}$$

Př. 531 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde S je sféra $(x-A)^2+(y-B)^2+(z-C)^2=R^2$, $R>0$. Normálový vektor směřuje dovnitř.

Parametrizujeme plochu S jako $x = R\cos u\sin v + A$, $y = R\sin u\sin v + B$, $z = R\cos v + C$, přes množinu $M : u \in [0,2\pi]$, $v \in [0,\pi]$. Navíc

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R\cos u\sin v & R\sin u\cos v \\ 0 & -R\sin v \end{vmatrix} = -R^2\cos u\sin^2 v$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -R\sin v \\ -R\sin u\sin v & R\cos u\cos v \end{vmatrix} = -R^2\sin u\sin^2 v$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -R\sin u\sin v & R\cos u\cos v \\ R\cos u\sin v & R\sin u\cos v \end{vmatrix} = -R^2\sin v\cos v$$

Získaný vektor $(-R^2\cos u\sin^2 v, -R^2\sin u\sin^2 v, -R^2\sin v\cos v)$, který směřuje dovnitř sféry. Počítáme

$$-R^2\iint_M \cos u\sin^2 v(R\cos u\sin v + A)^2 + \sin u\sin^2 v(R\sin u\sin v + B)^2 + \\ + \sin v\cos v(R\cos v + C)^2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Po jednotlivých integrálech dostaneme

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos u\sin^2 v(R\cos u\sin v + A)^2\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u =$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R^2\cos^3 u\sin^4 v + 2AR\cos^2 u\sin^3 v + A^2\cos u\sin^2 v\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u =$$
$$= R^2\left[\sin u - \frac{\sin^3 u}{3}\right]_0^{2\pi}\left[\frac{\sin 4v}{32} - \frac{\sin 2v}{4} + \frac{3v}{8}\right]_0^{\pi} +$$
$$+ 2AR\left[\frac{\cos u\sin u + u}{2}\right]_0^{2\pi}\left[\frac{\cos^3 v}{3} - \cos v\right]_0^{\pi} +$$
$$+ A^2\left[\sin u\right]_0^{2\pi}\left[\frac{v - \cos v\sin v}{2}\right]_0^{\pi} = 0 + 2AR\frac{2\pi}{2}\left(-\frac{2}{3}+2\right) + 0 = \frac{8}{3}AR\pi$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin u\sin^2 v(R\sin u\sin v + B)^2\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u =$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R^2\sin^3 u\sin^4 v + 2BR\sin^2 u\sin^3 v + B^2\sin u\sin^2 v\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u =$$
$$= R^2\left[\frac{\cos^3 u}{3} - \cos u\right]_0^{2\pi}\left[\frac{\sin 4v}{32} - \frac{\sin 2v}{4} + \frac{3v}{8}\right]_0^{\pi} +$$
$$+ 2BR\left[\frac{u - \cos u\sin u}{2}\right]_0^{2\pi}\left[\frac{\cos^3 v}{3} - \cos v\right]_0^{\pi} +$$
$$+ B^2\left[-\cos u\right]_0^{2\pi}\left[\frac{v - \cos v\sin v}{2}\right]_0^{\pi} = 0 + 2B\frac{2\pi}{2}\left(-\frac{2}{3}+2\right) = \frac{8}{3}BR\pi$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin v \cos v (R\cos v + C)^2 \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}u = \\
&= 2\pi \int_0^{\pi} R^2 \sin v \cos^3 v + 2CR \sin v \cos^2 v + C^2 \sin v \cos v \,\mathrm{d}v = \\
&= 2\pi \left[-R^2 \frac{\cos^4 v}{4} - 2CR \frac{\cos^3 v}{3} - C^2 \frac{\cos^2 v}{2} \right]_0^{\pi} = \\
&= 0 - 4CR\pi \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) + 0 = \frac{8}{3} CR\pi
\end{aligned}
$$

Dohromady máme tedy v součtu $-\frac{8R^3\pi}{3}(A + B + C)$.

Př. 532 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde S je sféra $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $R > 0$. Normálový vektor směřuje vně.

Parametrizujeme plochu S jako $x = R\cos u \sin v$, $y = R\sin u \sin v$, $z = R\cos v$, přes množinu $M : u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, \pi]$. Navíc

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R\cos u \sin v & R\sin u \cos v \\ 0 & -R\sin v \end{vmatrix} = -R^2 \cos u \sin^2 v$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -R\sin v \\ -R\sin u \sin v & R\cos u \cos v \end{vmatrix} = -R^2 \sin u \sin^2 v$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -R\sin u \sin v & R\cos u \cos v \\ R\cos u \sin v & R\sin u \cos v \end{vmatrix} = -R^2 \sin v \cos v$$

Získaný vektor $(-R^2 \cos u \sin^2 v, -R^2 \sin u \sin^2 v, -R^2 \sin v \cos v)$, který směřuje dovnitř sféry. Počítáme tedy

$$\begin{aligned}
&R^3 \iint_M \cos^2 u \sin^3 v + \sin^2 u \sin^3 v + \sin v \cos^2 v \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\
&= R^3 \iint_M \sin^3 v + \sin v \cos^2 v \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = R^3 \iint_M \sin v \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\
&= R^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin v \,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = 2R^3\pi \left[-\cos v\right]_0^{\pi} = 2R^3\pi(1+1) = 4R^3\pi
\end{aligned}$$

Př. 533 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S (y-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (z-x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde S je sféra $z^2 = x^2 + y^2$, pro $0 \le z \le A$, $A > 0$. Normálový vektor směřuje vně.

Máme část kužele a parametrizujeme jej jako $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u$, přes množinu $M : v \in [0, 2\pi]$, $u \in [0, A]$. Navíc

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin v & u\cos v \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -u\cos v$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos v & -u\sin v \end{vmatrix} = -u\sin v$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{vmatrix} = u$$

Vektor $(-u\cos v, -u\sin v, u)$ směřuje vzhůru a tedy dovnitř kužele. Počítáme

$$\begin{aligned} -&\iint_M -u^2(\sin v - 1)\cos v - u^2(1-\cos v)\sin v + u^2(\cos v - \sin v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\ =&\int_0^A u^2\,\mathrm{d}u \int_0^{2\pi} \sin v - 1 + 1 - \cos v - \cos v + \sin v\,\mathrm{d}v = \\ =&\frac{A^3}{3}\left[-2\cos v - 2\sin v\right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

Př. 534 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S \frac{1}{x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \frac{1}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \frac{1}{z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde S je elipsoid $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$, $A > 0, B > 0, C > 0$. Normálový vektor směřuje vně.

Elipsoid můžeme parametrizovat jako $x = A\cos u \sin v$, $y = B\sin u \sin v$, $z = C\cos v$, přes množinu $M : u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, \pi]$. Navíc

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B\cos u \sin v & B\sin u\cos v \\ 0 & -C\sin v \end{vmatrix} = -BC\cos u \sin^2 v$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -C\sin v \\ -A\sin u\sin v & A\cos u\cos v \end{vmatrix} = -AC\sin u \sin^2 v$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -A\sin u\sin v & A\cos u\cos v \\ B\cos u\sin v & B\sin u\cos v \end{vmatrix} = -AB\sin v\cos v$$

Dostaneme vektor $(-BC\cos u\sin^2 v, -AC\sin u\sin^2 v, -AB\sin v\cos v)$, který směřuje dovnitř elipsoidu. Počítáme

$$\begin{aligned}
&-\iint_M \frac{-BC\cos u\sin^2 v}{A\cos u\sin v} + \frac{-AC\sin u\sin^2 v}{B\sin u\sin v} + \frac{-AB\sin v\cos v}{C\cos v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{BC}{A}\sin v + \frac{AC}{B}\sin v + \frac{AB}{C}\sin v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\
&= 2\pi\frac{B^2C^2 + A^2C^2 + A^2B^2}{ABC}\left[-\cos v\right]_0^{\pi} = 4\pi\frac{B^2C^2 + A^2C^2 + A^2B^2}{ABC}
\end{aligned}$$

Př. 535 *Vypočtěte plošný integrál*

$$\iint_S y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z,$$

kde S je plocha $x+z=1$ ohraničená $x^2+y^2 \leq 1$. Normálový vektor směřuje vně.

Plochu parametrizujeme jako $x=u$, $y=v$, $z=1-u$ přes množinu $M: x^2+y^2 \leq 1$. Dostáváme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A,B,C) = (1,0,1)\,,$$

Počítáme

$$\iint_M v\cdot 1 + (1-u)\cdot 0\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^2 \sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi =$$
$$= [-\cos\varphi]_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 = 0\cdot\frac{1}{3} = 0$$

14 Gaussova-Ostrogradského věta, Stokesova věta

Nechť V je jednoduchý obor v $\mathbb{R}^3$ a plocha S jeho hranicí. Nechť funkce P, Q, R a P_x, Q_y, R_z jsou spojité funkce na $V \cup S$ a S je ohraničená, orientovaná ve směru vnější normály, potom

$$\iint_S P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$
$$= \iiint_V P_x(x,y,z) + Q_y(x,y,z) + R_z(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Zvolíme-li funkce P, Q, R tak aby $P_x + Q_y + R_z = C$, kde $C \in \mathbb{R}$, pak můžeme pomocí G-O věty počítat objem tělesa V, pokud V splňuje předpoklady věty. Vhodné volby jsou např.

$$\begin{aligned}
&P = x,\ Q = 0,\ R = 0,\\
&P = 0,\ Q = y,\ R = 0,\\
&P = 0,\ Q = 0,\ R = z,\\
&P = \frac{x}{3},\ Q = \frac{y}{3},\ R = \frac{z}{3},\\
&P = \frac{x}{2},\ Q = \frac{y}{2},\ R = 0,
\end{aligned}$$

a různé další kombinace.

Nechť plocha S je omezená prostorovou křivkou C tvořící okraj S. Dále nechť plochu S lze rozložit na konečný počet funkcí proměnných x, y, také pro y, z a x, z. Nechť funkce P, Q, R mají na S spojité první parciální derivace a C je orientovaná souhlasně s S, potom

$$\int_C P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z =$$
$$= \iint_S (R_y - Q_z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (P_z - R_x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + (Q_x - P_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Př. 536 *Pomocí G-O věty transformujte integrál*

$$\iint_S x^3 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^3 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + z^3 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde S je hranice ohraničeného jednoduchého oboru V orientovaná ve směru vnější normály.

Funkce $P(x,y,z) = x^3$, $Q(x,y,z) = y^3$, $R(x,y,z) = z^3$ mají všechny derivace spojité. Dostáváme tedy integrál jako

$$\iint_S x^3 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^3 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + z^3 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iiint_V 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Př. 537 *Pomocí G-O věty transformujte integrál*

$$\iint_S yz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + xz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde S je hranice ohraničeného jednoduchého oboru V orientovaná ve směru vnější normály.

Funkce $P(x,y,z) = yz$, $Q(x,y,z) = xz$, $R(x,y,z) = xy$ mají všechny derivace spojité. Dostáváme tedy integrál jako

$$\iint_S yz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + xz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iiint_V 0 + 0 + 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0$$

Př. 538 *Pomocí G-O věty transformujte integrál*

$$\iint_S \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde S je hranice ohraničeného jednoduchého oboru V orientovaná ve směru vnější normály a V neobsahuje ve svém uzávěru počátek.

Funkce P, Q, R jsou nespojité pouze v počátku stejně jako jejich derivace. Tedy můžeme použít G-O větu a dostáváme

$$\begin{aligned}
&\iint_S \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= \iiint_V \frac{y^2+z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} + \frac{x^2+z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} + \frac{x^2+y^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \\
&= \iiint_V \frac{2x^2+2y^2+2z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 2\iiint_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Př. 539 *Pomocí G-O věty transformujte integrál*

$$\iint_S F_x \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + F_y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + F_z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde S je hranice ohraničeného jednoduchého oboru V orientovaná ve směru vnější normály a funkce $F(x, y, z)$ má spojité druhé parciální derivace na $\bar{V}$.

Neboť má funkce F spojité parciální derivace, lze aplikovat G-O větu a dostáváme tak

$$\iint_S F_x \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + F_y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + F_z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iiint_V F_{xx} + F_{yy} + F_{zz} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_V \triangle F \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Kde $\triangle F$ je Laplaceův operátor funkce $F(x, y, z)$.

Př. 540 *Pomocí G-O věty transformujte integrál*

$$\iint_S (R_y - Q_z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (P_z - R_x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + (Q_x - P_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde S je hranice ohraničeného jednoduchého oboru V orientovaná ve směru vnější normály a funkce $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ mají spojité druhé parciální derivace na $\bar{V}$.

Neboť mají funkce P, Q, R spojité parc. derivace, můžeme použít G-O větu. Dostáváme

$$\iint_S (R_y - Q_z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (P_z - R_x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + (Q_x - P_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$
$$= \iiint_V R_{yx} - Q_{zx} + P_{zy} - R_{xy} + Q_{xz} - P_{yz}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0$$

Neboť dle schwartzovy věty lze zaměnit pořadí derivací.

Př. 541 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S x^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + z^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde S je hranice krychle $[0,1]^3$. Normálový vektor směřuje vně.

Krychle $V = [0,1]^3$ je jednoduchým oborem a funkce $P(x,y,z) = x^2$, $Q(x,y,z) = y^2$, $R(x,y,z) = z^2$ mají všechny derivace spojité. Můžeme tedy využit G-O větu a dostaneme integrál

$$\begin{aligned}
&\iiint_V 2x + 2y + 2z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 2x \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 2y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 2z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \\
&= 1 \cdot 1 \int_0^1 2x \,\mathrm{d}x + 1 \cdot 1 \int_0^1 2y \,\mathrm{d}y + 1 \cdot 1 \int_0^1 2z \,\mathrm{d}z = \left[x^2\right]_0^1 + \left[y^2\right]_0^1 + \left[z^2\right]_0^1 = 3
\end{aligned}$$

Př. 542 *Spočtěte integrál*

$$I = \iint_S xz \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

kde S je dána jako $x + y + z = 1$, pro $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Normálový vektor směřuje vně.

Plocha S je částí hranice jednotkového simplexu V, který je jednoduchým oborem. Spočteme-li integrál

$$\iint_{H_i} xz \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

přes zbývající hranice H_i množiny V, můžeme hledaný integrál I dopočítat skrze G-O větu. K tomu musí samozřejmě být H_i orientované ve směru vnější normály.

Množina V má kromě plochy S ještě hranice $H_1 : x \in [0,1]$, $0 \leq y \leq 1 - x$, $z = 0$, kterou parametrizujeme snadno jako $x = u$, $y = v$, $z = 0$. Dostaneme tedy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A, B, C) = (0, 0, 1),$$

který je orientovaný nesouhlasně. Počítáme

$$I_1 = -\iint_{H_1} xz \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = -\iint_M u \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

Dále počítáme $H_2 : y \in [0,1]$, $0 \leq z \leq 1 - y$, $x = 0$, kterou parametrizujeme snadno jako $x = 0$, $y = u$, $z = v$. Dostaneme tedy

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A, B, C) = (1, 0, 0),$$

který je orientovaný nesouhlasně. Počítáme

$$I_2 = -\iint_{H_2} xz \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = -\iint_M 0 \cdot v \cdot 0 = 0$$

a $H_3 : x \in [0,1]$, $0 \leq z \leq 1 - x$, $y = 0$, kterou parametrizujeme snadno jako $x = u$, $y = 0$, $z = v$. Dostaneme tedy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A, B, C) = (0, 1, 0),$$

který je orientovaný nesouhlasně. Počítáme

$$I_3 = -\iint_{H_3} xz \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = -\iint_M u \cdot v \cdot 0 = 0$$

Nakonec dostaneme

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z - I_1 - I_2 - I_3 = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \\ &= \int_0^1 x \int_0^{1-x} 1 - x - y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^1 x \left[y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} = \\ &= \int_0^1 \frac{x}{2} - x^2 + \frac{x^3}{2} \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

Př. 543 *Spočtěte integrál*

$$I = \iint_S x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z + y^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}z + yz \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y,$$

kde S je dána jako $x^2 + y^2 = (z-1)^2$, pro $0 \le z \le 1$. Normálový vektor směřuje vně.

Pro $z = C$, $C \in \mathbb{R}$, dostaneme vždy řez plochou jako kružnici. Pro $z = 0$ s poloměrem 1 a pro rostoucí z se bude tento poloměr zmenšovat do okamžiku, kdy $z = 1$ je poloměr 0. Jedná se tedy o kužel. Spočítáme-li navíc integrál přes plochu $S_2 : z = 0$ pro $x^2 + y^2 \le 1$, můžeme hledaný integrál získat skrze G-O větu, přes V daný kužel. Plochu S_2 parametrizujeme jako $x = u$, $y = v$, $z = 0$. Dostaneme tedy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A, B, C) = (0, 0, 1),$$

který je orientovaný nesouhlasně. Počítáme tedy

$$I_2 = \iint_M u \cdot 0 + v^2 \cdot 0 + v \cdot 0 \cdot 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = 0$$

Celkový integrál tedy získáme jako

$$I = \iiint_V 1 + 2y + y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z - I_2 = \iiint_V 1 + 3y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$$

Tento integrál transformujeme do válcových souřadnic $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$, čímž získáme ohraničení $\rho \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ a z nerovnosti $x^2 + y^2 \ge (z-1)^2$ dostaneme $z \in [0, \rho + 1]$. Počítáme

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\rho+1} (1 + 3\rho \sin \varphi)\rho \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\rho + 3\rho^2 \sin \varphi)(\rho + 1) \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^2 + \rho + 3(\rho^3 + \rho^2) \sin \varphi \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi = \\ &= 2\pi \left[\frac{\rho^3}{3} + \frac{\rho^2}{2} \right]_0^1 + 3 \left[-\cos \varphi \right]_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) + 0 = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Př. 544 *Spočtěte integrál*

$$I = \iint_S y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde S je dána jako hranice množiny ohraničené $z = xy$, $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Normálový vektor směřuje vně.

Neboť se jedná o hranici množiny V můžeme aplikovat G-O větu a počítáme

$$\iint_S y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iiint_V 2y + 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Jedná se část uříznutého válce, použijeme tedy válcových souřadnic pro $\rho \in [0,1]$, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $z \in [0, \rho^2 \cos\varphi \sin\varphi]$. Což nám dává

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\rho^2 \cos\varphi\sin\varphi} (2\rho\sin\varphi + 1)\rho \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = \\
&= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\rho^2 \sin\varphi + \rho)\rho^2 \cos\varphi\sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = \\
&= \int_0^1 2\rho^4 \,\mathrm{d}\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi + \int_0^1 \rho^3 \,\mathrm{d}\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \\
&= 2\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^1 \left[\frac{\sin^3\varphi}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{31}{120}.
\end{aligned}$$

Př. 545 *Vypočtěte objem tělesa, které je ohraničené plochami $z = \pm C$, a $x = A\cos u \cos v + B \sin u \sin v$, $y = A\cos u \sin v - B \sin u \cos v$, $z = C \sin u$, kde $A > 0, B > 0, C > 0$.*

Hraniční plocha pláště je omezená na ose z pro $u \in [\pi/2, 3\pi/2]$ a $v \in [0, 2\pi]$, neboť v není nijak omezeno. Objem následně dostaneme jako

$$m(V) = \sum_{i=1}^{3} \iint_{S_i} P_i \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q_i \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + R_i \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Pro vhodně zvolené funkce P_i, Q_i, R_i. Plochy $S_{1,2}$ jsou určeny jako $z = \pm C$ a proto je lze parametrizovat jako $x = u$, $y = v$, $z = \pm C$, což nám dá

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A, B, C) = (0, 0, 1),$$

Což až na znaménka dává integrály

$$\iint_{M_{1,2}} P_{1,2}(x, y, \pm C) \cdot 0 + Q_{1,2}(x, y, \pm C) \cdot 0 + R_{1,2}(x, y, \pm C) \cdot 1 \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Z těchto důvodů volíme $R(x, y, z) = 0$, aby integrály vyšly nulové. Parametrizaci třetí plochy již máme, dostáváme tedy

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -A\sin u \sin v - B\cos u \cos v & A\cos u \cos v + B \sin u \sin v \\ C\cos u & 0 \end{vmatrix} = -Cx\cos u$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C\cos u & 0 \\ -A\sin u \cos v + B\cos u \sin v & -A\cos u \sin v + B \sin u \cos v \end{vmatrix} = -Cy\cos u$$

$$\begin{aligned}
C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -A\sin u \cos v + B\cos u \sin v & -A\cos u \sin v + B \sin u \cos v \\ -A\sin u \sin v - B\cos u \cos v & A\cos u \cos v + B \sin u \sin v \end{vmatrix} = \\
&= -Ax\sin u \cos v + Bx\cos u \sin v + Ay\sin u \sin v + By\cos u \cos v = \\
&= A\sin u(y\sin v - x\cos v) + B\cos u(x\sin v + y\cos v) = \\
&= B\cos u(A\cos u \cos v \sin v + B\sin u \sin^2 v + A\cos u \sin v \cos v - B\sin u \cos^2 v) + \\
&+ A\sin u(A\cos u \sin^2 v - B\sin u \cos v \sin v - A\cos u \cos^2 v - B\sin u \sin v \cos v) = \\
&= 2AB\cos^2 u \sin v \cos v + B^2 \sin u \cos u(\sin^2 v - \cos^2 v) - \\
&- 2AB\sin^2 u \sin v \cos v + A^2 \sin u \cos u(\sin^2 v - \cos^2 v) = \\
&= AB\cos 2u \sin 2v - \frac{A^2 + B^2}{2} \sin 2u \cos 2v
\end{aligned}$$

Přičemž poslední výpočet jsme nemuseli provádět, neboť C do počítaného integrálu nevstupuje.

Dostáváme tedy integrál

$$-C \iint_{M_3} P_3(x, y, \pm C)x\cos u + Q_3(x, y, \pm C)y\sin v \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Zvolíme $P_3 = \frac{x}{2}$, $Q_3 = \frac{y}{2}$, čímž dostaneme

$$
\begin{aligned}
&-\frac{C}{2}\iint_{M_3} \cos u(x^2+y^2)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\
&= -\frac{C}{2}\iint_{M_3} \cos u(A^2\cos^2 u\cos^2 v + B^2\sin^2 u\sin^2 v + A^2\cos^2 u\sin^2 v + B^2\sin^2 u\cos^2 v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\
&= -\frac{C}{2}\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos u(A^2\cos^2 u + B^2\sin^2 u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = -C\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} A^2\cos^3 u + B^2\cos u\sin^2 u\,\mathrm{d}u = \\
&= -C\pi\left[A^2\left(\sin u - \frac{\sin^3 u}{3}\right) + B^2\frac{\sin^3}{3}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -C\pi\left(2A^2\left(-1+\frac{1}{3}\right) - B^2\frac{2}{3}\right) = \\
&= \frac{2C\pi}{3}(2A^2+B^2)
\end{aligned}
$$

Neboť nám vyšel výsledek kladný, vidíme, že parametrizace určuje souhlasnou orientaci.

Př. 546 *Vypočtěte objem tělesa, jehož hranicí je torus $x = (B + A\cos u)\cos v$, $y = (B + A\cos u)\sin v$, $z = A\sin u$, $A > 0, B > 0$.*

Objem spočteme pomocí plošného integrálu pro vhodně zvolené funkce P, Q, R. Plocha je parametrizovaná přes množinu $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, 2\pi]$. Počítáme

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -A\sin u\sin v & (B + A\cos u)\cos v \\ A\cos v & 0 \end{vmatrix} = -A(B + A\cos u)\cos^2 v$$

$$B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A\cos v & 0 \\ -A\sin u\cos v & -(B + A\cos u)\sin v \end{vmatrix} = -A(B + A\cos u)\cos v\sin v$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -A\sin u\cos v & -(B + A\cos u)\sin v \\ -A\sin u\sin v & (B + A\cos u)\cos v \end{vmatrix} = -A(B + A\cos u)\sin u$$

Objem tak můžeme spočítat jako integrál

$$\begin{aligned} m(V) &= \iint_S z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_M A^2\sin^2 u(B + A\cos u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\ &= -A^2\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} B\sin^2 u + A\sin^2 u\cos u\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\ &= -2\pi A^2\left[B\frac{u - \sin u\cos u}{2} + A\frac{\sin^3 u}{3}\right]_0^{2\pi} = -2A^2B\pi^2 \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že objem vyšel jako záporný, vidíme, že parametrizace je nesouhlasná a tedy je objem toru $2A^2B\pi^2$.

Př. 547 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S x^2 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z + y^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}z + z^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y,$$

kde S je hranice krychle $[0, A]^3$, $A > 0$. Normálový vektor směřuje vně.

Krychle $V = [0, A]^3$ je jednoduchým oborem a funkce $P(x, y, z) = x^2$, $Q(x, y, z) = y^2$, $R(x, y, z) = z^2$ mají všechny derivace spojité. Můžeme tedy využit G-O větu a dostaneme integrál

$$\begin{aligned}
&\iiint_V 2x + 2y + 2z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \\
&= \int_0^A \int_0^A \int_0^A 2x \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x + \int_0^A \int_0^A \int_0^A 2y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y + \int_0^A \int_0^A \int_0^A 2z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \\
&= A^2 \int_0^A 2x \,\mathrm{d}x + A^2 \int_0^A 2y \,\mathrm{d}y + A^2 \int_0^A 2z \,\mathrm{d}z = A^2 \left[x^2\right]_0^A + A^2 \left[y^2\right]_0^A + A^2 \left[z^2\right]_0^A = 3A^4
\end{aligned}$$

Př. 548 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S x^3 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^3 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + z^3 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde S je hranice sféry $x^2 + y^2 + z^2 = A^2$, $A > 0$. Normálový vektor směřuje vně.

Sféra V je jednoduchým oborem a funkce P, Q, R mají všechny derivace spojité. Dostáváme pomocí G-O věty

$$3 \iiint_V x^2 + y^2 + z^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 3 \int_0^A \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho^4 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho =$$
$$= 6\pi \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^A = \frac{12A^5\pi}{5}$$

Př. 549 *Spočtěte integrál*

$$\iint_S x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde S je dána jako $x^2+y^2=z^2$ pro $0\le z\le A$, $A>0$. Normálový vektor směřuje vně.

Jedná se o povrch kužele V, který je obrácený podstavou vzhůru. Integrál spočítáme jako integrál přes množinu V od kterého odečteme

$$\iint_{S_2} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde S_2 je podstava kužele, kterou můžeme parametrizovat jako $x=u$, $y=v$, $z=A$, přes množinu $M_2 : x^2+y^2\le A^2$. Dostáváme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A,B,C)=(0,0,1),$$

Tento vektor směřuje vzhůru a tedy je orientován vně. Počítáme tedy

$$\iint_{M_2} u^2\cdot 0 + v^2\cdot 0 + A^2\cdot 1\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = A^2\iint_{M_2}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \pi A^4$$

Neboť se jedná o obsah kruhu s poloměrem A. Dále podle G-O věty dostáváme

$$\begin{aligned}
&\iiint_V 2x+2y+2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 2\int_0^{2\pi}\int_0^A\int_\rho^A (\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi+z)\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= 2\int_0^{2\pi}\int_0^A (\rho^2\cos\varphi+\rho^2\sin\varphi)(A-\rho)+\rho\left[\frac{z^2}{2}\right]_\rho^A\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= 2\int_0^{2\pi}\cos\varphi+\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^A A\rho^2-\rho^3\,\mathrm{d}\rho + 2\pi\int_0^A A^2\rho-\rho^3\,\mathrm{d}\rho = \\
&= 2\left[A^2\frac{\rho^3}{3}-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^A[\sin\varphi-\cos\varphi]_0^{2\pi} + 2\pi\left[A^2\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^A = 0+\pi\left(A^4-\frac{A^4}{2}\right) = \\
&= \frac{A^4}{2}\pi
\end{aligned}$$

Dohromady tedy dostáváme $\frac{A^4}{2}\pi - \pi A^4 = -\frac{A^4}{2}\pi$.

Př. 550 *Užitím Stokesovy věty vypočtěte křivkový integrál*

$$\int_C (y+z)\,\mathrm{d}x + (z+x)\,\mathrm{d}y + (x+y)\,\mathrm{d}z,$$

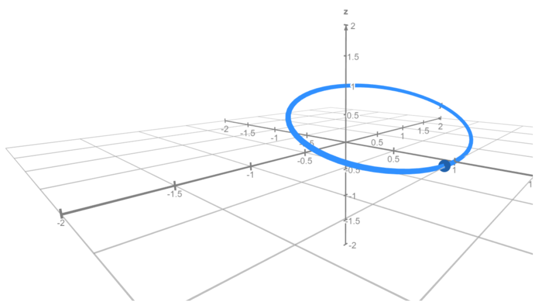
kde C je elipsa $x = A\sin^2 t$, $y = 2A\sin t\cos t$, $z = A\cos^2 t$, pro $t \in [0,\pi]$, $A > 0$ orientovaná po směru růstu parametru t.

Elipsa leží na elipsoidu $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{2A^2} + \frac{z^2}{A^2} = 1$ a dělí jej na dvě poloviny. Vezmeme-li plochu S jako jednu polovinu tohoto elipsoidu, křivka C tvoří její okraj. Navíc funkce P, Q, R mají všechny derivace spojité a z rovnice elipsoidu vždy dokážeme vyjádřit některou z proměnných, např. jako $y = \pm 2\sqrt{A^2 - x^2 - z^2}$. Tedy jako složení dvou funkcí. Dostáváme tedy integrál

$$\iint_S (1-1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (1-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + (1-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

Orientaci nemusíme řešit, neboť výsledek na ní nezávisí.

Elipsu si můžeme zobrazit, např. pro $A = 1$ v prostoru



Př. 551 *Užitím Stokesovy věty vypočtěte křivkový integrál*

$$\int_C (y-z)\,\mathrm{d}x + (z-x)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}z,$$

kde C je elipsa $x^2+y^2=A^2$, $\frac{x}{A}+\frac{z}{B}=1$, $A>0$, $B>0$ orientovaná proti směru hodinových ručiček při pohledu z vrchu.

Křivka je tvořena průnikem válce s rovinou. Jedná se tedy o plochu $z=B\left(1-\frac{x}{A}\right)$ vyříznutou válcem parametrizovanou přes množinu $M: x^2+y^2 \leq A^2$. Proto ji lze parametrizovat jako $x=u$, $y=v$, $z=B\left(1-\frac{u}{A}\right)$ a dostáváme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{B}{A} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A,B,C) = \left(\frac{B}{A},0,1\right),$$

Elipsa je orientovaná proti směru hodinových ručiček. Vzhledem k pravidlu pravé ruky tedy bude rovina orientovaná souhlasně, pokud bude normálový vektor směřovat vzhůru. Tato orientace navíc souhlasí s parametrizací. Počítáme tedy

$$\iint_S (-1-1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (-1-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + (-1-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -2\iint_M \frac{B}{A}+0+1\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v =$$
$$= -2\left(1+\frac{B}{A}\right)m(M) = -2\pi A^2\left(1+\frac{B}{A}\right)$$

Př. 552 *Užitím Stokesovy věty vypočtěte křivkový integrál*

$$\int_C (y^2+z^2)\,\mathrm{d}x + (z^2+x^2)\,\mathrm{d}y + (x^2+y^2)\,\mathrm{d}z,$$

kde C je křivka vzniklá průnikem $x^2+y^2+z^2=A^2$ a $x^2+y^2=B^2$, kde $0<B, 0<A$ a $z\geq 0$. Plocha je zde orientovaná proti směru hodinových ručiček při pohledu shora.

Tentokrát se jedná o průnik sféry $x^2+y^2+z^2=A^2$ a válce $x^2+y^2=B^2$, přesněji o průnik horní polosféry s válcem. Křivka je tedy hranicí plochy S vyjádřené jako $z=\sqrt{A^2-y^2-x^2}$ přes množinu $M: x^2+y^2\leq B^2$. Neboť se jedná o část sféry, můžeme ji vždy vyjádřit jako složení nejvýše dvou funkcí. Dostáváme

$$\iint_S (2y-2z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (2z-2x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + (2x-2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Plochu parametrizujeme jako $x=u$, $y=v$, $z=\sqrt{A^2-v^2-u^2}$ a tedy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{u}{\sqrt{A^2-v^2-u^2}} \\ 0 & 1 & -\frac{v}{\sqrt{A^2-v^2-(u-A)^2}} \end{pmatrix} \Rightarrow (A,B,C) =$$
$$= \left(\frac{u}{\sqrt{A^2-v^2-u^2}}, \frac{v}{\sqrt{A^2-v^2-u^2}}, 1\right),$$

Křivka průniku je orientovaná proti směru hodinových ručiček. Vzhledem k pravidlu pravé ruky tedy bude rovina orientovaná souhlasně, pokud bude normálový vektor směřovat vzhůru. Tato orientace navíc souhlasí s parametrizací. Počítáme tedy

$$2\iint_M \frac{(v-\sqrt{A^2-v^2-u^2})u}{\sqrt{A^2-v^2-u^2}} + \frac{(\sqrt{A^2-v^2-u^2}-u)v}{\sqrt{A^2-v^2-u^2}} + u - v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v =$$
$$= 2\iint_M \frac{vu - u\sqrt{A^2-v^2-u^2} + v\sqrt{A^2-v^2-u^2} - uv}{\sqrt{A^2-v^2-u^2}} + u - v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v =$$
$$= 2\iint_M \frac{(v-u)\sqrt{A^2-v^2-u^2}}{\sqrt{A^2-v^2-u^2}} + u - v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v =$$
$$= 2\iint_M v - u + u - v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 2\iint_M 0\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 0$$

Př. 553 *Užitím Stokesovy věty vypočtěte křivkový integrál*

$$\int_C (y^2 - z^2)\,\mathrm{d}x + (z^2 - x^2)\,\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}z,$$

kde C je řez krychle $[0, A]^3$ rovinou $x + y + z = \frac{3}{2}A$, $A > 0$, orientovaný proti směru hodinových ručiček.

Jedná se o průnik sféry a roviny. Křivka tvoří hranici plochy S, která je částí roviny $x = u$, $y = v$, $z = \frac{3}{2}A - u - v$, přes množinu $M : [0, A]^2$. Což dává

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A, B, C) = (1, 1, 1)\,,$$

Křivka průniku je orientovaná proti směru hodinových ručiček. Vzhledem k pravidlu pravé ruky tedy bude rovina orientovaná souhlasně, pokud bude normálový vektor směřovat vzhůru. Tato orientace navíc souhlasí s parametrizací. Počítáme tedy

$$\begin{aligned}
&\iint_S (-2y - 2z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (-2z - 2x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + (-2x - 2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= -2 \iint_M v + \frac{3}{2}A - u - v + \frac{3}{2}A - u - v + u + u + v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\
&= -2 \iint_M 3A\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = -6Am(M) = -6A^3
\end{aligned}$$

Př. 554 *Užitím Stokesovy věty vypočtěte křivkový integrál*

$$\int_C y^2 z^2 \,\mathrm{d}x + x^2 z^2 \,\mathrm{d}y + x^2 y^2 \,\mathrm{d}z,$$

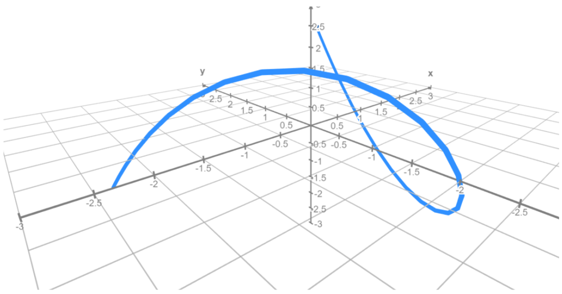
kde C je uzavřená křivka parametrizovaná jako $x = A\cos t$, $y = A\cos 2t$, $z = A\cos 3t$, $A > 0$.

Vidíme, že funkce $\cos t$ je 2π periodická. Zato funkce $\cos 2t$ je π periodická. Křivka je tedy uzavřená pro $t \in [0, 2\pi]$ nebo alternativně $t \in [-\pi, \pi]$. Avšak funkce $\cos t$ je také sudá, proto na intervalu $[-\pi, 0]$ křivka opisuje stejnou trasu jako na intervalu $[0, \pi]$. Tato křivka vymezuje plochu, která je identická s křivkou C. Můžeme tedy počítat integrál jako

$$\iint_S 2x^2(y-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + 2y^2(z-x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + 2z^2(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$
$$= \iint_M 2x^2(y-z)A + 2y^2(z-x)B + 2z^2(x-y)C \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

Kde plochu S bychom parametrizovali jako $x = A\cos u$, $y = A\cos 2u$, $z = A\cos 3u$ přes množinu $M : [0, 2\pi] \times 0$, která je však nulové míry, stejně jako $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$. Integrál je tedy 0.

Křivku můžeme vykreslit jako



Př. 555 *Vypočtěte*

$$I = \int_S x^2 + y^2 \,\mathrm{d}S,$$

kde S je povrch tělesa ohraničeného nerovnostmi $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$.

15 Příloha

Vzorců na výpočet integrálu máme jen tolik, kolik jsme jich ochotní vypsat a zapamatovat si.

1. $\int K\,\mathrm{d}x = Kx + C$, pro $K \in \mathbb{R}$.
2. $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, pro $n \in \mathbb{R}$, $n \neq -1$.
3. $\int \frac{1}{x} = \ln|x| + C$.
4. $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$.
5. $\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$, pro $a > 0$, $a \neq 1$. Speciálně pro $a = \mathrm{e}$.
6. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$.
7. $\int \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{f(x)g(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| + C$.
8. $\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C$.
9. $\int x^n \ln x\,\mathrm{d}x = \left(\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)x^{n+1} + C$, pro $n \neq -1$.
10. $\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln^2 x}{2} + C$.
11. $\int \ln^2 x\,\mathrm{d}x = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$.
12. $\int x^n \ln^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{(n+1)^2\ln^2 x - 2(n+1)\ln x + 2}{(n+1)^3}x^{n+1} + C$, pro $n \neq -1$.
13. $\int \frac{\ln^n x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln^{n+1}}{n+1} + C$.
14. $\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln|\ln x| + C$.
15. $\int \frac{1}{x\ln x \ln(\ln x)}\,\mathrm{d}x = \ln|\ln\ln x| + C$.
16. $\int \frac{\mathrm{d}x}{Ax^2+B} = \frac{1}{\sqrt{AB}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{A}{B}}x + C$.
17. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(Ax^2+B)^2} = \frac{x}{2B(Ax^2+B))} + \frac{1}{\sqrt{AB^3}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{A}{B}}x + C$.
18. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{Ax^2+B} = \frac{1}{2A}\ln|Ax^2+B| + C$.
19. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(Ax^2+B)^2} = -\frac{1}{2A(Ax^2+B))} + C$.
20. $\int \frac{\mathrm{d}x}{A^2-B^2x^2} = \frac{1}{2AB}\ln\left|\frac{A+Bx}{A-Bx}\right| + C$.
21. $\int \frac{\mathrm{d}x}{A^2-B^2x^2} = \frac{1}{2AB}\ln\left|\frac{A+Bx}{A-Bx}\right| + C$.
22. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(A^2-B^2x^2)^2} = \frac{1}{4A^3B}\ln\left|\frac{A+Bx}{A-Bx}\right| - \frac{x}{2A^2B^2x^2-2A^2} + C$.
23. $\int \sqrt{A-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{A-x^2} + A\arcsin\frac{x}{\sqrt{A}}\right) + C$, pro $A > 0$
24. $\int x\sqrt{A-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\sqrt{(A-x^2)^3} + C$.
25. $\int x^2\sqrt{A-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{x}{4}\sqrt{(A-x^2)^3} + \frac{A}{8}\left(x\sqrt{A-x^2} + A\arcsin\frac{x}{\sqrt{A}}\right) + C$, pro $A > 0$.
26. $\int \sqrt{A^2+B^2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{A^2\ln\left|A\sqrt{A^2+B^2x^2}+ABx\right|}{2B} + \frac{x\sqrt{A^2+B^2x^2}}{2} + C$, pro $A > 0$, $B > 0$.
27. $\int x\sqrt{A+Bx^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{(A+Bx^2)^2}}{3B} + C$.
28. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A-Bx^2}} = \frac{\arcsin\sqrt{\frac{B}{A}}x}{\sqrt{B}} + C$, pro $A > 0$, $B > 0$.
29. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{A-Bx^2}} = -\frac{\sqrt{A-Bx}}{B} + C$.
30. $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{A-Bx^2}} = -\frac{A\arcsin\sqrt{\frac{B}{A}}x}{2\sqrt{B^3}} - \frac{x\sqrt{A-Bx^2}}{2B} + C$, pro $A > 0$, $B > 0$.
31. $\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{A-Bx^2}} = -\frac{(2A+Bx^2)\sqrt{A-Bx}}{3B^2} + C$.
32. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} + C$.
33. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm A}} = \ln|x + \sqrt{x^2\pm A}| + C$, pro $A > 0$.
34. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{A+Bx^2}} = \frac{x}{\sqrt{A+Bx^2}} + C$.
35. $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{A^2+B^2x^2}} = -\frac{A^2\ln\left|A\sqrt{A^2+B^2x^2}+ABx\right|}{2B^3} + \frac{x\sqrt{A^2+B^2x^2}}{2B^2} + C$, pro $A > 0$, $B > 0$.
36. $\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{A^2+B^2x^2}} = \frac{x^3}{\sqrt{A^2+B^2x^2}} + C$.
37. $\int \frac{\mathrm{d}x}{A+2Bx+Dx^2} = \frac{1}{\sqrt{AD-B^2}}\operatorname{arctg}\frac{Dx+B}{\sqrt{AD-B^2}} + C$, pro $AD > B^2$.
38. $\int \frac{Mx+N\,\mathrm{d}x}{A+2Bx+Dx^2} = \frac{M}{2D}\ln|A+2Bx+Dx^2| + \frac{ND-MB}{D\sqrt{AD-B^2}}\operatorname{arctg}\frac{Dx+B}{\sqrt{AD-B^2}} + C$, pro $AD > B^2$.
39. $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$.

40. $\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C.$

41. $\int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C.$

42. $\int \operatorname{cotg} x \,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C.$

43. $\int \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + C.$

44. $\int \frac{1}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + C.$

45. $\int \frac{1}{\cos x} \,\mathrm{d}x = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}\right| + C.$

46. $\int \frac{1}{\sin x} \,\mathrm{d}x = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C = -\ln\left|\operatorname{cotg} x + \frac{1}{\sin x}\right| + C.$

47. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\cos x} + C.$

48. $\int \frac{\operatorname{cotg} x}{\sin x} \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sin x} + C.$

49. $\int x \sin x \,\mathrm{d}x = \sin x - x \cos x + C.$

50. $\int x^2 \sin x \,\mathrm{d}x = 2x \sin x - (x^2 - 2) \cos x + C.$

51. $\int x^3 \sin x \,\mathrm{d}x = (3x^2 - 6) \sin x - (x^3 - 6x) \cos x + C.$

52. $\int x \cos x \,\mathrm{d}x = \cos x + x \sin x + C.$

53. $\int x^2 \cos x \,\mathrm{d}x = 2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x + C.$

54. $\int x^3 \cos x \,\mathrm{d}x = (3x^2 - 6) \cos x + (x^3 - 6x) \sin x + C.$

55. $\int \sin^2 Ax \,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2Ax}{4A} + C.$

56. $\int \cos^2 Ax \,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2Ax}{4A} + C.$

57. $\int \sin Ax \cos Ax \,\mathrm{d}x = \frac{\sin^2 Ax}{2A} + C.$

58. $\int \sin Ax \sin Bx \,\mathrm{d}x = \frac{\sin(A-B)x}{2(A-B)} - \frac{\sin(A+B)x}{2(A+B)} + C$, pro $|A| \neq |B|$.

59. $\int \cos Ax \cos Bx \,\mathrm{d}x = \frac{\sin(A-B)x}{2(A-B)} + \frac{\sin(A+B)x}{2(A+B)} + C$, pro $|A| \neq |B|$.

60. $\int \sin Ax \cos Bx \,\mathrm{d}x = -\frac{\cos(A-B)x}{2(A-B)} - \frac{\cos(A+B)x}{2(A+B)} + C$, pro $|A| \neq |B|$.

61. $\int \arcsin x \,\mathrm{d}x = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C.$

62. $\int \arccos x \,\mathrm{d}x = x \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + C.$

63. $\int \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x = x \operatorname{arctg} x - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + C.$

64. $\int \sinh x \,\mathrm{d}x = \cosh x + C$

65. $\int \cosh x \,\mathrm{d}x = \sinh x + C.$

66. $\int \frac{1}{\cosh^2 x} \,\mathrm{d}x = \frac{\sinh x}{\cosh x} + C.$

67. $\int \frac{1}{\sinh^2 x} \,\mathrm{d}x = -\frac{\cosh x}{\sinh x} + C.$

68. $\int \frac{\sinh x}{\cosh x} \,\mathrm{d}x = \ln|\cosh x| + C.$

69. $\int \frac{\cosh x}{\sinh x} \,\mathrm{d}x = \ln|\sinh x| + C.$

70. $\int \frac{\sinh x}{\cosh^2 x} \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\cosh x} + C.$

71. $\int \frac{\cosh x}{\sinh^2 x} \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sinh x} + C.$

72. $\int x \,\mathrm{e}^{Ax} \,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{Ax}}{A^2}(Ax - 1) + C.$

73. $\int x^2 \,\mathrm{e}^{Ax} \,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{A} - \frac{2x}{A^2} + \frac{2}{A^3}\right) \mathrm{e}^{Ax} + C.$

74. $\int x^3 \,\mathrm{e}^{Ax} \,\mathrm{d}x = \frac{Ax(Ax(Ax-3)+6)-6}{A^4} \,\mathrm{e}^{Ax} + C.$

75. $\int \sin^2 x \,\mathrm{e}^{x} \,\mathrm{d}x = -\frac{2 \sin 2x + \cos 2x - 5}{10} \,\mathrm{e}^{x} + C.$

76. $\int \sin^2 x \,\mathrm{e}^{x} \,\mathrm{d}x = \frac{2 \sin 2x + \cos 2x + 5}{10} \,\mathrm{e}^{x} + C.$

77. $\int \mathrm{e}^{Ax} \sin Bx \,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{Bx}}{A^2+B^2} (A \sin Bx - B \cos Bx) + C$, pro $A, B \in \mathbb{R}$.

78. $\int \mathrm{e}^{Ax} \cos Bx \,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{Bx}}{A^2+B^2} (A \cos Bx + B \sin Bx) + C$, pro $A, B \in \mathbb{R}$.

79. $\int x^3 \,\mathrm{e}^{Ax^2} \,\mathrm{d}x = \frac{(Ax^2-1)}{2A^2} \,\mathrm{e}^{Ax^2} + C$, pro $A \neq 0$.

80. $\int x^5 \,\mathrm{e}^{Ax^2} \,\mathrm{d}x = \frac{(A^2x^4 - 2Ax^2 + 2)}{2A^3} \,\mathrm{e}^{Ax^2} + C$, pro $A \neq 0$.

Mnoho dalších vzorců lze nalézt v knize [?].

15.1 Ostrogradského metoda

Ostrogradského metoda byla publikována v roce 1845 a slouží k výpočtu integrálu ve tvaru

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x,$$

kde $P(x)$ a $Q(x)$ jsou polynomy splňující $\deg P < \deg Q$. Zde deg označuje stupeň polynomu. Předpokládejme, že polynom $Q(x)$ lze rozložit pomocí kořenových činitelů do tvaru

$$Q(x) = (x-a_1)^{b_1}\dots(x-a_k)^{b_k}(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}\dots(x^2+p_lx+q_l)^{r_l},$$

kde $p_i^2-4q_i < 0$, pro každé $i = 1,\dots,l$. Tj. všechny závorky s mocninami r_i mají pouze komplexní kořeny. Definujme k polynomu $Q(x)$ pomocné polynomy $Q_1(x)$ a $Q_2(x)$ jako

$$Q_1(x) = (x-a_1)^{b_1-1}\dots(x-a_k)^{b_k-1}(x^2+p_1x+q_1)^{r_1-1}\dots(x^2+p_lx+q_l)^{r_l-1},$$
$$Q_2(x) = (x-a_1)\dots(x-a_k)(x^2+p_1x+q_1)\dots(x^2+p_lx+q_l).$$

Potom polynom $Q_1(x)$ můžeme najít pomocí euklidova algoritmu jako největšího společného dělitele polynomů $Q(x)$ a $Q'(x)$. Polynom $Q_2(x)$ zase nalezneme jako podíl $Q_2(x) = \frac{Q(x)}{Q_1(x)}$. Potom existují polynomy $P_1(x)$ a $P_2(x)$ splňující $\deg P_1 < \deg Q_1$ a $\deg P_2 < \deg Q_2$, které dávají

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Polynomy $P_1(x$ a $P_2(x)$ hledáme metodou neurčitých koeficientů. Metoda slouží jako jistá náhrada za rozklad na parciální zlomky, kde se zbavíme násobností ve jmenovateli neboť všechny kořeny $Q_2(x)$ jsou jednoduché. Užitečný je také fakt, že nemusíme hledat rozklad na kořenové činitele a polynomy určíme i bez něj.

Př. 556 *Spočtěte pomocí Ostrogradského metody integrál*

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x^2)^2}.$$

Zde vidíme, že polynom ve jmenovateli je již rozložen a že polynom v čitateli má skutečně menší stupeň. Navíc hned máme, že je $Q_1(x) = Q_2(x) = x(1+x^2)$. Hledáme tedy polynomy $P_1 = Ax^2 + Bx + C$, $P_2(x) = Dx^2 + Ex + F$, pro neznáme koeficienty A, B, C, D, E, F. Tyto koeficienty můžeme získat, pokud využijeme vztahu

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2} = \left(\frac{Ax^2+Bx+C}{x(1+x^2)}\right)' + \frac{Dx^2+Ex+F}{x(1+x^2)}.$$

Tuto rovnici můžeme vhodným roznásobením převést do tvaru

$$1 = (2Ax^2 + Bx)x(1+x^2) - (Ax^2+Bx+C)(1+3x^2) + (Dx^2+Ex+F)x(1+x^2).$$

Jeden z koeficientů můžeme získat rovnou, pokud si uvědomíme, že po dosazení $x = 0$ vyjde $-C = 1$. Další koeficienty získáme porovnáním levé a pravé strany pro příslušné mocniny x^k, $k = 0, \ldots 5$ a dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} 0 &= B + F \\ 0 &= A + E - 3C \\ 0 &= -2B + F \\ 0 &= -A + E \\ 0 &= D. \end{aligned}$$

Z první, třetí a páté rovnice soustavy obdržíme rovnou, že je $B = D = F = 0$ a následně ze druhé a čtvrté rovnice vypočteme $A = E = -\frac{3}{2}$. Dohromady tak máme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{-\frac{3}{2}x^2 - 1}{x(1+x^2)} - \frac{3}{2}\int \frac{x}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x.$$

Vzhledem k tomu, že se nyní v integrálu zkrátí x, dostaneme rovnou

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{-\frac{3}{2}x^2 - 1}{x(1+x^2)} - \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

Př. 557 *Spočtěte pomocí Ostrogradského metody integrál*

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2(x-1)^3}.$$

Zlomek ve jmenovateli je již rozložen a polynomy $Q_1(x) = (x+1)(x-1)^2$, $Q_2(x) = (x+1)(x-1)$. Neurčité polynomy P_1, P_2 tak mají stupně alespoň o jedna menší a tedy $\deg P_1 \leq 2$, $\deg P_2 \leq 1$. Takže můžeme převést

$$\int \frac{16x}{(x+1)^2(x-1)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{Ax^2+Bx+C}{(x+1)(x-1)^2} + \int \frac{Dx+E}{(x+1)(x-1)}\,\mathrm{d}x,$$

pro neznámé koeficienty A, B, C, D, E. Derivováním tohoto vztahu dostaneme rovnici

$$\frac{16x}{(x+1)^2(x-1)^3} = \frac{(2Ax+B)(x+1)(x-1)-(Ax^2+Bx+C)(x-1+2(x+1))}{(x+1)^2(x-1)^3} + \frac{Dx+E}{(x+1)(x-1)},$$
$$16x = (2Ax+B)(x+1)(x-1)-(Ax^2+Bx+C)(3x+1)-(Dx+E)(x^2-1)(x-1).$$

Vidíme, že do rovnice můžeme dosadit reálné kořeny $x = 1$ a $x = -1$. Což nám dá rovnice

$$\begin{aligned} 4 &= -A-B-C, \\ 8 &= -A+B-C. \end{aligned}$$

Z těchto rovnic odvodíme $B = 2$ a vztah $C = -6 - A$. Porovnáním stran pak dostaneme další rovnice

$$\begin{aligned} x^4 &: 0 = D \\ x^3 &: 0 = -A-D+E \\ x^2 &: 0 = -A-2B-D-E. \end{aligned}$$

Z těchto rovnic můžeme odvodit $A = -2 = E$, $D = 0$ a následovně $C = -4$. Dohromady tak máme

$$\int \frac{16x}{(x+1)^2(x-1)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{-2x^2+2x-4}{(x+1)(x-1)^2} - \int \frac{2}{(x+1)(x-1)}\,\mathrm{d}x.$$

Druhý integrál můžeme rozložit jednoduše pomocí rozkladu na parciální zlomky přičemž uvažme, že máme pouze dva reálné kořeny. Dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{16x}{(x+1)^2(x-1)^3}\,\mathrm{d}x &= \frac{-2x^2+2x-4}{(x+1)(x-1)^2} + \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{-2x^2+2x-4}{(x+1)(x-1)^2} + \ln|x+1| - \ln|x-1| + C. \end{aligned}$$

Př. 558 *Spočtěte pomocí Ostrogradského metody integrál*

$$\int \frac{4}{x^5 + x^4 - x^3 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Polynom $Q(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2$ nemáme v rozloženém tvaru. Mohli bychom jej zkusit faktorizovat, nebo se pokusíme najít polynomy Q_1, Q_2 bez tohoto rozkladu. Polynom Q_1 získáme jako největšího společného jmenovatele polynomů $Q(x)$ a $Q'(x)$. Můžeme však využít euklidova algoritmu, abychom dostali

$$\begin{aligned}
\frac{x^5 + x^4 - x^3 - x^2}{5x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x} &= \frac{x}{5} + \frac{1}{25} + \frac{-\frac{14}{25}x^3 - \frac{12}{25}x^2 + \frac{2}{25}x}{5x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x},\\
\frac{5x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x}{-7x^3 - 6x^2 + x} &= -\frac{5x}{7} + \frac{2}{49} + \frac{-\frac{100}{49}x^2 - \frac{100}{49}x}{-7x^3 - 6x^2 + x},\\
\frac{-7x^3 - 6x^2 + x}{x^2 + 1} &= -\frac{14x}{25} + \frac{2}{25}.
\end{aligned}$$

Takto vidíme, že největším společným jmenovatelem obou polynomů je polynom $Q_1(x) = x^2 + x$. Zde využíváme faktu, že násobení konstantou při dělení polynomů nic neovlivní. Jistě jsme tento výsledek mohli dostat snadněji, pokud bychom si všimli rovnou, že v $Q(x)$ i $Q'(x)$ lze pokrátit x. Je tedy jasné, že $Q_1(x) = x \cdot \mathrm{Pol}(x)$ pro nějaký polynom $\mathrm{Pol}(x)$. Máme-li $Q_1(x)$ dostaneme

$$Q_2(x) = \frac{Q(x)}{Q_1(x)} = \frac{x^5 + x^4 - x^3 - x^2}{x(x+1)} = x^3 - x.$$

Nalezli jsme polynomy Q_1, Q_2 aniž bychom znali jejich rozklad. Můžeme tedy pomocí Ostrogradského metody rozložit

$$\int \frac{4}{x^5 + x^4 - x^3 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{Ax + B}{x^2 + x} + \int \frac{Cx^2 + Dx + E}{x^3 - x}\,\mathrm{d}x.$$

Po zderivování tak dostaneme rovnici

$$\frac{4}{x^5 + x^4 - x^3 - x^2} = \frac{A(x^2 + x) - (Ax + B)(2x + 1)}{(x^2 + x)^2} + \frac{Cx^2 + Dx + E}{x^3 - x}.$$

Polynom $Q_1(x)$ je dělitelem $Q(x)$ i jeho derivace. Proto jej dělí i Q_1^2. Stejně tak $Q_2(x)$ je dělitelem $Q(x)$ a chybí mu do něj jen $Q_1(x)$. Tudíž můžeme vydělit $Q/Q_1^2 = x-1$ a po vhodném vynásobení jmenovatelem levé strany dostaneme z rovnice

$$4 = A(x^2 + x)(x - 1) - (Ax + B)(2x + 1)(x - 1) + (Cx^2 + Dx + E)(x^2 + x).$$

Nyní chceme určit neznámé koeficienty A, B, C, D, E. K tomu můžeme výhodně dosadit $x = 0$ a $x = 1$ což nám dá $B = 4$ a $C + D + E = 2$. Dalším vhodným dosazením se jeví $x = \frac{1}{2}$ neboť se nám tím v rovnici ztratí poslední člen, museli bychom však umocňovat $\frac{1}{2}$, a proto to dělat nebudeme. Porovnáním levé a pravé strany dostaneme

$$\begin{aligned}
x^4 &: 0 = C,\\
x^3 &: 0 = -A + C + D,\\
x^2 &: 0 = A - 2B + E + D.
\end{aligned}$$

Spolu s rovnicí udávající $C + D + E = 2$ tak vypočteme, že $A = D = 6$, $C = 0$, $E = -4$. Převod je tedy tvaru

$$\int \frac{4}{x^5 + x^4 - x^3 - x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{6x + 4}{x^2 + x} + \int \frac{6x - 4}{x^3 - x} \, \mathrm{d}x.$$

V dalším kroku však již musíme pokračovat rozkladem na parciální zlomky. Dostaneme po troše jednoduchého počítání

$$\int \frac{6x - 4}{x^3 - x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{4}{x} + \frac{1}{x - 1} - \frac{5}{x + 1} \, \mathrm{d}x.$$

Celkově tak máme

$$\int \frac{4}{x^5 + x^4 - x^3 - x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{6x + 4}{x^2 + x} + 4 \ln |x| + \ln |x - 1| - 5 \ln |x + 1|.$$

Výhodou Ostrogradského algoritmu je, že zde dostaneme o hodně snadnější rozklad na parciální zlomky. Nevýhodou je, že Ostrogradského algoritmus je sám o sobě komplikovanější. Tento algoritmus nám navíc pomáhá eliminovat násobné kořeny, což se může někdy hodit. Obzvlášť pokud tyto kořeny nejsou racionální.

Př. 559 *Spočtěte pomocí Ostrogradského metody integrál*

$$\int \frac{....}{x^6+2x^5-5x^4-12x^3+3x^2+18x+9}\,\mathrm{d}x.$$

Polynom $Q(x) = x^6+2x^5-5x^4-12x^3+3x^2+18x+9$ nemáme v rozloženém tvaru. Mohli bychom jej zkusit faktorizovat, nebo se pokusíme najít polynomy Q_1, Q_2 bez tohoto rozkladu. Polynom Q_1 získáme jako největšího společného jmenovatele polynomů $Q(x)$ a $Q'(x)$. Můžeme však využít euklidova algoritmu, abychom dostali

$$\begin{aligned}
\frac{x^6+2x^5-5x^4-12x^3+3x^2+18x+9}{6x^5+10x^4-20x^3-36x^2+6x+18} &= \frac{x}{6}+\frac{1}{18}+\frac{-\frac{20}{9}x^4-\frac{44}{9}x^3+4x^2+\frac{44}{3}x+8}{6x^5+10x^4-20x^3-36x^2+6x+18}, \\
\frac{6x^5+10x^4-20x^3-36x^2+6x+18}{-5x^4-11x^3+9x^2+33x+18} &= -\frac{6x}{5}+\frac{16}{25}+\frac{-\frac{54}{25}x^3-\frac{54}{25}x^2+\frac{162}{25}x+\frac{162}{25}}{-5x^4-11x^3+9x^2+33x+18}, \\
\frac{-5x^4-11x^3+9x^2+33x+18}{-x^3-x^2+3x+3} &= 5x+6.
\end{aligned}$$

Největší společný jmenovatel je tedy $Q_1(x) = x^3+x^2-3x-3$. Druhý polynom $Q_2(x)$ následně dostaneme jako

$$Q_2(x) = \frac{Q(x)}{Q_1(x)} = \frac{x^6+2x^5-5x^4-12x^3+3x^2+18x+9}{x^3+x^2-3x-3} = x^3+x^2-3x-3.$$

Nalezli jsme polynomy Q_1, Q_2 aniž bychom znali jejich faktorizaci. Všimněme si, že platí $Q_1(x) = Q_2(x)$. Můžeme tak usuzovat, že $Q = Q_1^2$. Můžeme tedy pomocí Ostrogradského metody rozložit

$$\int \frac{4x^3+12}{x^6+2x^5-5x^4-12x^3+3x^2+18x+9}\,\mathrm{d}x = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+x^2-3x-3} + \int \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3+x^2-3x-3}\,\mathrm{d}x,$$

pro neznámé koeficienty A, B, C, D, E, F. Když zderivujeme obě strany rovnosti, dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{4x^3+12}{x^6+2x^5-5x^4-12x^3+3x^2+18x+9} &= \frac{(2Ax+B)(x^3+x^2-3x-3)-(Ax^2+Bx+C)(3x^2+2x-3)}{(x^3+x^2-3x-3)^2}+\frac{Dx^2+Ex+F}{x^3+x^2-3x-3} \\
4x^3+12 &= (2Ax+B)(x^3+x^2-3x-3)-(Ax^2+Bx+C)(3x^2+2x-3)+(Dx^2+Ex+F)(x^3+x^2-3x-3).
\end{aligned}$$

Porovnáním levé a pravé strany nyní dostaneme soustavu

$$\begin{aligned}
x^5 &: 0 = D \\
x^4 &: 0 = -A+E \\
x^3 &: 4 = -2B+E+F \\
x^2 &: 0 = -3A-B-3C-3E+F \\
x &: 0 = -6A-2C-3E-3F \\
1 &: 0 = -3B+3C-3F.
\end{aligned}$$

Řešením této soustavy je $A = E = -1$, $B = -2$, $C = 3$, $D = 0$, $F = 1$. Tím dostaneme

$$\int \frac{4x^3+12}{x^6+2x^5-5x^4-12x^3+3x^2+18x+9}\,\mathrm{d}x = \frac{-x^2-2x+3}{x^3+x^2-3x-3} + \int \frac{-x+1}{x^3+x^2-3x-3}\,\mathrm{d}x.$$

Nyní nám zbývá integrovat jednodušší racionální funkci. Avšak nyní se jedná jen o polynom třetího řádu a jeho kořeny již dovedeme nalézt rovnou pomocí Cardanových vzorců. Všimneme si, že můžeme vytknout

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = x^2(x+1) - 3(x+1) = (x^2-3)(x+1).$$

Máme tak po rozkladu na parciální zlomky

$$\int \frac{4x^3+12}{x^6+2x^5-5x^4-12x^3+3x^2+18x+9}\,\mathrm{d}x = \frac{-x^2-2x+3}{x^3+x^2-3x-3} + \frac{1-\sqrt{3}}{6+2\sqrt{3}}\ln\left|x-\sqrt{3}\right| + \\ + \frac{1+\sqrt{3}}{6-2\sqrt{3}}\ln\left|x+\sqrt{3}\right| - \ln|x+1|.$$

Reference

[1] Elliptic Integral. *Wolfram Mathworld* [online]. [cit. 2020-10-29]. Dostupné z: https://mathworld.wolfram.com/EllipticIntegraloftheFirstKind.html

[2] Erf. *Wolfram Mathworld* [online]. [cit. 2022-01-21]. Dostupné z: https://mathworld.wolfram.com/Erf.html

[3] Demidovič, B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy.* Havlíčkůbv Brod: Fragment, 2003, ISBN 80-720-0587-1.

[4] Došlá, Z.; Novák, V.: *Nekonečné řady.* Brno: Masarykova univerzita, 2009, ISBN 978-80-210-1949-2.

[5] Hazewinkel, M. (editor): *Encyclopaedia of mathematics. Volume 5: I - Lituus. An updated and annotated translation of the Soviet "Mathematical Encyclopaedia"*. Dordrect etc.: Kluwer Academic Publishers, 1990, ISBN 1-55608-004-2; 1-55608-010-7.

[6] Kalas, J.; Kuben, J.: *Integrální počet funkcí více proměnných.* Brno: Masarykova univerzita, 2009, ISBN 978-80-210-4975-8.

[7] Rudin, W.: *Principles of mathematical analysis. 3rd ed*. 1976, ISBN 978-0070542358.

[8] Schwabik, Š.; Šarmanová, P.: *Malý průvodce historií integrálu*, *Děj. Mat. / Hist. Math.*, ročník 6. Prague: Prometheus, 1996, ISBN 80-7196-038-1.

[9] Slovák, J.; Panák, M.; Bulant, M.: *Matematika drsně a svižně.* Brno: Masarykova univerzita, 2013, ISBN 978-80-210-6307-5.

[10] Thomas, G.; Weir, M.; Hass, J.; aj.: *Thomas' Calculus 14th ed.* Boston: Pearson, 2018, ISBN 978-0-13-443909-9.

[11] Elliptic integral [citováno 19. 12. 2023] `https://en.wikipedia.org/wiki/Elliptic_integral`

[12] Zorič, V. A.: *Mathematical analysis II.* Berlin: Springer, druhé vydání, 2016, ISBN 978-3-662-48991-8.