Aproximace

Petr Hasil

Přednáška z matematiky

MENDELU Agronomická fakulta

Mendelova univerzita v Brně

MENDELU Lesnická a dřevařská fakulta

Obsah

Numerická integrace se používá především, když

- Nelze získat primitivní funkci.
- Primitivní funkce je velmi složitá.
- Nemáme k dispozici předpis integrované funkce, ale jen sadu naměřených hodnot.

Základní metody numerické integrace vycházejí přímo z konstrukce Riemannova integrálu. Nejjednodušší metodou je tzv. *obdélníkové pravidlo*, které se používá tak, že se zavede dělení intervalu, vypočítá funkční hodnota např. uprostřed dělicích intervalů (popř. v krajních bodech, zejména pokud jde jen o sadu naměřených hodnot a nemáme funkční předpis) a aproximace integrálu je přímo příslušný integrální součet.

Uvažujme funkci f intervalu $I = [a, b]$, na kterém zavedeme dělení $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Dále označme (v souladu se značením při konstrukci integrálu) výběr reprezentantů $R = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ (např. středy dělicích intervalů).

Potom pomocí obdélníkového pravidla lze odhadnout hodnotu integrálu jako

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Příklad

Pomocí obdélníkového pravidla odhadněte

$$\int_0^{10} x^2 \, \mathrm{d}x.$$

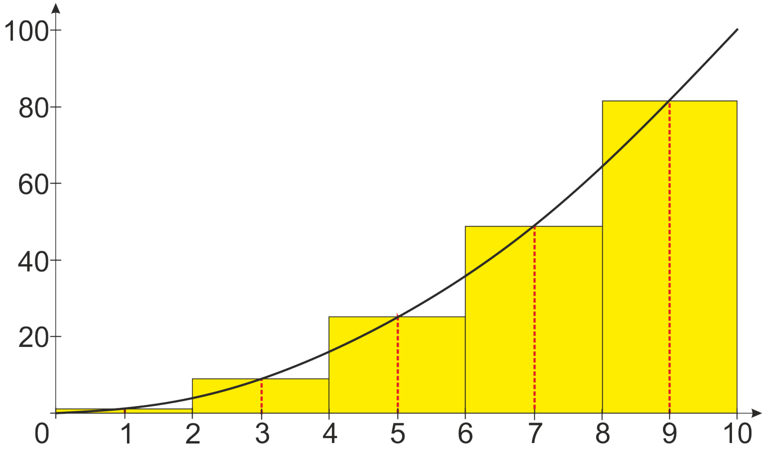
Interval rozdělte ekvidistantně na 5 dělicích intervalů a funkční hodnoty použijte ze středů těchto intervalů.

Interval $[a, b] = [0, 10]$ máme rozdělit na 5 stejně dlouhých částí, dělicí body tedy budou $D = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ a délka každého z těchto intervalů je 2. Výberem reprezentantů jsou středy dělicích intervalů, tedy $R = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Máme tedy $f(x) = x^2$ a obdélníkové pravidlo dává

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \approx f(1) \cdot (2-0) + f(3) \cdot (4-2) + f(5) \cdot (6-4) + f(7) \cdot (8-6) + f(9) \cdot (10-8)$$

Výpočet je tedy následující

$$\int_0^{10} x^2 \, \mathrm{d}x \approx 1^2 \cdot 2 + 3^2 \cdot 2 + 5^2 \cdot 2 + 7^2 \cdot 2 + 9^2 \cdot 2 = 330.$$

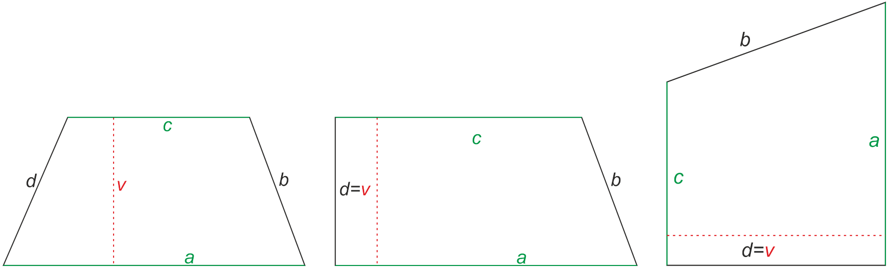


V tomto případě lze samozřejmě provést přesný výpočet

$$\int_0^{10} x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{10} = \frac{1000}{3} - 0 = 333{,}\overline{3}.$$

Pokročilejší a často i přesnější metodou je tzv. *lichoběžníkové pravidlo*. Postup je takový, že se funkční hodnoty v dělicích bodech propojí, čímž vznikne lomená čára. Následným postupem podobným tomu z obdélníkového pravidla pak aproximujeme plochu podgrafu sadou lichoběžníků.

Připomeňme, že obsah lichoběžníku lze vypočítat jako polovinu součtu rovnoběžných stran násobenou výškou lichoběžníku, tj.



$$S = \frac{a+c}{2} \cdot v.$$

Uvažujme funkci f intervalu $I = [a, b]$, na kterém zavedeme dělení $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

Potom pomocí lichoběžníkového pravidla lze odhadnout hodnotu integrálu jako

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot (x_i - x_{i-1})$$

a jestliže je dělení ekvidistantní, tedy každý dělicí interval má stejnou délku ℓ, lze pravidlo zjednodušit na

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{\ell}{2}\Big[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big].$$

Příklad

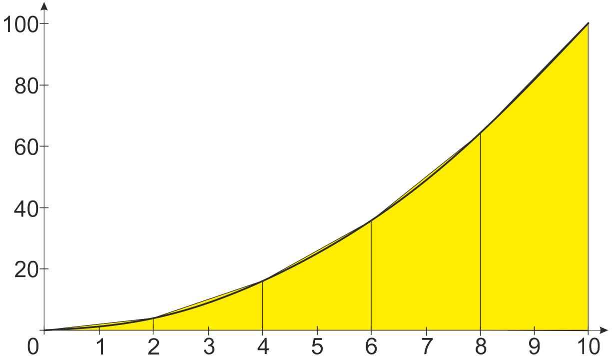
Pomocí lichoběžníkového pravidla odhadněte

$$\int_0^{10} x^2 \, \mathrm{d}x.$$

Interval rozdělte ekvidistantně na 5 dělicích intervalů.

Opět máme $f(x) = x^2$, $[a, b] = [0, 10]$ a dělicí body $D = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Délka každého dělicího intervalu je $\ell = 2$, dostáváme tedy

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \approx \frac{\ell}{2}[f(0) + 2f(2) + 2f(4) + 2f(6) + 2f(8) + f(10)] \\
&= 0^2 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 8^2 + 10^2 \\
&= 8 + 32 + 72 + 128 + 100 = 340.
\end{aligned}$$



Na obrázku vidíme, že pokročilejší obdélníkové pravidlo má v tomto příkladě nižší přesnost než obdélníkové kvůli tvaru funkce (konvexnost kladné funkce znamená, že lichoběžníkové pravidlo pokryje větší plochu). Je tedy nutné vždy získat co nejvíce informací o aproximované funkci a zvolit vhodnou metodu. Také je nutné se zajímat o samotný princip metod a ne jen „bezhlavě“ používat ty, které jsou obecně přesnější, v konkrétních případech to nemusí platit.

Poznámka

- Samozřejmě existuje celá řada dalších metod. Často je nutné rozhodovat se, zda vyžadovat vyšší přesnost i za cenu zvětšení početní náročnosti.
- Například tzv. Simpsonovo pravidlo pracuje tak, že místo lomené čáry nahradíme integrovanou funkci sadou parabol (jedna procházející body x_0, x_1, x_2, druhá body x_2, x_3, x_4 atd., neboť parabola je jednoznačně určena třemi body, musíme mít sudý počet dělicích intervalů). Všimněte si souvislosti s interpolací (viz dále).
- Dělicí body a intervaly, nebo aspoň jejich počet jsou často přímo dány tím, že neznáme předpis funkce, ale máme k dispozici jen sadu naměřených hodnot. Postup je pak podřízen tomu, abychom tyto hodnoty co nejlépe využili a vše je nutné volit tak, aby nám pro výpočet „nic nechybělo“, protože není možné získat další hodnoty.

Algebraická rovnice je rovnice typu

$$P_n(x) = 0,$$

kde $P_n(x)$ je polynom stupně n v proměnné x.

Protože řešit algebraickou rovnici je totéž, jako hledat kořeny polynomu P_n, známe již způsob, jak najít všechny celočíselné kořeny takové rovnice (dělitelé absolutního člene, Hornerovo schéma).

Připomeňme, že je-li komplexní číslo $z = \alpha + \beta i$ kořenem polynomu P, pak je jeho kořenem i číslo komplexně sdružené $\bar{z} = \alpha - \beta i$.

Protože (dle základní věty algebry) má polynom stupně n v $\mathbb{C}$ právě n kořenů (počítáno včetně násobnosti), má polynom lichého stupně aspoň jeden reálný kořen.

Věta (Odhad velikosti kořenů)

Buď

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

normovaný polynom stupně n.

Pak pro kořeny $x_1, \ldots, x_n$ *rovnice*

$$P_n(x) = 0$$

platí

$$|x_i| \leq 1 + A, \quad (i = 1, \ldots, n),$$

kde

$$A = \max\{|a_{n-1}|, |a_{n-2}|, \ldots, |a_1|, |a_0|\}.$$

Věta (Descartes I)

Počet kladných kořenů polynomu $P_n(x)$ (počítáno s násobností) je roven počtu znaménkových změn v posloupnosti jeho koeficientů nebo o sudé číslo menší.

Věta (Descartes II)

Počet záporných kořenů polynomu $P_n(x)$ (počítáno s násobností) je roven počtu znaménkových změn v posloupnosti koeficientů polynomu $P_n(-x)$ nebo o sudé číslo menší.

Příklad

Použijte předchozí tvrzení na polynom

$$P(x) = x^7 - 14x^5 + 3x^2 + 1.$$

- st $P = 7 \quad \Rightarrow \quad P$ má (včetně násobnosti) 7 kořenů, nejméně jeden je reálný.
- Koeficienty P jsou (nuly pro přehlednost vynecháme) $1, -14, 3, 1 \quad \Rightarrow \quad$ 2 znaménkové změny $\quad \Rightarrow \quad$ 2 nebo 0 kladných kořenů.
- $P(-x) = -x^7 + 14x^5 + 3x^2 + 1$. Koeficienty $P(-x)$ jsou (nuly pro přehlednost vynecháme) $-1, 14, 3, 1 \quad \Rightarrow \quad$ 1 znaménková změna $\quad \Rightarrow \quad$ 1 záporný kořen.
- $A = \max\{|-14|, |3|, |1|\} = 14 \quad \Rightarrow \quad |x_i| \leq 15, \quad (i = 1, \ldots, 7)$.

Celkem:

Pro kořeny polynom $P(x) = x^7 - 14x^5 + 3x^2 + 1$ jsou 2 možnosti.

1. 1 záporný $\mathbb{R}$ a 6 $\mathbb{C}$,
2. 1 záporný $\mathbb{R}$, 2 kladné $\mathbb{R}$ a 4 $\mathbb{C}$.

Přičemž všechny reálné kořeny leží v intervalu $[-15, 15]$.

(Velikost všech kořenů, i komplexních, je ≤ 15,
$|z| = |\alpha + \beta i| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.)

Definice (Kořen s přesností ε)

Číslo $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ nazýváme *kořen polynomu $P(x)$ s přesností ε* $(0 < \varepsilon \in \mathbb{R})$, jestliže skutečný kořen polynomu $P(x)$ leží v intervalu $(\tilde{x} - \varepsilon, \tilde{x} + \varepsilon)$.

Např.:

$$P(x) = 4x^4 - 31x^3 - 121x^2 + 244x + 660, \quad P(2) = 480, \quad P(3) = -210,$$

tedy (podle první Bolzanovy věty) v intervalu $(2, 3)$ má polynom P kořen. Střed tohoto intervalu, tj. číslo $\tilde{x} = 2,5$, je tedy kořenem polynomu P s přesností $\varepsilon = 0,5$.

(Skutečným kořenem je číslo $2,75$.)

Z předchozího příkladu je zřejmé, že kořen lichého stupně polynomu P lze určit s libovolnou přesností tak, že najdeme interval, ve kterém leží jen tento kořen (např. pomocí věty o odhadu velikosti kořenů a užitím Hornerova schématu).

Označme si tento interval jako (a, b). Střed tohoto intervalu $\tilde{x}_1 = \frac{a+b}{2}$ je prvním odhadem kořene, tedy je kořenem daného polynomu s přesností $\frac{b-a}{2}$. Navíc zřejmě $P(a) \cdot P(b) < 0$ (hodnoty polynomu P v krajních bodech intervalu (a, b) mají opačná znaménka).

Spočteme tedy hodnotu $P(\tilde{x}_1) = P(\frac{a+b}{2})$ a z intervalů $(a, \frac{a+b}{2}), (\frac{a+b}{2}, b)$ vybereme ten, v jehož krajních bodech nabývá polynom P opačná znaménka, protože kořen jistě leží v této polovině intervalu.

Střed tohoto podintervalu označíme jako druhé přiblížení ke kořeni $\tilde{x}_2$, tedy jde o kořen polynomu P s přesností $\frac{b-a}{4}$. Stejně můžeme postupovat libovolně dlouho a získat tak kořen polynomu s libovolnou přesností.

Poznámka

- Jestliže kdykoli dostaneme $P(\tilde{x}_i) = 0$, pak je číslo $\tilde{x}_i$ (přesným) kořenem polynomu P.
- Metodu bisekce je nejvhodnější používat na aproximaci jednonásobných kořenů. Existují metody, které převedou daný polynom na jiný, který má stejné kořeny, ale všechny jednonásobné.
- Existují také různá vylepšení metody bisekce (např. metoda zlatého řezu), pomocí kterých je možné kořen s danou přesností najít rychleji.

Příklad

Odhadněte nezáporný kořen polynomu $P(x) = x^3 - 3x - 1$ s přesností aspoň $0,02$.

Nejprve pomocí věty o odhadu velikosti kořenů uděláme základní odhad:

$$\max\{1,3,1\} = 3 \qquad \Rightarrow \qquad x_i \in [-4,4].$$

Nás zajímají jen kladné kořeny, proto se omezíme na interval $[0,4]$ a na něm provedeme tzv. separaci kořenů — tj. interval rozdělíme na větší počet subintervalů a v dělících bodech určíme hodnotu polynomu P.

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	-1	-3	1	17	51

Vzhledem ke znaménkové změně (používáme první Bolzanovu větu) se hledaný kořen nachází v intervalu $(1,2)$. (Číslo 1 ani 2 kořenem není, neboť v nich nemá polynom hodnotu nula.)

Průběh bisekce přehledně shrňme do tabulky.

a	$\tilde{x}_i = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(\tilde{x}_i)$	$P(b)$	chyba $\left(\frac{b-a}{2}\right)$
1	1,5	2	$-$	$-$	$+$	0,5
1,5	1,75	2	$-$	$-$	$+$	0,25
1,75	1,875	2	$-$	$-$	$+$	0,125
1,875	1,9375	2	$-$	$+$	$+$	0,0625
1,875	1,90625	1,9375	$-$	$+$	$+$	0,03125
1,875	1,890625	1,90625				0,015625

Řešením zadaného problému je tedy číslo $1,890625$, které je kořenem polynomu P s přesností $0,015625$.

Věta (Taylorova věta)

Nechť má funkce f v okolí bodu x_0 vlastní derivace až do řádu $n+1$ pro nějaké $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak pro všechna x z tohoto okolí platí

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

kde ξ je vhodné číslo ležící mezi x_0 a x.

Vynecháme-li zbytek $R_n(x)$, obdržíme tzv. *Taylorův polynom*:

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i.$$

Pokud v položíme $x_0 = 0$, získáme tzv. *Maclaurinův polynom*:

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i.$$

Příklad

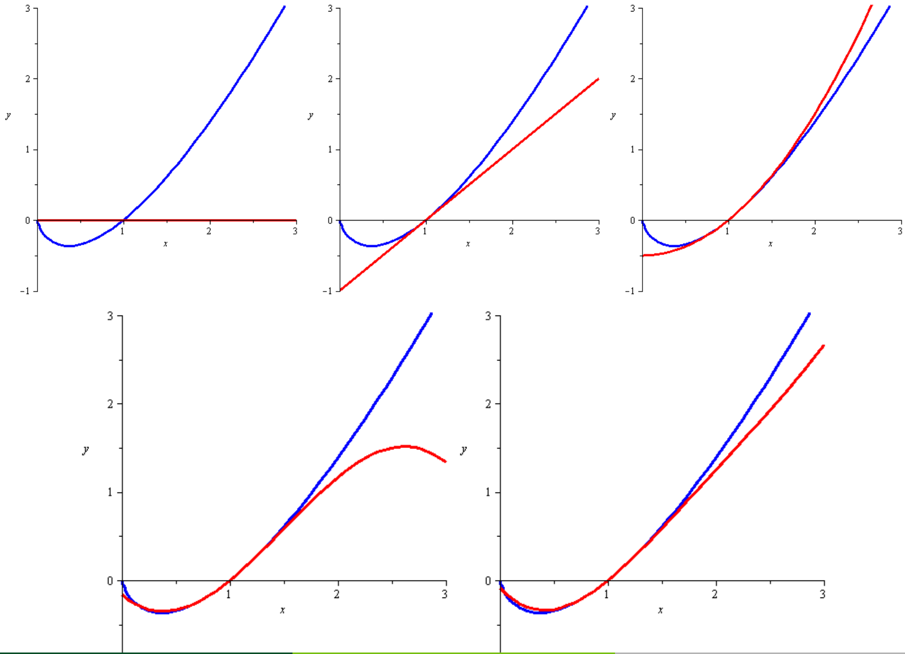
Určete Taylorův polynom 4. řádu se středem v bodě $x_0 = 1$ funkce $f(x) = x \ln x$.

$$f'(x) = 1 + \ln x,\ f''(x) = \tfrac{1}{x},\ f'''(x) = \tfrac{-1}{x^2},\ f^{(4)}(x) = \tfrac{2}{x^3}.$$

$$f(1) = 0,\ f'(1) = 1,\ f''(1) = 1,\ f'''(1) = -1,\ f^{(4)}(1) = 2.$$

Tedy

$$\begin{aligned} T(x) &= 0 + \tfrac{1}{1!}(x-1) + \tfrac{1}{2!}(x-1)^2 + \tfrac{-1}{3!}(x-1)^3 + \tfrac{2}{4!}(x-1)^4 \\ &= \tfrac{1}{12}(x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 10x - 3). \end{aligned}$$



y
x
0
1
2
3
-1

Jsou dány navzájem různé body x_i, $i = 1, \dots, n+1$, a hodnoty funkce f v těchto bodech. Cílem je najít polynom P_n stupně nejvýše n takový, aby platilo $P_n(x_i) = f(x_i)$ pro $i = 1, \dots, n+1$. Body x_i se nazývají *uzly* a polynom P_n *interpolační polynom*.

Věta

Pro $(n+1)$ daných dvojic čísel $[x_i, f(x_i)]$, $i = 1, \dots, n$, $x_i \neq x_k$ pro $i \neq k$, existuje právě jeden interpolační polynom P_n (stupně nejvýše n) takový, že platí $P_n(x_i) = f(x_i)$ pro $i = 1, \dots, n$.

Definice

Lagrangeův interpolační polynom definujeme vztahem

$$P_n(x) = \ell_1(x)f(x_1) + \ell_2(x)f(x_2) + \cdots + \ell_{n+1}(x)f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \ell_i(x)f(x_i),$$

kde polynomy $\ell_i(x)$ jsou tvaru

$$\ell_i(x) = \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_{n+1})}{(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_{n+1})}.$$

Příklad

Pro funkci zadanou tabulkou najděte interpolační polynom.

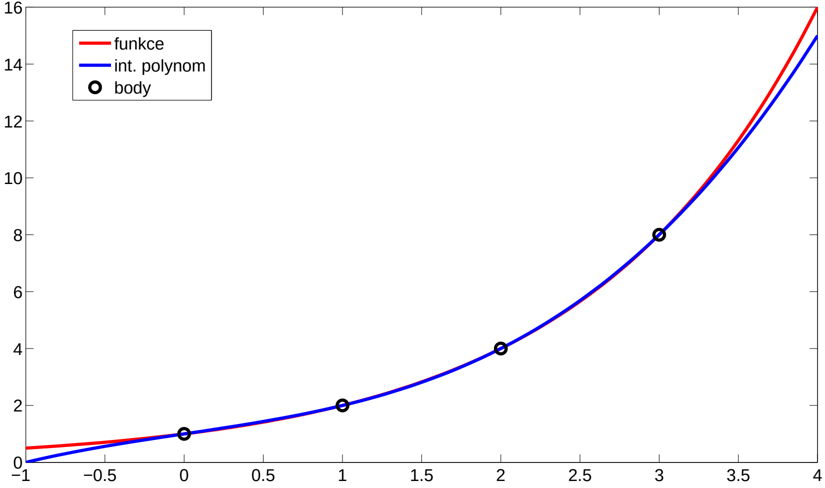
x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	1	2	4	8

Nejprve sestrojíme polynomy ℓ_i:

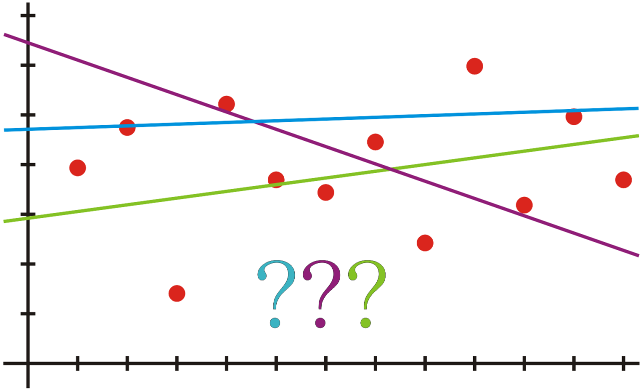
$$\ell_1(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} \qquad \ell_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)}$$
$$\ell_2(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \qquad \ell_4(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}.$$

Pak

$$\begin{aligned} P_3(x) &= 1 \cdot \ell_1(x) + 2 \cdot \ell_2(x) + 4 \cdot \ell_3(x) + 8 \cdot \ell_4(x) \\ &= 1 \cdot \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{-6} + 2 \cdot \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{2} \\ &\qquad + 4 \cdot \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{-2} + 8 \cdot \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{6} \\ &= \frac{x^3}{6} + \frac{5x}{6} + 1 \end{aligned}$$


funkce
int. polynom
body
0
2
4
6
8
10
12
14
16
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4

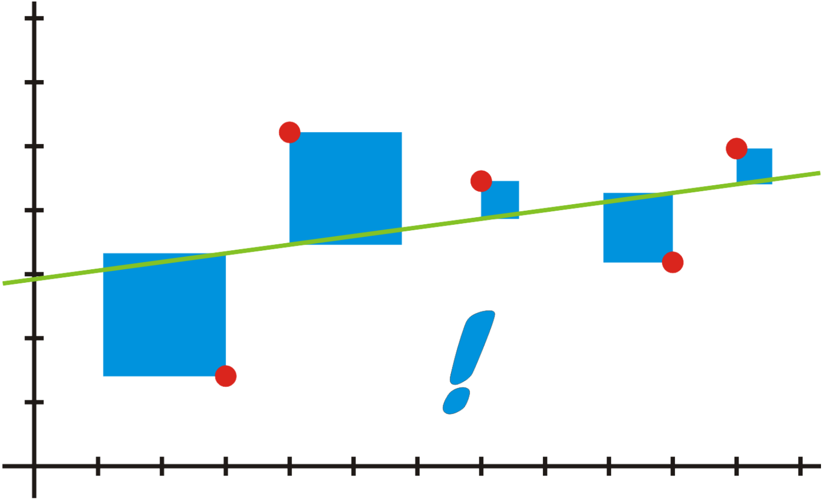
Pomocí jednoduché lineární regrese popisujeme vztah mezi proměnnými x a y. Snažíme se najít funkci f tak, aby vztah $y = f(x)$ co nejlépe vystihoval závislost mezi x a y.



Měřítkem kvality vybrané funkce f je nejmenší hodnota součtu čtverců vzdáleností

$$\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - f(x_i)\right]^2 \to \min .$$

Odtud plyne její název: *metoda nejmenších čtverců*.



Regresní přímka $f(x) = ax + b$ vyjadřuje nejjednodušší závislost x na y. Pomocí metody nejmenších čtverců určíme její parametry a a b:

$$a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i,$$
$$a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Například při dávkování léků ovcím je někdy nezbytné vážit ovce, což je ovšem spjato s praktickými problémy. Proto je snaha najít jednodušší způsob, takovým může být například odhad hmotnosti na základě obvodu hrudníku.

Příklad

Deset ovcí bylo zváženo a byl jim změřen obvod hrudníku. Najděte vztah, který nejlépe popisuje závislost hmotnosti na obvodu hrudníku.

obvod [cm]	80	88	88	83	86	80	83	87	86	88
hmotnost [kg]	30	35	35	33	33	31	31	35	34	35

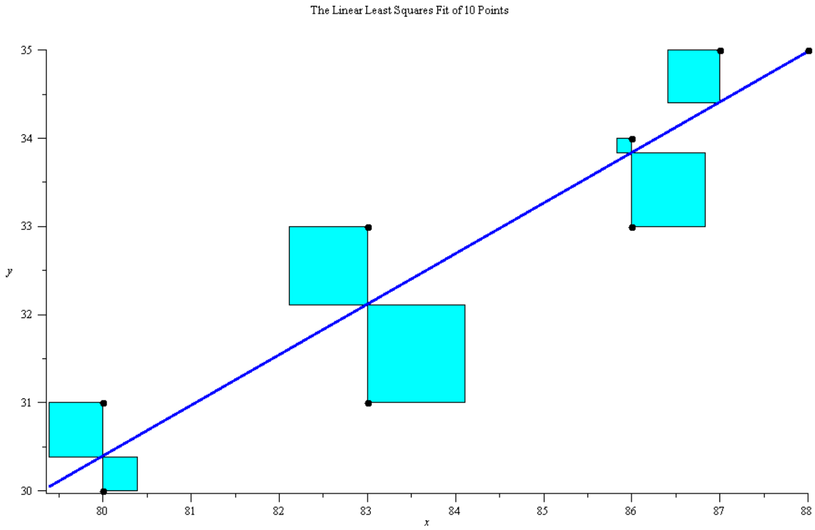
x = obvod hrudníku, y = hmotnost

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 849, \quad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 72171, \quad \sum_{i=1}^{10} y_i = 332, \quad \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 28239.$$

Odtud

$$\begin{aligned} 72171a + 849b &= 28239 \\ 849a + 10b &= 332 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a &= 58/101 \doteq 0.57 \\ b &= -1571/101 \doteq -15.55 \end{aligned}$$

Rovnice přímky vyjadřující závislost hmotnosti na obvodu hrudníku je $y = 0.57x - 15.55$.


The Linear Least Squares Fit of 10 Points
35
34
33
32
31
30
y
80
81
82
83
84
85
86
87
88
x

Příklad

Experimentálně jsme zjistili hodnoty funkce f v následující tabulce.

x_i	-2	-1	1	2	3	4
$f(x_i)$	3	2	4	3	5	4

Odhadněte $\int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$ pomocí

(i) obdélníkového pravidla s 5 dělicími intervaly a výškou obdélníku danou vždy v levém krajním bodě dělicího intervalu,

(ii) obdélníkového pravidla s 5 dělicími intervaly a výškou obdélníku danou vždy v pravém krajním bodě dělicího intervalu,

(iii) lichoběžníkového pravidla s 5 dělicími intervaly.

(i) 19, (ii) 22, (iii) 20,5.

Příklad

Sestrojte Lagrangeův interpolační polynom pro funkci, pro niž platí

$$f(-1) = 2, \quad f(1) = -2, \quad f(3) = 1.$$

$$P(x) = \frac{7}{8}x^2 - 2x - \frac{7}{8}.$$

Příklad

Sestrojte Lagrangeův interpolační polynom procházející body

$$[-2, 5], [-1, 3], [0, 1], [1, 0].$$

$$P(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x + 1.$$

Příklad

Metodou nejmenších čtverců proložte přímku body

1. $[0,1],[1,3],[2,-1],[3,3]$,
2. $[1,1],[2,0],[0,3],[-2,5]$.

1. $y=\frac{x}{5}+\frac{6}{5}$.
2. $y=-\frac{9}{7}x+\frac{18}{7}$.

Příklad

Aproximujte všechny kořeny rovnice $x^3-7x+5=0$ s chybou menší než $0,1$.

Odhady vyjdou přibližně $-2,948828358; 0,7828156787$ a $2,166012680$. Výsledky se mohou lišit dle zvoleného prvního dělení intervalu. (Nikdy ale o víc, než o příslušnou chybu).

- Kořeny algebraické rovnice. ⊛

```
solve x^5+5x^4-4x^3+12x-1=0
```

- Taylorův polynom. ⊛

```
series of xln(x) at x=1, order 7
```

- Lagrangeův interpolační polynom. ⊛

```
interpolating polynomial [0,1],[1,2],[2,4],[3,8]
```

- Metoda nejmenších čtverců. ⊛

```
linear fit [-1,3],[0,-1],[1,0],[2,2]
```