Derivace

Petr Hasil

Přednáška z matematiky

MENDELU Agronomická fakulta

Mendelova univerzita v Brně

MENDELU Lesnická a dřevařská fakulta

Obsah

Definice (Derivace v bodě)

Buď f funkce a $x_0 \in D(f)$. Existuje-li

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \left(= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$$

nazýváme tuto limitu *derivace* funkce f v bodě x_0 a značíme ji $f'(x_0)$.

Je-li tato limita vlastní, nazýváme ji *vlastní derivace*, je-li nevlastní, nazýváme ji *nevlastní derivace*. Jestliže tato limita neexistuje řekneme, že funkce f v bodě x_0 derivaci nemá.

Geometrický význam derivace

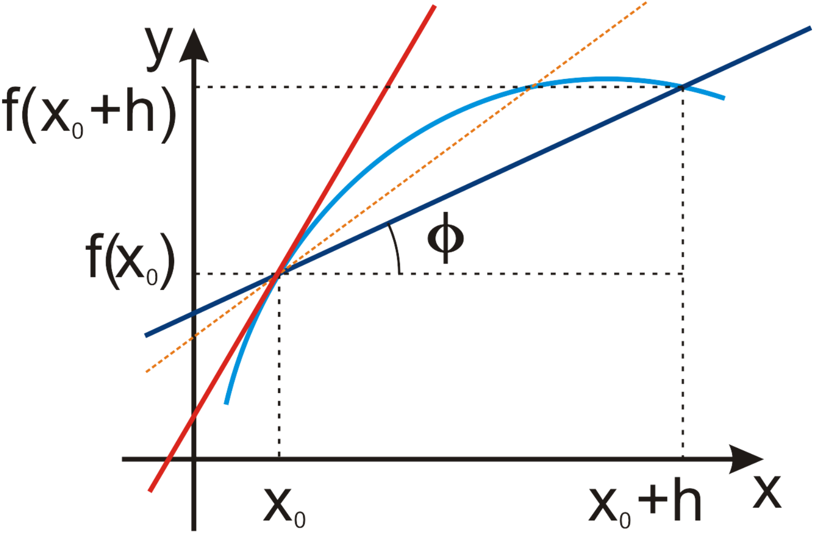
Sečna grafu funkce f procházející body $[x_0, f(x_0)]$ a $[x_0 + h, f(x_0 + h)]$ má směrnici

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Jestliže se s bodem $x_0 + h$ blížíme k bodu x_0 (tj. provádíme limitní přechod $h \to 0$), přejde tato sečna v tečnu v bodě $[x_0, f(x_0)]$. Směrnice tečny ke grafu funkce f v bodě x_0 je tedy

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

což je přesně derivace funkce f v bodě x_0.

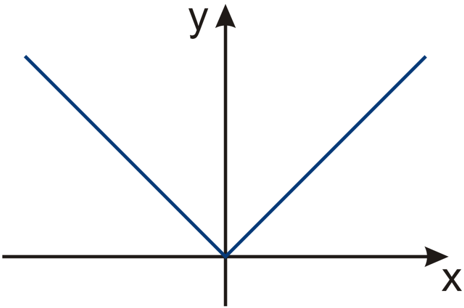

y
f(x0+h)
f(x0)
ϕ
x0
x0+h
x

Věta

Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, pak je v tomto bodě spojitá.

Poznámka

Obrácená věta neplatí. Např. funkce $f(x) = |x|$ je spojitá na celém $\mathbb{R}$, ale v $x_0 = 0$ nemá derivaci.



Definice (Derivace na intervalu)

Nechť má funkce f derivaci v každém bodě otevřeného intervalu I. Předpisem, který každému bodu x z intervalu I přiřadí derivaci funkce f v bodě x, je definována funkce, kterou nazýváme *derivace* funkce f na intervalu I a označujeme ji f'.

Poznámka

- Derivaci funkce $y = f(x)$ se mimo f' také značívá y', $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.
- Výraz $\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x$ nazýváme diferenciál funkce f v bodě x.
- Funkce f má v bodě x_0 diferenciál (je diferencovatelná v bodě x_0) $\Leftrightarrow$ existuje vlastní derivace $f'(x_0)$.

Pravidla

Nechť f a g jsou funkce, $c \in \mathbb{R}$.

- $(f \pm g)' = f' \pm g'$,
- $(c \cdot f)' = c \cdot f'$,
- $(f \cdot g)' = f'g + fg'$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Vzorce

Nechť $a, b, c, \alpha \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $\alpha \neq 0$, $b \neq 1$.

- $(c)' = 0$,
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$,
- $(e^x)' = e^x$,
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$,
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,
- $(\log_b x)' = \frac{1}{x \cdot \ln b}$,
- $(\sin x)' = \cos x$,
- $(\cos x)' = -\sin x$.
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$,
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$,
- $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Věta

Pro složenou funkci platí

$$(f \circ g)'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

kde existence derivace vlevo (a uprostřed) plyne z existence derivací vpravo.

Poznámka

- Výraz $f'(g(x))$ znamená derivaci funkce f vypočtenou v bodě $g(x)$.
- Při derivování složené funkce je vhodné začít od vnější složky a pokračovat dovnitř (jako loupání cibule), tj.

$$(f \circ g \circ h)'(x) = [f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

Definice (Derivace vyšších řádů)

Nechť f je funkce a f' její derivace. Existuje-li derivace $(f')'$ funkce f', nazýváme ji *druhá derivace* funkce f a značíme ji f''.

Obecně n-tou derivací, $n \in \mathbb{N}$, funkce f rozumíme funkci $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

Poznámka

- Pro derivace vyšších řádů budeme používat značení

$$f', f'', f''', f^{(4)}, f^{(5)}, \dots, f^{(n)}.$$

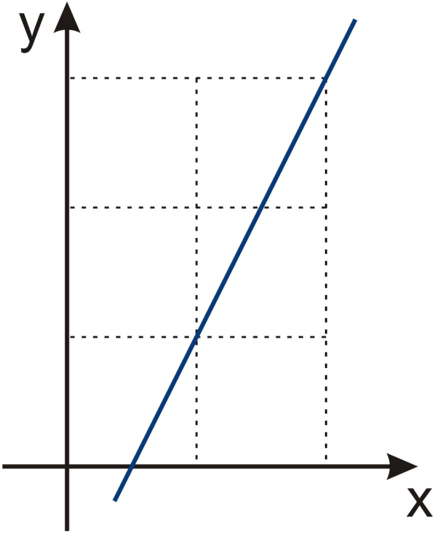
- V ostatních typech značení se n-tá derivace píše jako

$$y^{(n)}, \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}.$$

Fyzikální význam derivace

- Derivace $f'(x_0)$ vyjadřuje okamžitou rychlost změny funkční hodnoty funkce f v bodě x_0. Tj. je-li $f'(x_0) = c \in \mathbb{R}$, potom na jednu jednotku změny hodnoty nezávisle proměnné x připadá c jednotek změny závisle proměnné y.

- Zejména z toho plyne, že je-li $c > 0$, pak s rostoucím x roste i y, a je-li $c < 0$, pak s rostoucím x y klesá.


y
x

Snadno můžeme pomocí derivací odvodit zákony klasické mechaniky:

- Rychlost je změna polohy v čase $v = \frac{s}{t}$. Potom okamžitá rychlost v čase t je
$$v(t) = \lim_{h\to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$
- Zrychlení je změna rychlosti v čase, tedy podobně obdržíme
$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}.$$
- Hybnost p je rovna rychlosti na jednotku hmotnosti, tedy $p = mv$.
- Síla je derivací hybnosti dle času
$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v + m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 + m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = ma.$$

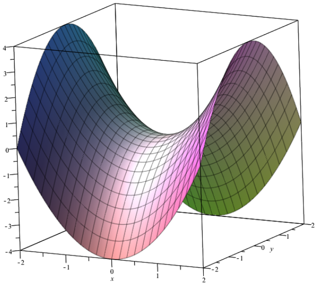
Tím jsme ovodili 2. Newtonův pohybový zákon ($a = \frac{F}{m}$):

Zákon síly

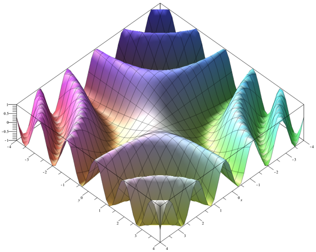
Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundam lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Jestliže na těleso působí síla, pak se těleso pohybuje se zrychlením, které je přímo úměrné působící síle a nepřímo úměrné hmotnosti tělesa.

Uvažujeme-li funkce více proměnných, tedy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, je nutné zvolit ve kterém směru nás zajímá rychlost růstu. Např. funkce dvou proměnných $f(x, y) = z$ má dva vstupy (dvojice argumentů x, y) a jeden výstup (funkční hodnota z). Jejím definičním oborem je tedy část roviny a graf je „plachta“ vznášející se nad ním (podobně jako u funkce jedné proměnné je definiční obor část přímky a graf funkce je křivka vznášející se nad ním).



Obr.: Funkce $f(x, y) = x^2 - y^2$.



Obr.: Funkce $f(x, y) = \sin(xy)$.

Derivaci ve směru libovolné souřadné osy získáme jednoduše derivováním předpisu funkce s tím, že všechny ostatní proměnné považujeme za konstanty. Mluvíme potom *parciální derivaci* a značíme např. pro funkci dvou proměnných $f(x, y)$ její derivaci podle x jako

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f'_x(x, y) = f_x(x, y).$$

Geometricky se jedná o směrnici tečny pritisknuté na graf dané funkce v bodě $[x, y]$ tak, že její projekce do roviny xy je rovnoběžná s osou x (rychlost růstu ve směru osy x).

Např. pro $f(x, y) = x^2 - y^2$ je $f_x = 2x, f_y = -2y$.

Poznámka

Derivace vyšších řádů zavádíme tak, že uvažujeme o parciální derivaci jako o funkci, kterou derivujeme. (Samozřejmě tato funkce musí existovat.)

U funkce dvou proměnných $f(x, y)$ pak mluvíme např. o parciálních derivacích druhého řádu podle x

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (f_x)_x = f_{xx},$$

nebo o smíšených derivacích $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} = (f_x)_y$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx} = (f_y)_x$.

Poznámka

Pokud jsou smíšené parciální derivace spojité, pak platí tzv. Schwarzova věta, která říká, že je jedno v jakém pořadí derivujeme, záleží pouze na počtu derivací dle příslušných proměnných. Tedy např. pro $f(x, y)$ je

$$f_{xy} = f_{yx}, \qquad f_{xyxyx} = f_{xxxyy}.$$

Poznámka

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = f_x(x, y) = f'_x(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} = f_y(x, y) = f'_y(x, y)$$

Příklad

$$f(x, y) = \mathrm{e}^x \cdot y^2 \cdot \sin(xy)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y^2(\mathrm{e}^x \sin xy + \mathrm{e}^x \cos xy \cdot y) = y^2\, \mathrm{e}^x(\sin xy + y \cos xy)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \mathrm{e}^x(2y \cdot \sin xy + y^2 \cdot \cos xy \cdot x) = \mathrm{e}^x\, y(2 \sin xy + xy \cos xy)$$

Poznámka (Geometrický význam parciální derivace)

Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ je směrnice křivky, která vznikne řezem grafu funkce rovinou $y = y^*$. V n-rozměrném prostoru „řežeme“ nadrovinou.

Poznámka

Pro funkce jedné proměnné plyne z existence derivace řada pěkných vlastností, např. spojitost, diferencovatelnost (lze sestrojit tečnu). Pro funkce více proměnných z existence parciálních derivací téměř nic pěkného neplyne, zejména z existence parciální derivace neplyne spojitost.

Příklad

Zderivujte:

$$f(x) = 5x^3 - 2\cos x + \frac{3}{4x^2}, \quad g(x) = \frac{x^4}{\ln x}, \quad h(x) = \sqrt[3]{\sin(2x)}.$$

Řešení:

$$f'(x) = 15x^2 + 2\sin x - \frac{3}{2x^3}, \quad g(x) = x^3 \frac{4\ln x - 1}{\ln^2 x},$$

$$h(x) = \frac{2\cos(2x)}{3\sqrt[3]{\sin^2(2x)}}.$$

Příklad

Určete hodnotu 3. derivace funkce $f(x) = 5x^5 + 4x^3 - x^2 + 1$ v bodě $x_0 = -2$.

Řešení:

$$f'''(-2) = 1\,224.$$

Příklad

Vypočtěte parciální derivace druhého řádu funkce

$$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Řešení:

$$f'_x = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad f''_{xx} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f''_{xy} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$f'_y = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad f''_{yy} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f''_{yx} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

- Výpočet derivace. ⊛

```
derivative of cos(2x^3)(5x-1)
```

- Derivace vyššího řádu. ⊛ ⊛ ⊛ ⊛ ⊛

```
second derivative of sqrt(ln(x))
third derivative of ln(x^(1/3))
4th derivative of ln(x^(1/3))
5th derivative of sin(2x)
d^5/dx^5(sin(2 x))
```

- Hodnota derivace v daném bodě. ⊛

```
7th derivative of sqrt(x) where x=1
```