Funkce a limita

Petr Hasil

Přednáška z matematiky

MENDELU Agronomická fakulta

Mendelova univerzita v Brně

MENDELU Lesnická a dřevařská fakulta

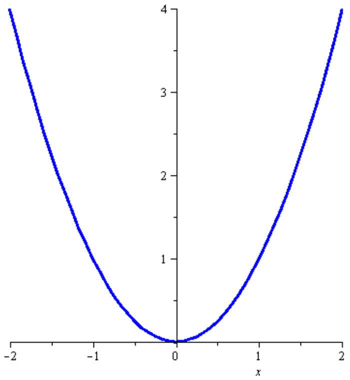
Obsah

Definice (Základní elementární funkce)

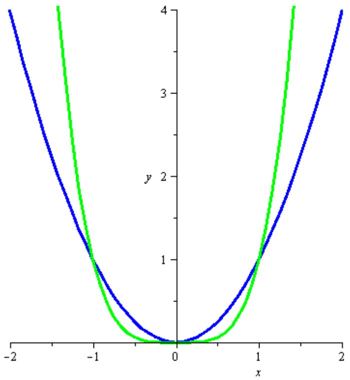
Obecná mocnina, mnohočleny, goniometrické, cyklometrické, exponenciální a logaritmické (a hyperbolické a hyperbolometrické) funkce se nazývají *základní elementární funkce*.

Definice (Elementární funkce)

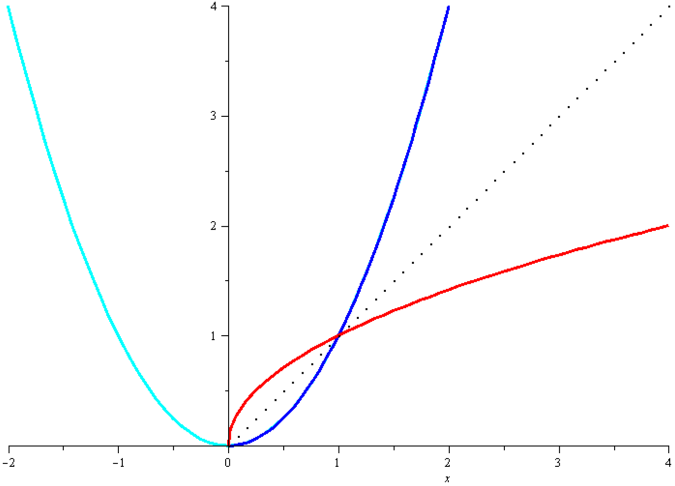
Funkce, které lze získat konečným počtem sečtení, odečtení, vynásobení, podělení a složení základních elementárních funkcí se nazývají *elementární funkce*.



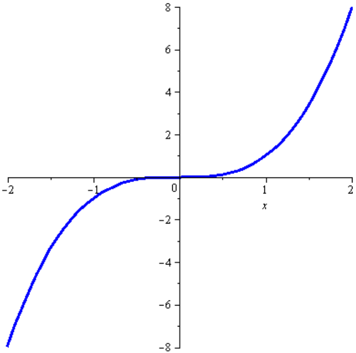
Obr.: x^2



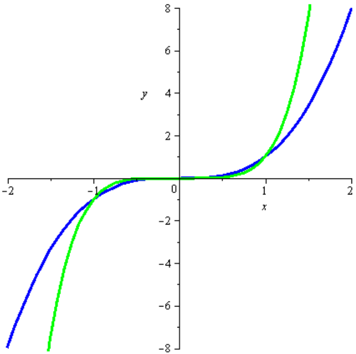
Obr.: x^2, x^4



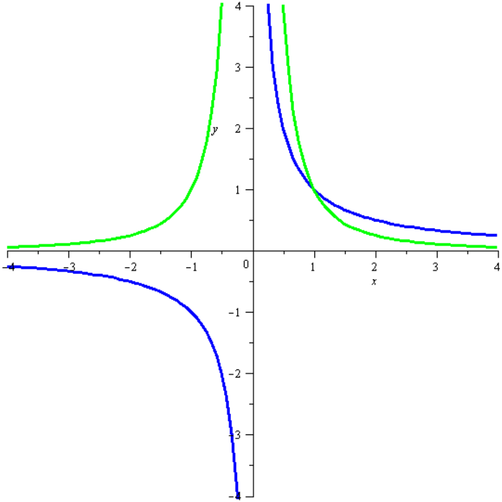
Obr.: x^2, $\sqrt{x}$



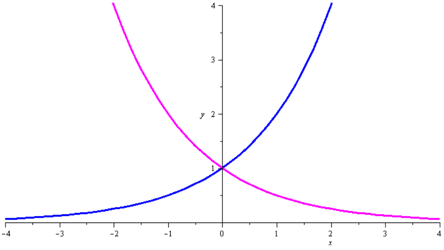
Obr.: x^3



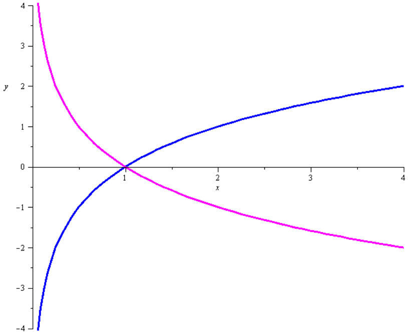
Obr.: x^3, x^5



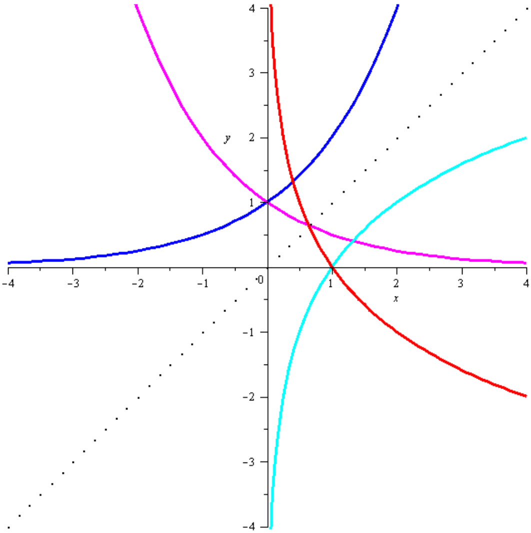
Obr.: $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$



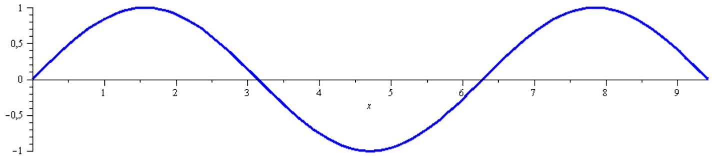
Obr.: 2^x, $\left(\frac{1}{2}\right)^x$



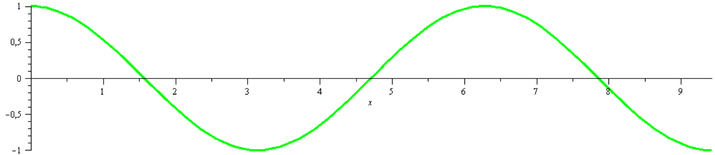
Obr.: $\log_2 x$, $\log_{\frac{1}{2}} x$



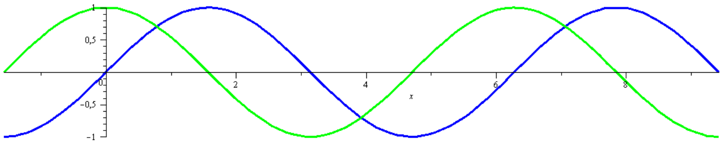
Obr.: 2^x, $\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $\log_2 x$, $\log_{\frac{1}{2}} x$



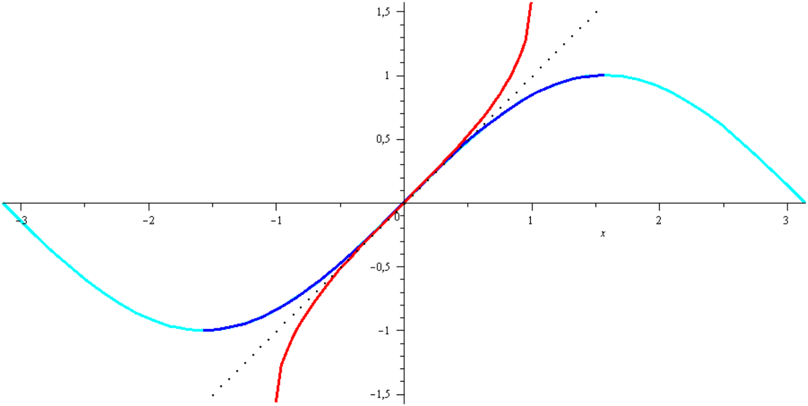
Obr.: $\sin x$



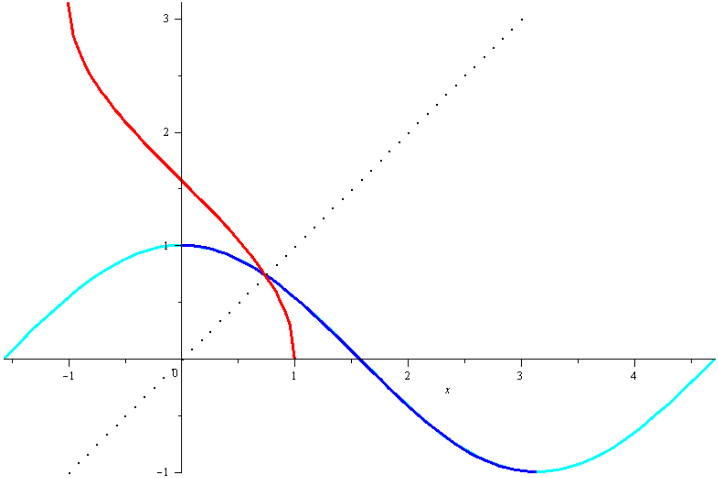
Obr.: $\cos x$



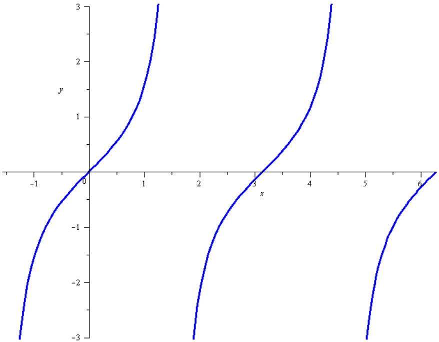
Obr.: $\sin x$, $\cos x$



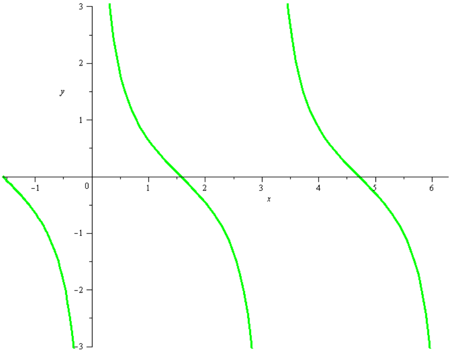
Obr.: $\sin x$, $\arcsin x$



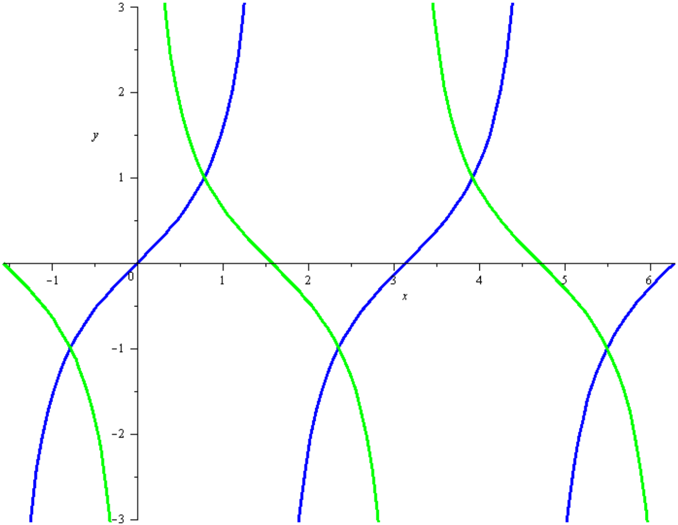
Obr.: $\cos x$, $\arccos x$



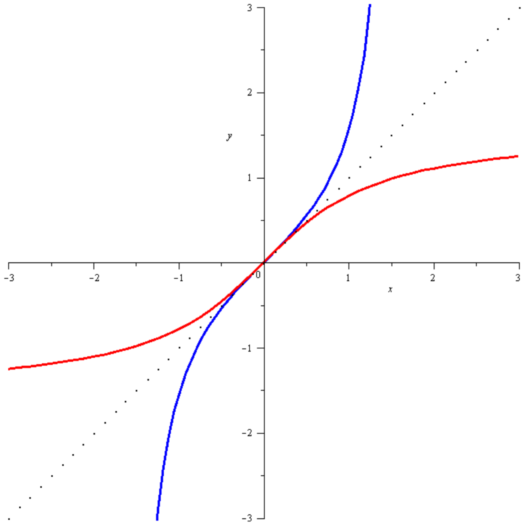
Obr.: $\operatorname{tg} x$



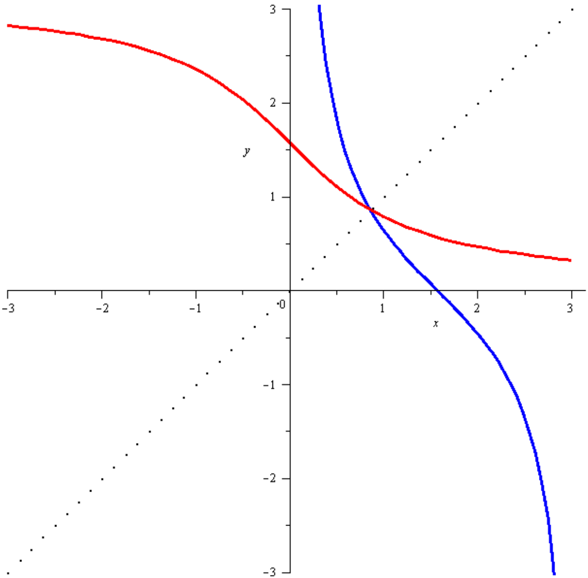
Obr.: $\operatorname{cotg} x$



Obr.: $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$



Obr.: tg x, arctg x



Obr.: cotg x, arccotg x

Operace s funkcemi

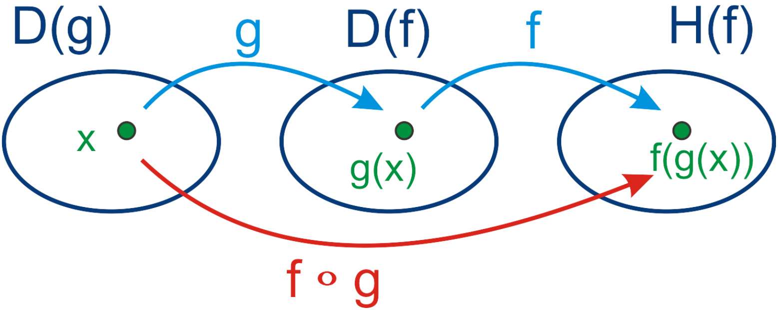
- Platí
$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x),$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$
Definiční obor těchto funkcí je průnikem definičních oborů původních funkcí, tj.
$$D(f \pm g) = D(f) \cap D(g) = D(f \cdot g).$$
- Platí
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$
Definiční obor nové funkce je průnikem definičních oborů funkcí f a g zúžený o body, v nichž je $g(x) = 0$, tj.
$$D\left(\frac{f}{g}\right) = D(f) \cap D(g) \setminus \{x : g(x) = 0\}.$$

Další operací je skládání funkcí.

Definice (Složená funkce)

Nechť $u = g(x)$ je funkce s definičním oborem $D(g)$ a oborem hodnot $H(g)$. Nechť $y = f(u)$ je funkce s definičním oborem $D(f) \supseteq H(g)$.

Složenou funkcí $(f \circ g)(x)$ rozumíme přiřazení, které $\forall x \in D(g)$ přiřadí $y = f(u) = f\big(g(x)\big)$. Funkci g nazýváme vnitřní složkou a funkci f vnější složkou složené funkce.



Příklad

- Funkce
$$F(x) = \sin x^2$$
je složena z funkcí $f(x) = \sin x$ a $g(x) = x^2$ tak, že
$$F(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big).$$

- Funkce
$$G(x) = \sqrt[3]{e^{2x-4}}$$
je složena z funkcí $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = e^x$, $h(x) = 2x - 4$ tak, že
$$G(x) = (f \circ g \circ h)(x) = f\Big(g\big(h(x)\big)\Big).$$

Poznámka

Při určování definičních oborů složených funkcí je vhodné postupovat zevnitř. Každý definiční obor je průnikem všech získaných podmínek. Např. je-li $F(x) = \sqrt{f(x)}$, najdeme nejprve $D(f)$, poté zjistíme, ve kterých bodech je $f(x) < 0$ a ty odstraníme, tj.

$$D(F) = D(f) \setminus \{x : f(x) < 0\}.$$

Tedy mimo definiční obory základních funkcí musíme brát v úvahu např. u funkce

- $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, že $g(x) \neq 0$,
- $F(x) = \sqrt{f(x)}$, že $f(x) \geq 0$,
- $F(x) = \log_a f(x)$, že $f(x) > 0$,
- $F(x) = \operatorname{tg} f(x)$, že $f(x) \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$,
- $F(x) = \operatorname{cotg} f(x)$, že $f(x) \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
- $F(x) = \arcsin f(x)$, že $f(x) \in [-1, 1]$,
- $F(x) = \arccos f(x)$, že $f(x) \in [-1, 1]$.

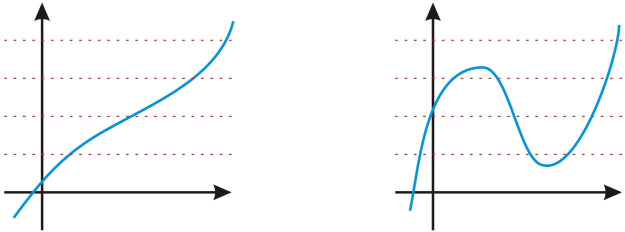
Definice (Prostá funkce)

Nechť f je funkce a $M \subseteq D(f)$. Řekneme, že funkce f je na množině M *prostá*, jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in M$ platí

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Poznámka

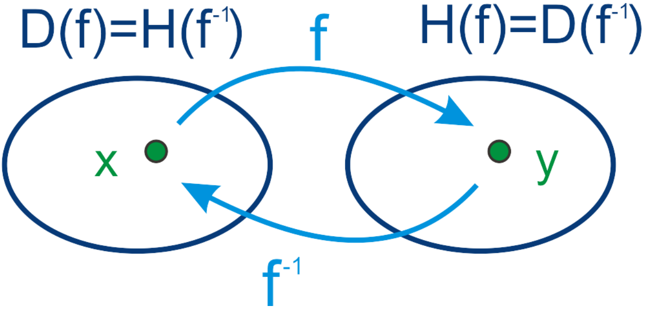
- Graf prosté funkce protíná všechny vodorovné přímky nejvýše jednou.



- Je-li funkce na množině M ryze monotónní, pak je na ní prostá.

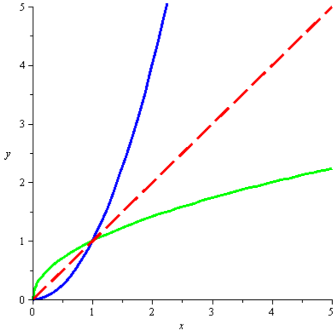
Definice (Inverzní funkce)

Nechť f je prostá funkce. Funkci f^{-1}, která každému $y \in H(f)$ přiřazuje právě to x, pro které platí $y = f(x)$, se nazývá inverzní funkcí k funkci f. Píšeme $x = f^{-1}(y)$.



Platí

- $D(f^{-1}) = H(f)$, $H(f^{-1}) = D(f)$, je-li funkce prostá
- $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.
- Grafy funkcí f a f^{-1} jsou symetrické podle osy I. a III. kvadrantu (přímky $y = x$).
- Je-li funkce f rostoucí/klesající, je také funkce f^{-1} rostoucí/klesající.



Výpočet inverzní funkce

Iverzní funkci k funkci f určíme tak, že v předpisu $y = f(x)$ zaměníme proměnné x a y, tím dostaneme $x = f(y)$. Z této rovnice pak vyjádříme, je-li to možné, proměnnou y.

K elementární funkci je inverzní funkcí jiná elementární funkce:

$f(x)$	$f^{-1}(x)$
$x^2 \quad (x \geq 0)$	$\sqrt{x}$
$x^2 \quad (x \leq 0)$	$-\sqrt{x}$
x^3	$\sqrt[3]{x}$
e^x	$\ln x$
$a^x \quad (a \neq 1)$	$\log_a x$
$\sin x \quad (x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$	$\arcsin x$
$\cos x \quad (x \in [0, \pi])$	$\arccos x$
$\operatorname{tg} x \quad (x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$	$\operatorname{arctg} x$
$\operatorname{cotg} x \quad (x \in (0, \pi))$	$\operatorname{arccotg} x$

Poznámka

Pro všechna x, pro která má zápis smysl, platí

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x.$$

Příklad

Určete inverzní funkci k funkci f a určete $D(f)$, $H(f)$, $D(f^{-1})$ a $H(f^{-1})$.

- $f(x) = \frac{3x-4}{2}$,
- $f(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$.

- $f(x) = \frac{3x-4}{2}$

$$y = \frac{3x-4}{2} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} x &= \frac{3y-4}{2} \\ 2x &= 3y-4 \\ 3y &= 2x+4 \\ y &= \frac{2x+4}{3} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{2x+4}{3}.$$

$$D(f) = H(f) = D(f^{-1}) = H(f^{-1}) = \mathbb{R}.$$

- $f(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$

$$y = \mathrm{e}^{\sin x} \quad \rightsquigarrow \quad x = \mathrm{e}^{\sin y} \quad / \ln(\cdot)$$
$$\ln x = \sin y \quad / \arcsin(\cdot)$$
$$\arcsin \ln x = y \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \arcsin \ln x.$$

$D(f) = \mathbb{R}$, funkce f je prostá pro $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] = H(f^{-1})$,

$D(f^{-1})$:

- $\ln x \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x \in (0, \infty)$
- $\arcsin \ln x \quad \Rightarrow \quad \ln x \in [-1, 1]$

$$-1 \leq \ln x \leq 1 \quad / \mathrm{e}^{(\cdot)} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{-1} \leq x \leq \mathrm{e} \quad \Rightarrow \quad x \in \left[\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right]$$

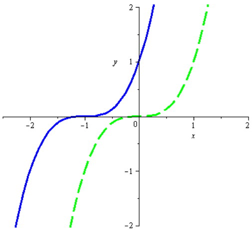
$D(f^{-1}) = (0, \infty) \cap \left[\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right] = \left[\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right]$.

Celkem tedy $H(f) = D(f^{-1}) = \left[\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right]$.

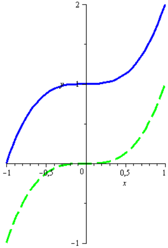
Transformace grafu funkce

Nechť je dána funkce $y = f(x)$ a nenulová reálná čísla a, b.

- Uvažujme funkci $\tilde{y} = f(x + a)$. Tato funkce má vůči původní funkci graf posunutý buď doleva (je-li $a > 0$), nebo doprava (pro $a < 0$), a to o velikost čísla a.
- Uvažujme funkci $\hat{y} = f(x) + b$. Tato funkce má vůči původní funkci graf posunutý buď nahoru (je-li $b > 0$), nebo dolů (pro $b < 0$), a to o velikost čísla b.



Obr.: $f(x) = (x + 1)^3$



Obr.: $f(x) = x^3 + 1$

Definice (Okolí bodu)

Libovolný otevřený interval $I \in \mathbb{R}$ obsahující bod $x_0 \in \mathbb{R}$ nazýváme *okolí bodu* x_0 aznačíme jej $\mathcal{O}(x_0)$.

Speciální typy okolí bodu

- δ-okolí bodu x_0

$$\mathcal{O}_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

- Prstencové (ryzí) δ-okolí bodu x_0

$$\widehat{\mathcal{O}}_\delta(x_0) = \mathcal{O}_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta).$$

- Levé a pravé δ-okolí bodu x_0

$$\mathcal{O}_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0], \qquad \mathcal{O}_\delta^+(x_0) = [x_0, x_0 + \delta).$$

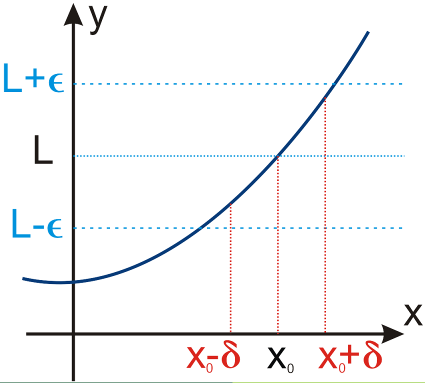
- Levé a pravé prstencové δ-okolí bodu x_0

$$\widehat{\mathcal{O}}_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0), \qquad \widehat{\mathcal{O}}_\delta^+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta).$$

Definice (Limita funkce)

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *limitu* rovnu číslu L, jestliže pro $\forall \varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro $\forall x \in \widehat{\mathcal{O}}_\delta(x_0)$ platí $f(x) \in \mathcal{O}_\varepsilon(L)$. Píšeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L, \quad \text{popř.} \quad f(x) \xrightarrow{x \to x_0} L.$$



Nepřesně, ale ilustrativně:

„Je-li x blízko x_0, pak je $f(x)$ blízko L."

Definice (Jednostranné limity)

Použijeme-li v definici limity $\widehat{\mathcal{O}}_\delta^+(x_0)$ místo $\widehat{\mathcal{O}}_\delta(x_0)$, získáme definici *limity zprava*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L.$$

Podobně, použijeme-li v definici limity $\widehat{\mathcal{O}}_\delta^-(x_0)$ místo $\widehat{\mathcal{O}}_\delta(x_0)$, získáme definici *limity zleva*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L.$$

Věta (Jednoznačnost)

Funkce má v každém bodě nejvýše jednu limitu / limitu zprava / limitu zleva.

Definice (Rozšířená množina reálných čísel)

Rozšířenou množinou reálných čísel $\mathbb{R}^*$ rozumíme množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ rozšířenou o body $-\infty$ a $+\infty$, tj

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Body $\pm\infty$ nazýváme nevlastní body, zatímco body množiny $\mathbb{R}$ nazýváme vlastní body.

Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme:

- $a + \infty = \infty$,
- $a - \infty = -\infty$,
- $\infty + \infty = \infty$,
- $-\infty - \infty = -\infty$,
- $\infty \cdot \infty = \infty$,
- $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$,
- $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$,
- $|\pm\infty| = \infty$,
- $\frac{a}{\pm\infty} = 0$.

- Je-li $a > 0$, pak $a \cdot \infty = \infty, a \cdot (-\infty) = -\infty$.
- Je-li $a < 0$, pak $a \cdot \infty = -\infty, a \cdot (-\infty) = \infty$.

Poznámka

Nejsou definovány výrazy

$$\infty - \infty, \quad \pm\infty \cdot 0, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

Tyto výrazy nazýváme *neurčité výrazy*.

Samozřejmě není definováno dělení nulou.

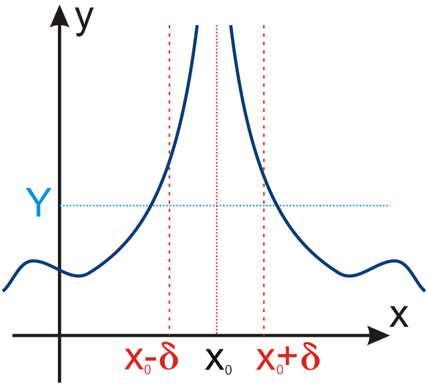
Definice (Okolí nevlastního bodu)

Okolím $\mathcal{O}(\infty)$ bodu ∞ rozumíme libovolný interval tvaru (a, ∞), $a \in \mathbb{R}$, a podobně okolím bodu $-\infty$ interval tvaru $(-\infty, a)$. Ryzím okolím nevlastních bodů rozumíme totéž, co okolím těchto bodů.

Použitím okolí nevlastních bodů v definici limity získáme definici tzv. *nevlastní* limity a limity *v nevlastním bodě*. Definice limity se pak pro tyto speciální případy zjednoduší.

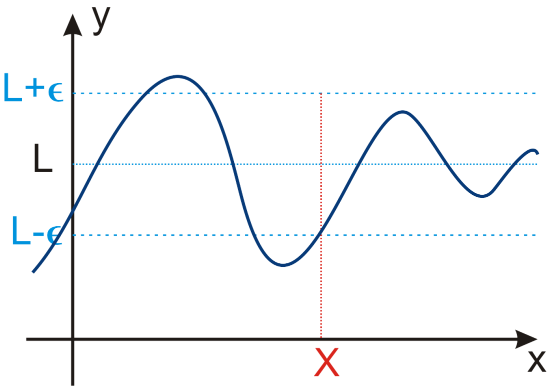
Definice (Nevlastní limita)

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *nevlastní limitu* $+\infty \quad (-\infty)$, jestliže pro $\forall Y > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro $\forall x \in \widehat{\mathcal{O}}_\delta(x_0)$ platí $f(x) > Y \quad (f(x) < -Y)$.



Definice (Limita v nevlastním bodě)

Řekneme, že funkce f má limitu L v nevlastním bodě $+\infty \quad (-\infty)$, jestliže pro $\forall \varepsilon > 0$ existuje $X > 0$ takové, že pro $\forall x > X \quad (\forall x < -X)$ platí $f(x) \in \mathcal{O}_\varepsilon(L)$.



Použité pojmy

Limitu

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

nazýváme

- *vlastní limita ve vlastním bodě*, jestliže $x_0, L \in \mathbb{R}$,
- *nevlastní limita ve vlastním bodě*, jestliže $x_0 \in \mathbb{R}, L \in \{\pm\infty\}$,
- *vlastní limita v nevlastním bodě*, jestliže $x_0 \in \{\pm\infty\}, L \in \mathbb{R}$,
- *nevlastní limita v nevlastním bodě*, jestliže $x_0, L \in \{\pm\infty\}$.

Věta (Existence limity)

Funkce f má ve vlastním bodě x_0 limitu právě tehdy, když má v tomto bodě obě jednostranné limity a ty si jsou rovny, tj.

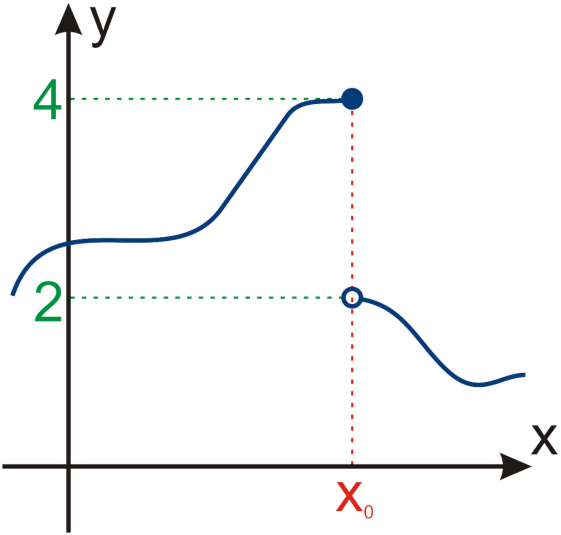
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L.$$

Poznámka

Limita neexistuje, jestliže

- neexistuje některá (nebo obě) jednostranné limity,
- jednostranné limity jsou různé.

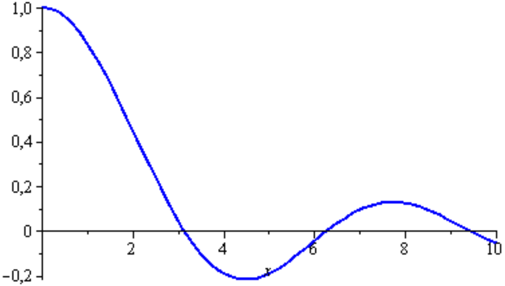
Toho lze výhodně využít při důkazu neexistence limity.


y
4
2
x
x_0

Není-li možné číslo do funkce dosadit jinak než "limitně", můžeme představu o limitním chování funkce získat i empiricky a to dosazováním blízkých čísel. Podívejme se na chování funkce $\frac{\sin x}{x}$ pro $x \to 0^+$.

x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{\sin x}{x}$	0,841470985	0,998334167	0,999983333	0,999999833	0,999999998

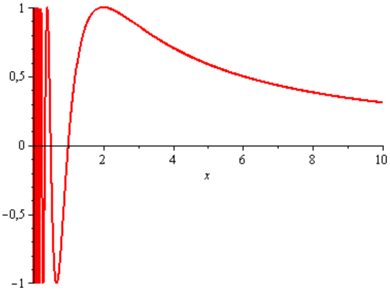
Z tabulky vidíme, že hodnoty se blíží jedničce. A skutečně $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$.



POZOR – nejde o neprůstřelnou metodu:

x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	$\cdots$
$\sin\frac{\pi}{x}$	0	0	0	0	0	$\cdots$

Přitom $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin\frac{\pi}{x}$ neexistuje.



(Zkuste dosazovat *náhodná* čísla blížící se k nule zprava.

Např. $\sin\frac{\pi}{0{,}003} \doteq -0,8660253055$.)

Definice (Spojitost)

- Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže

$$x_0 \in D(f) \quad \text{a} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

- Řekneme, že funkce f je spojitá zleva v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže

$$x_0 \in D(f) \quad \text{a} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

- Řekneme, že funkce f je spojitá zprava v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže

$$x_0 \in D(f) \quad \text{a} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Definice (Spojitost na intervalu)

Řekneme, že funkce je spojitá na intervalu I, je-li spojitá v každém jeho vnitřním bodě a v krajních bodech (pokud patří do I) je spojitá zleva, resp. zprava.

Definice (Body nespojitosti)

Body, ve kterých není funkce f spojitá, nazýváme *body nespojistosti*.

Poznámka

Elementární funkce jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.

Věta (Weierstrassova věta)

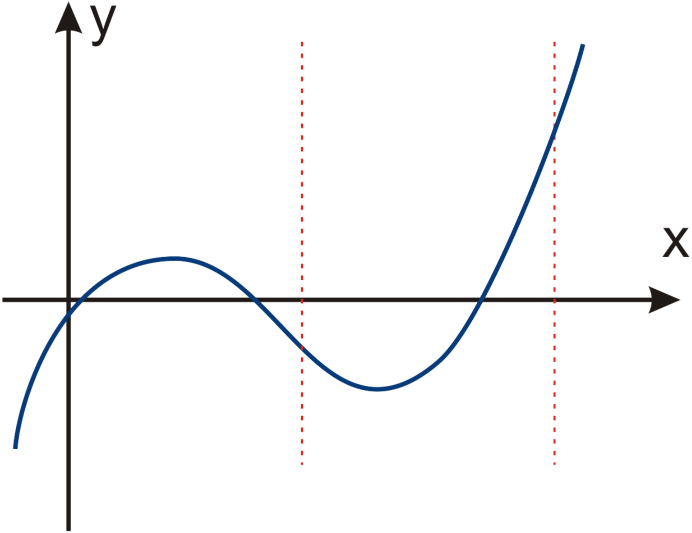
Nechť je funkce f spojitá na uzavřeném intervalu I. Pak je f na I ohraničená a nabývá zde své největší a nejmenší hodnoty.

Věta (První Bolzanova věta)

Nechť je funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $I = [a, b]$ a nechť platí $f(a) \cdot f(b) < 0$. Pak existuje alespoň jedno číslo $c \in (a, b)$ takové, že $f(c) = 0$.

Věta (Druhá Bolzanova věta)

Nechť je funkce f spojitá na uzavřeném intervalu I. Pak f nabývá všech hodnot mezi svou největší a nejmenší hodnotou.


y
x

Věta (Pravidla pro počítání s limitami)

Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $k \in \mathbb{R}$ a nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Jestliže mají funkce f a g v bodě a limitu, pak platí

- $\lim\limits_{x \to a} k = k,$
- $\lim\limits_{x \to a} \big[f(x) \pm g(x)\big] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x),$
- $\lim\limits_{x \to a} \big[f(x) \cdot g(x)\big] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x),$
- $\lim\limits_{x \to a} \big[k \cdot f(x)\big] = k \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x),$
- $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)},$ *pro* $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0.$

Příklad

- $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x) = 4+3\cdot 2 = 10$,
- $\lim\limits_{x\to\infty}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$,
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x}\cos x = -\infty\cdot 1 = -\infty$,
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x\cdot e^x} = \frac{1}{\infty\cdot\infty} = 0$,
- $\lim\limits_{x\to 0^+} (\frac{1}{x} + \ln x) = \infty - \infty =$ neurčitý výraz.

Věta (Limita složené funkce)

Je-li funkce f spojitá, pak platí

$$\lim_{x\to x_0} f\big(g(x)\big) = f\big(\lim_{x\to x_0} g(x)\big).$$

Poznámka

Při výpočtech limit vždy nejprve dosadíme $x = x_0$.

Příklad

- $\lim_{x\to 0^+} \ln \frac{1}{x} = \Big\|\ln\infty\Big\| = \infty$,
- $\lim_{x\to -\infty} \operatorname{arctg} \mathrm{e}^{-x} = \Big\|\operatorname{arctg}\infty\Big\| = \frac{\pi}{2}$,
- $\lim_{x\to 0^+} \ln\sin x = \Big\|\ln 0^+\Big\| = -\infty$,
- $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sin x} = \Big\|\frac{1}{\sin 0^-} = \frac{1}{0^-}\Big\| = -\infty$,
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sin x} = \Big\|\frac{1}{\sin 0^+} = \frac{1}{0^+}\Big\| = \infty$.

Věta

Jestliže pro všechna $x \in \hat{O}_\delta(x_0)$ *platí* $f(x) = g(x)$ *a existuje limita* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L$, *pak*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L.$$

Odtud plyne, že funkci lze při výpočtu limity vhodně upravovat.

Příklad

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \left\| \tfrac{0}{0} \right\| = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim_{x\to 2} (x+1) = 3.$$

Následující věta již byla použita v některých příkladech.

Věta

Nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = k \neq 0$ *a* $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$*. Existuje-li prstencové okolí bodu* x_0*, takové, že pro každé* x *z tohoto okolí platí*

- $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$, *pak* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$,
- $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$, *pak* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

$\rightarrow$ Věta platí i pro jednostranné okolí a limity.

$\rightarrow$ Při výpočtu limity typu $\left\|\frac{k}{0}\right\|$, kde $k \neq 0$, $k \in \mathbb{R}$ je potřeba určit obě jednostranné limity a zjistit, zda jsou si rovny. Pokud ne, limita neexistuje.

Příklad

- Limita
$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1} = \left\| \tfrac{1}{0} \right\|$$
neexistuje, neboť
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1} = \left\| \tfrac{1}{0^+} \right\| = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x-1} = \left\| \tfrac{1}{0^-} \right\| = -\infty.$$

- Limita
$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{(x-1)^2} = \left\| \tfrac{1}{0} \right\| = +\infty,$$
neboť
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{(x-1)^2} = \left\| \tfrac{1}{0^+} \right\| = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{(x-1)^2} = \left\| \tfrac{1}{0^+} \right\| = +\infty.$$

Poznámka

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\| \frac{k}{\pm\infty}, k \in \mathbb{R} \right\| = 0.$

Věta (Limita polynomu a rac. lom. funkce v $\pm\infty$)

Platí

- $$\lim_{x\to\pm\infty}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n,$$

- $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_0} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

Příklad

- $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^5+3x^4-2x+8)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^5)$
$$=\left\|-2\cdot(-\infty)\right\|=+\infty$$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2-1}{x^4-2x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3}{x^4}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}=\left\|\frac{2}{\infty}\right\|=0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2+2x-1}{-x^2-8x+5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{-x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-3)=-3$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+3x^2+2x-1}{-4x^2+3x+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4}{-4x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{-4}=\frac{1}{-4}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}x^2=-\infty.$

Poznámka

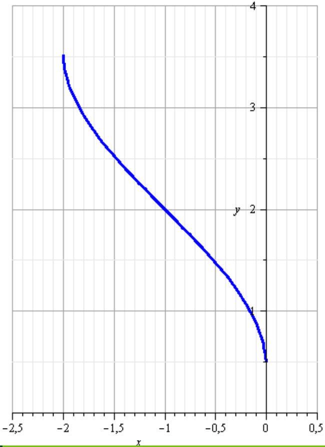
Neurčité výrazy typu $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ lze řešit pomocí derivací – tzv. L'Hospitalova pravidla.

Příklad

Načrtněte graf funkce

$$f(x) = 2 - \arcsin(x + 1).$$

Řešení:



Příklad

Určete definiční obor funkce

$$f(x) = \ln \frac{x-1}{2+x} - \arcsin \frac{x}{4}.$$

Řešení:

$$D(f) = [-4, -2) \cup (1, 4].$$

- Definiční obor funkce. ⊛
```
domain of sqrt(x+2)/(x-1)
```
- Obor hodnot funkce. ⊛
```
range of x^2-5x+3
```
- Graf funkce. ⊛ ⊛
```
plot y=x^3-1 for x from -2 to 2.5
plot y=tan(x) for x from -pi to 2pi and y from -10 to 10
```
- Inverzní funkce. ⊛
```
inverse of x^5
```
- Průsečíky grafů funkcí. ⊛
```
intersections of y=3x^2+x-4 and y=2x+6
```
- Výpočet limity. ⊛ ⊛
```
limit (x+3)/(2-x^2) as x->1
limit 3^(1/x)-7 as x->-infinity
```
- Jednostranná limita. ⊛ ⊛
```
limit e^(cot(x)) as x->2pi from left
lim_(x->(2 pi)^-) e^(cot(x))
```