Funkce a polynomy

Petr Hasil

Přednáška z matematiky

MENDELU Agronomická fakulta

Mendelova univerzita v Brně

MENDELU Lesnická a dřevařská fakulta

Obsah

Definice

Nechť $D \neq \emptyset, D \subseteq \mathbb{R}$. Pravidlo f, které každému prvku $x \in D$ přiřadí právě jedno reálné číslo $y \in \mathbb{R}$, se nazývá *reálná funkce reálné proměnné*. Zapisujeme $y = f(x)$.

- Množina $D = D(f)$ se nazývá *definiční obor* funkce f.
- Množina všech $y \in \mathbb{R}$, pro která existuje $x \in D$ takové, že $f(x) = y$ se nazývá *obor hodnot* funkce f a značíme jej $H(f)$.
- x se nazývá *nezávisle proměnná* (argument) funkce f.
- y se nazývá *závisle proměnná* funkce f.
- Číslo $f(x_0) \in \mathbb{R}$ se nazývá *funkční hodnota* funkce f v bodě x_0.

Poznámka

Není-li definiční obor funkce zadán, jedná se o množinu všech $x \in \mathbb{R}$ pro která má daná funkce smysl.

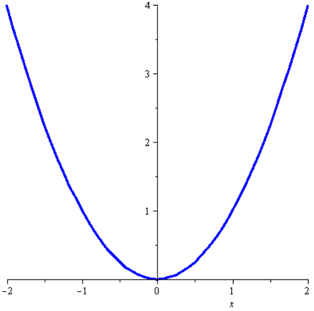
Příklad

- Definiční obor funkce $f(x) = \frac{1}{x-1}$ je $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Definiční obor funkce $g(x) = \sqrt{-x}$ je $D(g) = (-\infty, 0]$.

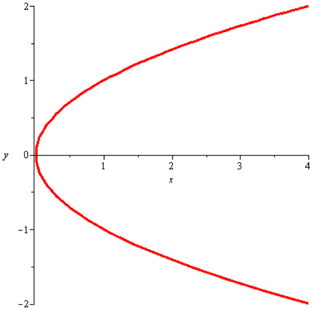
Definice

Množina všech bodů roviny daných souřadnicemi $[x, f(x)]$ se nazývá *graf funkce* f.

Příklad



Obr.: Funkce $f(x) = x^2$.



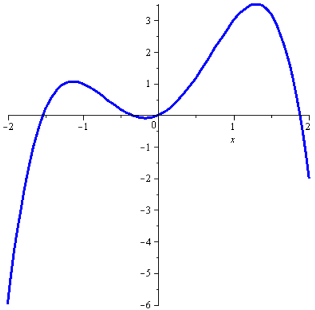
Obr.: Nejde o graf funkce.

Definice (Ohraničenost)

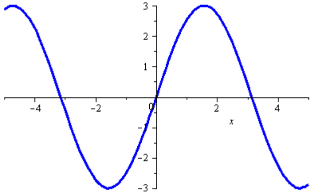
Buď f funkce a $M \subseteq D(f)$. Řekneme, že funkce f je na množině M

- zdola ohraničená, jestliže existuje $d \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $f(x) \geq d$,
- shora ohraničená, jestliže existuje $h \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $f(x) \leq h$,
- ohraničená, jestliže existují $d, h \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $d \leq f(x) \leq h$.

Příklad



Obr.: Funkce ohraničená shora.



Obr.: Ohraničená funkce.

Definice (Parita)

Buď f taková funkce, že pro její definiční obor platí

$$x \in D(f) \quad \Rightarrow \quad -x \in D(f).$$

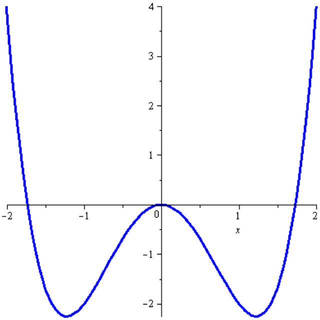
- Řekneme, že funkce f je sudá, jestliže pro $\forall x \in D(f)$ platí, že

$$f(-x) = f(x).$$

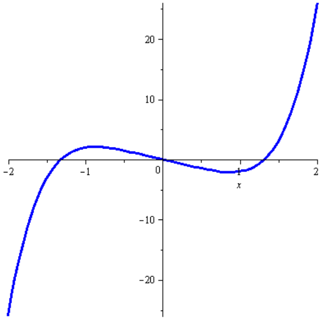
- Řekneme, že funkce f je lichá, jestliže pro $\forall x \in D(f)$ platí, že

$$f(-x) = -f(x).$$

Příklad



Obr.: Graf sudé funkce je symetrický podle osy y.



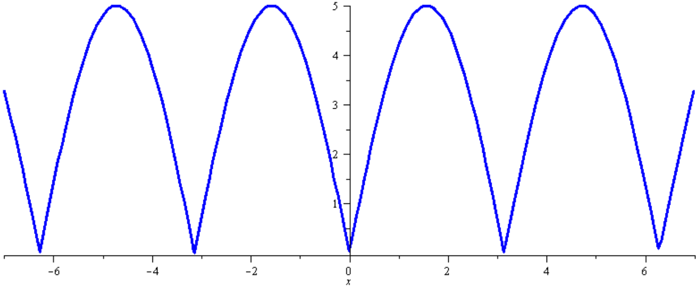
Obr.: Graf liché funkce je symetrický podle počátku.

Definice (Periodičnost)

Nechť $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$. Řekneme, že funkce f je periodická s periodou p, jestliže pro $\forall x \in D(f)$ platí

$$x \pm p \in D(f), \qquad f(x \pm p) = f(x).$$

Příklad



Obr.: Periodická funkce.

Definice

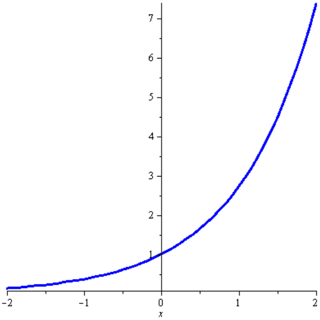
Buď f funkce a $M \subseteq D(f)$. Řekneme, že funkce f je na množině M

- *rostoucí*, jestliže
$$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2),$$
- *neklesající*, jestliže
$$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2),$$
- *klesající*, jestliže
$$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2),$$
- *nerostoucí*, jestliže
$$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

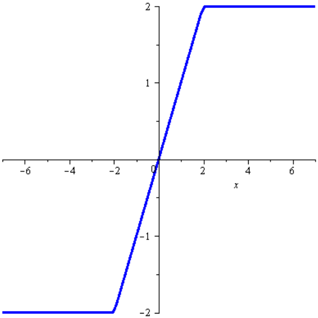
Definice

Je-li funkce f na množině M neklesající, nebo nerostoucí, nazýváme ji *monotónní*.Je-li funkce f na množině M rostoucí, nebo klesající, nazýváme ji *ryze monotónní*.

Příklad



Obr.: Rostoucí funkce.



Obr.: Neklesající funkce.

Další pojmy

Buď f funkce a $M \subseteq D(f)$.

- Je-li $f(x) > 0$ pro $\forall x \in M$, řekneme, že f je na množině M *kladná*.
- Je-li $f(x) \geq 0$ pro $\forall x \in M$, řekneme, že f je na množině M *nezáporná*.
- Je-li $f(x) < 0$ pro $\forall x \in M$, řekneme, že f je na množině M *záporná*.
- Je-li $f(x) \leq 0$ pro $\forall x \in M$, řekneme, že f je na množině M *nekladná*.
- Bod $[0, f(0)]$ nazýváme *průsečík funkce f s osou y*.
- Je-li $f(x_0) = 0$, pak nazýváme bod $[x_0, 0]$ *průsečík funkce f s osou x*.

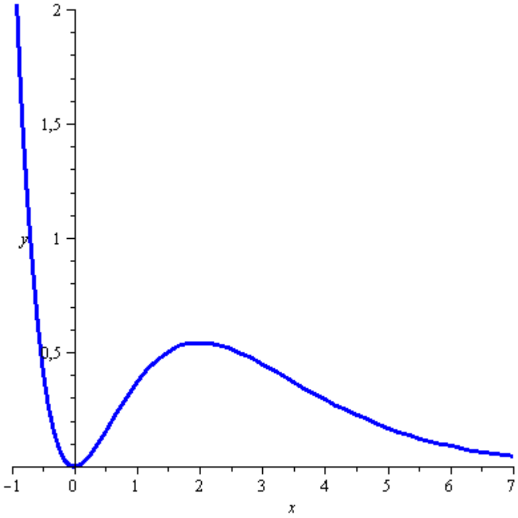
Následující pojmy budou přesněji definovány později

Buď f funkce a $M \subseteq D(f)$.

- Je-li graf funkce f pro $\forall x \in M$ nad tečnou sestrojenou v libovolném bodě $x_0 \in M$, řekneme, že f je na množině M *konvexní*.
- Je-li graf funkce f pro $\forall x \in M$ pod tečnou sestrojenou v libovolném bodě $x_0 \in M$, řekneme, že f je na množině M *konkávní*.
- Přímku nazýváme *asymptotou* grafu funkce f, jestliže se její vzdálenost od grafu funkce s rostoucí souřadnicí neustále zmenšuje.

Příklad

Popište zobrazenou funkci pomocí dnes zmíněných pojmů.

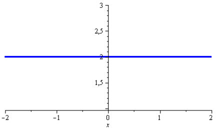


Definice (Polynom)

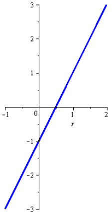
Funkci

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

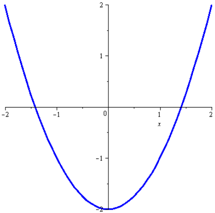
kde $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ nazýváme *polynom stupně n*. Čísla $a_0, \ldots, a_n$ nazýváme koeficienty polynomu P. Koeficient a_n nazýváme vedoucí koeficient, koeficient a_0 nazýváme absolutní člen. Je-li $a_n = 1$ říkáme, že polynom P je normovaný.



Obr.: $P(x) = 2$.



Obr.: $P(x) = 2x - 1$.



Obr.: $P(x) = x^2 - 2$.

Příklad (Operace s polynomy)

- Sčítání a násobení konstantou

$$\begin{aligned}&(3x^2 - 2x + 4) - 2(x^3 + x^2 + 2x - 1)\\&= 3x^2 - 2x + 4 - 2x^3 - 2x^2 - 4x + 2\\&= -2x^3 + x^2 - 6x + 6\end{aligned}$$

- Násobení

$$\begin{aligned}&(2x^2 - 3)(x^3 + 2x + 3)\\&= 2x^2(x^3 + 2x + 3) - 3(x^3 + 2x + 3)\\&= 2x^5 + 4x^3 + 6x^2 - 3x^3 - 6x - 9\\&= 2x^5 + x^3 + 6x^2 - 6x - 9\end{aligned}$$

Příklad (Operace s polynomy)

- Dělení

$$
\begin{aligned}
&(4x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 7) : (x^2 + 2) = 4x^2 - x - 7 + \tfrac{-x+21}{x^2+2} \\
-&\underline{(4x^4 + 8x^2)} \\
&0 - x^3 - 7x^2 - 3x + 7 \\
-&\underline{(-x^3 - 2x)} \\
&0 - 7x^2 - x + 7 \\
-&\underline{(-7x^2 - 14)} \\
&0 - x + 21
\end{aligned}
$$

Definice (Kořen polynomu)

Číslo $x_0 \in \mathbb{C}$, pro které platí $P(x_0) = 0$ nazýváme kořen polynomu P.

Věta

Je-li číslo $x_0 \in \mathbb{C}$ kořen polynomu P, pak existuje polynom $Q(x)$ takový, že

$$P(x) = (x - x_0)Q(x).$$

Definice (Kořenový činitel a násobný kořen)

Je-li číslo $x_0 \in \mathbb{C}$ kořen polynomu P, nazýváme lineární polynom $x - x_0$ *kořenový činitel* příslušný ke kořenu x_0. Číslo x_0 je k-násobným kořenem polynomu P, jestliže existuje polynom $G(x)$ takový, že

$$P(x) = (x - x_0)^k G(x), \quad G(x_0) \neq 0.$$

Věta (Základní věta algebry)

Polynom stupně n má právě n komplexních kořenů.

Poznámka

- Je-li komplexní číslo $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ kořenem polynomu P, pak je jeho kořenem i číslo komplexně sdružené $a - bi$.
- Počet reálných kořenů polynomu stupně n je buď n, nebo o sudý počet menší.
- Polynom lichého stupně má aspoň jeden reálný kořen.
- Polynomy jsou jediná kapitola, ve které budeme pracovat s komplexními čísly.

Věta (Rozklad na součin kořenových činitelů)

Každý polynom je v reálném oboru možné zapsat jako součin vedoucího koeficientu, kořenových činitelů a kvadratických polynomů s komplexními kořeny .

Věta (Celočíselné kořeny)

Nechť P je polynom s celočíselnými koeficienty. Pak jsou všechny jeho celočíselné kořeny dělitelé jeho absolutního člene.

Příklad

$$P(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18, \quad \text{tedy } a_0 = -18.$$

Všechny celočíselné kořeny jsou tedy mezi děliteli čísla -18:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18.$$

Skutečně

$$P(x) = (x-1)(x+2)(x-3)^2.$$

Hornerovo schéma je algoritmus používaný při rozkladu polynomu na součin kořenových činitelů.

Věta

Nechť jsou dány polynomy

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Jestliže existují $\alpha, b_{-1} \in \mathbb{R}$ *takové, že*

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) + b_{-1},$$

pak

$$b_{n-1} = a_n, \qquad b_{k-1} = \alpha b_k + a_k, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Poznámka

$P(\alpha) = b_{-1}$, tedy je-li $b_{-1} = 0$, pak je α kořenem polynomu P.

Postup

Koeficienty polynomu $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ spolu s číslem α sepíšeme do tabulky

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_1	a_0
α	b_{n-1}	b_{n-2}	$\cdots$	b_0	b_{-1}

A dopočítáme čísla $b_{n-1}, \dots, b_{-1}$:

$$b_{n-1} = a_n, \qquad b_{k-1} = \alpha b_k + a_k, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Tím získáme polynom $Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$ a číslo b_{-1} takové, že platí

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) + b_{-1}.$$

Příklad

Rozložte polynom $P(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18$ na součin kořenových činitelů.

Celočíselné kořeny jsou mezi čísly $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$.

	1	-5	1	21	-18
1	1	-4	-3	18	‖0
1	1	-3	-6	12	–
-1	1	-5	2	16	–
2	1	-2	-7	4	–
-2	1	-6	9	‖0	–
⋮	⋮	⋮	⋮	–	–

- ✓ Našli jsme kořeny $1, -2$.
- ✓ $Q(x) = x^2 - 6x + 9$
- ✓ $P(x) = (x-1)(x+2)Q(x)$

Příklad

Protože $Q(x)$ je kvadratický polynom, není nutné dál pokračovat v Hornerově schématu. Zbývající kořeny dopočítáme pomocí diskriminantu.

$$Q(x) = x^2 - 6x + 9 \quad \Rightarrow \quad D = 36 - 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{6 \pm 0}{2} = 3$$

Tedy polynom P má dva jednoduché kořeny $1, -2$ a jeden dvojnásobný kořen 3.Odtud

$$P(x) = (x-1)(x+2)(x-3)^2.$$

Definice

Nechť je $P_n(x)$ polynom stupně n a $Q_m(x)$ nenulový polynom stupně m (tj. $Q_m(x) \not\equiv 0$) a nechť tyto polynomy nemají společné kořeny. Funkci tvaru

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

nazýváme racionální lomená funkce.Navíc funkci $R(x)$ označujeme jako

- ryze lomenou, jestliže $n < m$,
- neryze lomenou, jestliže $n \geq m$.

Věta

Každou neryze lomenou funkci je možné (pomocí dělení polynomů) vyjádřit jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce.

Lineární polynom $P(x) = ax + b$

- Grafem je přímka ($y = ax + b$).
- Pro zakreslení určíme dva body, které ji jednoznačně určují.
- Koeficient a určuje rychlost růstu (sklon) přímky.
- Pokud je $a = 0$, jedná se o polynom stupně nula a grafem je vodorovná přímka (konstantní funkce).
- $a > 0$ znamená růst, $a < 0$ klesání.
- Koeficient b určuje „odskok“ od počátku ($b > 0$ nahoru, $b < 0$ dolů).
- Předpisu $y = ax + b$ říkáme směrnicový (a je směrnice).
- Převedením všeho na jednu stranu a případným přenásobením rovnice získáme obecný tvar $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$.
- Další možností zápisu je parametrický tvar $x = u_1 + v_1 p, y = u_2 + v_2 p$, kde $[u_1, u_2]$ je nějaký bod přímky, (v_1, v_2) je vektor směru přímky a $p \in \mathbb{R}$ je parametr.

Příklad

Jsou dány dva body $[1, 2], [5, 3]$. Najděte směrnicový, obecný a parametrický tvar přímky, která jimi prochází.

Začneme směrnicovým tvarem $y = ax + b$. Dosadíme do něj oba body, což vede na soustavu dvou rovnic o dvou neznámých $2 = a + b, 3 = 5a + b$. Neznámé a, b vypočítáme libovolným způsobem a zjistíme, že $a = \frac{1}{4}, b = \frac{7}{4}$. Směrnicový tvar je tedy $y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$.

Obecný tvar obdržíme přímo ze směrnicového jeho přenásobením číslem 4 $(4y = 1x + 7)$ a úpravou na $x - 4y + 7 = 0$.

Pro parametrický tvar potřebujeme bod, použijme $[u_1, u_2] = [1, 2]$ a směrový vektor přímky. Ten získáme odečtením zadaných bodů

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Výsledný tvar je tedy

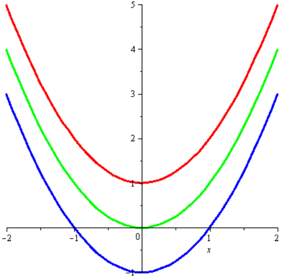
$$\begin{aligned} x &= 1 + 4p, \\ y &= 2 + 1p, p \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Všimněme si, že pro $p = 0$ dostaneme bod $[1, 2]$ a pro $p = 1$ bod $[5, 3]$. Pokud tedy omezíme parametr p jen na interval od 0 do 1, popisujeme tím úsečku mezi zadanými body.

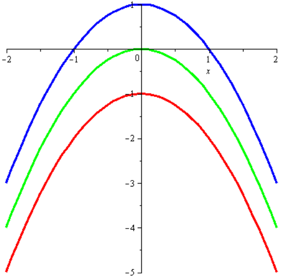
Kvadratický polynom $P(x) = ax^2 + bx + c$

- $D = b^2 - 4ac$,
- $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$,
- $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

- $D > 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \neq x_2, \quad x_{1,2} \in \mathbb{R}$,
- $D = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2, \quad x_{1,2} \in \mathbb{R}$,
- $D < 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \bar{x}_2, \quad x_{1,2} \in \mathbb{C}$.



Obr.: $P(x) = ax^2 + bx + c,\ a > 0$.

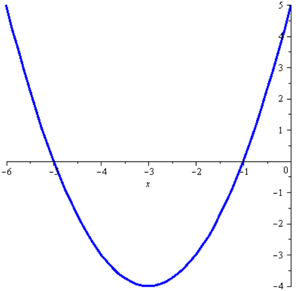


Obr.: $P(x) = ax^2 + bx + c,\ a < 0$.

Doplnění na čtverec

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{c}{a}), \qquad x^2 + px + q = (x + \tfrac{p}{2})^2 - \tfrac{p^2}{4} + q.$$

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 6x + 5, \\ y &= (x+3)^2 - 9 + 5, \\ y &= (x+3)^2 - 4, \\ y + 4 &= (x+3)^2. \end{aligned}$$



Tato parabola má vrchol v bodě $[-3, -4]$ a je otevřena směrem nahoru.

Příklad

Určete definiční obor dané funkce.

$$f(x) = \sqrt{1-x} + \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} - \ln x.$$

Řešení:

$$D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, 1], \qquad D(g) = (0, 1).$$

Příklad

Najděte průsečíky grafu funkce f se souřadnými osami.

$$f(x) = \frac{(x-3)(x+5)}{x-1}.$$

Řešení:

- $f \cap x$: $[3, 0], [-5, 0]$,
- $f \cap y$: $[0, 15]$.

Příklad

Zjistěte, pro která x je daná funkce nezáporná.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{1 - 3x}.$$

Řešení:

$$x \in (-\infty, -1] \cup (\tfrac{1}{3}, 3].$$

Příklad

Rozhodněte, zda je daná funkce sudá, nebo lichá.

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2}{x^3}, \quad g(x) = \cos x - \sin x^2 - 2\sin^2 x,$$

$$h_1(x) = x^3 + 2x^2 - x + 4, \quad h_2(x) = \ln(x - 3).$$

Řešení: Funkce f je lichá, g sudá a funkce h_1 a h_2 nejsou ani liché, ani sudé.

Příklad

Rozhodněte, zda je daná RLF ryze lomená, či nikoli. Pokud není, převeďte ji na součet polynomu a ryze lomené RLF.

$$R(x) = \frac{2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + x - 5}{3x^3 - 2x + 1}.$$

Řešení:

$$R(x) = \frac{2}{3}x + 1 + \frac{-8x^2 + 7x - 18}{3(3x^3 - 2x + 1)}.$$

- Lineární kombinace polynomů. ⊛

```
4(2x^3-x^2+5x+7)-5(x^4+3x^3-6x^2-x+15)
```

- Násobení polynomů. ⊛

```
expand (x-3)(x+2)^2(x^2-x+1)
```

- Dělení polynomů. ⊛

```
quotient and remainder of (x^5+3x^4-2x^3-5x^2+4x-1)/(2x^2+x-3)
```

- Rozklad na součin. ⊛

```
factor x^5-8x^3-3x^2+4x-12
```

- Dosazení do polynomu. ⊛

```
{x^4+3x^3-6x^2-x+15, x=2}
```

- Kořeny polynomu. ⊛ ⊛

```
roots of x^5+4x^4+x^3-2x^2-12x-72
solve x^5+4x^4+x^3-2x^2-12x-72=0
```

- Rovnice. ⊛

```
solve x^4-3x^4+2(x^3-x+1)=5(x-4)(x^2-2)
```

- Nerovnice. ⊛

```
solve (x^2+2x-3)/(x+1)>=0
```