# 5. Spřátelená čísla

S dokonalými čísly úzce souvisí tématika tzv. **spřátelených** čísel. Proto se o nich stručně zmíníme.

Přirozená čísla *a,b* se nazývají *spřátelená*, jestliže součet vlastních dělitelů každého z nich je roven druhému z těchto čísel. První a nejmenší dvojici spřátelených čísel tvoří čísla 220 a 284. Skutečně,

$$220 = 2^2 \times 5 \times 11, \quad 284 = 2^2 \times 71.$$

Vlastní dělitelé čísla 220 jsou tedy

$$1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 \text{ a } 110\ ,$$

vlastní dělitelé čísla 284 jsou

$$1, 2, 4, 71 \text{ a } 142$$

a přitom platí

$$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284,$$
$$1+2+4+71+142=220.$$

Podle již zmíněného IAMBLICHA znal tuto dvojici spřátelených čísel již PÝTHAGORÁS. Ani IAMBLICHOS však ještě nevěděl, zda existují nějaká jiná spřátelená čísla a neznal ani žádnou metodu, jak je případně hledat. Zásadní krok v tomto směru učinil až arabský matematik, fyzik a astronom THABIT IBN QURRA (asi 836 -- 901), který podrobně studoval a popsal Eukleidovy poznatky o dokonalých číslech a v této souvislosti odhalil následující pozoruhodný výsledek:

*Jsou-li a,b,c prvočísla a pro vhodné n >1 platí*

$$a = 3 \times 2^n-1, \quad b = 3 \times 2^{n-1}-1, \quad c = 9 \times 2^{2n-1}-1,$$

*pak jsou čísla*

$$2^n \times a \times b \quad \text{a} \quad 2^n \times c$$

*spřátelená.*

Přes důmyslnost Thabitovy formule však není nalezení dalších dvojic podle ní vůbec jednoduché, neboť to vyžaduje současné nalezení tří prvočísel předepsaného tvaru. Thabit sám ostatně žádnou další dvojici nenalezl. To se podařilo až jinému arabskému matematikovi, IBN AL- BANNOVI, který objevil dvojici 17 296 a 18 416. Tato čísla odpovídají Thabitově formuli pro n=4.

Thabitovy výsledky i uvedená druhá dvojice spřátelených čísel však upadly v zapomenutí. Jejich znovuobjevení čekalo téměř 800 let na geniálního PIERRA FERMATA (1601 -- 1665), o němž budeme blíže hovořit v dalším odstavci.

Ten o této dvojici v roce 1636 napsal MARINU MERSENNOVI (1588 -- 1648), o němž se ještě zmíníme později.

O pouhé dva roky později nalezl RENÉ DESCARTES (1595 --1650) třetí dvojici: 9 363 584 a 9 437 056. Z Thabitovy formule ji obdržíme pro n = 7.

Thabitově formuli přitom **nevyhovují všechny dvojice** spřátelených čísel. Dodnes není známo, kolik spřátelených dvojic ji splňuje, víme však, že pro n < 20 000 jsou to právě jen uvedené dvojice pro n = 2, 4; a 7.

Problematice spřátelených čísel se intenzívně věnoval již několikrát zmiňovaný L. EULER. Ten nalezl více než 60 dvojic těchto čísel a jeho teoretické výsledky dodnes tvoří základ dalších zkoumání. V průběhu 17. a 18. století bylo postupně nalezeno mnoho dalších dvojic spřátelených čísel. Vesměs však tato čísla byla velká -- řádově v milionech či miliardách. Proto bylo pro atematickou veřejnost značným překvapením, když šestnáctiletý italský školák NICCOLÒ PAGANINI v roce 1866 nalezl dvojici překvapivě „malých“ spřátelených čísel: 1 184 a 1 210.

V současnosti jsou spřátelených dvojic známy tisíce včetně všech těch, jejichž menší člen nepřesahuje jeden milion. Na Internetu lze prakticky denně nalézt zprávu o rozšíření počtu těchto dvojic, včetně například dvojice

$$3^4 \times 5 \times 11 \times 5\,281^{19} \times 29 \times 89 \times (2 \times 1\,291 \times 5\,281^{19}-1)$$

a

$$3^4 \times 5 \times 11 \times 5\,281^{19} \times (2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 1\,291 \times 5\,281^{19}-1).$$

Každé z těchto čísel má 152 číslic.

Víme, že dvojic spřátelených čísel je nekonečně mnoho. Všechny dosud známé dvojice jsou však tvořeny soudělnými čísly a není známo, zda existuje dvojice **nesoudělných** spřátelených čísel. Víme pouze, že v kladném případě by jejich součin musel být větší než $10^{67}$.

Ve všech dosud známých dvojicích jsou obě čísla sudá nebo obě lichá. Neví se však, zda takové jsou všechny dvojice. U dvojic sudých čísel nemůže být žádný člen dělitelný 3, známé dvojice lichých čísel jsou naopak zásadně násobky 3, není však dokázáno, zda tomu tak musí být vždy. Čtenáři se tedy mohou pokusit o nalezení dvojice „sudo-lichých“ spřátelených čísel. Třeba budou mít podobné štěstí jako v minulém století N. Paganini.