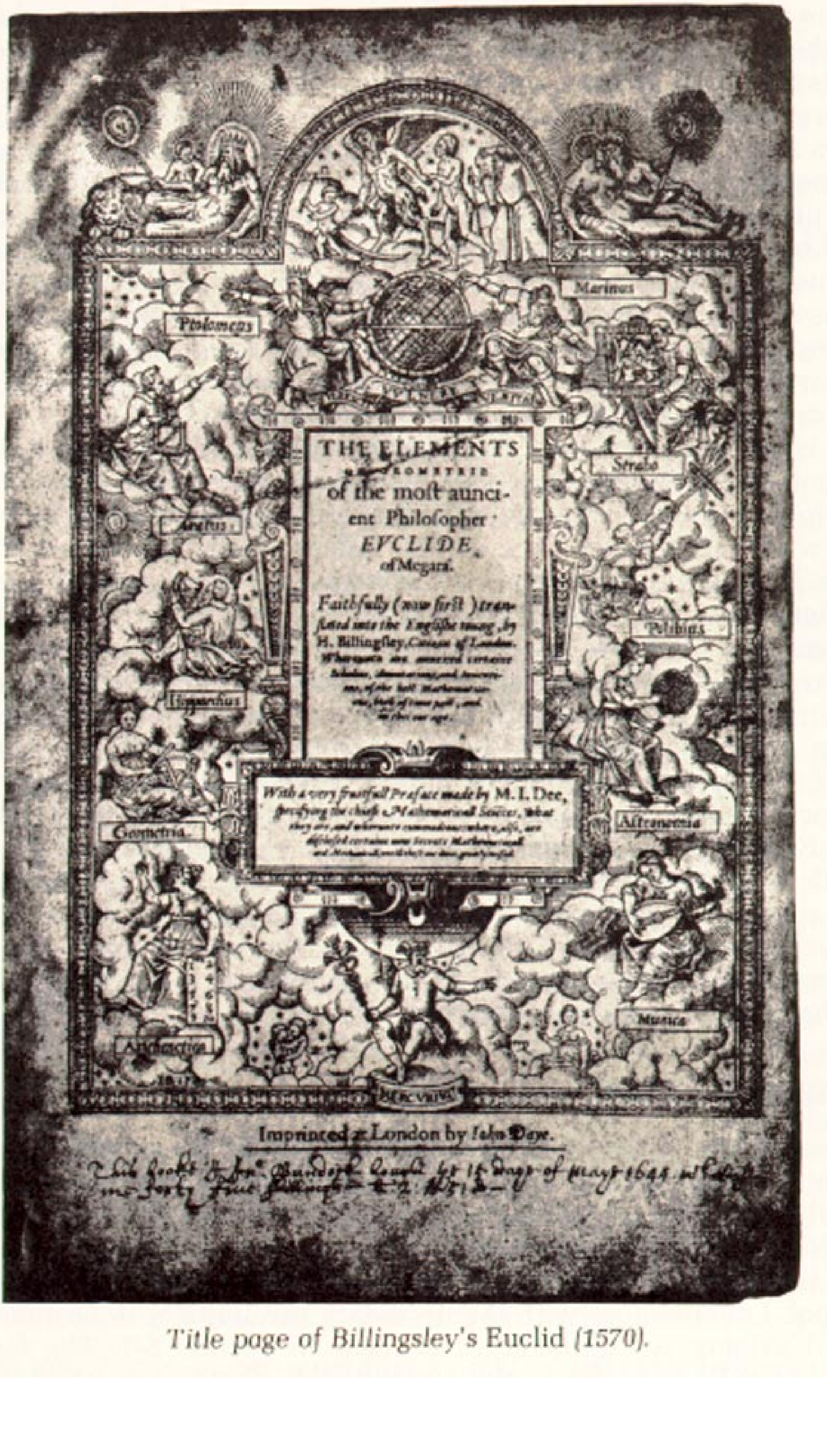
1. Kolik je všech prvočísel?

Otázka v nadpisu je samozřejmě pouze řečnická. Každý středoškolák by měl umět dokázat, že prvočísel je nekonečně mnoho. Připustíme-li totiž, že všech prvočísel je pouze konečně mnoho, můžeme je označit například p_1, $p_2, \ldots, p_n$. Číslo $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n + 1$ pak ale není dělitelné žádným z čísel p_i, $i = 1, \ldots, n$ (neboť při dělení je zbytek 1), takže je prvočíslem různým od všech p_i nebo je dělitelné některým dalším prvočíslem. Předpoklad tedy vede ke sporu, takže prvočísel je nekonečně mnoho.

Naznačený důkaz je možno nalézt již v EUKLEIDOVÝCH *Základech*.

Eukleidés

EUKLEIDÉS Z ALEXANDRIE (asi 340 - asi 278 př.Kr.) byl jedním z největších starořeckých matematiků. V knize *Základy* shrnul většinu tehdejších matematických poznatků. Význam tohoto díla přesáhl tisíciletí a dodnes je aktuální. V této souvislosti je však nutno se zmínit o jedné věci. Kdybychom četli pozorně Eukleida, povšimli bychom si, že výše uvedené tvrzení o prvočíslech formuluje takto: *Prvočísel je více než jakékoli dané množství.*


THE ELEMENTS
of the most aunci-
ent Philosopher
EVCLIDE
of Megara.

Faithfully (now first) trans-
lated into the Englishe toung, by
H. Billingsley, Citizen of London.

With a very fruitfull Preface made by M. I. Dee,

Imprinted at London by Iohn Daye.

Title page of Billingsley's Euclid (1570).

Nebudeme zde podrobně rozvádět důvody, proč se u EUKLEIDA (a ani u dalších matematiků té doby) nenajde formulace, že nějaký systém je tvořen **nekonečně mnoha** prvky. To souvisí s chápáním nekonečna, které bylo nejen v matematice až do konce minulého století zcela odlišné od našeho dnešního přístupu. Teprve s vybudováním **teorie množin** v závěru 19. století se v matematice začalo pracovat s tzv. *aktuálním nekonečnem*, začaly se zkoumat nekonečné množiny chápané jako jeden -- definitivně vytvořený -- celek.

A tak dnes považujeme tvrzení typu, že *přirozených čísel je nekonečně mnoho* za banální a samozřejmé.

Přestože nikdy nevypíšeme všechna přirozená čísla, přestože nikdy množinu všech přirozených čísel nevytvoříme, pracujeme běžně s množinou všech přirozených čísel a s podobnými matematickým objekty. Své zkušenosti s chováním „malých“ přirozených čísel bez zábran přenášíme na celou nekonečnou množinu a tuto představu vštěpujeme od školních let dětem. Tak se nám během několika málo minulých desetiletí podařilo překonat „strach z nekonečna“, typický pro myšlení od antických dob.

Naznačme si však alespoň ve stručnosti, jakého stupně abstrakce se odvažujeme, když z faktu, že za každým přirozeným n následuje číslo $n + 1$ a tedy přirozených čísel je více než jakýkoliv předem daný počet (řečeno s EUKLEIDEM), přejdeme k tomu, že zkoumáme celou množinu

$$1, 2, 3, \ldots ,10,\ldots,100,\ldots,1\,000\,000,\ldots,10^{7\,000\,000} ,\ldots$$

v níž platí, že když napíšeme jakkoliv velké číslo, je úsek od 1 k tomuto číslu pouze **konečný** a to podstatné, tj. **nekonečně mnoho** přirozených čísel za napsaným číslem teprve následuje.

Protože se v dalším textu budou různá „velká“ čísla často vyskytovat, uvědomme si, o čem to vlastně bez „obav a strachu“ hovoříme.

Uvažujme knihu standardní velikosti, která má na stránce cca 50 řádků a na řádku je cca 70 znaků, takže průměrná stránka obsahuje přibližně 3 500 symbolů. Protože -- snad až na naprosté výjimky -- mají všechny knihy maximálně 10 000 stránek, obsahují maximálně 35 miliónů znaků. Uvědomíme-li si, že jakýkoliv text (alespoň ve „standardních“ evropských jazycích) dnes napíšeme pomocí počítače, jehož klávesnice má přibližně 100 kláves, zjistíme snadno, že všech „textů“ udané délky (a samozřejmě i všech kratších -- stačí je přece doplnit mezerníkem) je maximálně $10^{70\,000\,000}$.

Proč jsme slovo „texty“ dali do uvozovek? Většina těchto „textů“ totiž budou jen chaotické posloupnosti symbolů. Přesto však mezi nimi budou prakticky všechna smysluplná díla, která kdy kdo napsal a v budoucnosti napíše (a navíc každé z nich v překladu do všech evropských jazyků). Budou zde všechny vaše dopisy, i ty nikdy nenapsané, a všechny písemky, které si kdy vymysleli a v budoucnosti učitelé na své žáky vymyslí, všechny vědecké práce, které kdy lid napsali a napíší. A to všechno lze „vyrobit“ v **konečném** čase.

Kdybychom -- obrazně řečeno -- posadili k počítači šimpanze, který bude namátkově tisknout klávesy na počítači rychlostí 10 úhozů za sekundu, pak by (kdyby pracoval bez přestávky) všechny popisované záznamy vyrobil za $10^{7\,000\,000}$ sekund, což je číslo, které jsme před chvílí ve výčtu přirozených čísel napsali, aniž pravděpodobně vzbudilo čtenářovu zvláštní pozornost.

Abychom si uvědomili, jakou informaci vlastně poslední věta sděluje, zamysleme se nad tím, jak dlouho by ona hypotetická opice musela ve skutečnosti pracovat; pak si ihned uvědomíme, že se velikost udaného čísla vymyká naší veškeré představivosti. Stačí snad, abychom si připomenuli, že od tzv. „velkého třesku“, při němž vznikl náš vesmír, uplynulo cca 15 miliard let, což je méně než 10^{17} sekund. Náš fiktivní šimpanz by ovšem neměl málo jen času, ale i materiálu k uskutečnění popsaného procesu. Počet všech atomů v našem vesmíru je totiž odhadován číslem 10^{100}. Je nám nyní jasná velikost čísla $10^{7\,000\,000}$? A snad budeme také trochu méně sebevědomě přistupovat k faktu, že teprve **za** tímto číslem následuje podstatná část množiny **N** všech přirozených čísel, o níž tak suverénně v hodinách matematiky hovoříme.