Příklady pro 9. cvičení a úlohu

(1) Vypočtěte tenzorový součin různých matic.

(2) Nechť stopa čtverové matice je označena $\operatorname{tr} A$. Vypočtěte $\operatorname{tr} A \otimes B$ pomocí $\operatorname{tr} A$ a $\operatorname{tr} B$.

(3) Vypočtěte $\det A \otimes B$ pomocí $\det A$ a $\det B$. (Návod: počítejte ve vhodné bázi.)

(4) Nechť $\varphi, \psi : U \to U$ jsou linearni endomorfismy, kterým odpovídají tenzory $t, s \in T^1_1(U)$. Pomocí tenzorového součinu a kontrakce popište tenzor odpovídající složenému zobrazení $\varphi \circ \psi$.

(5) Vypočtěte symetrizaci tenzorů:
(a) $u_1 + u_2 + 3u_3 \in T^1_0(U)$,
(b) $u_1 \otimes u_2 + u_1 \otimes u_3$,
(c) $(u_1 \otimes u_2 + u_2 \otimes u_4) \otimes (u_2 + u_3)$.

(6) Rozhodněte, zda pro symetrizaci S tenzorů platí $S(t \otimes s) = S(t) \otimes S(s)$.

(7) Dokažte, že $\dim S^q(U) = \binom{n+q-1}{q}$ pro $\dim U = n$.

(8) Dokažte, že $S^q(U_1 \oplus U_2)$ je izomorfní jako vektorový prostor s

$$\bigoplus_{i=1}^{q} S^i(U_1) \otimes S^{q-1}(U_2).$$

(9) Z předchozích dvou úloh odvoďte identitu pro

$$\binom{n+m+q-1}{q} = \dots.$$

(10) Nechť na U je dán skalární součin s maticí

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Proveďte snížení a zvýšení indexů tenzorů
(a) $(f^1 + f^2) \otimes (u_3 + u_4) - (f^1 + f^3) \otimes u_3$,
(b) $t^i_j = \delta_{2i} + \delta 4j$,
(c) $t^i_j = i\delta_{ij}$,
kde $\delta_{ij} = 1$ nebo 0 v závislosti na tom, zda $i = j$ nebo $i \neq j$.