Příklady pro 3. cvičení a úlohu

(1) Ukažte, že každý k-rozměrný afinní podprostor v $\mathcal{A}(V_n)$ lze rozšířit na k-rozměrný projektivní podprostor v $\overline{\mathcal{A}}$.

(2) Ukažte, že každé dvě různé přímky v $\mathcal{A}(V_2)$ se protínají jako přímky v $\overline{\mathcal{A}}(V_2)$ právě v jednom bodě. Jsou-li rovnoběžné v $\mathcal{A}(V_2)$, je jejich průsečík nevlastní bod.

(3) V $\overline{A}(\mathbb{R}^2)$ najděte kolineaci Φ, která zobrazuje přímky

$$p : x_1 + x_2 = 1 \quad \text{na} \quad p' : x_1 = 1$$

$$q : x_1 + x_2 = 0 \quad \text{na} \quad q' : x_2 = 0.$$

Návod: Napište rovnice přímek v homogenních souřadnicích a uvědomte si, že průsečík přímek se musí zobrazit opět na průsečík.

(4) Ukažte, že neexistuje afinní zobrazení $\Phi : \mathcal{A}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$, které by v předchozí úloze převádělo p na p' a q na q'.

(5) Dokažte, že každé afinní zobrazení převádí rovnoběžné afinní podprostory na rovnoběžné afinní podprostory. (Aplikujte na řešení předchozí úlohy.)

(6) Určete průsečík nadkvadriky Q s afinním podprostorem B

(a) Q zadána v afinním prostoru rovnicí

$$5x_1^2 + 9x_2^2 + 9x_3^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3 + 12x_1 - 36x_3 = 0,$$

B přímka zadána rovností

$$\frac{1}{3}x_1 = \frac{1}{2}x_2 = x_3 - 4.$$

(b) $Q: \quad x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - x_2x_3 + 4x_1x_3 + 3x_1 - 5x_3 = 0$, $B: \quad \frac{1}{2}(x_1+3) = x_2, \quad x_3 = 0$.

(c) $Q: \quad x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1x_3 - x_1 + 5x_2x_3 + 3x_2 - x_3 = 0$, $B: \quad x_2 = 0$.

(d) $Q: \quad 3x_2^2 + 4x_3^2 + 24x_1 + 12x_2 - 72x_3 + 360 = 0$, $B: \quad x_1 - x_2 + x_3 = 1$.

(7) Určete projektivní typ kvadriky Q:

(a) $Q: \quad x_1^2 - 4x_1x_2 - 2x_2^2 - 8x_1x_3 + 6x_1 - 5 = 0$

(b) $Q: \quad x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 - 6x_3 + 3 = 0$

(c) $Q: \quad x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1 + 3x_2^2 + 8x_2x_3 + 8x_3^2 + 8x_3 + 6 = 0$

(8) Určete poláru k bodu X vzhledem k nadkvadrice Q,

(a) $Q: \quad 2x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 - 15x_1 + 3x_2 - 18 = 0, \quad X = [2; -1]$

(b) X nevlastní bod určený směrem $(-1, 1, 0)$,

$$Q: \quad 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2 - 32x_1 - 56x_2 + 80 = 0.$$

(c) $Q : 2x_1 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_3 + 2 = 0, \qquad X = [3; 1; -1]$

(d) $Q : 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_1 - 10x_2 - 2x_3 - 1 = 0, \qquad X = [2; -1; 3]$

(e) $Q : 2x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 + 14x_2 - 13 = 0, \qquad X = [-3; 2]$

a naopak, určete pól přímky $x_1 - 6x_2 + 8 = 0$ vzhledem ke kuželosečce

$$Q : 3x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 + 10 = 0.$$

(9) Dokažte, že pól a polární nadrovina regulární nadkvadriky se navzájem jednoznačně určují.

(10) Nechť body X a Y nejsou singulární a X leží v polární nadrovině bodu Y. Dokažte, že pak Y leží v polární nadrovině bodu X.

(11) Určete množinu všech singulárních bodů nadkvadrik z příkladu 7.

(12) Dokažte, že množina singulárních bodů nadkvadriky tvoří afinní podprostor.

(13) Určete tečnou nadrovinu nadkvadriky Q v bodě X

(a) $Q: \quad 3x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 + 6x_1 + 4x_2 - 3 = 0, \qquad X = [0;1]$

(b) $Q: \quad x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 - 12x_1 + 24x_2 + 15 = 0, \qquad X = [0;-1]$

(c) $Q: \quad x_1^2 - 2x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + 5x_2x_3 - x_1 + 3x_2 - x_3 = 0,$
$X = [1;-1;-1]$

(d) $Q: \quad 3x_1^2 + 7x_1x_2 + 5x_2^2 + 4x_1 + 5x_2 + 1 = 0, \qquad X = [0;0]$

(e) $Q: \quad 2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + 6x_2 - 3 = 0, \qquad X = [3;4]$

(14) Dokažte, že kuželosečka je jednoznačně určena pěti body v obecné poloze, které na ní leží. Kolik bodů jednoznačně určuje nadkvadriku v $\mathcal{A}_n$?

(15) Určete kolineaci, která převádí kuželosečky Q a Q' navzájem na sebe:

(a) $Q: \ x_1 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_1 - 3 = 0$ a $Q': \ -4x_1x_2 - 4x_2^2 - 2x_1 + 1 = 0$

(b) $Q: \ 4x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 - 1 = 0$ a $Q': \ 2x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_1 + 4x_2 = 0$