Lineární algebra III **A** 11.1.2006

Jméno: ....

1.	2.	3.	4.	5.	6.	Celkem

1. (6krát 1 bod) **Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků** (+1 bod za správnou odpověď, −1 bod za špatnou odpověď, 0 bez odpovědi, výsledný počet bodů je max{součet bodů, 0}):

(a) **ano** – **ne** Duální zobrazení k lineárnímu zobrazení $\varphi : U \to U$ nemusí mít stejná vlastní čísla jako φ.

(b) **ano** – **ne** Kanonický tvar matice $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda^3-\lambda \\ \lambda^6 & \lambda \end{pmatrix}$ je $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2-\lambda^6(\lambda^3-\lambda) \end{pmatrix}$.

(c) **ano** – **ne** Na $\mathbb{R}_1[x] \times \mathbb{R}_1[x]$ je zobrazení $F(ax+b, cx+d) = (a+1)(c+d)$ bilineární forma.

(d) **ano** – **ne** Hlavní čísla regulárních kvadrik jsou různá od 0.

(e) **ano** – **ne** Je-li A bod v afinním prostoru o souřadnicích $(2; 8; -3)$, pak homogenní souřadnice tohoto bodu jsou $(4; 16; -6; 1)$.

(f) **ano** – **ne** V 3-rozměrném projektivním prostoru existuje projektivní přímka a projektivní rovina, které mají prázdný průnik.

2. (6krát 2 body) **Stručně a jasně odpovězte.**

(a) V metrické klasifikaci napište kanonickou rovnici pro jednodílný hyperboloid. Kolik nejméně a kolik nejvíce může mít reálných vrcholů?

(b) $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou lineární zobrazení daná předpisem $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, $g(y_1, y_2) = y_1$. Potom $f \wedge g \in \Lambda^2(\mathbb{R}^2)^*$. Čemu se rovná $(f \wedge g)((1,2),(y_1,y_2))$?

(c) Napište kanonický tvar matice $J - \lambda E$, jestliže J je matice v Jordanově kanonickém tvaru,

$$J = \mathrm{diag}(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, 2, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, 2).$$

(d) V metrické klasifikaci napište kanonickou rovnici a jméno kvadriky, která má právě 2 reálné vrcholy.

(e) Napište příklad antisymetrické bilineární nenulové formy na $\mathbb{R}_3[x] \times \mathbb{R}_3[x]$.

(f) Je dán elipsoid a vně něj bod A. Co je množinou bodů dotyku tečných rovin vedených bodem A k danému elipsoidu? Zdůvodněte.

3. (7 bodů) **Definice a důkazy.**

(a) Je dána afinní rovina $\mathcal{A}_2$ se zaměřením V. Jak je definováno projektivní rozšíření této roviny? Doprovoďte vhodným a srozumitelným obrázkem. (2 body)

(b) Co je to antisymetrický tenzor? Jak je definována antisymetrizace tenzoru? (2 body)

(c) Napište přesné znění věty o afinní klasifikaci kuželoseček. (1 bod)

(d) Napište definici minimálního polynomu m_A matice A a z této definice dokažte: Je-li f nenulový polynom takový, že $f(A) = 0$, pak $m_A | f$. (2 body)

4. (6 bodů) Je dána kvadrika

$$x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_1 - 2x_3 + 4 = 0.$$

Najděte její hlavní čísla, hlavní směry, střed, hlavní roviny a vrcholy.

5. (4 body) Nechť V je vektorový prostor s bazí $\alpha = (e_1, e_2)$ a duální bazí (f^1, f^2). Tenzor $t \in T_2^1(V)$ má v bázi α souřadnice $t^i_{jk} = 1$. Vyjádřete jej v bázi $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ a duální bázi $(\bar{f}^1, \bar{f}^2)$, jestliže

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. (5 bodů) Pomocí úpravy charakteristické matice na kanonický tvar najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a současně najděte matici P takovou, že $J = PAP^{-1}$.