Test z lineární algebry II, A – duben 1999

1. Napište matici kvadratické formy $F(x_1, x_2, x_3) = 6x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3$ a proveďte diagonalizaci této kvadratické formy. Uveďte celý výpočet. Bázi, v níž je kvadratická forma diagonální, nehledejte. *(1+1 bod)*

2. V $\mathbb{R}^4$ najděte vzdálenost roviny $\alpha : (0, 1, 0, 0) + r(1, 2, -3, 0) + s(4, -1, 0, 3)$ od přímky $p : (-1, 1, 1, 4) + t(1, 3, -1, 3)$ a body $A \in \alpha$ a $B \in p$, v nichž se tato vzdálenost realizuje. *(1+1 bod)*

3. V $\mathbb{R}^4$ najděte odchylku roviny $\beta : (1, 9, 9, 9) + r(-2, 0, -1, 0) + s(1, 0, 3, 0)$ a přímky $q : (2, 3, 0, 4) + t(3, 3, 4, 4)$. *(2 body)*

4. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

(1+1 bod)

5. (a) Napište definici vlastního čísla lineárního operátoru. *(1 bod)*
(b) V $\mathbb{R}^2$ se skalárním součinem $\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$ najděte dva nenulové kolmé vektory. *(1 bod)*

Test z lineární algebry II, B – duben 1999

1. Napište matici kvadratické formy $F(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 - 6x_1x_3 - 2x_2x_3$ a proveďte diagonalizaci této kvadratické formy. Uveďte celý výpočet. Bázi, v níž je kvadratická forma diagonální, nehledejte. *(1+1 bod)*

2. V $\mathbb{R}^4$ najděte vzdálenost roviny $\alpha : (0, 3, 0, 4) + r(-3, 0, 2, 1) + s(1, 1, -1, 1)$ od přímky $p : (1, 4, 1, -1) + t(-1, 3, 3, 1)$ a body $A \in \alpha$ a $B \in p$, v nichž se tato vzdálenost realizuje. *(1+1 bod)*

3. V $\mathbb{R}^4$ najděte odchylku roviny $\beta : (2, 3, 0, 4) + r(0, -2, 0, -3) + s(0, 4, 0, 5)$ a přímky $q : (9, 8, 7, 6) + t(11, 8, 8, 11)$. *(2 body)*

4. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1+1 bod)

5. (a) Napište definici vlastního vektoru lineárního operátoru. *(1 bod)*
(b) V $\mathbb{R}^2$ se skalárním součinem $\langle x, y\rangle = 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$ najděte dva nenulové kolmé vektory. *(1 bod)*

Test z LA 2, 1999 – řešení skupiny A

1.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{např.} \quad F(y) = -4y_1^2 + y_2^2 + 3y_3^2$$

2. Výpočet vzdálenosti: $P = (Z(\alpha) + Z(p))^\perp = [(1,1,1,-1)]$.
Kolmá projekce vektoru $(0,1,0,0) - (-1,1,1,4) = (1,0,-1,-4)$ do P je

$$v = (1,1,1,-1).$$

$$\rho(\alpha, p) = \|v\| = 2$$

Body, nichž se vzdálenost realizuje jsou $A = (-1,-1,3,0)$, $B = (-2,-2,2,1)$, $r = -1$, $s = 0$, $t = -1$.

3. Výpočet úhlu φ: Projekce vektoru $(3,4,4,3)$ do $Z(\beta)$ je

$$u = (3,0,4,0).$$

$$\cos\varphi = \frac{\|(3,0,4,0)\|}{\|(3,4,4,3)\|} = \sqrt{2}/2$$

Tedy $\varphi = \pi/4$.

4. $\lambda_1 = -1$, vlastní vektor $(1,1,1)^T$
$\lambda_{2,3} = 2$, vlastní vektor $(1,0,1)^T$.

5a. Prvek pole λ takový, že existuje nenulový vektor v s vlastností $\varphi(v) = \lambda v$.
5b. Např. $x = (1,0)$, $y = (1,-2)$.

Test z LA 2, 1999 – řešení skupiny B

1.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{např.} \quad F(y) = 4y_1^2 - y_2^2 - 3y_3^2$$

2. Výpočet vzdálenosti: $P = (Z(\alpha) + Z(p))^\perp = [(1,-1,1,1)]$.
Kolmá projekce vektoru $(0,3,0,4) - (1,4,1,-1) = (-1,-1,-1,5)$ do P je

$$v = (1,1,1,-1).$$

$$\rho(\alpha, p) = \|v\| = 2$$

Body, nichž se vzdálenost realizuje jsou $A = (3,0,-1,-1)$, $B = (2,1,-2,-2)$, $r = -2$, $s = -3$, $t = -1$.

3. Výpočet úhlu φ: Projekce vektoru $(11,8,8,11)$ do $Z(\beta)$ je

$$u = (11,0,8,0).$$

$$\cos\varphi = \frac{\|(11,0,8,0)\|}{\|(11,8,8,11)\|} = \sqrt{2}/2$$

Tedy $\varphi = \pi/4$.

4. $\lambda_1 = 1$, vlastní vektor $(-1,1,0)^T$
$\lambda_{2,3} = 3$, vlastní vektor $(1,0,-1)^T$.

5a. Nenulový vektor v takový, že existuje prvek pole λ s vlastností $\varphi(v) = \lambda v$.
5b. Např. $x = (1,0)$, $y = (1,3)$.