Test z lineární algebry II, A

1. Funkci $F(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1y_2 - 2x_2y_1$ můžeme chápat dvojím způsobem: (1) jako bilineární formu $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s první proměnnou (x_1, x_2) a druhou proměnnou (y_1, y_2), (2) jako kvadratickou formu $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ v proměnné (x_1, x_2, y_1, y_2).
a) Napište matici F jako bilineární formy ve standardní bázi $\mathbb{R}^2$.
b) Napište matici F jako kvadratické formy ve standardní bázi $\mathbb{R}^4$.
c) Určete signaturu (s_+, s_-, s_0) kvadratické formy F.

(1+1+1 bod)

2. V $\mathbb{R}^4$ najděte vzdálenost roviny $\alpha : (1, 2, 0, -1) + s(1, 0, 3, 0) + t(2, 0, 1, 0)$ od přímky $p : (4, 3, 4, 6) + r(3, 4, 4, 3)$ a body $A \in \alpha$ a $B \in p$, v nichž se tato vzdálenost realizuje. Dále určete odchylku zaměření této roviny a přímky.

(1+1+1 bod)

3. Nechť lineární operátor $\varphi : U \to U$ má vlastní čísla -1 a 2 s příslušnými vlastními vektory u_1 a u_2. Dokažte, že u_1, u_2 jsou lineárně nezávislé.

(2 body)

4. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(2 body)

Test z lineární algebry II, B

1. Funkci $F(x_1, x_2, y_1, y_2) = 2x_1y_2 - x_2y_1$ můžeme chápat dvojím způsobem: (1) jako bilineární formu $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s první proměnnou (x_1, x_2) a druhou proměnnou (y_1, y_2), (2) jako kvadratickou formu $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ v proměnné (x_1, x_2, y_1, y_2).
a) Napište matici F jako bilineární formy ve standardní bázi $\mathbb{R}^2$.
b) Napište matici F jako kvadratické formy ve standardní bázi $\mathbb{R}^4$.
c) Určete signaturu (s_+, s_-, s_0) kvadratické formy F.

(1+1+1 bod)

2. V $\mathbb{R}^4$ najděte vzdálenost roviny $\alpha : (2, 3, 5, 7) + s(0, 2, 0, 3) + t(0, 4, 0, 5)$ od přímky $p : (0, 9, 19, 15) + r(6, 6, 8, 8)$ a body $A \in \alpha$ a $B \in p$, v nichž se tato vzdálenost realizuje. Dále určete odchylku zaměření této roviny a přímky.

(1+1+1 bod)

3. Nechť lineární operátor $\varphi : U \to U$ má vlastní čísla -2 a 1 s příslušnými vlastními vektory u_1 a u_2. Dokažte, že u_1, u_2 jsou lineárně nezávislé.

(2 body)

4. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2 body)