TEST z LA I, 2000, skupina A **Jméno a příjmení:**

Část společná předmětům M003 a M503

---

1. Zjistěte, pro které hodnoty parametrů a a b má soustava v $\mathbb{R}$ nekonečně mnoho řešení.

$$\begin{aligned} x + ay &= b \\ ax + y &= b + 2 \end{aligned}$$

Odpověď: $a = -1$, $b = -1$ *(2 body)*

---

2. V komplexních číslech najděte řešení následující rovnice ve tvaru $x = a + ib$.

$$(1 - 2i)x = 6 - 2i$$

Odpověď: $x = 2 + 2i$ *(1 bod)*

---

3. V $\mathbb{Z}_7$ najděte všechna řešení rovnice

$$x^3 = 1.$$

Odpověď: $x = 1, 2, 4$ *(1 bod)*

---

4. V R^4 najděte bázi průniku podprostorů U a V, kde

$$\begin{aligned} U &= [(1, 4, 4, 5)^T, (0, 1, 3, 4)^T] \\ V &= [(-1, 5, 2, 1)^T, (-2, 2, 1, 0)^T] \end{aligned}$$

Odpověď: $(1, 3, 1, 1)^T = u_1 - u_2 = v_1 - v_2$ *(2 body)*

---

5. Najděte inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2 body)

---

6. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ polynomů stupně maximálně 2 najděte souřadnice vektoru $4 - 4x - 2x^2$ v bázi $\alpha = (1 - x^2, 1 + x, 1 - x)$.

Odpověď: $(4 - 4x - 2x^2)_\alpha = (2, -1, 3)^T$ *(2 body)*

Část pouze pro předmět M003

---

1. Napište definici lineárního obalu množiny vektorů $v_1, v_2, \ldots, v_k$ ve vektorovém prostoru U nad polem $\mathbb{K}$. *(2 body)*

2. Dokažte, že součet podprostorů V_1 a V_2 vektorového prostoru U nad polem $\mathbb{K}$ je vektorový podprostor. *(2 body)*

3. Z definice lineární nezávislosti dokažte: Jsou-li vektory u_1, u_2, u_3, u_4 lineárně nezávislé ve vektorovém prostoru V, pak $u_1, u_2, u_3 - u_4, u_3 + u_4$ jsou rovněž lineárně nezávislé. *(2 body)*

4. Najděte dvě reálné matice A, B tvaru 2×2 tak, že $A_{ij} \neq 0$, $B_{ij} \neq 0$ pro všechna $i, j = 1, 2$ a $A \cdot B = 0$.

Odpověď: Např. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ *(2 body)*

5. Je dána množina $M = \mathbb{R}^2$ s operacemi sčítání $(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$ a obvyklým násobením reálným číslem $a \odot (x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$. Napište jednu vlastnost z definice vektorového prostoru nad polem $\mathbb{R}$, kterou $(M, \oplus, \odot)$ nesplňuje.

Odpověď: Např. $a \odot ((x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2)) = (a \odot (x_1, x_2)) \oplus (a \odot (y_1, y_2))$. Dále operace $\oplus$ má neutrální prvek $(1, 1)$, ale k prvkům $(x, 0)$ a $(0, y)$ neexistuje inverzní prvek. *(2 body)*

TEST z LA I, 2000, skupina B **Jméno a příjmení:**

Část společná předmětům M003 a M503

---

1. Zjistěte, pro které hodnoty parametrů a a b má soustava v $\mathbb{R}$ nekonečně mnoho řešení.

$$\begin{aligned} x - ay &= b \\ -ax + y &= b + 6 \end{aligned}$$

Odpověď: $a = 1$, $b = -3$ *(2 body)*

---

2. V komplexních číslech najděte řešení následující rovnice ve tvaru $x = a + ib$.

$$(2 + i)x = 7 + i$$

Odpověď: $x = 3 - i$ *(1 bod)*

---

3. V $\mathbb{Z}_7$ najděte všechna řešení rovnice

$$x^3 = 6.$$

Odpověď: $x = 3, 5, 6$ *(1 bod)*

---

4. V R^4 najděte bázi průniku podprostorů U a V, kde

$$\begin{aligned} U &= [(-1, -3, 2, -1)^T, (1, 3, 3, 1)^T] \\ V &= [(1, 1, 3, 1)^T, (1, 5, -2, 1)^T] \end{aligned}$$

Odpověď: $(2, 6, 1, 2)^T = u_2 - u_1 = v_1 + v_2$ *(2 body)*

---

5. Najděte inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2 body)

---

6. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ polynomů stupně maximálně 2 najděte souřadnice vektoru $6 + x - 3x^2$ v bázi $\alpha = (1 - x, 1 + x, 1 - x^2)$.

Odpověď: $(6 + x - 3x^2)_\alpha = (1, 2, 3)^T$ *(2 body)*

Část pouze pro předmět M003

---

1. Napište definici součtu podprostorů V_1 a V_2 ve vektorovém prostoru U nad polem $\mathbb{K}$. *(2 body)*

2. Dokažte, že lineární obal vektorů $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vektorového prostoru U nad polem $\mathbb{K}$ je vektorový podprostor. *(2 body)*

3. Z definice lineární nezávislosti dokažte: Jsou-li vektory u_1, u_2, u_3, u_4 lineárně nezávislé ve vektorovém prostoru V, pak $u_1 + u_2, u_1 + 2u_2, u_3, u_4$ jsou rovněž lineárně nezávislé. *(2 body)*

4. Najděte reálnou matici A tvaru 2×2 tak, že její prvky $A_{ij} \neq 0$ jsou navzájem různé a A^{-1} neexistuje.

Odpověď: Např. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ *(2 body)*

5. Je dána množina $M = \mathbb{R}$ s operacemi sčítání $x \oplus y = x \cdot y$ a obvyklým násobením reálným číslem $a \odot x = a \cdot x$. Napište jednu vlastnost z definice vektorového prostoru nad polem $\mathbb{R}$, kterou $(M, \oplus, \odot)$ nesplňuje.

Odpověď: Např. $a \odot (x \oplus y) = (a \odot x) \oplus (a \odot y)$. Dále operace $\oplus$ má neutrální prvek 1, ale prvek 0 nemá inverzní prvek.

(2 body)

TEST z LA I, 2000, skupina C **Jméno a příjmení:**

Část společná předmětům M003 a M503

---

1. Zjistěte, pro které hodnoty parametrů a a b má soustava v $\mathbb{R}$ nekonečně mnoho řešení.

$$\begin{aligned} x + ay &= b + 1 \\ ax + 4y &= 2b \end{aligned}$$

Odpověď: $a = -2$, $b = -\frac{1}{2}$ *(2 body)*

---

2. V komplexních číslech najděte řešení následující rovnice ve tvaru $x = a + ib$.

$$(2 - i)x = 4 - 7i$$

Odpověď: $x = 3 - 2i$ *(1 bod)*

---

3. V $\mathbb{Z}_{11}$ najděte všechna řešení rovnice

$$x^2 + x = 9.$$

Odpověď: $x = 4, 6$ *(1 bod)*

---

4. V R^4 najděte bázi průniku podprostorů U a V, kde

$$\begin{aligned} U &= [(1, 0, 1, -3)^T, (2, 1, 2, 4)^T] \\ V &= [(1, 1, 1, 2)^T, (4, 2, 4, 3)^T] \end{aligned}$$

Odpověď: $(3, 1, 3, 1)^T = u_1 + u_2 = v_2 - v_1$ *(2 body)*

---

5. Najděte inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2 body)

---

6. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^{2\times 2}$ reálných matic tvaru 2×2 najděte souřadnice matice $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ v bázi $\alpha = (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$.

Odpověď: $(1, 0, 2, 3)^T$ *(2 body)*

Část pouze pro předmět M003

---

1. Napište definici lineární nezávislosti vektorů $u_1, u_2, \ldots, u_k$ ve vektorovém prostoru U nad polem $\mathbb{K}$.
(2 body)

2. Z definice lineárního obalu a součtu podprostorů dokažte, že $[u_1, u_2, u_3] + [u_1 - u_3, u_4] = [u_1, u_2, u_3, u_4]$.
(2 body)

3. Nechť matice A, B, C mají inverzní matice A^{-1}, B^{-1}, C^{-1}. Napište $(AB^{-1}CA)^{-1}$ pomocí matic A, B, C, A^{-1}, B^{-1}, C^{-1}. Své tvrzení dokažte. **Odpověď:** $A^{-1}C^{-1}BA^{-1}$ *(2 body)*

4. Najděte reálnou matici A tvaru 2×2 tak, že některý její prvek $A_{ij} \neq 0$ a $A^2 = 0$.
Odpověď: Např. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *(2 body)*

5. Je dána množina $M = \mathbb{R}[x]$ všech reálných polynomů s operacemi sčítání $p(x) \oplus q(x) = p(x) \cdot q(x)$ a obvyklým násobením reálným číslem $a \odot p(x) = a \cdot p(x)$. Napište jednu vlastnost z definice vektorového prostoru nad polem $\mathbb{R}$, kterou $(M, \oplus, \odot)$ nesplňuje.
Odpověď: Např. $a \odot (p(x) \oplus q(x)) = (a \odot p(x)) \oplus (a \odot q(x))$. Dále sčítání má neutrální prvek 1, ale k polynomům stupně aspoň 1 a nulovému polynomu neexistuje inverzní prvek. *(2 body)*

TEST z LA I, 2000, skupina D **Jméno a příjmení:**

Část společná předmětům M003 a M503

---

1. Zjistěte, pro které hodnoty parametrů a a b má soustava v $\mathbb{R}$ nekonečně mnoho řešení.

$$\begin{aligned} x - ay &= b - 1 \\ ax - 9y &= 3b \end{aligned}$$

Odpověď: $a = -3$, $b = \frac{1}{2}$ *(2 body)*

---

2. V komplexních číslech najděte řešení následující rovnice ve tvaru $x = a + ib$.

$$(1 + 2i)x = 6 + 2i$$

Odpověď: $x = 2 - 2i$ *(1 bod)*

---

3. V $\mathbb{Z}_{11}$ najděte všechna řešení rovnice

$$x^2 + 2x = 8.$$

Odpověď: $x = 2, 7$ *(1 bod)*

---

4. V R^4 najděte bázi průniku podprostorů U a V, kde

$$\begin{aligned} U &= [(1, -2, 3, 1)^T, (2, 0, 7, 1)^T] \\ V &= [(0, 1, 2, 3)^T, (1, 1, 2, -3)^T] \end{aligned}$$

Odpověď: $(1, 2, 4, 0)^T = u_2 - u_1 = v_1 + v_2$ *(2 body)*

---

5. Najděte inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ -3 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

(2 body)

---

6. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^{2\times 2}$ reálných matic tvaru 2×2 najděte souřadnice matice $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ v bázi $\alpha = (\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$.

Odpověď: $(1, 3, 2, 0)$ *(2 body)*

Část pouze pro předmět M003

---

1. Napište definici lineární závislosti vektorů $v_1, v_2, \ldots, v_k$ ve vektorovém prostoru U nad polem $\mathbb{K}$. *(2 body)*

2. Z definice lineárního obalu a součtu podprostorů dokažte, že $[u_1, u_2, u_2 + u_3] + [u_3, u_4] = [u_1, u_2, u_3, u_4]$. *(2 body)*

3. Nechť matice A, B, C mají inverzní matice A^{-1}, B^{-1}, C^{-1}. Napište $(BABC^{-1})^{-1}$ pomocí matic A, B, C, A^{-1}, B^{-1}, C^{-1}. Své tvrzení dokažte. **Odpověď:** $CB^{-1}A^{-1}B^{-1}$ *(2 body)*

4. Najděte reálnou matici A tvaru 2×2 tak, že $A^2 = -E$. **Odpověď:** Např. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *(2 body)*

5. Je dána množina $M = \mathbb{R}^2$ s operacemi sčítání $(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ a násobením reálným číslem $a \odot (x_1, x_2) = (ax_1, x_2)$. Napište jednu vlastnost z definice vektorového prostoru nad polem $\mathbb{R}$, kterou $(M, \oplus, \odot)$ nesplňuje.
Odpověď: $(a + b) \odot (x_1, x_2) = (a \odot (x_1, x_2)) \oplus (a \odot (x_1, x_2))$ *(2 body)*

TEST z LA I, 2000, skupina E **Jméno a příjmení:**

Část společná předmětům M003 a M503

---

1. Zjistěte, pro které hodnoty parametrů a a b nemá soustava v $\mathbb{R}$ žádné řešení.

$$\begin{aligned} x + \quad y &= 2 \\ ax + 3by &= 1 \end{aligned}$$

Odpověď: $a = 3b$, $a \neq \frac{1}{2}$ *(2 body)*

---

2. V komplexních číslech najděte všechna řešení následující rovnice ve tvaru $x = a + ib$.

$$x^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Odpověď: $x = \frac{\sqrt{3}+i}{2}, \frac{-\sqrt{3}-i}{2}$ *(1 bod)*

---

3. V $\mathbb{Z}_7$ najděte všechna řešení soustavy rovnic

$$2x + 3y = 0 \quad , \quad x + 2y = 6.$$

Odpověď: $x = 3, y = 5$ *(1 bod)*

---

4. V R^4 najděte bázi průniku podprostorů U a V, kde

$$\begin{aligned} U &= [(1,1,-1,-1)^T, (4,6,-1,-3)^T] \\ V &= [(1,1,2,0)^T, (0,2,-3,-1)^T] \end{aligned}$$

Odpověď: $(2,4,1,-1)^T = u_2 - 2u_1 = 2v_1 + v_2$ *(2 body)*

---

5. Najděte inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(2 body)

---

6. Který z vektorů u_1, u_2, u_3, u_4 doplňuje seznam $\alpha = ((1,1,0,-2),(1,-1,0,0),(2,0,-1,-1))$ na bázi prostoru $\mathbb{R}^4$? $u_1 = (1,1,-1,-1)$, $u_2 = (3,-1,-2,0)$, $u_3 = (2,1,0,-3)$, $u_4 = (0,0,1,2)$

Odpověď: $u_4 = (0,0,1,2)$ *(2 body)*

Část pouze pro předmět M003

---

1. Napište definici vektorovém prostoru nad polem $\mathbb{K}$. *(2 body)*

2. Z definice souřadnic dokažte, že pro souřadnice vektorů v bázi α platí $(au + bv)_\alpha = a(u)_\alpha + b(v)_\alpha$, kde a, b jsou prvky pole $\mathbb{K}$. *(2 body)*

3. Čtvercová matice B vznikla z matice A záměnou druhého a třetího řádku. Jak se liší A^{-1} od B^{-1}, pokud obě inverzní matice existují? Svou odpověď zdůvodněte. **Odpověď:** Záměnou 2. a 3. sloupce. *(2 body)*

4. Najděte všechny reálné matice A tvaru 2×2 takové, že $A \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} A$.

Odpověď: $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ *(2 body)*

5. Reálná čtvercová matice A se nazývá antisymetrická, jestliže $A_{ij} = -A_{ji}$ pro všechna i, j (speciálně $A_{ii} = 0$). Napište dimenzi a nějakou bázi vektorového prostoru reálných antisymetrických matic 3×3 s obvyklým sčítáním matic a násobením skalárem. **Odpověď:** Obecný tvar $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ *(2 body)*

TEST z LA I, 2000, skupina F **Jméno a příjmení:**

Část společná předmětům M003 a M503

---

1. Zjistěte, pro které hodnoty parametrů a a b nemá soustava v $\mathbb{R}$ žádné řešení.

$$\begin{aligned} x- \quad y =& 2 \\ -ax + 2by =& 1 \end{aligned}$$

Odpověď: $a = 2b$, $a \neq -\frac{1}{2}$ *(2 body)*

---

2. V komplexních číslech najděte všechna řešení následující rovnice ve tvaru $x = a + ib$.

$$x^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Odpověď: $x = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ *(1 bod)*

---

3. V $\mathbb{Z}_7$ najděte všechna řešení soustavy rovnic

$$4x + 3y = 6 \quad , \quad 2x + y = 0.$$

Odpověď: $x = 4, y = 6$ *(1 bod)*

---

4. V R^4 najděte bázi průniku podprostorů U a V, kde

$$\begin{aligned} U =& [(1,2,3,4)^T, (-1,5,2,1)^T] \\ V =& [(1,1,1,2)^T, (-2,6,5,3)^T] \end{aligned}$$

Odpověď: $(1,9,8,9)^T = 2u_1 + u_2 = 3v_1 + v_2$ *(2 body)*

---

5. Najděte inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(2 body)

---

6. Který z vektorů u_1, u_2, u_3, u_4 doplňuje seznam $\alpha = ((1,3,1,0), (1,0,1,2), (0,2,0,1))$ na bázi prostoru $\mathbb{R}^4$? $u_1 = (-1,1,-1,-1)$, $u_2 = (3,-1,3,0)$, $u_3 = (2,1,0,-3)$, $u_4 = (0,0,0,1)$

Odpověď: $u_3 = (2,1,0,-3)$ *(2 body)*

Část pouze pro předmět M003

---

1. Napište definici pole. *(2 body)*

2. Z definice báze dokažte: je-li (u_1, u_2, u_3, u_4) báze prostoru U, pak $(u_1 + u_4, u_2, u_3, u_4)$ je rovněž báze prostoru U. *(2 body)*

3. Čtvercová matice B vznikla z matice A záměnou prvního a třetího sloupce. Jak se liší A^{-1} od B^{-1}, pokud obě inverzní matice existují? Svou odpověď zdůvodněte.
Odpověď: Záměnou 1. a 3. řádku. *(2 body)*

4. Najděte všechny reálné matice A tvaru 2×2 takové, že $A \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} A$.

Odpověď: $A = \begin{pmatrix} a & -3b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ *(2 body)*

5. Čtvercová matice A se nazývá symetrická, jestliže $A_{ij} = A_{ji}$ pro všechna i, j. Napište dimenzi a nějakou bázi vektorového prostoru reálných symetrických matic 3×3 s obvyklým sčítáním matic a násobením skalárem. **Odpověď:** Obecný tvar $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ určuje nějakou bázi a dimenzi 6. *(2 body)*

TEST z LA I, 2000, skupina G **Jméno a příjmení:**

Část společná předmětům M003 a M503

---

1. Zjistěte, pro které hodnoty parametrů a a b nemá soustava v $\mathbb{R}$ žádné řešení.

$$\begin{aligned} ax + 4y &= 3 \\ x - by &= 1 \end{aligned}$$

Odpověď: $ab = -4$, $a \neq 3$ *(2 body)*

---

2. V komplexních číslech najděte všechna řešení následující rovnice ve tvaru $x = a + ib$.

$$x^2 = 2i$$

Odpověď: $x = 1 + i, -1 - i$ *(1 bod)*

---

3. V $\mathbb{Z}_7$ najděte všechna řešení soustavy rovnic

$$5x + 3y = 3 \quad , \quad 3x + 2y = 5.$$

Odpověď: $x = 5, y = 2$ *(1 bod)*

---

4. V R^4 najděte bázi průniku podprostorů U a V, kde

$$\begin{aligned} U &= [(1,2,1,2)^T, (6,8,4,9)^T] \\ V &= [(1,1,2,3)^T, (1,3,6,8)^T] \end{aligned}$$

Odpověď: $(2,0,0,1)^T = u_2 - 4u_1 = 3v_1 - v_2$ *(2 body)*

---

5. Najděte inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 10 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2 body)

---

6. Který z vektorů u_1, u_2, u_3, u_4 doplňuje seznam $\alpha = ((1,3,0,-1), (1,0,0,-1), (0,2,1,0))$ na bázi prostoru $\mathbb{R}^4$? $u_1 = (-1,1,-1,1)$, $u_2 = (3,-1,0,-3)$, $u_3 = (2,1,0,-2)$, $u_4 = (2,1,0,-2)$

Odpověď: Žádný. *(2 body)*

Část pouze pro předmět M003

---

1. Napište definici báze vektorového prostoru. *(2 body)*

2. Souřadnice vektoru u v bázi $\alpha = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ jsou $(a_1, a_2, a_3, a_4)^T$. Jaké jsou jeho souřadnice v bázi $\beta = (u_1 + u_4, u_2 + u_3, u_3, u_4)$? Zdůvodněte.
Odpověď: $(u)_\beta = (a_1, a_2, a_3 - a_2, a_4 - a_1)^T$ *(2 body)*

3. Matice A se nazývá horní trojúhelníková, jestliže $A_{ij} = 0$ pro $i > j$. Dokažte, že inverzní matice A^{-1} k takové matici (pokud existuje) je rovněž horní trojúhelníková. *(2 body)*

4. Čemu se rovná $\begin{pmatrix} 1 & 17 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{101}$? Zdůvodněte. **Odpověď:** $\begin{pmatrix} 1 & 1717 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *(2 body)*

5. Je dána množina $M = \mathbb{R}^2$ s operací sčítání $(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 + y_2)$. Najděte její neutrální prvek a zjistěte, zda ke každému prvku $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ existuje inverzní prvek.
Odpověď: Neutrální prvek $(1, 0)$, inverzní prvek neexistuje k $(0, y)$. *(2 body)*

TEST z LA I, 2000, skupina H **Jméno a příjmení:**

Část společná předmětům M003 a M503

---

1. Zjistěte, pro které hodnoty parametrů a a b nemá soustava v $\mathbb{R}$ žádné řešení.

$$\begin{aligned} ax + 2y =& 4 \\ x - by =& 3 \end{aligned}$$

Odpověď: $ab = -2$, $a \neq \frac{4}{3}$ (*2 body*)

---

2. V komplexních číslech najděte všechna řešení následující rovnice ve tvaru $x = a + ib$.

$$x^2 = -2i$$

Odpověď: $1 - i$, $-1 + i$ (*1 bod*)

---

3. V $\mathbb{Z}_7$ najděte všechna řešení soustavy rovnic

$$6x + 2y = 3 \quad , \quad x + 3y = 6.$$

Odpověď: $x = 2, y = 6$ (*1 bod*)

---

4. V R^4 najděte bázi průniku podprostorů U a V, kde

$$\begin{aligned} U =& [(1,1,1,1)^T, (-3,3,-3,-3)^T] \\ V =& [(1,3,2,1)^T, (-1,1,-3,-1)^T] \end{aligned}$$

Odpověď: $(1,7,1,1)^T = 4u_1 + u_2 = 2v_1 + v_2$ (*2 body*)

---

5. Najděte inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 10 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(*2 body*)

---

6. Který z vektorů u_1, u_2, u_3, u_4 doplňuje seznam $\alpha = ((1,-2,1,-1), (1,0,-1,-1), (1,1,-2,0))$ na bázi prostoru $\mathbb{R}^4$? $u_1 = (-1,2,-1,1)$, $u_2 = (3,-1,-2,-1)$, $u_3 = (2,1,0,-2)$, $u_4 = (2,1,-3,-2)$
Odpověď: $u_3 = (2,1,0,-2)$ (*2 body*)

Část pouze pro předmět M003

---

1. Napište definici dimenze vektorového prostoru a napište větu, která nám zaručí, že tato definice je správná. (*2 body*)

2. Souřadnice vektoru u v bázi $\alpha = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ jsou $(a_1, a_2, a_3, a_4)^T$. Jaké jsou jeho souřadnice v bázi $\beta = (u_1, u_2 - u_3, u_3, u_4 - u_1)$? Zdůvodněte.
Odpověď: $(u)_\beta = (a_1 + a_4, a_2, a_3 + a_2, a_4)$ (*2 body*)

3. Matice A se nazývá dolní trojúhelníková, jestliže $A_{ij} = 0$ pro $i < j$. Dokažte, že inverzní matice A^{-1} k takové matici (pokud existuje) je rovněž dolní trojúhelníková. (*2 body*)

4. Čemu se rovná $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 13 & 1 \end{pmatrix}^{201}$? Zdůvodněte. **Odpověď:** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2613 & 1 \end{pmatrix}$ (*2 body*)

5. Napište všechny podprostory vektorového prostoru $\mathbb{Z}_2^2$ nad polem $\mathbb{Z}_2$. **Odpověď:** Je jich 5: $\{(0,0)\}$, $\{(0,0),(0,1)\}$, $\{(0,0),(1,0)\}$, $\{(0,0),(1,1)\}$, $\mathbb{Z}_2^2$. (*2 body*)