Lineárna algebra a geometria

Skupina X

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$$

1. Nájdite Jordanov kanonický tvar J matice A a bázu priestoru $\mathbb{R}^4$, v ktorej má lineárny operátor $x \mapsto A \cdot x$ maticu J. *(2 + 2 body)*

2. Analýzou vlastných čísel a vlastných vektorov matice B zistite, akú geometrickú transformáciu euklidovského priestoru $\mathbb{R}^3$ popisuje lineárny operátor $x \mapsto B \cdot x$. *(3 body)*

3. Rovnicou $x^2 - y^2 + 2\sqrt{3}xy = 2$ je daná kužeľosečka v $\mathbb{R}^2$. Určte, o aký druh kužeľosečky ide, a nájdite smery a dĺžky jej hlavnej a vedľajšej polosi. Načrtnite obrázok. *(1 + 1 + 1 bod)*

4. Nech K je pole. Dokážte, že všetky matice tvaru $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$, kde $a, b \in K$, $b \neq 0$, tvoria podgrupu grupy $(\mathrm{GL}(2, K), \cdot)$. *(2 body)*

5. Napište definice následujících pojmů:
a) podobné matice;
b) ortogonální doplněk podprostoru V v euklidovském prostoru U
Nechť kvadratická forma f na vektorovém prostoru má v bázi α matici A a v bázi β matici B. Vyjádřete A pomocí B a matice přechodu. *(1 + 1 + 1 bod)*

Maximálny počet bodov 15. Bodový zisk sa do celkového hodnotenia započítava s váhou 2.

Lineárna algebra a geometria

Skupina Y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -9 & -6 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3/5 & 0 & 4/5 \end{pmatrix}$$

1. Nájdite Jordanov kanonický tvar J matice A a bázu priestoru $\mathbb{R}^4$, v ktorej má lineárny operátor $x \mapsto A \cdot x$ maticu J. *(2 + 2 body)*

2. Analýzou vlastných čísel a vlastných vektorov matice B zistite, akú geometrickú transformáciu euklidovského priestoru $\mathbb{R}^3$ popisuje lineárny operátor $x \mapsto B \cdot x$. *(3 body)*

3. Rovnicou $x^2 - y^2 - 2\sqrt{3}xy = 2$ je daná kužeľosečka v $\mathbb{R}^2$. Určte, o aký druh kužeľosečky ide, a nájdite smery a dĺžky jej hlavnej a vedľajšej polosi. Načrtnite obrázok. *(1 + 1 + 1 bod)*

4. Nech K je pole. Dokážte, že všetky matice tvaru $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$, kde $a, b \in K$, $a \neq 0$, tvoria podgrupu grupy $(\mathrm{GL}(2, K), \cdot)$. *(2 body)*

5. Napište definice následujících pojmů:
a) kongruentní matice;
b) invariantní podprostor lineárního operátoru φ
Nechť lineární operátor φ na vektorovém prostoru má v bázi α matici A a v bázi β matici B. Vyjádřete A pomocí B a matice přechodu. *(1 + 1 + 1 bod)*

Maximálny počet bodov 15. Bodový zisk sa do celkového hodnotenia započítava s váhou 2.

Riešenie X

1. $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, báza (t.j. stĺpce matice prechodu) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Druhý stĺpec môže mať tiež tvar $(-2,0,1,0)^T$. Posledný stĺpec môže mať tiež tvar $(3,1,0,1)^T$ resp. $(0,0,1,1)^T$, všeobecne $(2+a-2b,a,b,1)^T$, $a,b \in \mathbb{R}$.
1 bod za vlastné čísla a vlastné vektory, 1 bod za Jordanov tvar, 2 body za bázu.

2. Otočenie o uhol $\arccos\frac{3}{5} = \arcsin\frac{4}{5} = \operatorname{arctg}\frac{4}{3} \approx 0,93 \approx 53^\circ$ okolo osi y, t.j. osi so smerovým vektorom $(0,1,0)$ a rovnicami $x=z=0$.
1 bod za os otočenia, 2 body za uhol otočenia – orientáciu si nevšímajte.

3. Rovnoosá hyperbola: $a=b=1$, hlavná polos v smere priamky $x-y\sqrt{3}=0$ (smerový vektor $(\sqrt{3},1)$), vedľajšia polos v smere priamky $x\sqrt{3}+y=0$ (smerový vektor $(1,-\sqrt{3})$).
1 bod za dĺžky oboch polosí, à 1 bod za každý smer.

4. Jasné.
1 bod za uzavretosť na násobenie, 1 bod za jednotku a inverzný prvok.

5. Jasné.
1 bod za každú správnu odpoveď.

Riešenie Y

1. $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, báza (t.j. stĺpce matice prechodu) $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Druhý stĺpec môže mať tiež tvar $(2,0,1,0)^T$. Posledný stĺpec môže mať tiež tvar $(4,1,0,1)^T$ resp. $(3,0,1,1)^T$, všeobecne $(1+3a+2b,a,b,1)^T$, $a,b \in \mathbb{R}$.
1 bod za vlastné čísla a vlastné vektory, 1 bod za Jordanov tvar, 2 body za bázu.

2. Otočenie o uhol $\arccos\frac{4}{5} = \arcsin\frac{3}{5} = \operatorname{arctg}\frac{3}{4} \approx 0,64 \approx 37^\circ$ okolo osi y, t.j. osi so smerovým vektorom $(0,1,0)$ a rovnicami $x=z=0$.
1 bod za os otočenia, 2 body za uhol otočenia – orientáciu si nevšímajte.

3. Rovnoosá hyperbola: $a=b=1$, hlavná polos v smere priamky $x+y\sqrt{3}=0$ (smerový vektor $(\sqrt{3},-1)$), vedľajšia polos v smere priamky $x\sqrt{3}-y=0$ (smerový vektor $(1,\sqrt{3})$).
1 bod za dĺžky oboch polosí, à 1 bod za každý smer.

4. Jasné.
1 bod za uzavretosť na násobenie, 1 bod za jednotku a inverzný prvok.

5. Jasné.
1 bod za každú správnu odpoveď.