Lineárna algebra a geometria

Skupina C

1. Nájdite Jordanov kanonický tvar J matice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ a bázu priestoru $\mathbb{R}^4$, v ktorej má lineárny operátor $x \mapsto A \cdot x$ maticu J. *(4 body)*

2. Nech V je štvorrozmerný euklidovský priestor a (u_1, u_2, u_3, u_4) je ortonormálna báza vo V. Určte odchýlku rovín $M = [u_1, u_1 + u_2]$, $N = [u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3]$ *(3 body)*

3. Nech K je pole. Pre ľubovoľné $a \in K$ matice $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 2a \end{pmatrix}$ sú podobné. Dokážte a nájdite maticu prechodu. *(2 body)*

4. Otočenia roviny $\mathbb{R}^2$ okolo počiatku o celočíselný počet stupňov tvoria podgrupu grupy všetkých otočení roviny okolo počiatku. Dokážte. Pre ktoré $n \in \mathbb{N}$ je táto grupa izomorfná s grupou $(\mathbb{Z}_n, +)$? *(3 body)*

5. Napíšte definície nasledujúcich pojmov:
a) signatúra kvadratickej formy nad $\mathbb{R}$;
b) charakteristický polynom štvorcovej matice;
c) podgrupa danej grupy. *(1 + 1 + 1 bod)*

Maximálny počet bodov 15.
Bodový zisk sa do celkového hodnotenia započítava s váhou 2.

Lineárna algebra a geometria

Skupina D

1. Nájdite Jordanov kanonický tvar J matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ a bázu priestoru $\mathbb{R}^4$, v ktorej má lineárny operátor $x \mapsto A \cdot x$ maticu J. *(4 body)*

2. Nech V je štvorrozmerný euklidovský priestor a (u_1, u_2, u_3, u_4) je ortonormálna báza vo V. Určte odchýlku rovín $M = [u_1, u_1 - u_2]$, $N = [u_1 - u_2, u_1 - u_2 + u_3]$ *(3 body)*

3. Nech K je pole. Pre ľubovoľné $a \in K$ matice $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 & -a^2 \\ 1 & 2a \end{pmatrix}$ sú podobné. Dokážte a nájdite maticu prechodu. *(2 body)*

4. Otočenia roviny $\mathbb{R}^2$ okolo počiatku o celočíselný násobok čísla $\frac{\pi}{200}$ tvoria podgrupu grupy všetkých otočení roviny okolo počiatku. Dokážte. Pre ktoré $n \in \mathbb{N}$ je táto grupa izomorfná s grupou $(\mathbb{Z}_n, +)$? *(3 body)*

5. Napíšte definície nasledujúcich pojmov:
a) indefinitná kvadratická forma nad $\mathbb{R}$;
b) geometrická násobnosť vlastného čísla;
c) homomorfizmus grúp. *(1 + 1 + 1 bod)*

Maximálny počet bodov 15.
Bodový zisk sa do celkového hodnotenia započítava s váhou 2.

Riešenie C

1. $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, báza (t.j. stĺpce matice prechodu) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Všeobecný tvar druhého stĺpca $(a, 1+2b, b, 0)^T$, $a, b \in \mathbb{R}$; všeobecný tvar štvrtého stĺpca $(c, -2+2d, d, 1)^T$, $c, d \in \mathbb{R}$.

1 bod za vlastné čísla a vlastné vektory, 1 bod za Jordanov tvar, 2 body za bázu.

2. $M_1 = M \cap (M \cap N)^\perp = [u_1 - u_2]$, $N_1 = N \cap (M \cap N)^\perp = [u_3]$.
$\langle u_1 - u_2, u_3 \rangle = 0$, t.j. $\measuredangle(M, N) = \measuredangle(M_1, N_1) = \pi/2$.
1 bod za vzťah $\measuredangle(M, N) = \measuredangle(M_1, N_1)$, 1 bod za bázu $(M \cap N)^\perp$, 1 bod za kolmosť.

3. Matice prechodu majú tvar $\begin{pmatrix} x & y \\ ax & x + ay \end{pmatrix}$, $x, y \in K$, $x \neq 0$, resp. k nim inverzné $\begin{pmatrix} -ay + v & y \\ -av & v \end{pmatrix}$, $y, v \in K$, $v \neq 0$. Najjednoduchší tvar je $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$, pre $x = 1$, $y = 0$, resp. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix}$, pre $y = 0$, $v = 1$
1 bod za formuláciu vzťahu podobnosti, 1 bod za aspoň jednu maticu prechodu.

4. Jasné; $n = 360$.
1 bod za dôkaz podgrupy, 1 bod za n, 1 bod za popis izomorfizmu.

5. Jasné.
1 bod za každou správnou definici.

Riešenie D

1. $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, báza (t.j. stĺpce matice prechodu) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Všeobecný tvar druhého stĺpca $(a, 1+2b, b, 0)^T$, $a, b \in \mathbb{R}$; všeobecný tvar štvrtého stĺpca $(c, -2+2d, d, 1)^T$, $c, d \in \mathbb{R}$.

1 bod za vlastné čísla a vlastné vektory, 1 bod za Jordanov tvar, 2 body za bázu.

2. $M_1 = M \cap (M \cap N)^\perp = [u_1 + u_2]$, $N_1 = N \cap (M \cap N)^\perp = [u_3]$.
$\langle u_1 + u_2, u_3 \rangle = 0$, t.j. $\measuredangle(M, N) = \measuredangle(M_1, N_1) = \pi/2$.
1 bod za vzťah $\measuredangle(M, N) = \measuredangle(M_1, N_1)$, 1 bod za bázu $(M \cap N)^\perp$, 1 bod za kolmosť.

3. Matice prechodu majú tvar $\begin{pmatrix} x & ax + u \\ u & au \end{pmatrix}$, $x, u \in K$, $u \neq 0$, resp. k nim inverzné $\begin{pmatrix} -au & u - av \\ u & v \end{pmatrix}$, $u, v \in K$, $u \neq 0$. Najjednoduchší tvar je $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, pre $x = 0$, $u = 1$, resp. $\begin{pmatrix} -a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, pre $u = 1$, $v = 0$
1 bod za formuláciu vzťahu podobnosti, 1 bod za aspoň jednu maticu prechodu.

4. Jasné; $n = 400$.
1 bod za podgrupu, 1 bod za n, 1 bod za popis izomorfizmu.

5. Jasné. *1 bod za každou správnou definici.*