Lineárna algebra a geometria

Skupina A

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 & -9 & -11 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 1/2 & -1/2 \\ \sqrt{2}/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1. Nájdite Jordanov kanonický tvar J matice A a bázu priestoru $\mathbb{R}^4$, v ktorej má lineárny operátor $x \mapsto A \cdot x$ maticu J. *(2 + 2 body)*

2. Analýzou vlastných čísel a vlastných vektorov matice B zistite akú geometrickú transformáciu euklidovského priestoru $\mathbb{R}^3$ popisuje lineárny operátor $x \mapsto B \cdot x$. *(3 body)*

3. Rovnicou $5x^2 + 5y^2 + 6xy = 8$ je daná kuželosečka v $\mathbb{R}^2$. Určte, o aký druh kuželosečky ide, a nájdite smery a dĺžky jej hlavnej a vedľajšej polosi. Načrtnite obrázok. *(1 + 1 + 1 bod)*

4. Nech $(G, \cdot)$ je grupa, $a \in G$. Dokážte, že množina $H = \{x \in G;\, x^{-1}ax = a\}$ je podgrupou grupy G. *(2 body)*

5. Napíšte definície nasledujúcich pojmov:
a) skalárny súčin vo vektorovom priestore nad $\mathbb{C}$;
b) vlastná hodnota (= vlastní číslo) lineárneho operátora;
c) ortogonálna matica. *(1 + 1 + 1 bod)*

Maximálny počet bodov 15. Bodový zisk sa do celkového hodnotenia započítava s váhou 2.

Lineárna algebra a geometria

Skupina B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Nájdite Jordanov kanonický tvar J matice A a bázu priestoru $\mathbb{R}^4$, v ktorej má lineárny operátor $x \mapsto A \cdot x$ maticu J. *(2 + 2 body)*

2. Analýzou vlastných čísel a vlastných vektorov matice B zistite akú geometrickú transformáciu euklidovského priestoru $\mathbb{R}^3$ popisuje lineárny operátor $x \mapsto B \cdot x$. *(3 body)*

3. Rovnicou $5x^2 + 5y^2 - 6xy = 8$ je daná kuželosečka v $\mathbb{R}^2$. Určte, o aký druh kuželosečky ide, a nájdite smery a dĺžky jej hlavnej a vedľajšej polosi. Načrtnite obrázok. *(1 + 1 + 1 bod)*

4. Nech K je pole $n > 0$ a $A \in \mathrm{GL}(n, K)$. Dokážte, že množina $H = \{X \in \mathrm{GL}(n, K);\, X^T \cdot A \cdot X = A\}$ je podgrupou grupy $(\mathrm{GL}(n, K), \cdot)$. *(2 body)*

5. Napíšte definície nasledujúcich pojmov:
a) skalárny súčin vo vektorovom priestore nad $\mathbb{R}$;
b) vlastný vektor štvorcovej matice;
c) samoadjungovaný lineárny operátor. *(1 + 1 + 1 bod)*

Maximálny počet bodov 15. Bodový zisk sa do celkového hodnotenia započítava s váhou 2.

Riešenie A

1. $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, báza (t.j. stĺpce matice prechodu) $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Posledný stĺpec môže mať tiež tvar $(-4,0,0,1)^T$ resp. $(0,-2,0,1)^T$, všeobecne $(-4-2a-3b,a,b,1)^T$, $a,b \in \mathbb{R}$.
1 bod za vlastné čísla a vlastné vektory, 1 bod za Jordanov tvar, 2 body za bázu.

2. Otočenie o uhol $\pi/2$ okolo osi so smerovým vektorom $(0,1,-1)$, t.j. osi $x = 0 = y + z$.
1 bod za os otočenia, 2 body za uhol otočenia – orientáciu si nevšímajte.

3. Elipsa: hlavná polos $a = 2$ v smere priamky $x + y = 0$, vedľajšia polos $b = 1$ v smere priamky $x - y = 0$.
1 bod za dĺžky oboch polosí, à 1 bod za každý smer.

4. Jasné.
1 bod za uzavretosť na násobenie, 1 bod za jednotku a inverzný prvok.

5. Jasné.
1 bod za každú správnu definíciu.

Riešenie B

1. $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, báza (t.j. stĺpce matice prechodu) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Posledný stĺpec môže mať tiež tvar $(2,1,0,1)^T$ resp. $(-1,0,1,1)^T$, všeobecne $(2a-b,a,b,1)^T$, $a,b \in \mathbb{R}$.
1 bod za vlastné čísla a vlastné vektory, 1 bod za Jordanov tvar, 2 body za bázu.

2. Otočenie o uhol $\pi/2$ okolo osi so smerovým vektorom $(1,1,0)$, t.j. osi $x - y = 0 = z$.
1 bod za os otočenia, 2 body za uhol otočenia – orientáciu si nevšímajte.

3. Elipsa: hlavná polos $a = 2$ v smere priamky $x - y = 0$, vedľajšia polos $b = 1$ v smere priamky $x + y = 0$.
1 bod za dĺžky oboch polosí, à 1 bod za každý smer.

4. Jasné.
1 bod za uzavretosť na násobenie, 1 bod za jednotku a inverzný prvok.

5. Jasné.
1 bod za každú správnu definíciu.