Jméno: **Fakulta:** **Předmět:**

G. Písemka z lineární algebry II, červen 2004 – početní část

Max. počet bodů 12

1. Lineární operátor $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je otočením kolem přímky

$$x_2 - x_3 = 0, \quad x_1 = 0,$$

které zobrazí vektor $(0, 1, -1)$ na vektor $(\sqrt{2}, 0, 0)$. Najděte matici operátoru φ ve standardní bázi. Řešení doprovoďte slovním komentářem. *(4 body)*

2. V $\mathbb{R}^4$ najděte vzdálenost přímek $p : (0, 2, 2, 3) + a(1, 0, -2, 0)$ a $q : (4, 3, 1, 4) + b(1, 1, 0, -1)$ a body $A \in p$ a $B \in q$, v nichž se tato vzdálenost realizuje. Výpočet doprovoďte slovním komentářem. *(4 body)*

3. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a matici P, která realizuje podobnost $J = P^{-1}AP$. Řešení doprovoďte slovním komentářem. *(4 body)*

Teoretická část

Max. počet bodů 10

1. Nechť $\mathbb{R}_1[x]$ je prostor polynomů stupně nejvýše 1 s reálnými koeficienty. Napište, čemu se rovná $f_1(ax+b)$ a $f_2(ax+b)$, je-li (f_1, f_2) duální báze k bázi $(x, 2x-1)$ v $\mathbb{R}_1[x]$. *(1 bod)*

2. Napište matici bilineární formy $g : \mathbb{R}_1[x] \times \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}$ zadané předpisem $g(ax+b, cx+d) = ad+bc$ v bázi $(x, 2x-1)$. *(1 bod)*

3. V prostoru komplexních matic 2×2 napište souřadnice matice $\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & 1+i \end{pmatrix}$, v bázi $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *(1 bod)*

4. Nechť $\varphi : U \to U$ je lineární operátor a $\alpha = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ báze prostoru U. Napište definici matice operátoru φ v bázi α. *(1 bod)*

5. Dokažte nebo vyvraťte: Lineární operátor $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, který je kolmou projekcí do roviny $x_1 = 0$, je ortogonální operátor. Bod pouze za zdůvodnění. *(1 bod)*

6. Ve standardních souřadnicích napište předpis $\varphi^*(y_1) = \ldots$ pro adjungované zobrazení k zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^4 \to R^1$, $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 + 5x_4)$. *(1 bod)*

7. Nechť U je reálný vektorový prostor se skalárním součinem $<,>$ a bází $\alpha = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$. Dokažte, že $< u, v >= x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ky_k$, kde $(u)_\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_k)^T$ a $(v)_\alpha = (y_1, y_2, \ldots, y_k)^T$. *(1 bod)*

8. Napište zaměření 2-rozměrného afinního podprostoru v $\mathbb{R}_2[x]$, který je určen polynomem x^2+2 a přímkou $\{x + tx^2; t \in \mathbb{R}\}$. *(1 bod)*

9. Dokažte, že jsou-li A a B ortogonální matice, pak $A \cdot B$ je rovněž ortogonální. *(1 bod)*

10. Napište přesné znění Sylvestrova zákona setrvačnosti. (Hovoří o diagonalizaci reálné kvadratické formy v různých bazích a umožňuje definici signatury kvadratické formy.) *(1 bod)*

Jméno: **Fakulta:** **Předmět:**

H. Písemka z lineární algebry II, červen 2004 – početní část
Max. počet bodů 12

1. Lineární operátor $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je otočením kolem přímky

$$x_1 - x_3 = 0, \quad x_2 = 0,$$

které zobrazí vektor $(1, 0, -1)$ na vektor $(0, \sqrt{2}, 0)$. Najděte matici operátoru φ ve standardní bázi. Řešení doprovoďte slovním komentářem. *(4 body)*

2. V $\mathbb{R}^4$ najděte vzdálenost přímek $p : (2, 0, 0, 3) + a(1, -2, 0, 0)$ a $q : (2, 3, -1, 6) + b(1, 0, 1, -1)$ a body $A \in p$ a $B \in q$, v nichž se tato vzdálenost realizuje. Výpočet doprovoďte slovním komentářem. *(4 body)*

3. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

a matici P, která realizuje podobnost $J = P^{-1}AP$. Řešení doprovoďte slovním komentářem. *(4 body)*

Teoretická část
Max. počet bodů 10

1. Nechť $\mathbb{R}_1[x]$ je prostor polynomů stupně nejvýše 1 s reálnými koeficienty. Napište, čemu se rovná $f_1(ax+b)$ a $f_2(ax+b)$, je-li (f_1, f_2) duální báze k bázi $(2x, x+1)$ v $\mathbb{R}_1[x]$. *(1 bod)*

2. Napište matici bilineární formy $g : \mathbb{R}_1[x] \times \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}$ zadané předpisem $g(ax+b, cx+d) = ad + bc$ v bázi $(2x, x+1)$. *(1 bod)*

3. V prostoru komplexních matic 2×2 napište souřadnice matice $\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix}$, v bázi $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *(1 bod)*

4. Nechť $\varphi : U \to U$ je lineární operátor a $\alpha = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ báze prostoru U. Napište definici matice operátoru φ v bázi α. *(1 bod)*

5. Dokažte nebo vyvraťte: Lineární operátor $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, který je kolmou projekcí do roviny $x_2 = 0$, je ortogonální operátor. Bod pouze za zdůvodnění. *(1 bod)*

6. Ve standardních souřadnicích napište předpis $\varphi^*(y_1) = \ldots$ pro adjungované zobrazení k zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^4 \to R^1$, $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5x_1 + 2x_3 + 4x_4)$. *(1 bod)*

7. Nechť U je reálný vektorový prostor se skalárním součinem $<,>$ a bází $\alpha = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$. Dokažte, že $< u, v >= x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ky_k$, kde $(u)_\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_k)^T$ a $(v)_\alpha = (y_1, y_2, \ldots, y_k)^T$. *(1 bod)*

8. Napište zaměření 2-rozměrného afinního podprostoru v $\mathbb{R}_2[x]$, který je určen polynomem $x^2 - 1$ a přímkou $\{x + 3t; t \in \mathbb{R}\}$. *(1 bod)*

9. Napište přesné znění Sylvestrova zákona setrvačnosti. (Hovoří o diagonalizaci reálné kvadratické formy v různých bazích a umožňuje definici signatury kvadratické formy.) *(1 bod)*

10. Dokažte, že jsou-li A a B ortogonální matice, pak $A \cdot B$ je rovněž ortogonální. *(1 bod)*