Jméno: **Fakulta:** **Předmět:**

C. Písemka z lineární algebry II, červen 2004 – početní část

Max. počet bodů 12

1. Lineární operátor $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je symetrií podle přímky

$$x_1 - x_2 = 0. \quad x_2 + x_3 = 0.$$

Najděte nejprve matici operátoru φ ve vhodné ortonormální bázi α a potom matici operátoru φ ve standardní bázi. Řešení doprovoďte slovním komentářem. *(4 body)*

2. V $\mathbb{R}^4$ najděte vzdálenost přímky $p : (2, 1, 2, -1) + a(1, 0, 0, -4)$ od roviny $\tau : (6, 2, 4, 2) + b(0, 1, -1, 0) + c(1, -1, 0, -2)$ a body $A \in p$ a $B \in \tau$, v nichž se tato vzdálenost realizuje. Výpočet doprovoďte slovním komentářem. *(4 body)*

3. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a matici P, která realizuje podobnost $J = P^{-1}AP$. Řešení doprovoďte slovním komentářem. *(4 body)*

Teoretická část

Max. počet bodů 10

1. Nechť $\mathbb{R}_1[x]$ je prostor polynomů stupně nejvýše 1 s reálnými koeficienty. Najděte polynomy $p_1, p_2 \in \mathbb{R}[x]$ takové, že lineární formy $f_1(ax + b) = 2a$, $f_2(ax + b) = a - b$ tvoří duální bázi k bázi (p_1, p_2). *(1 bod)*

2. Předpisem $g(ax^2 + bx + c) = \ldots$ uveďte příklad kvadratické formy $g : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ takové, že $g(x + 1) = 3$, $g(x^2) = 4$. *(1 bod)*

3. V prostoru reálných matic 2×2 najděte nějaký dvourozměrný afinní podprostor obsahující matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. *(1 bod)*

4. Napište definici skalárního součinu v komplexním vektorovém prostoru. Uveďte příklad v $\mathbb{C}_1[x]$. *(1 bod)*

5. Lineární operátor $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ je kolmá projekce na vektorový podprostor dimenze 2. Jaká vlastní čísla a s jakou geometrickou násobností má φ a proč? *(1 bod)*

6. Ve standardních souřadnicích napište předpis $\varphi^*(y_1, y_2, y_3) = \ldots$ pro adjungované zobrazení k zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^4 \to R^3$, $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_2 + 2x_4, x_3 + x_4)$. *(1 bod)*

7. Nechť $u_1, u_2, \ldots, u_k$ jsou ortogonální vektory. Dokažte, že jsou lineárně nezávislé. *(1 bod)*

8. Symetrická bilineární forma má v bázi α matici A a v bázi β matici B. Jaký je přesně vztah mezi A a B? *(1 bod)*

9. V $\mathbb{R}^5$ napište příklad dvou afinních podprostorů dimenze 2 a 3, které jsou mimoběžné. Mimoběžnost dokažte výpočtem. *(1 bod)*

10. Jakou dimenzi v $\mathbb{R}^n$ má afinní podprostor určený řešeními soustavy lineárních rovnic $Ax = b$, $b \in \mathbb{R}^k$, víte-li, že hodnost A je rovna hodnosti rozšířené matice (A, b)? *(1 bod)*

Jméno: **Fakulta:** **Předmět:**

D. Písemka z lineární algebry II, červen 2004 – početní část

Max. počet bodů 12

1. Lineární operátor $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je symetrií podle přímky

$$x_1 + x_2 = 0. \quad x_2 - x_3 = 0.$$

Najděte nejprve matici operátoru φ ve vhodné ortonormální bázi α a potom matici operátoru φ ve standardní bázi. Řešení doprovoďte slovním komentářem. *(4 body)*

2. V $\mathbb{R}^4$ najděte vzdálenost přímky $p : (0,-1,6,-1) + a(1,0,-4,0)$ od roviny $\tau : (5,2,3,0) + b(0,1,0,-1) + c(1,-1,-2,0)$ a body $A \in p$ a $B \in \tau$, v nichž se tato vzdálenost realizuje. Výpočet doprovoďte slovním komentářem. *(4 body)*

3. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 & -4 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a matici P, která realizuje podobnost $J = P^{-1}AP$. Řešení doprovoďte slovním komentářem. *(4 body)*

Teoretická část

Max. počet bodů 10

1. Nechť $\mathbb{R}_1[x]$ je prostor polynomů stupně nejvýše 1 s reálnými koeficienty. Najděte polynomy $p_1, p_2 \in \mathbb{R}[x]$ takové, že lineární formy $f_1(ax+b) = 2b$, $f_2(ax+b) = a+b$ tvoří duální bázi k bázi (p_1, p_2). *(1 bod)*

2. Předpisem $g(ax^2 + bx + c) = \ldots$ uveďte příklad kvadratické formy $g : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ takové, že $g(x) = 3$, $g(x^2+1) = 4$. *(1 bod)*

3. V prostoru reálných matic 2×2 najděte nějaký dvourozměrný afinní podprostor obsahující matice $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. *(1 bod)*

4. Napište definici skalárního součinu v komplexním vektorovém prostoru. Uveďte příklad v prostoru komplexních matic 2×2. *(1 bod)*

5. Lineární operátor $\varphi : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ je kolmá projekce na vektorový podprostor dimenze 3. Jaká vlastní čísla a s jakou geometrickou násobností má φ a proč? *(1 bod)*

6. Ve standardních souřadnicích napište předpis $\varphi^*(y_1, y_2, y_3) = \ldots$ pro adjungované zobrazení k zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^4 \to R^3$, $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_2 + x_3, x_2 - x_4, x_1 + x_4)$. *(1 bod)*

7. Jakou dimenzi v $\mathbb{R}^n$ má afinní podprostor určený řešeními soustavy lineárních rovnic $Ax = b$, $b \in \mathbb{R}^k$, víte-li, že hodnost A je rovna hodnosti rozšířené matice (A, b)? *(1 bod)*

8. Lineární operátor $\varphi : U \to U$ má v bázi α matici A a v bázi β matici B. Jaký je přesně vztah mezi A a B? *(1 bod)*

9. V $\mathbb{R}^4$ napište jednoduchý příklad dvou afinních podprostorů dimenze 2, které jsou mimoběžné. Mimoběžnost dokažte výpočtem. *(1 bod)*

10. Nechť $u_1, u_2, \ldots, u_k$ jsou ortogonální vektory. Dokažte, že jsou lineárně nezávislé. *(1 bod)*