Jméno: **Fakulta:** **Předmět:**

A. Písemka z lineární algebry II, červen 2004 – početní část

Max. počet bodů 12

1. Lineární operátor $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je kolmou projekcí na rovinu

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0.$$

Najděte nejprve matici operátoru φ ve vhodné ortonormální bázi α a potom matici operátoru φ ve standardní bázi. Řešení doprovoďte slovním komentářem. *(4 body)*

2. V $\mathbb{R}^4$ najděte vzdálenost přímky $p : (1,3,1,-1) + a(0,1,-2,-1)$ od roviny $\tau : (5,7,3,1) + b(1,-2,1,0) + c(0,0,1,-1)$ a body $A \in p$ a $B \in \tau$, v nichž se tato vzdálenost realizuje. Výpočet doprovoďte slovním komentářem. *(4 body)*

3. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 & -1 \\ -9 & 9 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a matici P, která realizuje podobnost $J = P^{-1}AP$. Řešení doprovoďte slovním komentářem. *(4 body)*

Teoretická část

Max. počet bodů 10

1. Nechť $\mathbb{R}_1[x]$ je prostor polynomů stupně nejvýše 1 s reálnými koeficienty. Najděte předpis pro lineární formy $f_1, f_2 : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}$, které tvoří duální bázi k bázi $2x,\ x-1$. *(1 bod)*

2. Uveďte příklad kvadratické formy $g : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ takové, že $g(2x+1) = 7$. *(1 bod)*

3. V $\mathbb{R}_2[x]$ najděte nějaký dvourozměrný afinní podprostor obsahující polynomy $x^2 + 2, 3, 2x$. *(1 bod)*

4. Dokažte, že pro všechny čtveřice reálných čísel (x_1, x_2, x_3, x_4) platí nerovnost
$5x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \le 6\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$. *(1 bod)*

5. Nechť $\varphi : U \to V$ má adjungované zobrazení $\varphi^* : V \to U$. Dokažte, že podprostor $\operatorname{Ker}\varphi^*$ je kolmý k podprostoru $\operatorname{Im}\varphi$. *(1 bod)*

6. Ve standardních souřadnicích napište předpis pro adjungované zobrazení k zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to R^4$, $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_3, x_2 + x_3, x_1, 0)$. *(1 bod)*

7. Napište příklad unitárního zobrazení $\varphi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, které není násobkem identity.

8. Napište přesně, jak se pro danou kvadratickou formu $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ hledá ortonormální báze, v níž má g diagonální tvar. *(1 bod)*

9. Nechť matice lineárního operátoru φ má matici v Jordanově kanonickém tvaru tvořenou dvěma buňkami 2×2 s různými vlastními čísly. Kolik různých invariantních podprostorů dimenze 2 má operátor φ? Bod pouze za zdůvodnění. *(1 bod)*

10. Napište přesné znění věty o Jordanově kanonickém tvaru reálné matice A. *(1 bod)*

Jméno: **Fakulta:** **Předmět:**

B. Písemka z lineární algebry II, červen 2004 – početní část

Max. počet bodů 12

1. Lineární operátor $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je kolmou projekcí na rovinu

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0.$$

Najděte nejprve matici operátoru φ ve vhodné ortonormální bázi α a potom matici operátoru φ ve standardní bázi. Řešení doprovoďte slovním komentářem. *(4 body)*

2. V $\mathbb{R}^4$ najděte vzdálenost přímky $p : (1,5,1,1) + a(-1,2,1,0)$ od roviny $\tau : (7,3,1,5) + b(2,-1,0,-1) + c(0,-1,1,0)$ a body $A \in p$ a $B \in \tau$, v nichž se tato vzdálenost realizuje. Výpočet doprovoďte slovním komentářem. *(4 body)*

3. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

a matici P, která realizuje podobnost $J = P^{-1}AP$. Řešení doprovoďte slovním komentářem. *(4 body)*

Teoretická část

Max. počet bodů 10

1. Nechť $\mathbb{R}_1[x]$ je prostor polynomů stupně nejvýše 1 s reálnými koeficienty. Najděte předpis pro lineární formy $g_1, g_2 : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}$, které tvoří duální bázi k bázi $3x$, $x+2$. *(1 bod)*

2. Uveďte příklad kvadratické formy $q : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ takové, že $q(x-2) = 7$. *(1 bod)*

3. V $\mathbb{R}_2[x]$ najděte nějaký dvourozměrný afinní podprostor obsahující polynomy $x^2, 3x, 2+x$. *(1 bod)*

4. Dokažte, že pro všechny čtveřice reálných čísel (x_1, x_2, x_3, x_4) platí nerovnost
$4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 7\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$. *(1 bod)*

5. Nechť $\varphi : U \to V$ má adjungované zobrazení $\varphi^* : V \to U$. Dokažte, že podprostor $\operatorname{Ker} \varphi$ je kolmý k podprostoru $\operatorname{Im} \varphi^*$. *(1 bod)*

6. Ve standardních souřadnicích napište předpis pro adjungované zobrazení k zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to R^4$, $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, x_2, x_1 + 3x_2, x_1)$. *(1 bod)*

7. Napište příklad unitárního zobrazení $\varphi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, které není násobkem identity.

8. Napište přesně, jak se pro danou bilineární formu $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ hledá ortonormální báze, v níž má f diagonální tvar. *(1 bod)*

9. Nechť matice lineárního operátoru φ má matici v Jordanově kanonickém tvaru tvořenou dvěma buňkami o rozměrech 3×3 a 1×1 s různými vlastními čísly. Kolik různých invariantních podprostorů dimenze 2 má operátor φ? Bod pouze za zdůvodnění. *(1 bod)*

10. Napište přesné znění věty o Jordanově kanonickém tvaru pro lineární operátor φ na reálném vektorovém prostoru. *(1 bod)*