Jméno: **Fakulta:** **Předmět:**

D. Písemka z lineární algebry II, červen 2003 – početní část

Max. počet bodů 12

1. Rovnicí

$$x_1x_2 + 3x_1 - 2x_2 - 6 = 0$$

je dána kuželosečka v $\mathbb{R}^2$. Určete, o jaký druh kuželosečky jde, najděte její střed, rovnicemi popište její osy symetrie a ve standardním souřadnicovém systému načrtněte její obrázek. Řešení doprovoďte slovním komentářem. *(4 body)*

2. V $\mathbb{R}^4$ najděte vzdálenost přímky $p : (-3, 2, 3, 3) + t(-1, 1, 1, 0)$ od přímky $q : (6, 5, 7, 3) + s(0, 0, -1, 2)$ a body $A \in p$ a $B \in q$, v nichž se tato vzdálenost realizuje. Výpočet doprovoďte slovním komentářem. *(4 body)*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 1/2 & -1/2 \\ \sqrt{2}/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

3. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice A nad $\mathbb{R}$ i nad $\mathbb{C}$. Jejich analýzou zjistěte, jaké geometrické zobrazení euklidovského prostoru $\mathbb{R}^3$ popisuje lineární operátor $x \mapsto A \cdot x$. Řešení doprovoďte slovním komentářem. *(4 body)*

Teoretická část – pouze pro předměty M2110 a MA004

Max. počet bodů 10

1. Nechť $\mathbb{C}_2[x]$ je prostor polynomů stupně nejvýše 2 s komplexními koeficienty. Uveďte příklad lineární formy $f : \mathbb{C}_2[x] \to \mathbb{C}$ takové, že $f(2x + i) = 3i$. *(1 bod)*

2. Uveďte příklad bilineární formy $g : \mathbb{C}_2[x] \times \mathbb{C}_2[x] \to \mathbb{C}$ takové, že $g(x + 1, x) = 3i$. *(1 bod)*

3. Napište definici skalárního součinu na vektorovém prostoru nad $\mathbb{C}$. Udejte příklad nějakého skalárního součinu na $\mathbb{C}_2[x]$. *(1 bod)*

4. Nechť P je matice a $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = Px$ je kolmá projekce na nějaký podprostor $V \subset \mathbb{R}^n$. Dokažte, že $P^T = P$. Bod pouze za správné zdůvodnění. *(1 bod)*

5. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je kolmá projekce na přímku $x_1 = x_2$. Ve standardních souřadnicích napište předpis, čemu se rovná $\varphi(x_1, x_2)$. Pomocí něho určete matici operátoru φ ve standardní bázi. *(1 bod)*

6. Kolik Jordanových buněk s vlastním číslem 4 má v Jordanově kanonickém tvaru matice A o rozměrech 13×13, jestliže hodnost $A - 4E$ je 8? Bod pouze za zdůvodnění správné odpovědi. *(1 bod)*

7. Napište všechny možné Jordanovy kanonické tvary matice 5×5, která má právě dvě vlastní čísla, a to 7 algebraické násobnosti 2 a 8 algebraické násobnosti 3. *(1 bod)*

8. Napište předpis pro adjungované zobrazení k zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 0, x_3, x_2 + x_3)$. *(1 bod)*

9. Uveďte příklad lineárního operátoru $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, který má právě 3 různé invariantní podprostory. Tyto podprostory napište. *(1 bod)*

10. Napište přesné znění věty o Jordanově kanonickém tvaru reálné matice A. *(1 bod)*

Jméno: **Fakulta:** **Předmět:**

E. Písemka z lineární algebry II, červen 2003 – početní část

Max. počet bodů 12

1. Rovnicí

$$x_1x_2 - 4x_1 + 3x_2 - 12 = 0$$

je dána kuželosečka v $\mathbb{R}^2$. Určete, o jaký druh kuželosečky jde, najděte její střed, rovnicemi popište její osy symetrie a ve standardním souřadnicovém systému načrtněte její obrázek. Výpočet doprovoďte slovním komentářem. *(4 body)*

2. V $\mathbb{R}^4$ najděte vzdálenost přímky $p : (-2, -3, 1, 3) + t(1, -1, 2, 0)$ od přímky $q : (1, 3, 0, 3) + s(0, 1, 1, -2)$ a body $A \in p$ a $B \in q$, v nichž se tato vzdálenost realizuje. Řešení doprovoďte slovním komentářem. *(4 body)*

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice A nad $\mathbb{R}$ i nad $\mathbb{C}$. Jejich analýzou zjistěte, jaké geometrické zobrazení euklidovského prostoru $\mathbb{R}^3$ popisuje lineární operátor $x \mapsto A \cdot x$. Řešení doprovoďte slovním komentářem. *(4 body)*

Teoretická část – pouze pro předměty M2110 a MA004

Max. počet bodů 10

1. Napište všechny možné Jordanovy kanonické tvary matice 6×6, která má právě tři vlastní čísla, a to 1 algebraické násobnosti jedna, 2 algebraické násobnosti 2 a 3 algebraické násobnosti 3. *(1 bod)*

2. Napište přesné znění věty o Jordanově kanonickém tvaru reálné matice B. *(1 bod)*

3. Napište předpis pro adjungované zobrazení k zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $\varphi(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 0, x_2, x_1 + x_2)$. *(1 bod)*

4. Uveďte příklad lineárního operátoru $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, který má právě 3 různé invariantní podprostory. Tyto podprostory napište. *(1 bod)*

5. Nechť S je matice a $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = Sx$ je kolmá projekce na nějaký podprostor $V \subset \mathbb{R}^n$. Dokažte, že $S^T = S$. Bod pouze za správné zdůvodnění. *(1 bod)*

6. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je kolmá projekce na přímku $x_1 + x_2 = 0$. Ve standardních souřadnicích napište předpis, čemu se rovná $\varphi(x_1, x_2)$. Pomocí něho určete matici operátoru φ ve standardní bázi. *(1 bod)*

7. Kolik Jordanových buněk s vlastním číslem 8 má v Jordanově kanonickém tvaru matice B o rozměrech 16×16, jestliže hodnost $A - 8E$ je 9? Bod pouze za zdůvodnění správné odpovědi. *(1 bod)*

8. Nechť $\mathbb{C}_2[x]$ je prostor polynomů stupně nejvýše 2 s komplexními koeficienty. Uveďte příklad lineární formy $f : \mathbb{C}_2[x] \to \mathbb{C}$ takové, že $f(x + 2i) = 5i$. *(1 bod)*

9. Uveďte příklad bilineární formy $g : \mathbb{C}_2[x] \times \mathbb{C}_2[x] \to \mathbb{C}$ takové, že $g(x, 1 - x) = 5i$. *(1 bod)*

10. Napište definici skalárního součinu na vektorovém prostoru nad $\mathbb{R}$. Udejte příklad nějakého skalárního součinu na $\mathbb{R}_3[x]$. *(1 bod)*