Jméno: **Fakulta:** **Předmět:**

B. Písemka z lineární algebry II, červen 2003 – početní část

Max. počet bodů 12

1. Najděte ortonormální bázi v $\mathbb{R}^2$, v níž má kvadratická forma

$$f(x) = 3x_1^2 - 3x_2^2 + 8x_1x_2, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

diagonální tvar. Pomocí této báze zjistěte, jakou kuželosečku popisuje rovnice $f(x_1, x_2) = 10$, a co nejpřesněji (s vyznačením os symetrie a měřítka) načrtněte její obrázek ve standardních souřadnicích. Řešení doprovoďte slovním komentářem. (*4 body*)

2. V $\mathbb{R}^4$ najděte úhel, který svírá rovina $\rho : (2, 9, 0, 6) + a(0, 1, 0, 5) + b(0, 2, 0, -7)$ s přímkou $p : (6, 5, 7, 3) + c(3, 4, 4, 3)$. Výpočet doprovoďte slovním komentářem. (*4 body*)

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3i. (Pouze pro předměty M2110 a MA004) Najděte Jordanův kanonický tvar J matice B a bázi prostoru $\mathbb{R}^4$, ve které má lineární operátor $x \mapsto B \cdot x$ matici J. (*4 body*)

3ii. (Pouze pro předmět M504) Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice C. U vlastních čísel určete jejich algebraickou a geometrickou násobnost a zjistěte, zda je matice C podobná nějaké diagonální matici. (*4 body*)

Teoretická část – pouze pro předměty M2110 a MA004

Max. počet bodů 10

1. Nechť $Mat_2(\mathbb{R})$ je prostor reálných matic 2×2. Uveďte příklad lineární formy $f : Mat_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ takové, že $f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 3$. (*1 bod*)

2. Uveďte příklad kvadratické formy $g : Mat_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ takové, že $g\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 3$. (*1 bod*)

3. Nechť U je vektorový prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{C}$. Napište definici unitárního lineárního operátoru $\varphi : U \to U$. Udejte příklad unitárního operátoru na $\mathbb{C}^3$, který není násobkem identického zobrazení. (*1 bod*)

4. Nechť U je vektorový prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{R}$. Nechť $\varphi : U \to U$ je kolmá projekce na podprostor $V \subset U$. Je φ ortogonální operátor? Bod pouze za správné zdůvodnění. (*1 bod*)

5. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je symetrie podle roviny $x_1 = x_3$. Napište předpis, čemu se rovná $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, a matici operátoru φ ve standardní bázi. (*1 bod*)

6. Napište definici geometrické násobnosti vlastního čísla lineárního operátoru $\varphi : U \to U$. (*1 bod*)

7. Udejte příklad reálné matice 4×4 s vlastním číslem algebraické násobnosti 3 a geometrické násobnosti 2. (*1 bod*)

8. Nechť U je nadrovina v $\mathbb{R}^n$ procházející počátkem. Je symetrie $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ podle této nadroviny samoadjungovaný operátor? Bod pouze za správné zdůvodnění. (*1 bod*)

9. Matice lineárního operátoru $\varphi : U \to U$ v bázi α je A, v bázi β je B. Popište relaci mezi A a B. (*1 bod*)

10. Napište přesné znění věty o diagonalizaci kvadratické formy v ortonormální bázi. Jak tuto bázi získáme? (*1 bod*)

Jméno: **Fakulta:** **Předmět:**

C. Písemka z lineární algebry II, červen 2003 – početní část

Max. počet bodů 12

1. V $\mathbb{R}^4$ najděte úhel, který svírá rovina $\rho : (3,1,4,5) + a(2,-2,3,0) + b(-1,1,-2,0)$ s přímkou $p : (9,8,7,1) + c(1,-1,1,3)$. Výpočet doprovoďte slovním komentářem. (*4 body*)

2. Najděte ortonormální bázi v $\mathbb{R}^2$, v níž má kvadratická forma

$$f(y) = 3y_1^2 - 3y_2^2 - 8y_1y_2, \quad y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

diagonální tvar. Pomocí této báze zjistěte, jakou kuželosečku popisuje rovnice $f(y_1, y_2) = 15$, a co nejpřesněji (s vyznačením os symetrie a měřítka) načrtněte její obrázek ve standardních souřadnicích. Řešení doprovoďte slovním komentářem. (*4 body*)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3i. (Pouze pro předměty M2110 a MA004) Najděte Jordanův kanonický tvar J matice B a bázi prostoru $\mathbb{R}^4$, ve které má lineární operátor $x \mapsto B \cdot x$ matici J. (*4 body*)

3ii. (Pouze pro předmět M504) Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice C. U vlastních čísel určete jejich algebraickou a geometrickou násobnost a zjistěte, zda je matice C podobná nějaké diagonální matici. (*4 body*)

Teoretická část – pouze pro předměty M2110 a MA004

Max. počet bodů 10

1. Napište definici algebraické násobnosti vlastního čísla lineárního operátoru $\varphi : U \to U$. (*1 bod*)

2. Udejte příklad reálné matice 5×5 s vlastním číslem algebraické násobnosti 4 a geometrické násobnosti 2. (*1 bod*)

3. Nechť U je vektorový podprostor dimenze $n-2$ v $\mathbb{R}^n$. Je symetrie $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ podle tohoto podprostoru samoadjungovaný operátor? Bod pouze za správné zdůvodnění. (*1 bod*)

4. Nechť U je vektorový prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{R}$. Napište definici ortogonálního lineárního operátoru $\varphi : U \to U$. Udejte příklad ortogonálního operátoru na $\mathbb{R}^4$, který není násobkem identického zobrazení. (*1 bod*)

5. Matice lineárního operátoru $\psi : U \to U$ v bázi γ je C, v bázi δ je D. Popište relaci mezi C a D. (*1 bod*)

6. Napište přesné znění věty o diagonalizaci matice samoadjungovaného lineárního operátoru ve vhodné bázi. Jak tuto bázi získáme? (*1 bod*)

7. Nechť U je vektorový prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{C}$. Nechť $\varphi : U \to U$ je kolmá projekce na podprostor $V \subset U$. Je φ unitární operátor? Bod pouze za správné zdůvodnění. (*1 bod*)

8. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je symetrie podle roviny $x_2 + x_3 = 0$. Napište předpis, čemu se rovná $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, a matici operátoru φ ve standardní bázi. (*1 bod*)

9. Nechť $Mat_2(\mathbb{R})$ je prostor reálných matic 2×2. Uveďte příklad lineární formy $f : Mat_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ takové, že $f\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 5$. (*1 bod*)

10. Uveďte příklad kvadratické formy $g : Mat_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ takové, že $g\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 5$. (*1 bod*)