A. Písemka z lineární algebry II, červen 2003 – početní část

Max. počet bodů 12

1. V $\mathbb{R}^4$ najděte vzdálenost přímky $p : (-2,-3,1,3)+t(1,-1,2,0)$ od přímky $q : (1,3,0,3)+s(0,1,1,-2)$ a body $A \in p$ a $B \in q$, v nichž se tato vzdálenost realizuje. Výpočet doprovoďte slovním komentářem. *(4 body)*

2. Ve standardních souřadnicích v $\mathbb{R}^3$ napište matici zobrazení φ, které je symetrií podle roviny $x_3 + \sqrt{3}x_1 = 0$. Výpočet doprovoďte slovním komentářem. *(4 body)*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 9 & -4 \\ -5 & -7 & 3 \\ -4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

4i. pouze pro předměty M2110 a MA004. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice A a bázi prostoru $\mathbb{R}^4$, ve které má lineární operátor $x \mapsto A \cdot x$ matici J. *(4 body)*

4ii. pouze pro předmět M504. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice B. U vlastních čísel určete jejich algebraickou a geometrickou násobnost a zjistěte, zda je matice B podobná nějaké diagonální matici. *(4 body)*

Teoretická část – pouze pro předměty M2110 a MA004

Max. počet bodů 10

1. Nechť $\mathbb{R}_3[x]$ je prostor polynomů stupně nejvýše 3. Uveďte příklad lineární formy $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}$ takové, že $f(x^2) = 2$ a $f(x) = 3$. *(1 bod)*

2. Uveďte příklad kvadratické formy $g : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}$ takové, že $g(x^2) = 2$ a $g(x) = 3$. *(1 bod)*

3. Nechť U je vektorový prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{C}$. Napište definici samoadjungovaného lineárního operátoru $\varphi : U \to U$. Udejte příklad samoadjungovaného operátoru na $\mathbb{C}^3$, který není násobkem identického zobrazení. *(1 bod)*

4. Nechť $\varphi : U \to U$ je kolmá projekce na podprostor $V \subset U$. Je φ samoadjungovaný? Bod pouze za správné zdůvodnění. *(1 bod)*

5. Napište inverzní matici k matici: $\begin{pmatrix} \sqrt{1/2} & \sqrt{1/2} & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{1/2} & -\sqrt{1/2} \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ *(1 bod)*

6. Napište definici vlastního vektoru lineárního operátoru $\varphi : U \to U$. *(1 bod)*

7. Udejte příklad reálné matice 2×2, která v $\mathbb{R}^2$ nemá žádný vlastní vektor. *(1 bod)*

8. Nechť U je nadrovina v $\mathbb{R}^n$ procházející počátkem. Nech $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je symetrie podle této nadroviny. Určete všechna vlastní čísla operátoru φ a jejich algebraickou a geometrickou násobnost. *(1 bod)*

9. Matice bilineární formy $h : U \times U \to \mathbb{R}$ v bázi α je A, v bázi β je B. Popište relaci mezi A a B. *(1 bod)*

10. Napište přesné znění věty o Jordanově kanonickém tvaru pro lineární operátory. Bod pouze za správnou formulaci. *(1 bod)*