Jméno: **UČO:** **login:**

A. Písemka z lineární algebry II, květen 2001 – početní část

Max. počet bodů 12

1. Rovnicí
$$6x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 20x_1 - 28x_2 + 22 = 0$$
je dána kuželosečka v $\mathbb{R}^2$. Určete, o jaký druh kuželosečky jde, najděte její kanonický tvar ve vhodné bázi, její osy, střed a načrtněte její obrázek. *(3 body)*

2. V $\mathbb{R}^4$ najděte vzdálenost roviny $\alpha : (1,1,-1,1)+s(1,0,3,0)+t(2,0,-1,0)$ od přímky $p : (3,11,-1,6)+r(1,-4,2,3)$. Dále najděte parametrickou rovnici přímky q, která kolmo protíná α i p. Slovy popište stručně postup a vypočtěte. *(3 body)*

3. Na základě výpočtu vysvětlete, proč zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x) = Cx$, popisuje symetrii podle nějaké roviny
$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0.$$
Najděte koeficienty a, b, c. *(3 body)*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ -9 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

4.A pouze pro předmět M004. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice A a bázi prostoru $\mathbb{R}^4$, ve které má lineární operátor $x \mapsto A \cdot x$ matici J. *(3 body)*

4.B pouze pro předmět M504. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice B. U vlastních čísel určete jejich algebraickou a geometrickou násobnost a zjistěte, zda je matice B podobná nějaké diagonální matici. *(3 body)*

Teoretická část – pouze pro předmět M004

Max. počet bodů 10

1. Napište definici skalárního součinu na reálném vektorovém prostoru V. *(1 bod)*

2. Napište předpis adjungovaného zobrazení $\varphi^* : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ k zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, 3x_1)$ ve standardním skalárním součinu. *(2 body)*

3. Napište definici ortogonálního lineárního zobrazení v reálném vektorovém prostoru V se skalárním součinem. *(1 bod)*

4. Napište Jordanův kanonický tvar matice 6×6 s vlastním číslem 2 algebraické násobnosti 6 a geometrické násobnosti 5. *(1 bod)*

5. Napište nějaký prostý homomorphismus grupy $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ do grupy $GL(4, \mathbb{R})$. *(1 bod)*

6. Dokažte, že regulární matice 3×3 s posledním sloupcem $(0,0,1)^T$ tvoří podgrupu grupy všech regulárních matic $GL(3, \mathbb{R})$. *(2 body)*

7. Ve standardní soustavě souřadnic x, y napište rovnici nějaké paraboly, jejíž osa symetrie je přímka $y = -3$. *(1 bod)*

8. Nechť $u_1, u_2, \ldots, u_k$ jsou nenulové, navzájem kolmé vektory v reálném vektorovém prostoru V se skalárním součinem. Z definice dokažte, že jsou lineárně nezávislé. *(2 body)*

Jméno: **UČO:** **login:**

B. Písemka z lineární algebry II, květen 2001 – početní část

Max. počet bodů 12

1. Rovnicí
$$3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 - 14x_1 - 10x_2 + 11 = 0$$
je dána kuželosečka v $\mathbb{R}^2$. Určete, o jaký druh kuželosečky jde, najděte její kanonický tvar ve vhodné bázi, její osy, střed a načrtněte její obrázek. *(3 body)*

2. V $\mathbb{R}^4$ najděte vzdálenost roviny $\alpha : (1,1,1,-1)+s(0,-2,0,1)+t(0,1,0,3)$ od přímky $p : (11,3,6,-1)+r(4,-1,-3,-2)$. Dále najděte parametrickou rovnici přímky q, která kolmo protíná α i p. Slovy popište stručně postup a vypočtěte. *(3 body)*

3. Na základě výpočtu vysvětlete, proč zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x) = Cx$, popisuje symetrii podle nějaké roviny
$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0.$$
Najděte koeficienty a, b, c. *(3 body)*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4.A pouze pro předmět M004. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice A a bázi prostoru $\mathbb{R}^4$, ve které má lineární operátor $x \mapsto A \cdot x$ matici J. *(3 body)*

4.B pouze pro předmět M504. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice B. U vlastních čísel určete jejich algebraickou a geometrickou násobnost a zjistěte, zda je matice B podobná nějaké diagonální matici. *(3 body)*

Teoretická část – pouze pro předmět M004

Max. počet bodů 10

1. Napište definici kvadratické formy $f : V \to \mathbb{R}$. *(1 bod)*

2. Napište předpis adjungovaného zobrazení $\varphi^* : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ k zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x_1, x_2) = (4x_1, x_1 + 3x_2)$ ve standardním skalárním součinu. *(2 body)*

3. Napište definici samoadjungovaného lineárního zobrazení v reálném vektorovém prostoru V se skalárním součinem. *(1 bod)*

4. Napište Jordanův kanonický tvar matice 7×7 s vlastním číslem 4 algebraické násobnosti 7 a geometrické násobnosti 6. *(1 bod)*

5. Napište nějaký prostý homomorphismus grupy $GL(2,\mathbb{R})$ do grupy $GL(3,\mathbb{R})$. *(1 bod)*

6. Nechť $u_1, u_2, \ldots, u_k$ jsou nenulové, navzájem kolmé vektory v reálném vektorovém prostoru V se skalárním součinem. Z definice dokažte, že jsou lineárně nezávislé. *(2 body)*

7. Dokažte, že regulární matice 3×3 s posledním řádkem $(0,0,1)$ tvoří podgrupu grupy všech regulárních matic $GL(3,\mathbb{R})$. *(2 body)*

8. Ve standardní soustavě souřadnic x, y napište rovnici nějaké paraboly, jejíž osa symetrie je přímka $y = 5$. *(1 bod)*

A. Řešení početní části

1. Vlastní čísla a vektory jsou
$\lambda_1 = 4$, $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$
$\lambda_2 = 8$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$
Kuželosečka je elipsa s rovnicí v souřadnicích báze $0, u_1, u_2$

$$\left(\frac{y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - \frac{3}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1.$$

Ve standardních souřadnicích má střed $(1,2)$, hlavní poloosu 2 ve směru $(1,-1)$, vedlejší poloosu $\sqrt{2}$ ve směru $(1,1)$.

2. Vektor kolmý k přímce i rovině je $(0,3,0,4)$. Průniky

$$q \cap \alpha = (4,1,1,1), \quad q \cap p = (4,7,1,9)$$

dostaneme řešením soustavy rovnic ($s = t = r = 1$).
Vzdálenost je 10.

3. Matice C je ortogonální, má vlastní čísla $-1, 1, 1$ a vlastní vektor k -1 je $u = (1,-2,1)$. Proto se jedná o symetrii podle roviny kolmé k u procházející počátkem a ta má rovnici

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0.$$

4a. Vlastní čísla a vektory jsou
$\lambda_1 = 1$, $v_1 = (0,1,0,0)$
$\lambda_2 = -2$ alg. násobnosti 3, $v_2 = (1,3,0,0)$, $v_3 = (0,2,1,0)$
Počátkem řetězce délky 2 je vlastní vektor $(1,-1,-2,0)$.
V bázi $\alpha : (0,1,0,0), (1,3,0,0), (1,-1,-2,0), (0,1,0,1)$ má zobrazení Jordanův kanonický tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

4b. Vlastní čísla a vektory jsou
$\lambda_1 = 0$, $v_1 = (-2,1,0,0), v_2 = (-3,0,0,1)$
$\lambda_2 = 2$, $v_3 = (0,0,1,0)$, $v_4 = (1,-1,0,1)$
V bázi $\alpha : (v_1, v_2, v_3, v_4)$ má zobrazení $x \mapsto Bx$ diagonální matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

B. Řešení početní části

1. Vlastní čísla a vektory jsou
$\lambda_1 = 2$, $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$
$\lambda_2 = 4$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$
Kuželosečka je elipsa s rovnicí v souřadnicích báze $0, u_1, u_2$

$$\left(\frac{y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - \frac{3}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1.$$

Ve standardních souřadnicích má střed $(2,1)$, hlavní poloosu 2 ve směru $(1,-1)$, vedlejší poloosu $\sqrt{2}$ ve směru $(1,1)$.

2. Vektor kolmý k přímce i rovině je $(3,0,4,0)$. Průniky

$$q \cap \alpha = (1,4,1,1), \quad q \cap p = (7,4,9,1)$$

dostaneme řešením soustavy rovnic ($s = r = -1$, $t = 1$).
Vzdálenost je 10.

3. Matice C je ortogonální, má vlastní čísla $-1, 1, 1$ a vlastní vektor k -1 je $u = (-2,1,1)$. Proto se jedná o symetrii podle roviny kolmé k u, procházející počátkem a ta má rovnici

$$-2x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

4a. Vlastní čísla a vektory jsou
$\lambda_1 = -1$, $v_1 = (0,1,0,0)$
$\lambda_2 = 2$ alg. násobnosti 3, $v_2 = (2,0,1,0)$, $v_3 = (1,1,0,0)$
Počátkem řetězce délky 2 je vlastní vektor $(1,-3,2,0)$.
V bázi $\alpha : (0,1,0,0), (2,0,1,0), (1,-3,2,0), (0,0,1,1)$ má zobrazení Jordanův kanonický tvar

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4b. Vlastní čísla a vektory jsou
$\lambda_1 = 0$, $v_1 = (1,-2,0,0), v_2 = (0,-3,0,1)$
$\lambda_2 = 2$, $v_3 = (0,0,1,0)$, $v_4 = (-1,1,0,1)$
V bázi $\alpha : (v_1, v_2, v_3, v_4)$ má zobrazení $x \mapsto Bx$ diagonální matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$