Jméno a příjmení: **UČ0:** **Předmět:**

C. Písemka z lineární algebry I, leden 2002 – početní část

Max. počet bodů 12

1. Nechť A je matice tvaru $n \times n$ taková, že $A_{ij} = 1$ pro $i < j$ a $A_{ij} = 0$ pro $i \geq j$. Vypočtěte součin $A \cdot A$. *(2 body)*

2. Pro které hodnoty parametrů $p, q \in \mathbb{R}$ soustava rovnic

$$\begin{aligned} x - y - z &= 0 \\ px + y - 2z &= 1 \\ (1+p)y - z &= q \end{aligned}$$

(i) nemá žádné řešení, (ii) má nekonečně mnoho řešení? V druhém případě všechna řešení najděte. *(2 body)*

3. V $\mathbb{R}^4$ uvažujme nadrovinu $\rho : x_1 + x_2 + x_3 = 0$, přímku $p : (3, -5, 1, 3) + \gamma(1, 1, 1, 1)$ a bod $M = (2, 0, 0, 2)$. Najděte přímku q, která prochází bodem M, protíná přímku p a je rovnoběžná s nadrovinou ρ. Slovy popište stručně postup a vypočtěte. *(2 body)*

4. V $\mathbb{R}^4$ zjistěte vzájemnou polohu roviny $\rho : -x_1 + x_3 + 4x_4 = 5,\ -2x_2 + x_3 + x_4 = 3$ a přímky $p : (1, 9, 9, 9) + \alpha(5, 1, 1, 1)$. *(2 body)*

5. Matice lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ v bázi $\alpha = (1, 1 + x^2, x, x + x^3)$ je

$$(f)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Najděte matici $(f)_{\beta,\beta}$ v bázi $\beta = (1, 1 + x, x^2, x^3)$.

(2 body)

6. Uvažujme lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$,

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4, 2x_1 - x_2 + x_3, x_1 - x_2 - x_4, 2x_1 + 2x_3 + 2x_4).$$

Najděte bázi $\operatorname{Ker} f$ a bázi $\operatorname{Im} f$. *(2 body)*

Teoretická část

Max. počet bodů 8

1. Napište pečlivě definici determinantu matice. *(1 bod)*

2. $\mathbb{C}^2$ je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$. Napište nějakou jeho bázi obsahující vektor $(1 + i, i)$. *(1 bod)*

3. $\mathbb{C}^2$ je rovněž vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Napište nějakou jeho bázi obsahující vektor $(1 + i, i)$. *(1 bod)*

4. Napište matici přechodu od báze $\alpha = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ k bázi $\beta = (v_2 + v_3, v_3, v_4, -v_1)$. *(1 bod)*

5. Které z axiomů vektorového prostoru nad $\mathbb{R}$ nejsou splněny pro množinu $V = \mathbb{R}$ a operace $a \odot x = a^2 x$ a $x \oplus y = 2x + 2y$? *(1 bod)*

6. Napište předpis pro nějaký lineární izomorfismus $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, který není násobkem identity. *(1 bod)*

7. Na pěti řádcích napište základní myšlenku důkazu formule pro výpočet dimenze součtu podprostorů. *(1 bod)*

8. Nechť $f : U \to V$ je lineární zobrazení. Nechť $u_1, u_2, \ldots, u_k$ je báze $\operatorname{Ker} f$ a nechť $u_1, u_2, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n$ je báze U. Dokažte, že vektory $f(u_{k+1}), f(u_{k+2}, \ldots, f(u_n)$ jsou lineárně nezávislé. *(1 bod)*