D. Písemka z lineární algebry I, leden 2000 – početní část

Max. počet bodů 15, do celkového hodnocení se započítává s váhou 2

1. Vypočtěte determinant matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *(2 body)*

2. V $\mathbb{R}^4$ uvažujme rovinu $\rho : \alpha(1,0,0,0) + \beta(0,1,0,0)$, přímku $p : (0,0,0,1) + \gamma(0,0,1,0)$ a vektor $u = (2,4,-2,-1)$. Najděte přímku q, která má směrový vektor u, protíná rovinu ρ a přímku p. Slovy popište stručně postup a vypočtěte. *(3 body)*

3. V $\mathbb{R}^4$ najděte nějaký bod A, zaměření $Z(\rho)$ afinního podprostoru ρ a jeho parametrický popis, je-li ρ zadáno soustavou rovnic

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \quad x_1 + x_2 + x_4 = 7, \quad x_2 - x_3 - x_4 = -5.$$

(2 body)

4. V $\mathbb{R}^4$ zjistěte vzájemnou polohu roviny $\rho : x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$, $x_1 + x_3 + 2x_4 = 3$ a přímky $p : (3,1,0,0) + \alpha(-1,2,1,1)$. *(3 body)*

5. Najděte matici přechodu od báze $\beta = ((1,0,1)^T, (2,1,0)^T, (0,1,1)^T)$ v $\mathbb{R}^3$ k bázi $\alpha = ((1,1,1)^T, (1,1,0)^T, (1,0,0)^T)$. Pomocí této matice vypočtěte souřadnice vektoru u v bázi α, víte-li, že jeho souřadnice v bázi β jsou $(1,2,-1)$. *(2 body)*

6. Uvažujme lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takové, že $f(1,0,0) = (1,1,0)$, $f(1,1,0) = (1,0,1)$, $f(0,0,1) = (1,-1,2)$.
a) Napište matici zobrazení f ve standardních bazích.
b) Najděte bázi $\operatorname{Ker} f$.
c) Najděte bázi $\operatorname{Im} f$. *(3 body)*

Teoretická část – pouze pro předmět M003

Max. počet bodů 15, do celkového hodnocení se započítává s váhou 2

1. Napište definici afinního podprostoru ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$. (Vysvětlete použité označení.) *(2 body)*

2. Napište Cramerovo pravidlo pro řešení soustavy lineárních rovnic. Pro které soustavy lineárních rovnic jej můžeme použít? *(2 body)*

3. Napište definici součtu dvou podprostorů V a U ve vektorovém prostoru X. *(2 body)*

4. Určete znaménko permutace $(2n, 2n-2, \ldots, 4, 2, 2n-1, 2n-3, \ldots, 3, 1)$. *(2 body)*

5. Z definice lineární nezávislosti dokažte: Jsou-li u_1, u_2, u_3 lineárně nezávislé vektory ve vektorovém prostoru U, pak $u_1 + 2u_2 - u_3$, $2u_1 - u_2$, $2u_1 + u_2 - u_3$ jsou rovněž lineárně nezávislé. *(3 body)*

6. V $\mathbb{R}^3$ zadejte parametricky 2000 přímek, které jsou po dvou navzájem mimoběžné. Jejich mimoběžnost stručně, ale jasně ukažte. *(2 body)*

7. Najděte reálnou čtvercovou matici A, $A \neq \pm E$ tak, aby $A^{-1} = A$. *(2 body)*

E. Písemka z lineární algebry I, leden 2000 – početní část

Max. počet bodů 15, do celkového hodnocení se započítává s váhou 2

1. Vypočtěte determinant matice $A = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 1 \\ 0 & e & 1 & 0 \\ 0 & 1 & e & 0 \\ 1 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}$. *(2 body)*

2. V $\mathbb{R}^4$ uvažujme rovinu $\rho : \alpha(1,0,0,0) + \beta(0,1,0,0)$, přímku $p : (0,0,0,1) + \gamma(0,0,1,0)$ a vektor $u = (2,-3,4,-1)$. Najděte přímku q, která má směrový vektor u, protíná rovinu ρ a přímku p. Slovy popište stručně postup a vypočtěte. *(3 body)*

3. V $\mathbb{R}^4$ najděte nějaký bod A, zaměření $Z(\rho)$ afinního podprostoru ρ a jeho parametrický popis, je-li ρ zadáno soustavou rovnic

$$x_1 + x_2 - x_4 = -5, \quad 2x_1 - x_3 + x_4 = -3, \quad 2x_2 + x_3 + x_4 = 1.$$

(2 body)

4. V $\mathbb{R}^4$ zjistěte vzájemnou polohu roviny $\rho : x_1 + x_2 - x_4 = -1$, $2x_1 - x_3 + x_4 = -3$ a přímky $p : (0,1,2,0) + \alpha(-1,1,2,1)$. *(3 body)*

5. Najděte matici přechodu od báze $\beta = ((0,2,1)^T, (1,1,0)^T, (1,0,1)^T)$ v $\mathbb{R}^3$ k bázi $\alpha = ((1,1,1)^T, (1,1,0)^T, (1,0,0)^T)$. Pomocí této matice vypočtěte souřadnice vektoru u v bázi α, víte-li, že jeho souřadnice v bázi β jsou $(1,2,-1)$. *(2 body)*

6. Uvažujme lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takové, že $f(1,0,0) = (1,0,1)$, $f(0,1,0) = (1,2,-1)$, $f(1,0,1) = (0,-1,1)$.
a) Napište matici zobrazení f ve standardních bazích.
b) Najděte bázi $\operatorname{Ker} f$.
c) Najděte bázi $\operatorname{Im} f$. *(3 body)*

Teoretická část – pouze pro předmět M003

Max. počet bodů 15, do celkového hodnocení se započítává s váhou 2

1. Napište definici lineární nezávislosti vektorů $u_1, u_2, \ldots, u_k$ ve vektorovém prostoru U. *(2 body)*

2. Napište vzorec pro výpočet inverzní matice pomocí algebraických doplňků. (Vysvětlete použité označení.) *(2 body)*

3. Napište definici lineárního obalu množiny M ve vektorovém prostoru X. *(2 body)*

4. Určete znaménko permutace $(2n-1, 2n-3, \ldots, 3, 1, 2n, 2n-2, \ldots, 4, 2)$. *(2 body)*

5. Z definice lineární nezávislosti dokažte: Jsou-li u_1, u_2, u_3 lineárně nezávislé vektory ve vektorovém prostoru U, pak $u_1 - 2u_2 - u_3$, $2u_1 - u_2$, $2u_1 - 3u_2 - u_3$ jsou rovněž lineárně nezávislé. *(3 body)*

6. V $\mathbb{R}^2$ zadejte parametricky 2000 bodů, z nichž žádné 3 neleží na jedné přímce. Tuto jejich vlastnost stručně, ale jasně ukažte. *(2 body)*

7. Najděte reálnou čtvercovou matici A, tak, aby $A^{-1} = -A$. *(2 body)*

D. Řešení početní části

1. $-(1-a^2)^2$ *2 body*

2. Najdeme rovinu τ určenou přímkou p a směrovým vektorem u a spočítáme její průnik s rovinou ρ, bod Q. Hledaná přímka q prochází bodem Q (pokud tento existuje.)

$$\tau : (0,0,0,1) + \gamma(0,0,1,0) + \delta(2,4,-2,-1)$$

Výpočet průniku $pM \cap \rho$ vede k soustavě s řešením $\delta = 1$, $\gamma = 2$.

$$Q = (2,4,0,0), \quad q : (2,4,0,0) + t(2,4,-2,-1).$$

3 body

3.

$$\rho : (1,2,3,4) + t(0,1,2,-1)$$

2 body

4. Zjistíme, že $p \cap \rho = \varnothing$. Například tak, že parametrické vyjadření p dosadíme do rovnic ρ. Dále zjistíme, že směrový vektor přímky p nesplňuje homogenní rovnice pro zaměření podprostoru ρ. Tedy p a ρ jsou mimoběžné.
3 body

5.

$$(id)_{\alpha,\beta} = \alpha^{-1}\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1 bod

$$(u)_\alpha = (id)_{\alpha,\beta}(u)_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1 bod

6a.

$$(f)_{\varepsilon_4,\varepsilon_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

6b.

$$\mathrm{Ker}\, f = [(1,2,-1)]$$

6c.

$$\mathrm{Im}\, f = [(1,1,0),(0,-1,1)]$$

1+1+1 bod

Řešení teoretické části

4.

$$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} = (-1)^{\frac{n(3n-1)}{2}}$$

2 body

6.

$$p_n : (0,0,n) + t(1,n,0) \quad \text{pro } n = 1,2,\ldots,2000.$$

2 body

7.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2 body

E. Řešení početní části

1. $(1-e^2)^2$ *2 body*

2. Najdeme rovinu τ určenou přímkou p a směrovým vektorem u a spočítáme její průnik s rovinou ρ, bod Q. Hledaná přímka q prochází bodem Q (pokud tento existuje.)

$$\tau : (0,0,0,1) + \gamma(0,0,1,0) + \delta(2,-3,4,-1)$$

Výpočet průniku $pM \cap \rho$ vede k soustavě s řešením $\delta = 1$, $\gamma = -4$.

$$Q = (2,-3,0,0), \quad q : (2,-3,0,0) + t(2,-3,4,-1).$$

3 body

3.

$$\rho : (-2,-1,1,2) + t(1,-1,2,0)$$

2 body

4. Zjistíme, že $p \cap \rho = \emptyset$. Například tak, že parametrické vyjadření p dosadíme do rovnic ρ. Dále zjistíme, že směrový vektor přímky p nesplňuje homogenní rovnice pro zaměření podprostoru ρ. Tedy p a ρ jsou mimoběžné. *3 body*

5.

$$(id)_{\alpha,\beta} = \alpha^{-1}\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 bod

$$(u)_\alpha = (id)_{\alpha,\beta}(u)_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

1 bod

6a.

$$(f)_{\varepsilon_4,\varepsilon_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

6b.

$$\operatorname{Ker} f = [(1,1,2)]$$

6c.

$$\operatorname{Im} f = [(1,0,1),(1,2,-1)]$$

1+1+1 bod

Řešení teoretické části

4.

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = (-1)^{\frac{3n(n-1)}{2}}$$

2 body

6.

$$A_n = (n, n^2) \quad \text{pro } n = 1,2,\ldots,2000.$$

2 body

7.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2 body