B. Písemka z lineární algebry I, leden 2000 – početní část

Max. počet bodů 15, do celkového hodnocení se započítává s váhou 2

1. Vypočtěte determinant matice $B = \begin{pmatrix} b & b & b & b \\ 1 & b & b & b \\ 1 & 1 & b & b \\ 1 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}$. *(2 body)*

2. V $\mathbb{R}^4$ uvažujme nadrovinu $\rho : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, přímku $p : (0,1,0,0) + t(0,0,1,1)$ a bod $M = (1,1,0,3)$. Najděte přímku q, která prochází bodem M, protíná rovinu přímku p a je rovnoběžná s nadrovinou ρ. Slovy popište stručně postup a vypočtěte. *(3 body)*

3. V $\mathbb{R}^4$ popište soustavou rovnic afinní podprostor $(1,1,1,1) + \alpha(1,1,-1,0) + \beta(1,0,0,1) + \gamma(0,1,0,2)$. *(2 body)*

4. V $\mathbb{R}^4$ zjistěte vzájemnou polohu roviny $\rho : x_1 - 2x_2 + x_3 = 4,\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 3$ a přímky $p : (1,9,9,9) + \alpha(1,1,1,4)$. *(3 body)*

5. Najděte matici přechodu od standardní (kanonické) báze ε v $\mathbb{R}^3$ k bázi $\alpha = ((1,0,1)^T, (2,1,0)^T, (0,1,1)^T)$. Pomocí této matice vypočtěte souřadnice vektoru $u = (1,3,1)^T$ v bázi α. *(2 body)*

6. Uvažujme lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (2x_1+x_2+x_3, 3x_1+x_2+x_3-x_4, x_1-x_4)$.
a) Napište matici zobrazení f ve standardních bazích.
b) Najděte bázi $\mathrm{Ker}\, f$.
c) Najděte bázi $\mathrm{Im}\, f$. *(3 body)*

Teoretická část – pouze pro předmět M003

Max. počet bodů 15, do celkového hodnocení se započítává s váhou 2

1. Napište definici matice přechodu od báze α k bázi β v prostoru U. (Vysvětlete použité označení.) *(2 body)*

2. Napište Frobeniovu větu o podmínce řešitelnosti soustav lineárních rovnic. *(2 body)*

3. Napište definici jádra lineárního zobrazení $f : U \to V$. *(2 body)*

4. Určete znaménko permutace $(2n+1, 2n+2, \ldots, 3n-1, 3n, 2n-1, 2n-2, \ldots, 2, 1)$. *(2 body)*

5. Nechť $f : U \to V$ je lineární zobrazení, $u_1, u_2, \ldots, u_k$ jsou vektory v U a $f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_k)$ jsou lineárně nezávislé ve V. Dokažte, že $u_1, u_2, \ldots, u_k$ jsou lineárně nezávislé v U. *(3 body)*

6. V $\mathbb{R}^4$ najděte parametrické vyjádření nějakého dvourozměrného afinního podprostoru, který je mimoběžný s rovinou

$$\rho : x_1 + x_2 - x_3 = 1, \quad x_2 + x_3 - 2x_4 = 2.$$

(2 body)

7. Najděte lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ s obrazem $\mathrm{Im}\, f = [(1,-1,0)^T, (1,1,2)^T]$ *(2 body)*

C. Písemka z lineární algebry I, leden 2000 – početní část

Max. počet bodů 15, do celkového hodnocení se započítává s váhou 2

1. Vypočtěte determinant matice $C = \begin{pmatrix} c & 1 & 1 & 1 \\ c & c & 1 & 1 \\ c & c & c & 1 \\ c & c & c & c \end{pmatrix}$. *(2 body)*

2. V $\mathbb{R}^4$ uvažujme nadrovinu $\rho : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, přímku $p : (7, 0, 0, 0) + t(0, 1, 0, 1)$ a bod $M = (1, 0, 3, 1)$. Najděte přímku q, která prochází bodem M, protíná rovinu přímku p a je rovnoběžná s nadrovinou ρ. Slovy popište stručně postup a vypočtěte. *(3 body)*

3. V $\mathbb{R}^4$ popište soustavou rovnic afinní podprostor $(1, 0, -1, 1)+\alpha(1, 1, -1, 0)+\beta(1, 0, 1, -1)+\gamma(0, 1, 1, 0)$. *(2 body)*

4. V $\mathbb{R}^4$ zjistěte vzájemnou polohu roviny $\rho : 4x_1 + x_3 - x_4 = 5,\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$ a přímky $p : (9, 9, 9, 1) + \alpha(1, 1, 1, 5)$. *(3 body)*

5. Najděte matici přechodu od standardní (kanonické) báze ε v $\mathbb{R}^3$ k bázi $\alpha = ((0, 2, 1)^T, (1, 1, 0)^T, (1, 0, 1)^T)$. Pomocí této matice vypočtěte souřadnice vektoru $u = (2, -3, -1)^T$ v bázi α. *(2 body)*

6. Uvažujme lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 + x_4, x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4, x_2 - x_3)$.
a) Napište matici zobrazení f ve standardních bazích.
b) Najděte bázi $\operatorname{Ker} f$.
c) Najděte bázi $\operatorname{Im} f$. *(3 body)*

Teoretická část – pouze pro předmět M003

Max. počet bodů 15, do celkového hodnocení se započítává s váhou 2

1. Napište definici determinantu matice A. (Vysvětlete použité označení.) *(2 body)*

2. Napište větu o dimenzi prostoru řešení homogenní soustavy lineárních rovnic $Ax = 0$. *(2 body)*

3. Napište definici obrazu lineárního zobrazení $f : U \to V$. *(2 body)*

4. Určete znaménko permutace $(2n, 2n - 1, \ldots, n + 2, n + 1, 1, 2, \ldots, n - 1, n)$. *(2 body)*

5. Nechť $\varphi : W \to X$ je lineární zobrazení, $v_1, v_2, \ldots, v_m$ jsou vektory ve W a $\varphi(v_1), \varphi(v_2), \ldots, \varphi(v_m)$ jsou lineárně nezávislé v X. Dokažte, že $v_1, v_2, \ldots, v_m$ jsou lineárně nezávislé v U. *(3 body)*

6. V $\mathbb{R}^4$ najděte parametrické vyjádření nějakého dvourozměrného afinního podprostoru, který je mimoběžný s rovinou

$$\rho : 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \quad x_2 + 2x_3 - x_4 = 1.$$

(2 body)

7. Najděte lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ s jádrem $\operatorname{Ker} f = [(1, 1, -1)^T]$ *(2 body)*

B. Řešení početní části

1. $b(b-1)^3$ *2 body*

2. Najdeme nadrovinu τ procházející bodem M a rovnoběžnou s ρ. Spočítáme její průnik s přímkou p, bod Q. Hledaná přímka q je určena body M, Q (pokud je průnik $\tau \cap p$ neprázdný.)

$$\tau : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$$

Výpočet průniku $p \cap \tau$ vede k rovnici

$$0 + 1 + t + t = 5$$

a řešením $t = 2$.

$$Q = (0, 1, 2, 2), \quad q : (1, 1, 0, 3) + s(-1, 0, 2, -1).$$

3 body

3.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 5$$

2 body

4. Zjistíme, že $p \cap \rho = \varnothing$ a $p//\rho$. Například tak, že směrový vektor přímky p dosadíme do rovnic pro rovinu ρ a její zaměření. *3 body*

5.

$$(id)_{\varepsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (id)_{\alpha,\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1 bod

$$(u)_\alpha = (id)_{\alpha,\varepsilon}(u)_\varepsilon = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1 bod

6.

$$(f)_{\varepsilon_3,\varepsilon_4} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{Ker} f = [(1, -1, -1, 1), (0, 1, -1, 0)],$$

$$\operatorname{Im} f = [(2, 3, 1), (1, 1, 0)]$$

1+1+1 bod

Řešení teoretické části

4.

$$(-1)^{2n \cdot n + \frac{2n(2n-1)}{2}} = (-1)^{n(2n-1)} = (-1)^n$$

2 body

C. Řešení početní části

1. $c(c-1)^3$ *2 body*

2. Najdeme nadrovinu τ procházející bodem M a rovnoběžnou s ρ. Spočítáme její průnik s přímkou p, bod Q. Hledaná přímka q je určena body M, Q (pokud je průnik $\tau \cap p$ neprázdný.)

$$\tau : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$$

Výpočet průniku $p \cap \tau$ vede k rovnici

$$7 + t + 0 + t = 5$$

a řešením $t = -1$.

$$Q = (7, -1, 0, -1), \quad q : (1, 0, 3, 1) + s(6, -1, -3, -2).$$

3 body

3.

$$2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 4$$

2 body

4. Zjistíme, že $p \cap \rho = \varnothing$ a $p//\rho$. Například tak, že směrový vektor přímky p dosadíme do rovnic pro rovinu ρ a její zaměření. *3 body*

5.

$$(id)_{\varepsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (id)_{\alpha,\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1 bod

$$(u)_\alpha = (id)_{\alpha,\varepsilon}(u)_\varepsilon = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1 bod

6.

$$(f)_{\varepsilon_3,\varepsilon_4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{Ker} f = [(1, -1, -1, 1), (1, 0, 0, -1)],$$

$$\operatorname{Im} f = [(1, 1, 0), (2, -1, 1)]$$

1+1+1 bod

Řešení teoretické části

4.

$$(-1)^{\frac{n(3n-1)}{2}} = (-1)^{n^2 + \frac{n(2n-1)}{2}}$$

2 body