A. Písemka z lineární algebry I, leden 2000 – početní část

Max. počet bodů 15, do celkového hodnocení se započítává s váhou 2

1. Vypočtěte determinant matice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & 1 & a & a \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (*2 body*)

2. V $\mathbb{R}^4$ uvažujme rovinu $\rho : \alpha(1,0,0,0)+\beta(0,1,0,0)$, přímku $p : (0,0,0,1)+\gamma(0,0,1,0)$ a bod $M = (1,1,1,2)$. Najděte přímku q, která prochází bodem M a protíná rovinu ρ a přímku p. Slovy popište stručně postup a vypočtěte. (*3 body*)

3. V $\mathbb{R}^4$ popište soustavou rovnic afinní podprostor $(1,0,0,0) + \alpha(1,-1,1,0) + \beta(3,-2,0,1)$. (*2 body*)

4. V $\mathbb{R}^4$ zjistěte vzájemnou polohu roviny $\rho : x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$, $x_1 + x_3 + 2x_4 = 3$ a přímky $p : (3,-1,0,0) + \alpha(-3,2,1,1)$. (*3 body*)

5. Najděte matici přechodu od standardní (kanonické) báze ε v $\mathbb{R}^3$ k bázi $\alpha = ((1,1,1)^T, (1,1,0)^T, (1,0,0)^T)$. Pomocí této matice vypočtěte souřadnice vektoru $u = (2,3,2)^T$ v bázi α. (*2 body*)

6. Uvažujme lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2 + 2x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_3)$.
a) Napište matici zobrazení f ve standardních bazích.
b) Najděte bázi $\operatorname{Ker} f$.
c) Najděte bázi $\operatorname{Im} f$. (*3 body*)

Teoretická část – pouze pro předmět M003

Max. počet bodů 15, do celkového hodnocení se započítává s váhou 2

1. Napište definici matice lineárního zobrazení $\varphi : U \to V$ v bazích α prostoru U a β prostoru V. (*2 body*)

2. Napište Laplaceův rozvoj determinantu matice A podle j-tého sloupce. (*2 body*)

3. Napište definici hodnosti matice A. (*2 body*)

4. Určete znaménko permutace $(n+1, n+2, \ldots, 2n-1, 2n, n, n-1, \ldots, 2, 1)$. (*2 body*)

5. Nechť $f : U \to V$ je prosté lineární zobrazení a $u_1, u_2, \ldots, u_k$ jsou lineárně nezávislé vektory v U. Dokažte, že $f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_k)$ jsou lineárně nezávislé ve V. (*3 body*)

6. V kterých $\mathbb{R}^n$ lze nalézt dva mimoběžné afinní podprostory, z nichž jeden je dvourozměrný a druhý třírozměrný? (Uveďte definici mimoběžnosti.) (*2 body*)

7. Najděte soustavu rovnic nad $\mathbb{R}$ s 2000 neznámými s množinou řešení

$$\{(1999t, t, t, \ldots, t, t) \in \mathbb{R}^{2000}; t \in \mathbb{R}\}.$$

(*2 body*)

A. Řešení početní části

1. $(1-a)^3$ *2 body*

2. Najdeme rovinu pM a spočítáme její průnik s rovinou ρ, bod Q. Hledaná přímka q je určena body M, Q (pokud není rovnoběžná s p.)

$$pM : (0,0,0,1) + \gamma(0,0,1,0) + \delta(1,1,1,1)$$

Výpočet průniku $pM \cap \rho$ vede k soustavě s maticí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

a řešením $\delta = -1$, $\gamma = 1$.

$$Q = (-1,-1,0,0), \quad q : (1,1,1,2) + t(2,2,1,2).$$

3 body

3.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_4 &= 1 \end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

2 body

4. Zjistíme, že $p \cap \rho = p$. Například tak, že parametrické vyjadření p dosadíme do rovnic ρ. Tedy $p \subset \rho$. *3 body*

5.

$$(id)_{\varepsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (id)_{\alpha,\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1 bod

$$(u)_\alpha = (id)_{\alpha,\varepsilon}(u)_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

1 bod

6a.

$$(f)_{\varepsilon_4,\varepsilon_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Ker} f = [(1,1,-1)], \quad \operatorname{Im} f = [(1,1,0,1),(-1,1,1,0)]$$

1+1+1 bod

Řešení teoretické části

4. $(-1)^{n^2+\frac{n(n-1)}{2}} = (-1)^{\frac{n(3n-1)}{2}}$. *2 body*

6. $n \geq 5$. *2 body*

7. $x_1 - 1999x_2 = 0, x_2 - x_3 = 0, x_3 - x_4 = 0, \ldots, x_{1999} - x_{2000} = 0$. *2 body*