8. AFINNÉ PODPRIESTORY A AFINNÉ ZOBRAZENIA

Keď sme v paragrafe 4.1, odvolávajúc sa na geometrický názor, ilustrovali pojem lineárneho podpriestoru, ako príklad sme uviedli, že netriválne vlastné lineárne podpriestory „nášho“ trojrozmerného vektorového priestoru $\mathbb{R}^3$ sú práve všetky priamky a roviny *prechádzajúce počiatkom* $\mathbf{0}$. Kritickejší čitateľ mohol vtedy oprávnene zapochybovať o adekvátnosti a prirodzenosti tohto pojmu, či aspoň pocítiť potrebu zaviesť taký pojem podpriestoru, ktorý by napr. v $\mathbb{R}^3$ zahŕňal *všetky* priamky a roviny, nielen tie prechádzajúce počiatkom.

Podobne v paragrafe 6.1 sme hneď po definícii pojmu lineárneho zobrazenia boli nútení učiniť poznámku o jeho odlišnosti od pojmu lineárnej funkcie používaného v matematickej analýze. Vzápätí sme prijali záväzok, že sa s týmto nedostatkom v príhodný čas vyrovnáme.

Ten čas práve nastal. Spomínané medzery zaplníme definíciami pojmu *afinného podpriestoru* alebo tiež *lineárnej variety* a pojmu *afinného zobrazenia*. Ťažiskom kapitoly bude klasifikácia vzájomnej polohy lineárnych variet vo vektorovom priestore.

V celej kapitole označuje K nejaké pevné pole a m, n sú prirodzené čísla.

8.1. Body a vektory

Na vektory, čiže na prvky vektorových priestorov – aspoň pokiaľ ide o konečnorozmerné vektorové priestory nad $\mathbb{R}$ – sa dívame ako na orientované úsečky s počiatkom v bode $\mathbf{0}$. Už táto veta prezrádza, že *pôvodne* sa na prvky takéhoto priestoru dívame ako na *body* a celý priestor chápeme ako *homogénny*, t. j. všetky body považujeme za rovnocenné a nevyčleňujeme v ňom nijaký privilegovaný bod za počiatok. Až na základe tohto pôvodného porozumenia dokážeme po vyčlenení nejakého počiatku O (ktorým sa môže stať ľubovoľný bod homogénneho priestoru) nahradiť bod A príslušného priestoru orientovanou úsečkou $\overrightarrow{OA}$ a abstrahovať od jej polohy, to znamená uvidieť za ňou *vektor* $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{OA}$, daný len jej veľkosťou, smerom a orientáciou, ktorý možno umiestniť do ľubovoľného bodu priestoru – nielen do počiatku.

Afinným priestorom nad poľom K rozumieme vektorový priestor V nad týmto poľom, pri pohľade na ktorý sme sa vrátili k onomu pôvodnému porozumeniu jeho štruktúre a prvkom. To znamená, že jeho prvky sa z vektorov stali opäť bodmi a počiatok (t. j. nulový vektor) stratil svoje výsadné postavenie – stal sa z neho bod ako každý iný.

Formálnu definíciu afinného priestoru nad poľom K tu uvádzať nebudeme. Sme totiž toho názoru, že pokus formalizovať rozdiel medzi oboma spomínanými pohľadmi na prvky vektorového priestoru by v tejto chvíli vniesol do veci viac zmätku než svetla. Celkom postačí, keď úlohu prepínača medzi oboma pohľadmi zveríme dvojiciam slov „bod“ – „vektor“ a „afinný“ – „lineárny“, prípadne „afinný“ – „vektorový“. Na druhej strane však pred nami vyvstáva potreba formálnej definície podmnožín vektorového priestoru, ktoré sú „vernými kópiami“ lineárnych podpriestorov – nemusia však prechádzať počiatkom, ale možu byť umiestnené „kdekoľvek“.

8.2. Afinné podpriestory

V celom tomto a nasledujúcich dvoch paragrafoch V označuje nejaký pevný, no inak ľubovoľný, vektorový priestor nad poľom K.

Kvôli pohodliu čitateľa budeme písmenami $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ (možno s indexmi) značiť výlučne body, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ označujú zasa výlučne vektory, kým $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ môžu podľa potreby označovať body i vektory. Taktiež sa dohodneme, že rozdiel dvoch bodov budeme chápať ako vektor, kým súčet bodu a vektora ako bod.

Nech $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in V$, $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{q}$. *Priamkou* prechádzajúcou alebo tiež určenou bodmi $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ rozumieme množinu $\ell(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$, ktorú dostaneme tak, že do bodu $\boldsymbol{p}$ umiestnime všetky možné skalárne násobky vektora $\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}$. Typický bod priamky $\ell(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ má teda tvar

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}) = (1 - t)\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q},$$

kde $t \in K$, čiže

$$\ell(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \{s\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q};\ s, t \in K \ \&\ s + t = 1\} \subseteq V.$$

Tento výraz má, samozrejme, zmysel aj pre $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}$, vtedy však nejde o priamku ale o jednobodovú množinu $\ell(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}) = \{\boldsymbol{p}\}$. Z uvedeného tvaru ihneď vidíme, že

$$\ell(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \ell(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$$

pre ľubovoľné $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in V$.

Podmnožinu M vektorového priestoru V nazývame jeho *afinným podpriestorom* alebo tiež *lineárnou varietou* vo V, ak $M \neq \emptyset$ a pre všetky $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in M$ platí $\ell(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \subseteq M$.

Lineárnu kombináciu, t. j. výraz tvaru

$$t_0\boldsymbol{p}_0 + t_1\boldsymbol{p}_1 + \ldots + t_n\boldsymbol{p}_n = \sum_{i=0}^{n} t_i\boldsymbol{p}_i,$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{p}_0, \ldots, \boldsymbol{p}_n \in V$, $t_0, t_1, \ldots, t_n \in K$, nazývame *afinnou kombináciou* bodov $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$, ak platí $t_0 + t_1 + \ldots + t_n = 1$. Afinnú kombináciu bodov budeme chápať ako bod; iné lineárne kombinácie bodov ako afinné sa v našich úvahách nevyskytnú. (Ešte si všimnite si, že každá afinná kombinácia je neprázdna, t. j. obsahuje aspoň jeden člen.)

Nasledujúce tvrdenie, ktoré charakterizuje afinné podpriestory ako množiny uzavreté vzhľadom na afinné kombinácie, je očividne analógiou tvrdenia 4.1.2.

8.2.1. Tvrdenie. *Pre ľubovoľnú neprázdnu množinu $M \subseteq V$ nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

(i) M je afinný podpriestor vo V;
(ii) pre ľubovoľné $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in M$, $s \in K$ platí $s\boldsymbol{p} + (1 - s)\boldsymbol{q} \in M$;
(iii) pre každé $n \in \mathbb{N}$ a ľubovoľné $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n \in M$, $t_0, t_1 \ldots, t_n \in K$ také, že $t_0 + t_1 + \ldots + t_n = 1$, platí $t_0\boldsymbol{p}_0 + t_1\boldsymbol{p}_1 + \ldots + t_n\boldsymbol{p}_n \in M$.

Dôkaz. Ekvivalencia (i) $\Leftrightarrow$ (ii) je zrejmá, keďže podmienka (ii) je len inou formuláciou inklúzie $\ell(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \subseteq M$. Implikácia (iii) $\Rightarrow$ (ii) je triviálna. Stačí teda dokázať implikáciu (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Predpokladajme (ii) a pripusťme, že podmienka (iii) neplatí. Označme n najmenšie prirodzené číslo, pre ktoré to nastane. Potom $n > 1$ a pre všetky $k < n$ podmienka (iii) platí, čiže M je uzavretá na afinné kombinácie $\le n$ bodov. Nech $\boldsymbol{p}_0, \dots, \boldsymbol{p}_n \in M$, $t_0, \dots, t_n \in K$ sú také, že $t_0 + \dots + t_n = 1$ a $t_0\boldsymbol{p}_0 + \dots + t_n\boldsymbol{p}_n \notin M$. Potom zrejme $t_i \ne 1$, pre aspoň jedno $0 \le i \le n$; teda bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $t_0 \ne 1$. Označme

$$\boldsymbol{q} = \frac{t_1}{1-t_0}\boldsymbol{p}_1 + \dots + \frac{t_n}{1-t_0}\boldsymbol{p}_n.$$

Keďže

$$\frac{t_1}{1-t_0} + \dots + \frac{t_n}{1-t_0} = \frac{t_1 + \dots + t_n}{1-t_0} = 1,$$

$\boldsymbol{q} \in M$, lebo $\boldsymbol{q}$ je afinnou kombináciou n bodov z M. Potom

$$t_0\boldsymbol{p}_0 + t_1\boldsymbol{p}_1 + \dots + t_n\boldsymbol{p}_n = t_0\boldsymbol{p}_0 + (1-t_0)\boldsymbol{q} \in M$$

podľa (ii). To je však spor.

Nasledujúca veta ukazuje, že afinné podpriestory skutočne nie sú ničím iným, než lineárnymi podpriestormi posunutými do ľubovoľného bodu príslušného vektorového priestoru.

8.2.2. Veta. *Nech $M \subseteq V$. Potom M je afinný podpriestor vo V práve vtedy, keď existuje bod $\boldsymbol{p} \in V$ a lineárny podpriestor $S \subseteq V$ taký, že*

$$M = \boldsymbol{p} + S = \{\boldsymbol{p} + \boldsymbol{u};\ \boldsymbol{u} \in S\}.$$

V tom prípade pre všetky $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r} \in M$, $\boldsymbol{u} \in S$ platí

$$\boldsymbol{q} - \boldsymbol{r} \in S, \qquad \boldsymbol{q} + \boldsymbol{u} \in M, \qquad M = \boldsymbol{q} + S,$$
$$S = \{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q};\ \boldsymbol{x} \in M\} = \{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y};\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M\}.$$

Dôkaz. Nech $M \subseteq V$ je afinný podpriestor a $\boldsymbol{p} \in M$ je jeho ľubovoľný bod. Položme

$$S = \{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p};\ \boldsymbol{x} \in M\}.$$

Potom zrejme $M = \boldsymbol{p} + S$. Stačí teda dokázať, že $S \subseteq V$ je lineárny podpriestor. Keďže $\boldsymbol{p} \in M$, platí $\boldsymbol{0} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p} \in S$. Ukážeme uzavretosť S na lineárne kombinácie. Nech $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S$, $a, b \in K$. Potom $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{p}$ pre nejaké $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M$. Jednoduchý výpočet dáva

$$a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} = a(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}) + b(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{p}) = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} + (1 - a - b)\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}.$$

Prvé tri sčítance tvoria afinnú kombináciu bodov z M, teda $a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} + (1-a-b)\boldsymbol{p} \in M$; preto tiež $a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} \in S$

Nech naopak $M = \boldsymbol{p} + S$ pre nejaký bod bod $\boldsymbol{p} \in V$ a lineárny podpriestor $S \subseteq V$. Stačí ukázať uzavretosť M na afinné kombinácie. Nech $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M$, $t \in K$. Potom $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{v}$ pre nejaké $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S$. Počítajme

$$t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y} = t(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{u}) + (1-t)(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{p} + t\boldsymbol{u} + (1-t)\boldsymbol{v}.$$

Keďže $t\boldsymbol{u} + (1-t)\boldsymbol{v} \in S$, dostávame $t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y} \in M$.

Ďalšie tri podmienky možno teraz overiť priamymi výpočtami, ktoré prenechávame čitateľovi; štvrtá z nich okamžite vyplýva.

8.2.3. Dôsledok. *Každý lineárny podpriestor S vektorového priestoru V je jeho afinným podpriestorom. Afinný podpriestor M vektorového priestoru V je jeho lineárnym podpriestorom práve vtedy, keď $\mathbf{0} \in M$.*

Zameraním alebo tiež *smerovým podpriestorom* afinného podpriestoru $M \subseteq V$ nazývame lineárny podpriestor

$$\operatorname{Dir} M = \{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y};\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M\} \subseteq V.$$

(Označenie pochádza z anglického slova *direction*). Podľa vety 8.2.2 je $\operatorname{Dir} M$ jediný lineárny podpriestor vo V taký, že $M = \boldsymbol{p} + \operatorname{Dir} M$ pre nejaké (pre každé) $\boldsymbol{p} \in M$. Taktiež pre každé $\boldsymbol{p} \in M$ platí

$$\operatorname{Dir} M = \{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p};\, \boldsymbol{x} \in M\}.$$

Pre ľubovoľnú usporiadanú $(n+1)$-ticu bodov $(\boldsymbol{p}_0, \dots, \boldsymbol{p}_n)$, vektorového priestoru V, prípadne pre jeho konečnú podmnožinu $\{\boldsymbol{p}_0, \dots, \boldsymbol{p}_n\} \neq \emptyset$, označme

$$\ell(\boldsymbol{p}_0, \dots, \boldsymbol{p}_n) = \{t_0\boldsymbol{p}_0 + \ldots + t_n\boldsymbol{p}_n;\, t_0, \dots, t_n \in K \ \&\ t_0 + \ldots + t_n = 1\}$$

množinu všetkých afinných kombinácií bodov $\boldsymbol{p}_0, \dots, \boldsymbol{p}_n$. Z práve dokázaného tvrdenia vyplýva, že $\ell(\boldsymbol{p}_0, \dots, \boldsymbol{p}_n)$ je najmenší afinný podpriestor vo V, ktorý obsahuje všetky body $\boldsymbol{p}_0, \dots, \boldsymbol{p}_n$; nazývame ho *afinný obal* bodov alebo aj afinný podpriestor *generovaný* bodmi $\boldsymbol{p}_0, \dots, \boldsymbol{p}_n$.

Vo všeobecnosti možno pre ľubovoľnú (i nekonečnú) neprázdnu množinu $X \subseteq V$ definovať jej *afinný obal* $\ell(X)$, nazývaný tiež afinný podpriestor *generovaný* množinou X, ako množinu všetkých (konečných) afinných kombinácií bodov z X. Opäť platí, že $\ell(X)$ je najmenší afinný podpriestor vo V taký, že $X \subseteq \ell(X)$.

8.2.4. Tvrdenie. *Nech $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n \in V$. Potom*

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n) &= \boldsymbol{p}_0 + [\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_0, \dots, \boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{p}_0], \\ \operatorname{Dir} \ell(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n) &= [\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_0, \dots, \boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{p}_0]. \end{aligned}$$

Dôkaz prenechávame ako cvičenie čitateľovi.

Dimenziou alebo tiež *rozmerom* afinného podpriestoru $M \subseteq V$, označenie $\dim M$, nazývame dimenziu jeho zamerania, teda

$$\dim M = \dim \operatorname{Dir} M.$$

Body $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n$ vektorového priestoru V nazývame *afinne nezávislé*, ak vektory $\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_0, \dots, \boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{p}_0$ sú lineárne nezávislé. Z nasledujúceho očividného tvrdenia okrem iného vyplýva, že body $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n \in V$ sú afinne nezávislé práve vtedy, keď pre nejaké (pre každé) $0 \le k \le n$ vektory $\boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{p}_k$, kde $0 \le j \le n$ a $j \neq k$, sú lineárne nezávislé.

8.2.5. Tvrdenie. *Body $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n \in V$ sú afinne nezávislé práve vtedy, keď*

$$\dim \ell(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n) = n$$

Zrejme 0-rozmerné afinné podpriestrory vo V sú práve všetky body $\boldsymbol{p} \in V$ (presnejšie, všetky jednobodové podmnožiny vo V). Tieto afinné podpriestory nazývame tiež *triviálne*. Jednorozmené afinné podpriestory vo V nazývame *priamkami*. Každá priamka má naozaj tvar $\ell(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ pre nejaké afinne nezávislé (t. j. rôzne) body $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in V$. Dvojrozmerné afinné podpriestory vo V nazývame *rovinami*. Taktiež samotný priestor V je svojim *nevlastným* afinným podpriestorom. Ak $\dim V = n$, tak $(n-1)$-rozmerné afinné podpriestory vo V nazývame *nadrovinami*.

Kým pojmy „bod“, „priamka“ a „rovina“ sú absolútne v tom zmysle, že závisia len na dimenzii príslušného afinného podpriestoru, pojem nadroviny je relatívny, lebo závisí na vzťahu dimenzií afinného podpriestoru a celého priestoru. Napríklad ak $\dim V = 1$ (t. j. ak samotné V je priamka), tak každý bod vo V je zároveň nadrovinou. Nadrovinami v dvojrozmernom priestore (t. j. v rovine) sú zasa všetky priamky. V trojrozmernom priestore V pojmy roviny a nadroviny splývajú. V štvorrozmernom priestore sú zasa nadrovinami trojrozmerné podpriestory; atď. Ešte poznamenajme, že v 0-rozmernom (t. j. jednobodovom) priestore V niet priamok, rovín ani nadrovín.

8.3. Prienik a spojenie afinných podpriestorov

V tomto paragrafe mierne zovšeobecníme niektoré výsledky paragrafov 4.3 a 5.4. o prieniku a súčte lineárnych podpriestorov do podoby použiteľnej pre afinné podpriestory.

8.3.1. Tvrdenie. *Nech M, $N \subseteq V$ sú afinné podpriestory. Potom $M \cap N$ je afinný podpriestor vo V práve vtedy, keď $M \cap N \neq \emptyset$. V tom prípade*

$$\operatorname{Dir}(M \cap N) = \operatorname{Dir} M \cap \operatorname{Dir} N.$$

Dôkaz. Ak $M \cap N = \emptyset$, tak to samozrejme nie je afinný podpriestor. Nech $M \cap N \neq \emptyset$. Označme $S = \operatorname{Dir} M$, $T = \operatorname{Dir} N$ príslušné smerové podpriestory. Zvoľme ľubovoľný bod $\boldsymbol{p} \in M \cap N$. Stačí dokázať rovnosť

$$M \cap N = \boldsymbol{p} + (S \cap T).$$

Zvoľme $\boldsymbol{q} \in M \cap N$. K nemu existujú $\boldsymbol{u} \in S$, $\boldsymbol{v} \in T$ také, že $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{v}$. Potom $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \in S \cap T$ a $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{p} + (S \cap T)$. Teda $M \cap N \subseteq \boldsymbol{p} + (S \cap T)$. Obrátená inklúzia je triviálna.

Neprázdnosť prieniku $M \cap N$ možno zaručiť za predpokladu, že lineárny priestor $\operatorname{Dir} M + \operatorname{Dir} N$ je „dosť veľký“.

8.3.2. Tvrdenie. *Nech M, $N \subseteq V$ sú afinné podpriestory. Potom*

$$\operatorname{Dir} M + \operatorname{Dir} N = V \;\Rightarrow\; M \cap N \neq \emptyset.$$

Dôkaz. Označme $S = \operatorname{Dir} M$, $T = \operatorname{Dir} N$. Zvoľme ľubovoľné $\boldsymbol{p} \in M$, $\boldsymbol{q} \in N$. Keďže $S + T = V$, existujú vektory $\boldsymbol{u} \in S$, $\boldsymbol{v} \in T$ také, že $\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$. Potom

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} + (\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$$

V dôsledku toho $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{u}=\boldsymbol{q}-\boldsymbol{v}\in M\cap N$, lebo vektor vľavo je z M a vektor vpravo z N.

Spojením afinných podpriestorov M, $N\subseteq V$, označenie $M\sqcup N$, nazývame afinný obal ich zjednotenia. Teda
$$M\sqcup N=\ell(M\cup N).$$
Zrejme $M\sqcup N$ je najmenší afinný podpriestor vo V, ktorý obsahuje M aj N, a pre lineárne podpriestory S, $T\subseteq V$ platí $S\sqcup T=S+T$.

8.3.3. Tvrdenie. *Nech M, $N\subseteq V$ sú afinné podpriestory.*
(a) Ak $M\cap N\neq\emptyset$, tak
$$\operatorname{Dir}(M\sqcup N)=\operatorname{Dir}M+\operatorname{Dir}N,$$
$$M\sqcup N=M+\operatorname{Dir}N=N+\operatorname{Dir}M.$$
(b) Ak $M\cap N=\emptyset$, tak pre ľubovoľné $\boldsymbol{p}\in M$, $\boldsymbol{q}\in N$ platí
$$\operatorname{Dir}(M\sqcup N)=[\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}]+\operatorname{Dir}M+\operatorname{Dir}N,$$
$$M\sqcup N=M+([\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}]+\operatorname{Dir}N)=N+([\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}]+\operatorname{Dir}M).$$

Poznámka. Stojí za zmienku, že obe rovnosti z (b) sú splnené aj za predpokladu $M\cap N\neq\emptyset$. V tom prípade však pre ľubovoľné $\boldsymbol{r}\in M\cap N$ platí
$$\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p})+(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{r})\in\operatorname{Dir}M+\operatorname{Dir}N,$$
takže vektor $\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}$ možno v príslušných vzťahoch vynechať. Rovnako tomu bude i v príklade 8.3.5.

Dôkaz. Stačí dokázať len (b), lebo (a) z neho vyplýva vo svetle našej poznámky. Označme $S=\operatorname{Dir}M$, $T=\operatorname{Dir}N$ a zvoľme $\boldsymbol{p}\in M$, $\boldsymbol{q}\in N$. Budeme dokazovať iba rovnosť
$$M\sqcup N=\boldsymbol{p}+[\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}]+S+T;$$
zvyšok je už jej bezprostredným dôsledkom.

Každý bod $\boldsymbol{r}\in M\sqcup N$ je afinnou kombináciou
$$\boldsymbol{r}=\sum_{i=0}^{m}s_i\boldsymbol{p}_i+\sum_{j=0}^{n}t_j\boldsymbol{q}_j$$
kde $\boldsymbol{p}_0,\dots,\boldsymbol{p}_m\in M$, $\boldsymbol{q}_0,\dots,\boldsymbol{q}_n\in M$, $s_0,\dots,s_m,t_0,\dots,t_n\in K$ a $\sum_i s_i+\sum_j t_j=1$. Potom $\boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{p}\in S$, $\boldsymbol{q}_j-\boldsymbol{q}\in T$ pre $i\leq m$, $j\leq n$. Označme $s=s_0+\ldots+s_m$, $t=t_0+\ldots+t_n$ a počítajme
$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}&=(s\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{q})+\sum_{i=0}^{m}s_i(\boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{p})+\sum_{j=0}^{n}t_j(\boldsymbol{q}_j-\boldsymbol{q})\\&=\boldsymbol{p}+t(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})+\sum_{i=0}^{m}s_i(\boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{p})+\sum_{j=0}^{n}t_j(\boldsymbol{q}_j-\boldsymbol{q})\ \in\ \boldsymbol{p}+[\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}]+S+T,\end{aligned}$$
keďže $t=1-s$. Teda $M\sqcup N\subseteq\boldsymbol{p}+[\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}]+S+T$. Obrátená inklúzia je triviálna.

8.3.4. Dôsledok. *Nech M, $N \subseteq V$ sú konečnorozmerné afinné podpriestory. Potom*

$$\dim(M \sqcup N) = \begin{cases} \dim M + \dim N - \dim(M \cap N), & \text{ak } M \cap N \neq \emptyset, \\ \dim M + \dim N - \dim(\operatorname{Dir} M \cap \operatorname{Dir} N) + 1, & \text{ak } M \cap N = \emptyset. \end{cases}$$

8.3.5. Príklad. Vo vektorovom priestore V uvažujme konečnorozmerné afinné podpriestory

$$M = \boldsymbol{p} + [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m], \qquad N = \boldsymbol{q} + [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n].$$

Potom

$$M \sqcup N = \begin{cases} \boldsymbol{p} + [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n], & \text{ak } M \cap N \neq \emptyset, \\ \boldsymbol{p} + [\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n], & \text{ak } M \cap N = \emptyset, \end{cases}$$

$$\dim(M \sqcup N) = \begin{cases} \dim[\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n], & \text{ak } M \cap N \neq \emptyset, \\ \dim[\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n]), & \text{ak } M \cap N = \emptyset. \end{cases}$$

Ak navyše predpokladáme, že tak vektory $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m$ ako aj vektory $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ sú lineárne nezávislé, tak

$$\dim(M \sqcup N) = \begin{cases} m + n - k, & \text{ak } M \cap N \neq \emptyset, \\ m + n - k + 1, & \text{ak } M \cap N = \emptyset, \end{cases}$$

kde $k = \dim([\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m] \cap [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n])$.

8.3.6. Príklad. V stĺpcovom priestore $\mathbb{R}^4$ sú dané vektory $\boldsymbol{x} = (1,2,3,4)^T$, $\boldsymbol{y} = (0,-3,1,-1)^T$, $\boldsymbol{z} = (1,1,0,0)^T$, $\boldsymbol{u} = (0,-2,4,3)^T$, $\boldsymbol{v} = (2,6,2,5)^T$, $\boldsymbol{w} = (0,0,1,1)^T$ a bližšie neurčené body $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$. Potom $S = [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}]$, $T = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$ sú lineárne podpriestory a $M = \boldsymbol{p} + S$, $N = \boldsymbol{q} + N$ sú afinné podpriestory v $\mathbb{R}^4$. Nájdeme dimenzie lineárnych podpriestorov $S + T$, $S \cap T$ a afinných podpriestorov $M \cap N$, $M \sqcup N$ v závislosti na $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$.

Lineárny podpriestor $S + T$ je generovaný stĺpcami blokovej matice

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -2 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right),$$

pričom stĺpce ľavého bloku generujú lineárny podpriestor S a stĺpce pravého bloku lineárny podpriestor T. Táto matica je riadkovo ekvivalentná s blokovou maticou

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

v stupňovitom tvare, ktorej riadky majú vedúce prvky v stĺpcoch 1, 2, 3 a 6. Hneď vidíme, že vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ tvoria bázu S a vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}$ bázu $S + T$. Doupravovaním pravého bloku na riadkovo ekvivalentný stupňovitý tvar

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sa možno presvedčiť, že i vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ sú lineárne nezávislé, teda tvoria bázu T. Zhrnutím dostávame $\dim S = \dim T = 3$, $\dim(S+T) = 4$. Odtiaľ podľa vety 5.4.1 vyplýva $\dim(S \cap T) = 3+3-4 = 2$. Takže $S+T = \mathbb{R}^4$, a bez toho, že by sme čokoľvek ďalej počítali, z tvrdenia 8.3.2 vieme, že nezávisle na bodoch $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ platí $M \cap N \neq \emptyset$. Preto $\dim(M \cap N) = \dim(S \cap T) = 2$ podľa tvrdenia 8.3.1. S použitím tvrdenia 8.3.3 a dôsledku 8.3.4 dostávame $\dim(M \sqcup N) = \dim(S+T) = 4$.

8.4. Vzájomná poloha afinných podpriestorov

V tomto paragrafe podáme sľúbenú klasifikáciu vzájomnej polohy dvojíc netriviálnych vlastných afinných podpriestorov vo vektorovom priestore V. (Hoci to nie je z logického hľadiska nevyhnutné, aby sme sa vyhli triedeniu trivialít, body a celý priestor V z našich úvah vylučujeme.) Táto téma prirodzeným spôsobom rozširuje látku stredoškolskej geometrie, zahŕňajúcu klasifikáciu vzájomnej polohy priamok v rovine resp. priamok a rovín v (trojrozmernom) priestore.

Polohu netriviálnych vlastných lineárnych variet M, $N \subseteq V$ budeme klasifikovať na základe dvoch kritérií:

(A) Ak platí $\operatorname{Dir} M \subseteq \operatorname{Dir} N \vee \operatorname{Dir} N \subseteq \operatorname{Dir} M$, hovoríme, že M, N sú *rovnobežné* a píšeme $M \parallel N$.
V opačnom prípade, t. j. ak platí $\operatorname{Dir} M \nsubseteq \operatorname{Dir} N$ & $\operatorname{Dir} N \nsubseteq \operatorname{Dir} M$, hovoríme, že M, N *nie sú rovnobežné*, a píšeme $M \nparallel N$.

(B) Ak platí $M \cap N \neq \emptyset$, hovoríme, že M, N *sa pretínajú.*
V opačnom prípade, t. j. ak $M \cap N = \emptyset$, hovoríme, že M, N *sa nepretínajú*, alebo, že sú *disjunktné.*

Celkovo teda dostávame štyri možnosti:

(1) $M \parallel N$ & $M \cap N \neq \emptyset$, čiže M, N sú rovnobežné a pretínajú sa.
Ľahko možno nahliadnuť, že v takom prípade platí $\operatorname{Dir} M \subseteq \operatorname{Dir} N \Leftrightarrow M \subseteq N$ a $\operatorname{Dir} N \subseteq \operatorname{Dir} M \Leftrightarrow N \subseteq M$. Teda $M \subseteq N$ alebo $M \subseteq N$. Hovoríme, že jedna z lineárnych variet M, N je *podvarietou* druhej, alebo, že M, N sú vo vzťahu *inklúzie.*

(2) $M \parallel N$ & $M \cap N = \emptyset$, čiže M, N sú rovnobežné a nepretínajú sa.
Tento prípad nazývame vzťahom *pravej rovnobežnosti.*

(3) $M \nparallel N$ & $M \cap N \neq \emptyset$, čiže M, N nie sú rovnobežné a pretínajú sa.
Hovoríme, že M, N sú *rôznobežné.*

(4) $M \nparallel N$ & $M \cap N = \emptyset$, čiže M, N nie sú rovnobežné a nepretínajú sa.
V tomto prípade ešte rozlišujeme dve ďalšie možnosti:
(4a) Ak $\operatorname{Dir} M \cap \operatorname{Dir} N = \{\mathbf{0}\}$, hovoríme, že M, N sú *mimobežné.*
(4b) Ak $\operatorname{Dir} M \cap \operatorname{Dir} N \neq \{\mathbf{0}\}$, hovoríme, že M, N sú *čiastočne rovnobežné.*

Prípady (1), (2), (3) sú nám dobre známe zo stredoškolskej planimetrie, s prípadom (4) sa však v rovine stretnúť nemožno – dve priamky v rovine buď splývajú alebo sú to pravé rovnobežky alebo rôznobežky. Zo stredoškolskej stereometrie, okrem prípadov (1), (2), (3), ktoré sa realizujú vo vzájomných polohách dvojíc priamok, dvojíc rovín ako i priamky a roviny v trojrozmernom priestore, poznáme aj prípad (4a) – ide o prípad mimobežných priamok. S prípadom (4b), t. j. s prípadom čiastočnej rovnobežnosti sme sa však dosiaľ nestretli a nedokážeme ho spojiť so žiadnou názornou geometrickou predstavou. Nie je to náhoda. Platí totiž nasledujúce tvrdenie.

8.4.1. Tvrdenie. *Nech M, $N \subseteq V$ sú čiastočne rovnobežné lineárne variety. Potom $\dim M \geq 2$, $\dim N \geq 2$ a $\dim V \geq 4$.*

Dôkaz. Označme $S = \operatorname{Dir} M$, $T = \operatorname{Dir} N$. Potom $S \cap T$ je netriválny vlastný lineárny podpriestor každého zo zameraní S, T. Teda $\dim(S \cap T) \geq 1$, $\dim M = \dim S \geq 2$, $\dim N = \dim T \geq 2$ a taktiež

$$\dim(S \cap T) \leq \min(\dim S, \dim T) - 1.$$

S použitím vety 5.4.1 z toho vyplýva

$$\begin{aligned}\dim(S + T) &= \dim S + \dim T - \dim(S \cap T)\\ &\geq \dim S + \dim T - \min(\dim S, \dim T) + 1\\ &= \max(\dim S, \dim T) + 1 \geq 3.\end{aligned}$$

Keďže $M \cap N = \emptyset$, podľa tvrdenia 8.3.2 je $S + T$ vlastný lineárny podpriestor vo V. Preto

$$\dim V \geq \dim(S + T) + 1 \geq 4.$$

Na druhej strane v ľubovoľnom vektorovom priestore V dimenzie ≥ 4 nie je ťažké nájsť príklady čiastočne rovnobežných lineárnych variet. Presvedčte sa, že napr.

$$M = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2], \qquad N = \boldsymbol{e}_4 + [\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$$

sú čiastočne rovnobežné roviny v K^4. Skúste nájsť iné príklady.

8.5. Afinné zobrazenia

Nech U, V sú vektorové priestory nad tým istým poľom K. Hovoríme, že $f\colon V \to U$ je *afinné zobrazenie*, ak pre ľubovoľné body $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in V$ a skalár $s \in V$ platí

$$f(s\boldsymbol{p} + (1-s)\boldsymbol{q}) = sf(\boldsymbol{p}) + (1-s)f(\boldsymbol{q}).$$

Podobným spôsobom ako tvrdenie 8.2.1 možno dokázať, že afinné sú práve tie zobrazenia $f\colon V \to U$, ktoré zachovávajú všetky afinné kombinácie.

8.5.1. Tvrdenie. *Nech U, V sú vektorové priestory nad poľom K. Potom zobrazenie $f\colon V \to U$ je afinné práve vtedy, keď pre každé $n \in \mathbb{N}$, všetky body $\boldsymbol{p}_0, \dots, \boldsymbol{p}_n \in V$ a skaláry $t_0, \dots, t_n \in K$ také, že $t_0 + \ldots + t_n = 1$, platí*

$$f(t_0\boldsymbol{p}_0 + \ldots + t_n\boldsymbol{p}_n) = t_0 f(\boldsymbol{p}_0) + \ldots + t_n f(\boldsymbol{p}_n).$$

Posunutím alebo *transláciou* vektorového priestoru V o vektor $\boldsymbol{u} \in V$ nazývame zobrazenie $V \to V$ dané predpisom $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}$.

Zrejme kompozíciou posunutia o vektor $\boldsymbol{u} \in V$ a posunutia o vektor $\boldsymbol{v} \in V$ je posunutie o vektor $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$. Každé posunutie je bijektívne zobrazenie; inverzné zobrazenie k posunutiu o vektor $\boldsymbol{u}$ je posunutie o opačný vektor $-\boldsymbol{u}$.

Z nasledujúcej vety okrem iného vyplýva, že každé afinné zobrazenie možno dostať kompozíciou lineárneho zobrazenia a posunutia.

8.5.2. Veta. *Nech U, V sú vektorové priestory nad poľom K. Potom zobrazenie $f\colon V \to U$ je afinné práve vtedy, keď existuje vektor $\boldsymbol{u} \in U$ a lineárne zobrazenie $\varphi\colon V \to U$ také, že pre každé $\boldsymbol{x} \in V$ platí*

$$f(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{u}.$$

Dôkaz. Treba dokázať dve veci:

(1) Pre ľubovoľný vektor $\boldsymbol{u} \in V$ a lineárne zobrazenie $\varphi\colon V \to U$ je predpisom $f(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{u}$ dané afinné zobrazenie $f\colon V \to U$.

(2) Ak $f\colon V \to U$ je afinné zobrazenie, tak priradenie $\varphi(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{0})$ definuje lineárne zobrazenie $\varphi\colon V \to U$.

V jednom i druhom prípade možno zachovávanie dvojčlenných afinných resp. lineárnych kombinácií overiť priamymi výpočtami, ktoré prenechávame čitateľovi.

Zrejme vektor $\boldsymbol{u} \in U$ ako aj lineárne zobrazenie φ sú podmienkou vety určené jednoznačne. Zobrazenie $\varphi = f - f(\boldsymbol{0})$ nazývame *lineárnou časťou* a vektor $\boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{0})$ *absolútnym členom* afinného zobrazenia f. Píšeme tiež $f = \varphi + \boldsymbol{u}$.

Afinné zobrazenia sú tak zovšeobecnením funkcií $f\colon K \to K$ tvaru $f(x) = ax + b$, kde $a, b \in K$, ktoré (najmä v prípade $K = \mathbb{R}$) v matematickej analýze nazývame lineárnymi, na viacrozmerné vektorové priestory.

8.5.3. Dôsledok. *Nech U, V sú vektorové priestory nad poľom K. Potom*

(a) ľubovoľná translácia priestoru V je afinné zobrazenie;

(b) ľubovoľné lineárne zobrazenie $\varphi\colon V \to U$ je afinné;

(c) afinné zobrazenie $f\colon V \to U$ je lineárne práve vtedy, keď $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$.

8.5.4. Tvrdenie. *Nech U, V, W sú vektorové priestory nad poľom K a $g\colon W \to V$, $f\colon V \to U$ sú afinné zobrazenia. Potom aj ich kompozícia $f \circ g\colon W \to U$ je afinné zobrazenie.*

Dôkaz. Hoci priamym výpočtom možno overiť, že $f \circ g$ zachováva afinné kombinácie, podáme radšej dôkaz založený na vete 8.5.2, ktorý nám poskytne informáciu navyše.

Nech $f = \varphi + \boldsymbol{u}$, $g = \psi + \boldsymbol{v}$, kde $\varphi\colon V \to U$, $\psi\colon W \to V$ sú lineárne zobrazenia a $\boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{0})$, $\boldsymbol{v} = g(\boldsymbol{0})$. Potom pre $\boldsymbol{z} \in W$ s využitím linearity φ dostávame

$$(f \circ g)(\boldsymbol{z}) = \varphi(\psi(\boldsymbol{z}) + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{u} = (\varphi \circ \psi)(\boldsymbol{z}) + \varphi(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{u}.$$

Teda zobrazenie $f \circ g$ je zložené z lineárneho zobrazenia $\varphi \circ \psi$ a posunutia o vektor $\varphi(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{u}$.

Vzorec odvodený v našom dôkaze stojí za zaznamenanie. Pre lineárne zobrazenia $\psi\colon W \to V$, $\varphi\colon V \to U$ a vektory $\boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{u} \in U$ platí

$$(\varphi + \boldsymbol{u}) \circ (\psi + \boldsymbol{v}) = (\varphi \circ \psi) + (\varphi\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}).$$

8.5.5. Tvrdenie. *Nech U, V sú vektorové priestory nad poľom K, $f\colon V \to U$ je afinné zobrazenie a $M \subseteq V$, $N \subseteq U$ sú afinné podpriestory. Potom $f(M)$ je afinný podpriestor v U a $f^{-1}(N)$ je afinný podpriestor vo V alebo prázdna množina.*

Dôkaz. Nech $f = \varphi + \boldsymbol{u}$, kde φ je lineárna časť f a $\boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{0})$. Nech ďalej $M = \boldsymbol{p} + S$, $N = \boldsymbol{q} + T$, kde $\boldsymbol{p} \in M$, $\boldsymbol{q} \in N$ a $S \subseteq V$, $T \subseteq U$ sú lineárne podpriestory. Potrebný záver vyplýva z tvrdení 6.1.3, 8.2.2 a nasledujúcich rovností

$$f(M) = f(\boldsymbol{p}) + \varphi(S),$$
$$f^{-1}(N) = \begin{cases} \boldsymbol{z} + \varphi^{-1}(T), & \text{kde } \boldsymbol{z} \in V \text{ je ľubovoľné také, že } \varphi(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{u}, \\ \emptyset, & \text{ak neexistuje } \boldsymbol{z} \in V \text{ také, že } \varphi(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{u}, \end{cases}$$

ktorých dôkaz prenechávame čitateľovi.

Keďže každé posunutie je bijekcia, afinné zobrazenie $f = \varphi + \boldsymbol{u}\colon V \to U$ s lineárnou časťou φ je injektívne práve vtedy, keď φ je injektívne. Podobne, f je surjektívne práve vtedy, keď φ je surjektívne. Z toho už priamo vyplývajú ďalšie tri výsledky.

Prvý z nich zovšeobecňuje vetu 6.2.3 o dimenzii jadra a obrazu.

8.5.6. Veta. *Nech $f\colon V \to U$ je afinné zobrazenie, pričom V je konečnorozmerný vektorový priestor. Potom pre ľubovoľné $\boldsymbol{y} \in \operatorname{Im} f$ platí*

$$\dim V = \dim f^{-1}(\boldsymbol{y}) + \dim \operatorname{Im} f.$$

Afinnou transformáciou vektorového priestoru V nazývame ľubovoľné afinné zobrazenie $f\colon V \to V$. Aj pre afinné transformácie platí obdoba dôsledku 6.2.4.

8.5.7. Dôsledok. *Nech $f\colon V \to V$ je afinná transformácia konečnorozmerného vektorového priestoru V. Potom f je injektívna práve vtedy, keď je surjektívna.*

8.5.8. Tvrdenie. *Nech $f\colon V \to U$ je afinné zobrazenie s lineárnou časťou φ a $\boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{0})$. Potom f je bijektívne práve vtedy, keď φ je bijektívne. V tom prípade aj inverzné zobrazenie $f^{-1}\colon U \to V$ je afinné a platí*

$$f^{-1} = \varphi^{-1} - \varphi^{-1}(\boldsymbol{u}).$$

Teda f^{-1} je kompozíciou lineárneho zobrazenia φ^{-1} a posunutia o vektor $-\varphi^{-1}(\boldsymbol{u})$.

Nech U, V sú konečnorozmerné vektorové priestory a $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ sú bázy v U resp. vo V. *Rozšírenou maticou* afinného zobrazenia $f\colon V \to U$ s lineárnou časťou φ a absolútnym členom $\boldsymbol{u}$ vzhľadom na bázy $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$ nazývame blokovú maticu

$$(f)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \big((\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \,|\, (\boldsymbol{u})_{\boldsymbol{\alpha}}\big).$$

Ak teda $\dim U = m$, $\dim V = n$, $\boldsymbol{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ je matica lineárneho zobrazenia φ v bázach $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$, $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{u})_{\boldsymbol{\alpha}}$ sú súradnice vektora $\boldsymbol{u}$ v báze $\boldsymbol{\alpha}$, tak rozšírenou maticou afinného zobrazenia f v bázach $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$ je bloková matica

$$(f)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \big((\varphi\boldsymbol{v}_1)_{\boldsymbol{\alpha}}, \dots, (\varphi\boldsymbol{v}_n)_{\boldsymbol{\alpha}} \,|\, (\boldsymbol{u})_{\boldsymbol{\alpha}}\big) = (\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{a}) \in K^{m\times(n+1)}.$$

Súradnice bodu $\boldsymbol{x} \in V$ v báze $\boldsymbol{\beta}$ a súradnice jeho obrazu $f(\boldsymbol{x}) \in U$ v báze $\boldsymbol{\alpha}$ sú tak spojené rovnosťou

$$(f\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}} = (\varphi)_{\alpha,\boldsymbol{\beta}} \cdot (\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\beta}} + (\boldsymbol{u})_{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{a}.$$

Samozrejme, ak f je lineárne zobrazenie, t.j. ak $f = \varphi$ a $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, nemá význam rozširovať maticu $(\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ o nulový stĺpec.

Z tvrdenia 8.5.4, presnejšie z formuly odvodenej počas jeho dôkazu, a z tvrdenia 8.5.8 s použitím výsledkov paragrafov 6.4 a 7.2 vyplýva náš záverečný výsledok.

8.5.9. Tvrdenie. *Nech U, V, W sú konečnorozmerné vektorové priestory nad poľom K a $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ sú nejaké bázy priestorov U, V, resp. W.*

(a) *Ak $g\colon W \to V$, $f\colon V \to U$ sú afinné zobrazenia, ktoré majú v príslušných bázach rozšírené matice $(g)_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}} = (\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{b})$, $(f)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{a})$, tak ich kompozícia $f \circ g\colon W \to U$ má v bázach $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\alpha}$ rozšírenú maticu*

$$(f \circ g)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}} = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}).$$

(b) *Ak $f\colon V \to U$ je afinná bijekcia rozšírenou maticou $(f)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{a})$ v bázach $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$, tak k nej inverzné zobrazenie je afinná bijekcia $f^{-1}\colon U \to V$, ktorá má v bázach $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ rozšírenú maticu*

$$\left(f^{-1}\right)_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}} = \left(\boldsymbol{A}^{-1} \mid -\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{a}\right).$$