3. SÚSTAVY LINEÁRNYCH ROVNÍC

V tejto kapitole sa predbežne zoznámime so sústavami lineárnych rovníc nad všeobecným poľom K a naučíme sa ich riešiť. Využijeme pri tom zápis sústavy pomocou istej matice. Štruktúrne vlastnosti množiny všetkých riešení danej sústavy a ich dôsledky preštudujeme a využijeme až neskôr, keď sa bližšie oboznámime so štruktúrou vektorových priestorov.

3.1. Maticový zápis sústavy lineárnych rovníc

Pod *lineárnou rovnicou* o n neznámych $x_1, \dots, x_n$ nad poľom K rozumieme formulu tvaru

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

kde $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in K$, v premenných $x_1, x_2, \dots, x_n$. *Sústavou m lineárnych rovníc* o n neznámych $x_1, x_2, \dots, x_n$ nad poľom K rozumieme konjunkciu formúl tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 &+ a_{21}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 &+ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 &+ a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{aligned}$$

kde a_{ij}, b_i, pre $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, sú skaláry z poľa K. Maticu $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$ nazývame *maticou sústavy*, stĺpcový vektor $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_m)^T \in K^m$ nazývame jej *pravou stranou*. Konečne *rozšírenou maticou sústavy* nazývame blokovú maticu $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}) \in K^{m\times(n+1)}$. Sústava sa nazýva *homogénna*, ak $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$; v opačnom prípade sa nazýva *nehomogénna*.

Uvedenú sústavu možno stručne a úsporne zapísať v *maticovom tvare*

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

prípadne, ak ide o homogénnu sústavu, v tvare

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

Riešením sústavy $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ nazývame ľubovoľný vektor-stĺpec $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in K^n$, ktorého zložky vyhovujú každej z rovníc tejto sústavy, t. j. platí preň $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. *Vyriešiť sústavu* znamená nájsť *všetky* jej riešenia, t. j. popísať *množinu* všetkých jej riešení.

Dve sústavy $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$, kde $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in K^{m\times n}$, $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in K^{m\times 1}$, sa nazývajú *ekvivalentné*, ak majú rovnakú množinu riešení, t. j. ak pre všetky $\boldsymbol{x} \in K^n$ platí $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ práve vtedy, keď $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$.

Skôr než prikročíme k otázke riešenia sústav lineárnych rovníc, považujeme za potrebné upozorniť čitateľa na dve veci.

(a) Podčiarkujeme, že riešením sústavy rozumieme vždy *vektor* $\boldsymbol{x}$ a nie jeho zložky. Tak napríklad sústava

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 12 \\ 3x - 2y &= 5 \end{aligned}$$

nad poľom $\mathbb{R}$ má, ako ľahko nahliadneme, jediné riešenie $\binom{x}{y} = \binom{3}{2}$ a nie dve riešenia $x = 3$, $y = 2$. Keď si toto poriadne uvedomíme, môžeme (a samozrejme aj budeme) sa naďalej vyjadrovať obvyklým spôsobom. Budeme teda hovoriť, že sústava má *jediné* riešenie $x = 3$, $y = 2$.

(b) Všimnite si, že počet rovníc sústavy a počet neznámych sa nemusia rovnať. V obvyklom prípade, keď rovníc je rovnaký počet ako neznámych, očakávame, že sústava bude mať jediné riešenie. Keď je rovníc menej než neznámych, môžeme očakávať, že sústava bude mať viacero (prípadne i nekonečne mnoho) riešení. Naopak, keď je rovníc viac ako neznámych, môže sa stať, že sústava nebude mať nijaké riešenie. Napriek tomu, že tieto očakávania vyjadrujú niečo ako „prevládajúci trend“, ľahko možno nájsť príklady, keď sa nemusia splniť. Zatiaľ len poznamenajme, že homogénna sústava $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ má (bez ohľadu na počet neznámych a počet rovníc) vždy aspoň jedno riešenie – je ním nulový vektor $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Nie je dôležité, akými znakmi sú označené neznáme v sústave $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Na jej riešenie nemá nijaký vplyv, či si vektor neznámych označíme $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ alebo $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$ alebo nejako inak. To znamená, že celá informácia o tejto sústave, potrebná na nájdenie všetkých jej riešení, je obsiahnutá v rozšírenej matici sústavy $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$, prípadne, ak ide o homogénnu sústavu, len v matici sústavy $\boldsymbol{A}$. Preto i metóda riešenia sústav lineárnych rovníc, s ktorou sa teraz zoznámime, bude založená len na úprave tejto matice.

Stručne povedané, rozšírenú maticu $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$ sústavy $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ budeme upravovať tak, aby sme dostali nejakú inú maticu $(\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{c})$, ktorá zodpovedá novej sústave $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$, pričom táto spĺňa nasledujúce dve podmienky:

(a) Je ekvivalentná s pôvodnou sústavou $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, t. j. má rovnakú množinu riešení.
(b) Všetky jej riešenia možno priamo vyčítať z jej rozšírenej matice $(\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{c})$.

V takom prípade hovoríme, že sústava $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ je *vyriešená.*

3.2. Redukovaný stupňovitý tvar matice

Našou prvou úlohou teda bude vyjasniť si, ako by mala vyzerať matica $(\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{c})$, aby sme príslušnú sústavu $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ mohli považovať za vyriešenú. Za tým účelom teraz zavedieme niekoľko pojmov.

Hovoríme, že prvok a_{ij} matice $\boldsymbol{A} \in K^{m \times n}$ je *vedúci prvok* i*-teho* riadku matice $\boldsymbol{A}$, ak $a_{ij} \neq 0$, a $j = 1$ alebo $a_{il} = 0$ pre všetky $1 \leq l < j$. Inak povedané, vedúci prvok nenulového riadku je prvý nenulový prvok tohto riadku. Nulový riadok nemá vedúci prvok.

Hovoríme, že matica $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ je v *redukovanom stupňovitom tvare*, ak spĺňa nasledujúce štyri podmienky:

(a) Ak $\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{A}) \neq \boldsymbol{0}$ a $\boldsymbol{r}_k(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$, tak $i < k$;
t. j. každý nenulový riadok matice $\boldsymbol{A}$ leží nad každým jej nulovým riadkom.

(b) Ak a_{ij}, a_{kl} sú vedúce prvky i-teho resp. k-teho riadku a $i < k$, tak aj $j < l$;
t. j. vedúci prvok vyššieho riadku leží viac vľavo než vedúci prvok nižšieho riadku.
(c) Ak a_{ij} je vedúci prvok i-teho riadku, tak $a_{ij} = 1$;
t. j. vedúci prvok každého nenulového riadku je 1.
(d) Ak a_{ij} je vedúci prvok i-teho riadku, tak $a_{kj} = 0$ pre každé $k \neq i$;
t. j. v stĺpci, v ktorom sa nachádza vedúci prvok nejakého riadku, sú všetky ostatné prvky rovné 0.

Pokiaľ matica $\boldsymbol{A}$ spĺňa len podmienky (a), (b), hovoríme, že je v *stupňovitom tvare.* Používa sa tiež názov (redukovaný) *schodovitý tvar.*

Napríklad z uvedených matíc nad poľom $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ani jedna z matíc vľavo nie je v stupňovitom tvar; obe matice v strednom stĺpci sú v stupňovitom tvare, nie však v redukovanom stupňovitom tvare; konečne, obe matice vpravo sú v redukovanom stupňovitom tvare. (V každom jednotlivom prípade si podrobne premyslite prečo.)

Taktiež každá jednotková matica $\boldsymbol{I}_n$, ako aj všetky nulové matice $\mathbf{0}_{mn}$ sú v redukovanom stupňovitom tvare.

Uvedomme si teraz, akej sústave lineárnych rovníc zodpovedá rozšírená matica v redukovanom stupňovitom tvare. Napríklad

$$(\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{c}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

je matica v redukovanom stupňovitom tvare nad $\mathbb{R}$. Táto matica zodpovedá sústave

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - 2x_3 \qquad &= 3 \\ x_2 + 6x_3 \qquad &= 0 \\ x_4 &= 1 \end{aligned}$$

v neznámych x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Hneď vidíme, že táto sústava má nekonečne mnoho riešení. Každej voľbe *parametrov* $s, t \in \mathbb{R}$ totiž zodpovedá jedno riešenie

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 + 2s \\ x_2 &= \quad - 6s \\ x_3 &= \qquad s \\ x_4 &= 1 \\ x_5 &= \qquad\quad t. \end{aligned}$$

Asi sa zhodneme na tom, že preznačenie neznámych za parametre $x_3 = s$, $x_5 = t$ a ich presun na pravú stranu, je úprava natoľko bezprostredná, že sústavu prislúchajúcu k matici $(\boldsymbol{B} \,|\, \boldsymbol{c})$ už možno považovať za vyriešenú. Na napísanie jej riešenia nemusíme písať príslušnú sústavu, môžeme ho napísať priamo na základe matice $(\boldsymbol{B} \,|\, \boldsymbol{c})$.

Dohodneme sa teda, že sústavu lineárnych rovníc $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ nad poľom K budeme nazývať *vyriešenou sústavou*, ak jej rozšírená matica $(\boldsymbol{B} \,|\, \boldsymbol{c})$ je v redukovanom stupňovitom tvare. V prípade homogénnej sústavy sa, samozrejme, stačí obmedziť na maticu $\boldsymbol{B}$.

Teraz si predvedieme, ako možno k danej blokovej matici $(\boldsymbol{B} \,|\, \boldsymbol{c})$ v redukovanom stupňovitom tvare, nájsť všetky riešenia sústavy $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$.

Najprv si ujasníme, kedy je taká sústava *riešiteľná*, t. j. má aspoň jedno riešenie. Odpoveď na túto otázku je jednoduchá: Sústava $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ má riešenie práve vtedy, keď sa v matici $(\boldsymbol{B} \,|\, \boldsymbol{c})$ nenachádza riadok tvaru

$$(\underbrace{0, \dots, 0}_{n\text{-krát}} \,|\, 1).$$

Taký riadok totiž zodpovedá rovnici $0 = 1$, ktorá očividne nemá riešenie. To, že neprítomnosť takého riadku je i postačujúcou podmienkou riešiteľnosti sústavy, vyplýva z nasledujúceho postupu, ako toto riešenie nájsť.

Ak sa v j-tom stĺpci matice $\boldsymbol{B}$ nenachádza vedúci prvok žiadneho riadku, tak si neznámu x_j zvolíme za parameter; ak sa v j-tom stĺpci nachádza vedúci prvok nejakého riadku, tak neznámu x_j si vyjadríme pomocou parametrov tak, že stĺpce matice $\boldsymbol{B}$ prislúchajúce týmto parametrom „prehodíme s opačným znamienkom na druhú stranu“.

Presnejšiu formuláciu celého postupu vo všeobecnej podobe si odpustíme. Názornejšie bude osvetliť ho na ešte jednom príklade.

$$(\boldsymbol{B} \,|\, \boldsymbol{c}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2/5 & -2 \end{array}\right)$$

je reálna matica v redukovanom stupňovitom tvare. Vidíme, že sa v nej nenachádza riadok tvaru $(0, 0, 0, 0 \,|\, 1)$, teda sústava $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ by mala mať riešenie. Vedúce prvky riadkov matice $\boldsymbol{B}$ sa nachádzajú v stĺpcoch 1, 2 a 3. Za parametre si teda zvolíme neznáme x_4 a x_5. Riešením sústavy je každý vektor $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T \in \mathbb{R}$ tvaru

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 - \tfrac{2}{3}s + \tfrac{1}{2}t \\ x_2 &= 2 - \tfrac{3}{4}s \\ x_3 &= -2 + 4s + \tfrac{2}{5}t \\ x_4 &= s \\ x_5 &= \phantom{-2 + 4s + \tfrac{2}{5}}t, \end{aligned}$$

kde parametre $s, t \in \mathbb{R}$ môžu nadobúdať ľubovoľné hodnoty. Pre estétov ešte poznamenajme, že zlomkov pri parametroch sa možno jednoducho zbaviť. Je totiž jedno, či si parametrické premenné zvolíme v tvare $x_4 = s$, $x_5 = t$ alebo v tvare $x_4 = 12s$,

$x_5 = 10t$, kde $s, t \in \mathbb{R}$. Pri takejto voľbe parametrov dostaneme všetky riešenia sústavy v tvare bez zlomkov

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 - 8s + 5t \\ x_2 &= 2 - 9s \\ x_3 &= -2 + 36s + 4t \\ x_4 &= 12s \\ x_5 &= 10t. \end{aligned}$$

3.3. Elementárne riadkové a stĺpcové operácie (ERO a ESO)

Zatiaľ sme si ujasnili, na *aký tvar* treba upraviť rozšírenú maticu $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$ sústavy $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, aby sme získali s ňou ekvivalentnú *vyriešenú* sústavu $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$: rozšírená matica $(\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{c})$ novej sústavy musí byť v *redukovanom stupňovitom tvare.* Teraz si ukážeme, *ako* to možno urobiť. Maticu $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$ budeme na redukovaný stupňovitý tvar upravovať pomocou tzv. elementárnych riadkových operácií.

Elementárnou riadkovou operáciou, skrátene tiež ERO, na matici $\boldsymbol{A} \in K^{m \times n}$ rozumieme

I. výmenu dvoch riadkov matice $\boldsymbol{A}$;
II. vynásobenie niektorého riadku matice $\boldsymbol{A}$ *nenulovým* skalárom z poľa K;
III. pripočítanie skalárneho násobku niektorého riadku matice $\boldsymbol{A}$ k jej inému riadku.

Matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in K^{m \times n}$ sa nazývajú *riadkovo ekvivalentné*, označenie $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, ak jednu z nich možno upraviť na druhú konečným počtom elementárnych riadkových operácií.

Prenechávame čitateľovi, aby si sám sformuloval analogické pojmy *elementárnych stĺpcových operácií* (ESO) a *stĺpcovej ekvivalencie* matíc, označenie $\boldsymbol{A} \wr \boldsymbol{B}$. Ich význam vyjde najavo až v neskorších kapitolách.

Výmenou i-teho a k-teho riadku v matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{A}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{A}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_k(\boldsymbol{A}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m(\boldsymbol{A}) \end{pmatrix}$$

dostaneme maticu

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{A}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_k(\boldsymbol{A}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{A}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m(\boldsymbol{A}) \end{pmatrix}.$$

Opätovnou výmenou i-teho a k-teho riadku v tejto matici získame zasa maticu $\boldsymbol{A}$.

Vynásobením i-teho riadku matice $\boldsymbol{A}$ skalárom $c \neq 0$ dostaneme maticu

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{A}) \\ \vdots \\ c\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{A}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_k(\boldsymbol{A}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m(\boldsymbol{A}) \end{pmatrix}.$$

Vynásobením i-teho riadku tejto matice skalárom $c^{-1} \neq 0$ získame opäť maticu $\boldsymbol{A}$.

Konečne, pripočítaním c-násobku i-teho riadku matice $\boldsymbol{A}$ k jej k-temu riadku z nej dostaneme maticu

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{A}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{A}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_k(\boldsymbol{A}) + c\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{A}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m(\boldsymbol{A}) \end{pmatrix}.$$

Všimnite si, že i-ty riadok pri tom zostáva nezmenený. Maticu $\boldsymbol{A}$ z tejto matice získame pripočítaním $(-c)$-násobku jej i-teho riadku k jej k-temu riadku.

Ak $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ je sústava s rozšírenou maticou $(\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{b})$ a bloková matica $(\boldsymbol{A}' \,|\, \boldsymbol{b}')$ vznikne z $(\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{b})$ vykonaním jednej (nezáleží ktorej) ERO, tak sústava $\boldsymbol{A}' \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ je ekvivalentná s pôvodnou sústavou $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Elementárne riadkové operácie na matici $(\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{b})$ totiž zodpovedajú postupne zámene poradia dvoch rovníc sústavy, vynásobením niektorej rovnice nenulovým skalárom a pripočítaním nejakého násobku jednej rovnice k inej rovnici (presnejšie nahradením dojice rovníc $\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{x} = b_i$, $\boldsymbol{r}_k(\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{x} = b_k$ dvojicou rovníc $\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{x} = b_i$, $(\boldsymbol{r}_k(\boldsymbol{A}) + c\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{A})) \cdot \boldsymbol{x} = b_k + cb_i$). Z pred chvíľou vykonaných úvah vyplýva, že ide o ekvivalentné úpravy, ktorými sa množina riešení sústavy nezmení – od novej sústavy $\boldsymbol{A}' \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ sa možno vhodnou ERO vykonanou na jej rozšírenej matici opäť vrátiť k pôvodnej sústave $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

3.3.1. Tvrdenie. *Nech K je pole, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in K^{m\times n}$, $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in K^m$. Ak sú blokové matice $(\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{b})$, $(\boldsymbol{B} \,|\, \boldsymbol{c})$ riadkovo ekvivalentné, tak i sústavy lineárnych rovníc $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ sú ekvivalentné.*

Dôkaz. Podľa predpokladu existuje postupnosť blokových matíc $(\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{C}_0 \,|\, \boldsymbol{d}_0)$, $(\boldsymbol{C}_1 \,|\, \boldsymbol{d}_1), \dots, (\boldsymbol{C}_p \,|\, \boldsymbol{d}_p) = (\boldsymbol{B} \,|\, \boldsymbol{c})$ typu $m \times (n+1)$ takých, že pre každé $l < p$ matica $(\boldsymbol{C}_{l+1} \,|\, \boldsymbol{d}_{l+1})$ vznikne vykonaním jedinej ERO z matice $(\boldsymbol{C}_l \,|\, \boldsymbol{d}_l)$. Potom všetky sústavy $\boldsymbol{C}_l \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}_l$ majú tú istú množinu riešení, t. j. sú ekvivalentné.

3.3.2. Veta. *Každá matica nad poľom K je riadkovo ekvivalentná s nejakou maticou v redukovanom stupňovitom tvare.*

Poznámka. Možno dokonca dokázať, že každá matica nad K je riadkovo ekvivalentná s práve jednou maticou v redukovanom stupňovitom tvare. Inak povedané, spomínaný redukovaný stupňovitý tvar danej matice je jednoznačne určený.

Namiesto dôkazu uvedenej vety vo všeobecnej podobe sa radšej len na konkrétnych príkladoch naučíme, ako možno k danej matici $\boldsymbol{A}$ nájsť s ňou riadkovo ekvivalentnú maticu v redukovanom stupňovitom tvare. Náš prístup má navyše tú výhodu, že z radu možných postupov, medzi ktorými si možno pružne voliť podľa okolností, nám nesugeruje jedinú stratégiu, na jednu z ktorých by sme sa nevyhnutne museli obmedziť pri všeobecnom dôkaze. Ambicióznejší čitateľ v uvedených príkladoch ľahko i sám zahliadne myšlienku všeobecného dôkazu. Napokon, aby sme sa nebavili iba o maticiach, začneme zakaždým s nejakou sústavou lineárnych rovníc. Tým sa zároveň naučíme *riešiť* ľubovoľnú sústavu lineárnych rovníc nad daným poľom pomocou elementárnych riadkových operácií na jej rozšírenej matici, prípadne rozpoznať, že daná sústava nemá riešenie.

3.3.3. Príklad. Je daná sústava

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 \phantom{{}+4x_3} - x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 &= 2 \end{aligned}$$

troch rovníc o štyroch neznámych nad poľom $\mathbb{R}$. Jej rozšírená matica je

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Pri jej úprave na redukovaný stupňovitý tvar (podobne ako i v ďalších príkladoch) budeme vynechávať niektoré medzikroky a zaznamenáme len niektoré výsledky viacerých vykonaných ERO. Posledný riadok matice dáme na prvé miesto, potom jeho (-2)-násobok pripočítame k pôvodnému prvému riadku, ktorý posunieme na druhé miesto, a (-3)-násobok toho istého riadku pripočítame k pôvodnému druhému riadku, ktorý posunieme na tretie miesto. Dostaneme tak maticu

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -6 \end{array}\right).$$

Pripočítaním (-1)-násobku druhého riadku k tretiemu dostaneme maticu

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right).$$

Už z tohto tvaru vidíme, že sústava zodpovedajúca poslednej matici nemá riešenie – obsahuje totiž rovnicu $0 = -3$. Teda ani pôvodná sústava (hoci neznámych je v nej viac než rovníc) nemá riešenie. Z cvičných dôvodov však dokončíme úpravu na redukovaný stupňovitý tvar, ktorý dostaneme vynásobením tretieho riadku skalárom $-1/3$, pripočítaním (-2)-násobku resp. 3-násobku tohto nového riadku k prvému resp. druhému riadku a, konečne, vynásobením druhého riadku skalárom $1/5$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 12/5 & 6/5 & 0 \\ 0 & 1 & -8/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Čitateľ by si mal všimnúť, že po nastavení vedúceho prvku niektorého riadku na hodnotu 1 okamžite pristupujeme k nulovaniu zvyšných prvkov stĺpca, v ktorom leží tento vedúci prvok.

3.3.4. Príklad. Riešme sústavu

$$\begin{aligned} x + \quad 2\mathrm{i}y \qquad\qquad &= 5 + 4\mathrm{i} \\ (3-\mathrm{i})y + (6-2\mathrm{i})z &= 10 \\ 2x \qquad\qquad - \quad z &= 5 + 3\mathrm{i} \\ x + \quad y + \quad z &= 5 + 2\mathrm{i} \end{aligned}$$

štyroch rovníc o troch neznámych nad poľom $\mathbb{C}$. Jej rozšírená matica je

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2\mathrm{i} & 0 & 5+4\mathrm{i} \\ 0 & 3-\mathrm{i} & 6-2\mathrm{i} & 10 \\ 2 & 0 & -1 & 5+3\mathrm{i} \\ 1 & 1 & 1 & 5+2\mathrm{i} \end{array}\right).$$

Prehoďme jej posledný riadok na prvé miesto a zvyšné riadky posuňme o jedno miesto nadol. V takto získanej matici pripočítajme (-1)-násobok prvého riadku k druhému riadku a (-2)-násobok prvého riadku k štvrtému riadku. Konečne vynásobme tretí riadok skalárom $(3+\mathrm{i})/10$. Dostaneme maticu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5+2\mathrm{i} \\ 0 & -1+2\mathrm{i} & -1 & 2\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 2 & 3+\mathrm{i} \\ 0 & -2 & -3 & -5-\mathrm{i} \end{array}\right).$$

(-1)-násobok tretieho riadku pripočítame k prvému riadku, jeho $(1-2\mathrm{i})$-násobok k druhému a 2-násobok k štvrtému. Nakoniec výmenou druhého a tretieho riadku dostaneme maticu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2+\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 2 & 3+\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1-4\mathrm{i} & 5-3\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1 & 1+\mathrm{i} \end{array}\right).$$

Pripočítajme posledný riadok k prvému, (-2)-násobok posledného riadku k druhému a jeho $(-1+4\mathrm{i})$-násobok k tretiemu. Zostáva vymeniť tretí a štvrtý riadok – výsledná matica je už v redukovanom stupňovitom tvare

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3+2\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 0 & 1-\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1 & 1+\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vidíme, že pôvodná sústava (hoci obsahuje viac rovníc než neznámych) má jediné riešenie $x = 3+2\mathrm{i}$, $y = 1-\mathrm{i}$, $z = 1+\mathrm{i}$, teda presnejšie vektor $(3+2\mathrm{i}, 1-\mathrm{i}, 1+\mathrm{i})^T \in \mathbb{C}^3$.

3.3.5. Príklad. Uvažujme sústavu

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0\\ 2x_1 \phantom{{}+ 2x_2} + 4x_3 \phantom{{}+ 3x_4} &= 0\\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0\\ 3x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

štyroch rovníc o štyroch neznámych nad poľom $\mathbb{Z}_5$. Keďže ide o homogénnu sústavu (ktorej ľavá strana je nulový stĺpcový vektor, teda sa nemení pri žiadnej ERO), stačí upravovať jej (nerozšírenú) maticu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 4 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(-2)-násobok, t. j. 3-násobok prvého riadku pripočítame k druhému riadku a jeho (-1)-násobok, t. j. 4-násobok pripočítame k tretiemu riadku. Dostaneme tak maticu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(-1)-násobok, t. j. 4-násobok tretieho riadku pripočítame k prvému riadku a jeho (-3)-násobok, t. j. 2-násobok pripočítame k druhému riadku. Konečne výmenou druhého a tretieho riadku dostaneme maticu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tretí riadok odpočítame od prvého aj od štvrtého riadku. Ďalej ho vynásobíme skalárom $3^{-1} = 2$. Napokon jeho (-4)-násobok, t. j. priamo tento nový tretí riadok pripočítame k druhému riadku. Výsledná matica je už v redukovanom stupňovitom tvare

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Premennú x_4 si zvolíme za parameter. Všetky riešenia sústavy majú potom tvar $x_1 = t$, $x_2 = 2t$, $x_3 = 2t$, $x_4 = t$, kde $t \in \mathbb{Z}$. Vidíme teda, že pôvodná sústava (hoci počet jej rovníc je rovnaký ako počet neznámych) má viac než jedno riešenie; nie je ich však nekonečne veľa ale len 5. Práve toľko je totiž možných volieb parametra t, t. j. prvkov poľa $\mathbb{Z}_5$.

Zaznamenajme ešte jeden očakávaný dôsledok tvrdenia 3.3.1, vety 3.3.2 a spôsobu, ako napísať riešenie sústavy s (rozšírenou) maticou v redukovanom stupňovitom tvare, uvedeného v paragrafe 3.2.

3.3.6. Tvrdenie. *Nech $\boldsymbol{A} \in K^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in K^m$ a $m < n$, t. j. sústavy $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ obsahujú menej rovníc než neznámych. Potom*

(a) *homogénna sústava $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ má popri riešení $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$ aspoň jedno riešenie $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$;*

(b) *ak existuje aspoň jedno riešenie sústavy $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, tak táto sústava má viac než jedno riešenie.*

Dôkaz. (a) Upravme maticu sústavy $\boldsymbol{A}$ na redukovaný stupňovitý tvar $\boldsymbol{B}$. Uvedomme si, že matice $\boldsymbol{A}$ aj $\boldsymbol{B}$ majú m riadkov a n stĺpcov. Riadky matice $\boldsymbol{B}$ majú nanajvýš m vedúcich prvkov. Keďže $m < n$, aspoň v jednom stĺpci matice $\boldsymbol{B}$ neleží vedúci prvok žiadneho riadku. Nech je to napr. j-ty stĺpec. Potom voľbe parametra $x_j = t \in K$, $t \neq 0$ zodpovedá aspoň jedno nenulové riešenie sústavy $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

(b) prenechávame ako cvičenie čitateľovi.

3.4. Gaussova eliminačná metóda

Hlavne z historických dôvodov ešte stručne spomenieme tzv. *Gaussovu eliminačnú metódu* riešenia sústav lineárnych rovníc. Pri riešení touto metódou upravíme rozšírenú maticu sústavy len na stupňovitý (teda nie nevyhnutne redukovaný stupňovitý) tvar. Už z tohto tvaru možno ľahko spoznať, či sústava má nejaké riešenie (príslušná matica nesmie obsahovať riadok tvaru $(0,\dots,0\,|\,d)$, kde $0 \neq d \in K$). V tom prípade možno všetky riešenia sústavy získať voľbou parametrov (opäť si za ne volíme neznáme x_j také, že j-tom stĺpci sa nevyskytuje vedúci prvok žiadneho riadku) a spätným dosadzovaním, t. j. *elimináciou* neznámych pomocou parametrov.

3.4.1. Príklad. Predpokladajme, že rozšírenú maticu nejakej sústavy nad $\mathbb{R}$ sme už pomocou ERO upravili na stupňovitý tvar

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Táto matica zodpovedá sústave

$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 \qquad - \ \ x_5 + 4x_6 &= 1 \\ - 2x_4 + 5x_5 + 4x_6 &= 0 \\ 3x_5 + \ \ x_6 &= 4. \end{aligned}$$

Za parametre si zvolíme premenné x_1, x_3 a x_6. Spätným dosadzovaním postupne dostaneme všetky riešenia v parametrickom tvare

$$\begin{aligned} x_6 &= t \\ x_5 &= \tfrac{1}{3}(4 - x_6) = \tfrac{4}{3} - \tfrac{1}{3}t \\ x_4 &= \tfrac{1}{2}(5x_5 + 4x_6) = \tfrac{10}{3} - \tfrac{7}{6}t \\ x_3 &= s \\ x_2 &= \tfrac{1}{2}(1 - 3x_3 + x_5 - 4x_6) = \tfrac{7}{6} - \tfrac{3}{2}s - \tfrac{13}{6}t \\ x_1 &= r, \end{aligned}$$

kde $r, s, t \in \mathbb{R}$. Prípadne, po trochu „šikovnejšej" voľbe parametrov, v tvare $x_6 = 6t$, $x_5 = \frac{4}{3} - 2t$, $x_4 = \frac{10}{3} - 7t$, $x_3 = 2s$, $x_2 = \frac{7}{6} - 3s + 13t$, $x_1 = r$.

Pozorný čitateľ si iste všimol, že spätné dosadzovanie možno nahradiť ďalšou úpravou rozšírenej matice sústavy pomocou ERO na *redukovaný* stupňovitý tvar. Stačí totiž vynásobiť nenulové riadky prevrátenými hodnotami ich vedúcich prvkov a pripočítaním vhodných násobkov týchto riadkov vynulovať zvyšné nenulové prvky v stĺpcoch obsahujúcich vedúce prvky jednotlivých riadkov.

I tak však môže byť Gaussova eliminačná metóda v niektorých prípadoch užitočná – najmä keď nám nejde ani tak o explicitný tvar riešení, ako skôr o samotnú otázku riešiteľnosti sústavy, prípadne o počet parametrov, ktoré sa v nich vyskytujú. Všetko to možno totiž spoznať už na základe nejakej matice v stupňovitom tvare, riadkovo ekvivalentnej s pôvodnou rozšírenou maticou sústavy. V takom prípade si teda môžeme odpustiť nielen ďalšiu úpravu na redukovaný stupňovitý tvar, ale aj spätné dosadzovanie.