1. Afinní podprostory

1.1. Motivace. Uvažujme $\mathbb{R}^3$. Jeho všechny vektorové podprostory jsou počátek, přímky a roviny procházející počátkem a celé $\mathbb{R}^3$. Chceme-li v $\mathbb{R}^3$ dělat „geometrii“ potřebujeme i jiné body, přímky a roviny. Všechny tyto útvary budou zahrnuty v pojmu *afinní podprostor.*

1.2. Afinní podprostor vektorového prostoru. Nechť $\mathcal{U}$ je vektorový prostor nad polem $\mathbb{K}$. Afinní podprostor prostoru $\mathcal{U}$ je neprázdná množina $\mathcal{M}$ tvaru:

$$\mathcal{M} = A + \mathcal{V} = \{A + v, v \in \mathcal{V}\},$$

kde $A \in \mathcal{U}$ a $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ je nějaký vektorový podprostor.

Příklad. $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$. Každý bod v $\mathbb{R}^2$ je tvaru A+$\{\overrightarrow{0}\}$ a je tedy afinní podprostor.

Každá přímka $\mathcal{M}$ v $\mathbb{R}^2$ je tvaru:

$$x_1 = a_1 + tv_1$$

$$x_2 = a_2 + tv_2$$

tedy

$$(a_1, a_2)^T + [(v_1, v_2)]^T$$
$$A + \mathcal{V}$$

Příklad. $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$ neprázdná množina řešení soustavy $Ax = b$.

$\mathcal{R}(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n, Ax = b\}$ je afinní podprostor, neboť je tvaru

$$\mathcal{R}(A, b) = x_0 + \mathcal{R}(A, 0)$$

kde x_0 je nějaké řešení a

$$\mathcal{R}(A, 0) = \{y \in \mathbb{R}^n, Ay = 0\}$$

je vektorový podprostor.

Příklad. $\mathcal{U} = \mathbb{R}_2[x]$ $\mathcal{M} = \{p \in \mathbb{R}_2[x], p'(1) = 2\}$ je afinní podprostor, neboť

$$\mathcal{M} = \{x^2\mathcal{N} + \{q \in \mathbb{R}_2[x], q'(1) = 0\}$$

Věta. *Vektorový podprostor $\mathcal{V}$ v definici afinního podprostoru $\mathcal{M}$ je určen jednoznačně.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{M} = A_1 + \mathcal{V}_1 = A_2 + \mathcal{V}_2$, kde $A_1, A_2 \in \mathcal{U}$ a $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ jsou vektorové podprostory v $\mathcal{U}$. Potom existuje $w_2 \in \mathcal{V}_2$ tak, že $A_1 = A_2 + w_2$ Tedy $A_1 - A_2 = w_2 \in \mathcal{V}_2$ Nechť $v_1 \in \mathcal{V}_1$. Pak existuje $v_2 \in \mathcal{V}_2$ tak, že

$$A_1 + v_1 = A_2 + v_2$$

$$v_1 = (A_2 - A_1) + v_2 = \underbrace{-(A_1 - A_2)}_{\in \mathcal{V}_2} + \underbrace{v_2}_{\in \mathcal{V}_2} \in \mathcal{V}_2$$

Dostáváme $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2$ a analogicky $\mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{V}_1$. $\square$

Definice. $\mathcal{V}$ v definici $\mathcal{M}$ nazýváme *zaměření afinního podprostoru* $\mathcal{M}$, píšeme

$$Z(\mathcal{M}) = \mathcal{V}$$

dim $\mathcal{M}$ = dim $\mathcal{V}$

1.3. Afinní kombinace bodů. A, B $\in \mathcal{U}$ určují přímku

$$A + t(B - A) = (1 - t)A + tB$$

Lineární kombinace

$$sA + tB,\ t + s = 1$$

se nazývá *afinní kombinace bodů.*
Nechť $A_0, A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{U}$. Afiní kombinace bodů $A_0, A_1, \ldots, A_k$ je bod

$$\sum_{i=0}^{k} t_i A_i\ ,\ kde\ \sum_{i=0}^{k} t_i = 1$$

Tento bod lze pasát

$$(1-t_1-\cdots-t_k)A_0+t_1A_1+\cdots+t_kA_k = A_0+t_1(A_1-A_0)+t_2(A_2-A_0)+\cdots+t_k(A_k-A_0)$$

Věta. *Jestliže $\mathcal{M} \subset \mathcal{U}$ je afinní podprostor, pak s každými (k+1) body $A_0, A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{M}$ leží v $\mathcal{M}$ i jejich afinní kombinace.*

Důkaz. $\mathcal{M} = A + \mathcal{V}\ ,\ A_i = A + v_i$

$$\sum_{i=0}^{k} t_i(A + v_i) = (\sum_{i=0}^{k} t_i)A + \sum_{i=0}^{k} t_i v_i = A + \sum_{i=0}^{k} t_i v_i \in \mathcal{V}$$

neboť $\sum_{i=0}^{k} t_i = 1$. □

Obrácená věta. *Nechť $\mathcal{M}$ je neprázdná podmnožina ve vektorovém prostoru $\mathcal{U}$, kdes každými dvěma body leží i jejich afinní kombinace. Pak je $\mathcal{M}$ afinní podprostor.*

Důkaz. Nechť $A \in \mathcal{M}$. potom

$$\mathcal{M} = A + \{B - A\ ,\ B \in \mathcal{M}\}$$

Dokážeme, že $\mathcal{V} = \{B - A\ ,\ B \in \mathcal{M}\}$ je vektorový podprostor.
Nechť $B - A \in \mathcal{V}\ ,\ B \in \mathcal{M}$. Potom násobek tohoto vektoru

$$t(B - A) = (tB + (1 - t)A) - A \in \mathcal{V}$$

Nechť $B - A \in \mathcal{V}\ ,\ C - A \in \mathcal{V}\ ,\ B, C \in \mathcal{M}$. Potom součet těchto vektorů

$$(B - A) + (C - A) = (B + C - A) - A = \{\underbrace{2(\overbrace{\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C}^{\in\mathcal{M}})}_{\in\mathcal{M}} - A\} - A \in \mathcal{V}$$

□

Geometrická interpretace předchozích vět. Neprázdná množina $\mathcal{M}$ je afinní podprostor, právě když s každými dvěma body A, B, leží v $\mathcal{M}$ i přímka jimi určená.

1.4. Parametrický popis afinního podprostoru $\mathcal{M} \subset \mathcal{U}$ Nechť $\mathcal{M} = A + \mathcal{V}$ Nechť $v_1, v_2, \dots, v_k$ je báze vektorového podprostoru $\mathcal{V}$. Potom každý vektor $v \in \mathcal{V}$ lze psát jednoznačně ve tvaru

$$v = t_1 v_1 + t_2 v_2 + \cdots + t_k v_k$$

Tedy daždý bod $X \in \mathcal{M}$ lze psát jednoznačně ve tvaru

$$X = A + v = A + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \cdots + t_k v_k \quad (*)$$

k-tici $(t_1, t_2, \dots, t_k)^T$ nazýváme souřadnice bodu X v afinní bázi $(A, v_1, v_2, \dots, v_k)$ afinního podprostoru $\mathcal{M}$. Popis bodů afinního podprostoru ve tvaru $(*)$ se nazývá *parametrický popis*. Bod A se nazývá počátek souřadnic. Každý bod B $B \in \mathcal{M}$ může být počátkem souřadnic, neboť

$$\mathcal{M} = A + \mathcal{V} = B + \mathcal{V}$$

Příklad. p: $X = A + tv_1$ - přímka

Příklad. ρ: $X = A + tv_1 + t_2 v_2$ - rovina

1.5. Popis pomocí soustavy lineárních rovnic (implicitní popis) Nechť $\mathcal{U}$ máme nějakou bázi $(u_1, u_2, \dots, u_n) = \alpha$ se souřadnicemi $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$. Nechť A je matice r+n. Potom množinu bodů $X \in \mathcal{U}$ jejichž souřadnice splňují soustavu lineárních rovnic $Ax = b$, označme ji $\mathcal{R}(A, b)$, je, pokud je neprázdná, afinní podprostor v $\mathcal{U}$. Nechť $M \in \mathcal{U}$ má souřadnice z, které splňují rovnici $Az = b$. Nechť $\mathcal{R}(A, 0) = \{v \in \mathcal{U}, A(v)_\alpha = 0\}$. To je vektorový podprostor a platí

$$\mathcal{R}(A, b) = M + \mathcal{R}(A, 0)$$

Popis afinního podprostoru pomocí soustavy rovnic se nazývá někdy *implicitní popis*

Příklad. Rovnice $2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 4$ popisuje rovinu v $\mathbb{R}^3$. Soustava

$$2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 3$$

popisuje přímku v $\mathbb{R}^3$. Přesvědčíme se o tom tak, že soustavu vyřešíme. Řešení napsané pomocí parametrů dává parametrický popis afinního podprostoru.

Závěr. Soustava rovnic $Ax = b$ zadává afinní podprostor právě když $h(A) = h(A|b)$. Pokud je tato podmínka splněna, pak dimenze tohoto podprostoru je $n - h(A)$, kde n je počet neznámých. Použijí se věty o řešení soustav rovnic.

Věta. *Každý afinní podprostor $\mathcal{M}$ v $\mathcal{U}$ je zadán jako množina bodů, jejichž souřadnice $x_1, x_2, \dots, x_n$ v bázi $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ prostoru $\mathcal{U}$ splňují nějakou soustavu lineárních rovnic $Ax = b$.*

Důkaz. $\mathcal{M} = M + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \cdots + t_k v_k$, kde $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ je báze zaměření $\mathcal{V}$. Pro souřadnice bodů $X \in \mathcal{M}$ tedy platí

$$x = m + Ct,$$

kde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)^T$, C je matice souřadnic vektorů $v_1, v_2, \dots, v_k$, $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)^T$.
Algoritmus $Ex = Ct + m$

$$(E|C|m) \xrightarrow[\text{řádkové operace}]{\text{elementární}} \left(\frac{A_1|C_1|b_1}{A \mid 0 \mid b} \right)$$

Operace provádíme tak, aby C přešla do schodovitého tvaru, všechny řádky C_1 jsou nenulové.

$$Ex = Ct + m \quad <=> \quad \begin{aligned} A_1 x &= C_1 t + b_1 \\ Ax &= b \end{aligned}$$

Tedy souřadnice x každého bodu $X \in \mathcal{M}$ splňují rovnice $Ax = b$. Nechť y je řešením výše uvedené rovnice. Položme

$$C_1^{-1}(A_1 y - b_1) = t$$

Pro toto t jsou splněny obě rovnice vpravo. Tedy y jsou souřadnice bodu z $\mathcal{M}$. $\square$

1.6. Vzájemná poloha afinních podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$

(1) Jeden je podprostorem druhého
$\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$, pokud $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$ a $Z(\mathcal{M}) \subseteq Z(\mathcal{N})$
(2) Rovnoběžné
$\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$ a $Z(\mathcal{M}) \subseteq Z(\mathcal{N})$ nebo $Z(\mathcal{N}) \subseteq Z(\mathcal{M})$
(3) Různoběžné
$\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$ a neplatí ani $Z(\mathcal{M}) \subseteq Z(\mathcal{N})$ ani $Z(\mathcal{N}) \subseteq Z(\mathcal{M})$
(4) Mimoběžné
$\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$ a neplatí ani $Z(\mathcal{M}) \subseteq Z(\mathcal{N})$ ani $Z(\mathcal{N}) \subseteq Z(\mathcal{M})$

1.7. Operace s afinními podprostory $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$

(1) Průnik $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ je afinní podprostor, pokud je neprázdný, se zaměřením $Z(\mathcal{M}) \cap Z(\mathcal{N})$.
(2) Spojení $\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N}$ = nejmenší afinní podprostor obsahující afinní podprostory $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$. Pokud

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= M + \mathcal{V} \\ \mathcal{N} &= N + \mathcal{Z} \end{aligned}$$

pak

$$\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N} = M + \underbrace{[N - M] + \mathcal{V} + \mathcal{Z}}_{\text{vekt. podprostor}}$$

Používá se takto: rovina určená bodem a přímkou je spojením těchto dvou afinních podprostorů.

1.8. Úkoly, které je třeba umět řešit

- přechod od implicitního popisu k parametrickému a obráceně
- průnik afinních podprostorů
- spojení afinních podprostorů
- vzájemná poloha afinních podprostorů

- nalezení afinního podprostoru daných vlastností (např.: najít přímku p procházející danám bodem A, protínající danou přímku q a danou rovinu ρ, mimoběžnou s q.)

1.9. Afinní zobrazení mezi podprostory $\mathcal{M} \subset \mathcal{U}$ a $\mathcal{N} \subset \mathcal{V}$ je zobrazení $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ tvaru, že $\phi(M+u) = N+\varphi(u)$ kde $M \in \mathcal{M},\ u \in Z(\mathcal{M}),\ N \in \mathcal{N}$ a $\varphi : Z(\mathcal{M}) \to Z(\mathcal{N})$ je lineární.

Příklad. $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{N} = \mathbb{R}^k$. Zobrazení

$$\phi(x) = Ax + b$$

kde A je matice $k \times n$ a $b = (b_1, b_2, \dots, b_k)^T$, je afinní, neboť

$$\phi(0 + x) = b + \underbrace{Ax}_{\textit{lin. zobr.}}$$