4. Bilineární a kvadratické formy II

4.1. Jiný způsob diagonalizace kvadratické formy – úprava na čtverce. Nechť g je kvadratická forma na vektorovém prostoru $\mathcal{U}$. Nechť v souřadnicích báze $\alpha = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ má vyjádření:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + \dots.$$

Tento výraz upravíme na lineární kombinaci čtverců.

1. Pokud $a_{11} \neq 0$, potom můžeme úpravy provádět takto:

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, x_n) &= a_{11}\left(x_1^2 + \frac{2a_{12}}{a_{11}}x_1x_2 + \dots + \frac{2a_{1n}}{a_{11}}x_1x_n\right) + \text{ členy neobsahující } x_1 \\ &= a_{11}\left(x_1 + \frac{2a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{2a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 - 2\sum_{2\leq i<j\leq n}\frac{a_{1i}a_{1j}}{a_{11}}x_ix_j - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}x_2^2 - \frac{a_{13}^2}{a_{11}}x_3^2 + \dots \\ &= a_{11}\left(x_1 + \frac{2a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{2a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + h(x_2, x_3, \cdots, x_n) \end{aligned}$$

V nový souřadnicích

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \\ \bar{x}_i &= x_i \quad \text{pro } i = 2, 3, \dots, n \end{aligned}$$

je

$$g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = a_{11}\bar{x}_1^2 + h(\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$$

a kvadratickou formu h budeme upravovat stejně jako g.

2. Pokud $a_{11} = 0$, ale existsuje i tak, že $a_{ii} \neq 0$, postupujeme stejně jako v prvním kroku pouze místo x_1 píšeme x_i.

3. Pokud $a_{ii} = 0$ pro všechna i, a přitom $a_{jk} \neq 0$ pro nějaké j a k, provedeme substituci

$$\begin{aligned} \bar{x}_j &= x_j - x_k \\ \bar{x}_l &= x_l \quad \text{pro všechna } l \neq j. \end{aligned}$$

Potom

$$a_{jk}x_jx_k = a_{jk}(\bar{x}_j + \bar{x}_k)\bar{x}_k = a_{jk}\bar{x}_k^2 + a_{jk}\bar{x}_j\bar{x}_k$$

a v těchto nových souřadnicích můžeme pokračovat podle **2.**

Tímto postupem dostaneme nakonec nové souřadnice $y_1, y_2, \dots, y_n$, v nichž

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}y_i^2,$$

přitom

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Nové souřadnice jsou souřadnice v nějaké bázi $\beta = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$. Jak tuto bázi najdeme? Matice Q je maticí přechodu $(\mathrm{id})_{\beta,\alpha}$. Platí tedy:

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)\, Q.$$

Spočteme-li $Q^{-1} = (\mathrm{id})_{\alpha,\beta}$, můžeme určit bázi β ze vztahu

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)\, Q^{-1}.$$

Příklad. Diagonalizujte kvadratickou formu $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která má ve standardní bázi $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ vyjádření $g(x_1, x_3, x_3) = 4x_1x_2 + \ 8x_1x_3 \ + \ 12x_2x_3$.

Zaveďme nové souřadnice

$$y_1 = x_1 - x_2, \quad y_2 = x_2, \quad x_3 = \mathbf{y}_3.$$

Dosazením

$$x_1 = y_1 + y_2, \quad y_2 = x - 2, \quad y_3 = x_3$$

do g dostaneme

$$g(x_1, x_2, x_3) = 4(y_1 + y_2)y_2 + 8(y_1 + y_2)y_3 + 12y_2y_3 = 4y_2^2 + 4y_1y_2 + 20y_2y_3 + 8y_1y_3$$

$$= 4(y_2^2 + y_1y_2 + 5y_2y_3) + 8y_1y_3 = 4\left\{(y_2 + \frac{1}{2}y_1 + \frac{5}{2}y_3)^2 - \frac{1}{4}y_1^2 - \frac{25}{4}y_3^2 - \frac{5}{2}y_1y_3\right\} + 8\mathbf{y}_1\mathbf{y}_3$$

$$= 4(y_2 + \frac{1}{2}y_1 + \frac{5}{2}y_3)^2 - y_1^2 - 25y_3^2 - 10y_1y_3 + 8y_1y_3 = 4(y_2 + \frac{1}{2}y_1 + \frac{5}{2}y_3)^2 - (y_1^2 + 2y_1y_3) - 25y_3^2$$

$$= 4(y_2 + \frac{1}{2}y_1 + \frac{5}{2}y_3)^2 - \left\{(y_1 + y_3)^2 - y_3^2\right\} - 25y_3^2 = 4(y_2 + \frac{1}{2}y_1 + \frac{5}{2}y_3)^2 - (y_1 + y_3)^2 - 24y_3^2.$$

Definujme nové souřadnice:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2}y_1 + y_2 + \frac{5}{2}y_3 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 5x_3 \\ z_2 &= y_1 + y_3 = x_1 - x_2 + x_3 \\ z_3 &= y_3 = x_3. \end{aligned}$$

V nich $g(z_1, z_2, z_3) = 4z_1^2 - z_2^2 - 24z_3^2$. Protože

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

vypočteme novou bázi tvořenou vektory $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ pomocí inverzní matice takto:

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -3 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1/2, -1/2, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (-3, -2, 1)$.

4.2. Kvadratické formy nad reálnými čísly a signatura

Hodnost kvadratické formy, je hodnost její matice. Tato definice nezávisí na volbě báze, neboť transformační vztah mezi dvěma maticemi téže kvadritické formy je $B = P^TAP$, kde $P \neq 0$. Tedy $h(B) = h(A)$.

Věta. (Sylvestrův zákon setrvačnosti) *Každou kvadratickou formu na reálném vektorovém prostoru $\mathcal{U}$ dimenze n, lze vyjádřit v souřadnicích vhodné báze ve tvaru*

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2, \quad r \leq n,$$

přičemž počet koeficientů 1 *a* -1 *je nezávislý na volbě báze.*

Definice. *Signatura* kvadratické formy g je trojice čísel (s_+, s_-, s_0), kde s_+ je počet 1, s_- je počet -1, s_0 počet 0, ve vyjádření z předešlé věty. *Signatura symetrické matice* je signatura odpovídající kvadratické formy.

Důkaz. Již víme, že g lze převést na diagonální tvar

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2.$$

(1) Je-li $a_{ii} > 0$, provedeme substituci $y_i = \sqrt{a_{ii}} x_i$ a dostaneme $a_{ii} x_i^2 = y_i^2$.
(2) Je-li $a_{ii} < 0$, provedeme substituci $y_i = \sqrt{-a_{ii}} x_i$ a dostaneme

$$a_{ii} x_i^2 = -(\sqrt{-a_{ii}} x_i)^2 = -y_i^2.$$

Tím je prvá (jednodušší) část věty dokázána. Dokážeme druhou část.

Předpokládejme, že v souřadnicích báze $\alpha = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ je

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n) = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots,$$

zatímco v souřadnicích báze $\beta = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ má g vyjádření

$$g(z_1, z_2, \dots, z_n) = z_1^2 + \dots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \dots,$$

přičemž $p > s$. Položme $\mathcal{W} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p]$ a $\mathcal{V} = [\mathbf{v}_{s+1}, \dots, \mathbf{v}_n]$. Platí $g(\mathbf{w}) > 0$ pro všechna $\mathbf{w} \in \mathcal{W} - \{\mathbf{O}\}$ a $g(\mathbf{v}) \leq 0$ pro všechna $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Ukážeme, že průnik $\mathcal{W} \cap \mathcal{V}$ má kladnou dimenzi.

$$\dim \mathcal{W} \cap \mathcal{V} = \dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{V} - \dim \mathcal{W} + \mathcal{V} \geq p + (n - s) - n = p - s > 0.$$

Tedy pro nenulový vektor $\mathbf{u}$ z průniku $\mathcal{W} \cap \mathcal{V}$ platí

$$0 < g(\mathbf{u}) \leq 0,$$

spor. □

Poznámka. Mezi signaturou, hodností a dimenzí prostoru jsou tyto vztahy:

$$s_+ + s_- = h, \quad s_+ + s_- + s_0 = n.$$

Věta. *Dvě symetrické matice jsou kongruentní, právě když mají stejnou signaturu.*

Důkaz. Mají-li matice A a B stejnou signaturu, pak existují matice P a Q regulární tak, že $P^T A P = Q^T B Q$ je diagonální matice s čísly 1, -1 a 0 na diagonále. Odtud $B = (PQ^{-1})^T A P Q^{-1}$, tedy A a B jsou kongruentní. Důkaz obráceného tvrzení se dělá podobně. □

Definice. Nechť $\mathcal{U}$ je reálný vektorový prostor dimenze n, g kvadratická forma na $\mathcal{U}$. Řekneme, že g je:

(1) *positivně definitní*, jestliě pro všechny vektory $\mathbf{u} \in \mathcal{U} - \{\mathbf{O}\}$ platí $g(u) > 0.$, jestliě pro všechny vektory $\mathbf{u} in \mathcal{U}$ platí $g(u) \geq 0$.
(2) *negativně definitní*,jestliě pro všechny vektory $\mathbf{u} \in \mathcal{U} - \{\mathbf{O}\}$ platí $g(u) < 0$.
(3) *positivně semidefinitní*, jestliě pro všechny vektory $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ platí $g(u) \geq 0$.
(4) *negativně semidefinitní*, jestliě pro všechny vektory $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ platí $g(u) \leq 0$.
(5) *indefinitní*, existují-li vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{U}$ tak, že $g(\mathbf{u}) > 0$ a $g(\mathbf{v}) < 0$.

Věta. *Nechť $\mathcal{U}$ je reálný vektorový prostor dimenze n, g kvadratická forma na $\mathcal{U}$ se signaturou (s_+, s_-, s_0). Potom je g*

(1) *positivně definitní, právě když $s_+ = n$.*
(2) *negativně definitní, právě když $s_- = n$.*
(3) *positivně semidefinitní, právě když $s_- = 0$.*
(4) *negativně semidefinitní, právě když $s_+ = 0$.*
(5) *indefinitní, právě když $s_+ > 0$ a $s_- > 0$.*

Hlavní minor $|A_i|$ matice A tvaru $n \times n$ je determinant matice $i \times i$ vytvořené z prvních i řádků a z prvních i sloupců matice A.

Věta. (Sylvestrovo kritérium.) *Kvadratická forma je positivně definitní, právě když všechny hlavní minory její matice jsou kladné. Kvadratická forma je negativně definitní,právě když pro hlavní minory $|A_i|$ platí*

$$(-1)^i |A_i| > 0.$$

Cvičení. Diagonalizujte kvadratickou formu $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$g(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_3 + 7x_3^2.$$

Zjistěte její signaturu. Zjistíte, že je rovna $(3, 0, 0)$. Tedy g je pozitivně definitní.

Totéž zjistěte s pomocí Sylvestrova kriteria.