1. Bilineární a kvadratické formy I

1.1. Motivace

Budeme se zabývat zobrazeními $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tvaru

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Ta se nazývají kvadratické formy. K tomu budeme potřebovat bilineární formy $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

1.2. Bilineární formy

Definice. Nechť $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{Z}$ jsou vektorové prostory nad $\mathbb{K}$. Zobrazení $\varphi : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \to \mathcal{Z}$ se nazývá bilineární, jestliže pro každé pevné $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ je zobrazení

$$\varphi(\mathbf{u}, -) : \mathcal{V} \to \mathcal{Z} \text{ lineární,}$$

pro každé pevné $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ je zobrazení

$$\varphi(-, \mathbf{v}) : \mathcal{U} \to \mathcal{Z} \text{ lineární.}$$

Totéž jinak:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{u}, a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2) &= a\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) + b\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}_2) \\ \varphi(a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2, \mathbf{v}) &= a\varphi(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + b\varphi(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

Příklad. $\mathcal{U} = \mathcal{V} = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{Z} = Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} (y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 \end{pmatrix}$$

je bilineární zobrazení

$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}.\mathbf{y}^T$

$\varphi(\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}})\mathbf{y}^T = \mathbf{x}\mathbf{y}^T + \bar{\mathbf{x}}\mathbf{y}^T = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varphi(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y})$

My se budeme zabývat bilineárními formami, kde $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ a $\mathcal{Z} = \mathbb{K}$.

Definice. Bilineární zobrazení $f : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbb{K}$ se nazývá *bilineární forma* na $\mathcal{U}$.

Příklad. $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2$$

je bilineární forma na $\mathbb{R}^2$.

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + \bar{x}_1 \\ x_2 + \bar{x}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= 2(x_1 + \bar{x}_1)y_1 + (x_1 + \bar{x}_1)y_2 + 3(x_2 + \bar{x}_2)y_1 + 2(x_2 + \bar{x}_2)y_2 =$$

$$= 2x_1y_1 + 2\bar{x}_1y_1 + x_1y_2 + \bar{x}_1y_2 + 3x_2y_1 + 3\bar{x}_2y_1 + 2x_2y_2 + 2\bar{x}_2y_2 =$$

$= 2x_1y_1 + x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2\bar{x}_1y_1 + \bar{x}_1y_2 + 3\bar{x}_2y_1 + 2\bar{x}_2y_2 =$

$$= f\left(\left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array}\right)\right) + f\left(\left(\begin{array}{c} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array}\right)\right)$$

f lze vyjádřit také tímto způsobem:

$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1+x_1y_2+3x_2y_1+2x_2y_2 = (2x_1+3x_2, x_1+2x_2) \left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array}\right) = (x_1, x_2) \left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array}\right)$

Příklad. Bilineární forma na $\mathbb{R}^n$

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathcal{A} \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

Důkaz bilinearity

$f(a\mathbf{x} + b\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = (a\mathbf{x} + b\bar{\mathbf{x}})^T \mathcal{A}\mathbf{y} = (a\mathbf{x}^T + b\bar{\mathbf{x}}^T)\mathcal{A}\mathbf{y} = a\mathbf{x}^T\mathcal{A}\mathbf{y} + b\bar{\mathbf{x}}^T\mathcal{A}\mathbf{y} = af(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + bf(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y})$

Příklad. Bilineární forma na $\mathbb{R}_2[x]$

$$f(a_2x^2 + a_1x + a_0, b_2x^2 + b_1x + b_0) = a_2.b_1$$

je bilineární forma na $\mathbb{R}_2[x]$.

Příklad. Na $\mathbb{R}_2[x]$

$$f(a_2x^2 + a_1x + a_0, b_2x^2 + b_1x + b_0) = a_2.b_1 + a_1$$

NENÍ BILINEÁRNÍ FORMA!

$$f(a_2x^2 + a_1x + a_0, b_2x^2 + b_1x + b_0) = a_2.b_1.b_0$$

NENÍ BILINEÁRNÍ FORMA!

1.3. Matice bilineární formy v bázi α

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je báze prostoru $\mathcal{U}$. Matice bilineární formy $f : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbb{K}$ je matice $\mathcal{A}$ s

$$A_{ij} = f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j).$$

Příklad. Najděte matici bilineární formy $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 3x_2y_3 - 2x_1y_2$ ve standardní bázi $\epsilon = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

$$\mathcal{A} = \left(\begin{array}{ccc} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vyjádření bilineární formy v souřadnicích. Nechť $f : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbb{K}$ má v bázi α matici $\mathcal{A} = (f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j))$. Potom pro $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{u}_i$, $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} = y_j \mathbf{u}_j$ dostáváme

$f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{u}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j\mathbf{u}_j) = \sum_{j=1}^{n} f(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)y_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_i f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_j)y_j = (x_1,\dots,x_n)$
$(f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_j))_{i,j=1}^{n} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{x}^T\mathcal{A}\mathbf{y}$

1.4. Matice bilineární formy při změně báze

Báze $\alpha = (\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_n)$ určuje souřadnice $\mathbf{x},\mathbf{y} : \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{u}_i, \mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} y_j\mathbf{u}_j$. Báze $\beta = (\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$ určuje souřadnice $\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}} : \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i\mathbf{u}_i, \mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} \bar{y}_j\mathbf{u}_j$. Platí

$$f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{x}^T\mathcal{A}\mathbf{y} \text{ v bázi } \alpha$$

$$f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \bar{\mathbf{x}}^T\mathcal{B}\bar{\mathbf{y}} \text{ v bázi } \beta$$

Nechť $\mathcal{P} = (\mathrm{id})_{\alpha\beta}$ je matice přechodu od β k α. Potom

$$\mathbf{x} = (\mathbf{u})_\alpha = \mathcal{P}(\mathbf{u})_\beta = \mathcal{P}\bar{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{y} = (\mathbf{v})_\alpha = \mathcal{P}(\mathbf{v})_\beta = \mathcal{P}\bar{\mathbf{y}}$$

Platí

$$\bar{\mathbf{x}}^T\mathcal{B}\bar{\mathbf{y}} = f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{x}^T\mathcal{A}\mathbf{y}^T = (\mathcal{P}\bar{\mathbf{x}})^T\mathcal{A}(\mathcal{P}\mathbf{y}) = \bar{\mathbf{x}}^T\mathcal{P}^T\mathcal{A}\mathcal{P}\bar{\mathbf{y}}$$

Tedy

$$\bar{\mathbf{x}}^T\mathcal{B}\bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{x}}^T(\mathcal{P}^T\mathcal{A}\mathcal{P})\bar{\mathbf{y}}$$

Zvolme $\bar{\mathbf{x}}^T = (0,\dots,0,\underbrace{1}_{\text{i-té místo}},0,\dots,0)$, $\bar{\mathbf{y}}^T = (0,\dots,0,\underbrace{1}_{\text{j-té místo}},0,\dots,0)$. Potom

$$\begin{array}{rclll} \bar{\mathbf{x}}^T\mathcal{B}\bar{\mathbf{y}} & = & B_{ij} & & \text{člen v } i\text{-tém řádku a } j\text{-tém sloupci} \\ \bar{\mathbf{x}}^T(\mathcal{P}^T\mathcal{A}\mathcal{P})\bar{\mathbf{y}} & = & (\mathcal{P}^T\mathcal{A}\mathcal{P})_{ij} & & \text{člen v } i\text{-tém řádku a } j\text{-tém sloupci} \end{array}$$

Tedy

$$\mathcal{B} = \mathcal{P}^T\mathcal{A}\mathcal{P}.$$

Tuto úvahu budeme používat často, takže ještě jednou:

$$(\forall \bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}}) \qquad \bar{\mathbf{x}}^T\mathcal{B}\bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{x}}^T\mathcal{C}\bar{\mathbf{y}} \quad \text{implikuje} \quad \mathcal{B} = \mathcal{C}.$$

Závěr. Matice $\mathcal{B}$ bilineární formy v bázi β je

$$\boxed{\mathcal{B} = (\mathrm{id})_{\alpha,\beta}^T\mathcal{A}(\mathrm{id})_{\alpha,\beta}}$$

kde $\mathcal{A}$ je matice bilineární formy v bázi α.

Definice. Matice $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ se nazývají *konguentní*, jestliže existuje regulární matice $\mathcal{P}$ taková, že

$$\mathcal{B} = \mathcal{P}^T\mathcal{A}\mathcal{P}.$$

Domácí úloha. Dokažte, že relace kongruence je ekvivalence.

Připomenout. Matice $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ jsou podobné, jestliže

$$\mathcal{B} = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}.$$

Podobnost se uplatňuje při transformaci matic lineárních zobrazení $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$.

$$(\varphi)_{\beta,\beta} = (\mathrm{id})^{-1}_{\alpha,\beta}(\varphi)_{\alpha,\alpha}(\mathrm{id})_{\alpha,\beta}.$$

1.5. Symetrické a antisymetrické bilineární formy

Bilineární forma je *symetrická*, právě když

$$f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = f(\mathbf{v},\mathbf{u}).$$

Matice symetrické bilineární formy je symetrická, neboť

$$A_{ij} = f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_j) = f(\mathbf{u}_j,\mathbf{u}_i) = A_{ji}.$$

Antisymetrická matice $\qquad A_{ij} = -A_{ji}$
Jsme-li nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$, pak

$$A_{ii} = -A_{ii} \quad \to \quad 2A_{ii} = 0 \quad \to \quad A_{ii} = 0$$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ je antisymetrická matice.
Bilineární forma je *antisymetrická*, právě když

$$f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = -f(\mathbf{v},\mathbf{u}).$$

Matice antisymetrické bilineární formy je antisymetrická

$$A_{ij} = f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_j) = -f(\mathbf{u}_j,\mathbf{u}_i) = -A_{ji}.$$

Věta. *Každá bilineární forma je součten symetrické a antisymetrické bilineární formy.*

1.6. Algoritmus

Ke každé symetrické matici $\mathcal{A}$ nalezneme regulární matici $\mathcal{P}$ tak, že matice $\mathcal{D} = \mathcal{P}^T\mathcal{A}\mathcal{P}$ je diagonální.
Před důkazem: Elementární matice je matice, která realizuje řádkovou nebo sloupcovou elementární operaci:

(1) Výměna 1. a 2. řádku u matice $\mathcal{A}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \mathcal{A} = \mathcal{P}\mathcal{A} \text{ (řádky násobíme zleva)}, \mathcal{P} = \mathcal{P}^T.$$

Výměna 1. a 2. sloupce u matice $\mathcal{A}$

$$\mathcal{AP} = \mathcal{A}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Vynásobení 1. řádku číslem $a \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}\mathcal{A} = \mathcal{PA},\ \mathcal{P} = \mathcal{P}^T.$$

Vynásobení 1. sloupce číslem $a \neq 0$

$$\mathcal{AP} = \mathcal{A}\begin{pmatrix} a & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

(3) K 1. řádku přičteme a-násobek 2. řádku

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},\ \mathcal{A} \longmapsto \mathcal{PA}$$

K 1. sloupci přičteme a-násobek 2. sloupce

$$\mathcal{A} \longmapsto \mathcal{AP}^T = \mathcal{A}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ a & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Závěr. Máme-li matici $\mathcal{A}$ a na tu provádíme stejné řádkové a sloupcové operace, dostaneme matici

$$\mathcal{P}_k^T \dots \mathcal{P}_3^T \mathcal{P}_2^T \mathcal{P}_1^T A \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \mathcal{P}_3 \dots \mathcal{P}_k = \mathcal{P}^T \mathcal{AP},$$

kde $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 \dots \mathcal{P}_k$, $\mathcal{P}^T = (\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 \dots \mathcal{P}_k)^T = \mathcal{P}_k^T \dots \mathcal{P}_2^T \mathcal{P}_1^T$.

Algoritmus: Pro symetrickou matici $\mathcal{A}$ napíšeme

$$\left(\begin{array}{c|c}\mathcal{A} & \mathcal{E}\\ \hline \mathcal{E} & \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c}\mathcal{B} & \mathcal{P}^T\\ \hline \mathcal{P} & \end{array}\right)$$

(provádíme stejné řádkové a sloupcové operace).
Potom

$$\mathcal{B} = \mathcal{P}^T \mathcal{A} \mathcal{P}$$

Úpravy provádíme tak, aby $\mathcal{B}$ byla diagonální.

Příklad.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0\\ 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1\\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 10 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0\\ 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1\\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \sim$$

(2. řádek příčteme k 1., aby v poloze a_{11} bylo nenulové číslo) (totéž se sloupci)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 10 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0\\ 10 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1\\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 10 & 1 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 12 & 0 & 2 & 0\\ 10 & 12 & 0 & 0 & 0 & 2\\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \sim$$

(2. a 3. řádek vynásobíme dvěma)(totéž se sloupci)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & 20 & 1 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 24 & 0 & 2 & 0\\ 20 & 24 & 0 & 0 & 0 & 2\\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 2 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & 20 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 4 & -100 & -5 & -5 & 2\\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 2 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \end{array}\right) \sim$$

(od 2. řádku odečteme 1., od 3. řádku odečteme 5krát 1.)(totéž se sloupci)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 4 & -100 & -5 & -5 & 2\\ \hline 1 & -1 & -5 & & & \\ 1 & 1 & -5 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -96 & -6 & -4 & 2\\ \hline 1 & -1 & -5 & & & \\ 1 & 1 & -5 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \end{array}\right) \sim$$

(k 3. řádku přičteme 2. řádek)(totéž se sloupci)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -96 & -6 & -4 & 2 \\ \hline 1 & -1 & -6 & & & \\ 1 & 1 & -4 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \end{array}\right)$$

Platí

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & 2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.7. Diagonalizace bilineární formy

Věta. *Nechť $f : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbb{K}$ je symetrická bilineární forma. Potom existuje báze β prostoru $\mathcal{U}$ tak, že matice f v bázi β je diagonální. Tedy v souřadnicích báze β je*

$$f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = b_{11}\bar{x}_1\bar{y}_1 + b_{22}\bar{x}_2\bar{y}_2 + \ldots + b_{nn}\bar{x}_n\bar{y}_n.$$

Důkaz. Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je nějaká báze prostoru $\mathcal{U}$. Nechť matice f v bázi α je $\mathcal{A}$. Podle předchozího algoritmu najdeme matici $\mathcal{P}$ regulární tak, že

$$\mathcal{B} = \mathcal{P}^T \mathcal{A} \mathcal{P}$$

je diagonální. Zvolme bázi $\beta = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ tak, aby $\mathcal{P}$ byla maticí přechodu do β k α, tj.

$$(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)\mathcal{P}.$$

Potom matice bilineární formy f v bázi β je

$$\mathcal{P}^T \mathcal{A} \mathcal{P} = \mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

diagonální matice. $\square$

Příklad. Nechť $\mathcal{U} = \mathbb{R}^3$ a $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je bilineární forma

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 4x_1y_3 + 4x_3y_1 + 6x_2y_3 + 6x_3y_2.$$

Najděte bázi $\beta = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, v níž má f diagonální matici. Matice f ve standardní bázi $\alpha = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ je

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z předchozího příkladu víme, že

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T \mathcal{A} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tedy hledaná báze je

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\mathcal{P}$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Přesvědčme se, že
$f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 2.1.1 + 2.1.1 + 4.1.0 + 4.0.1 + 6.1.0 + 6.0.1 = 4$
$f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 2.1.1 + 2.1.(-1) + 4.1.0 + 4.0.(-1) + 6.1.0 + 6.0.1 = 2 - 2 = 0$
atd.

1.8. Kvadratické formy Nechť $\mathcal{U}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Zobrazení $g : \mathcal{U} \to \mathbb{K}$ se nazývá kvadratická forma, jestliže existuje symetrická bilineární forma $f : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbb{K}$ tak, že

$$g(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{u}).$$

Příklad. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + x_3^2 - 3x_2x_3$ je kvadratická forma, neboť vznikla z bilineární formy

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1 + x_3y_3 - \frac{3}{2}x_2y_3 - \frac{3}{2}x_3y_2.$$

Přesvědčme se a tom:
$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x_1x_1 + \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2x_1 + x_3x_3 - \frac{3}{2}x_2x_3 - \frac{3}{2}x_3x_2 = x_1^2 + x_1x_2 + x_3^2 - 3x_2x_3 = g(\mathbf{x})$.

Věta. *Nechť $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Symetrická bilineární forma je pak určena kvadratickou formou jednoznačně.*

Důkaz. Nechť $g(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{u})$, kde f je symetrická bilineární forma. Potom platí

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{4}(f(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}) - f(\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})).$$

Počítejme pravou stranu:
$f(\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}) - f(\mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{u}) - (f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - f(\mathbf{v}, \mathbf{u})) = 4f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ □

Matice kvadratické formy je matice příslušné bilineární formy. Vyjádření kvadratické formy v souřadnicích báze α je

$$g(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\mathbf{u})_\alpha^T \mathcal{A} (\mathbf{u})_\alpha = \mathbf{x}^T \mathcal{A} \mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \qquad (a_{ij} = a_{ji}).$$

Věta. *Ke každé kvadratické fomrě g existuje báze β, v jejíchž souřadnicích je*

$$g(\bar{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}\bar{x}_1^2.$$

Důkaz. Vezmeme příslušnou symetrickou bilineární formu f a pro tu najdeme vhodnou bázi β tak, aby

$$f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}\bar{x}_i\bar{y}_i.$$

□

Definice. Báze s výše uvedenou vlastností se nazývá *polární báze* kvadratické formy.

Příklad. Najděte polární bázi ke kvadratické formě

$$g(\mathbf{x}) = 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 12x_2x_3.$$

Matice příslušné bilineární formy je $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$. Použijme předchozí příklad a dostaneme, že polární báze je

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$