2. Lineární formy

2.1 Označení

Nechť $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$ jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{K}$ s bázemi $\alpha = (\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n})$ v $\mathcal{U}$ a $\beta = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k})$ ve $\mathcal{V}$. Nechť $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ je lineární zobrazení. Matice lineárního zobrazení φ v bazích α a β je matice tvaru k/n označovaná $(\varphi)_{\beta,\alpha}$, která je definovaná vztahem

$$(\varphi(\mathbf{u_1}), \varphi(\mathbf{u_2}), \ldots, \varphi(\mathbf{u_n})) = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k})(\varphi)_{\beta,\alpha}. \tag{1}$$

Tento vztah říká, že j-tý sloupec matice $(\varphi)_{\beta,\alpha}$ tvoří souřadnice vektoru $\varphi(\mathbf{u_j})$ v bázi β. Proto pro všechny vektory $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ platí

$$(\varphi(\mathbf{u}))_\beta = (\varphi)_{\beta,\alpha}(\mathbf{u})_\alpha. \tag{2}$$

Nechť $\mathcal{W}$ je další vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ s bazí $\gamma = (\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \ldots, \mathbf{w_p})$ a $\psi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ lineární zobrazení. Pro matice φ, ψ a $\psi \circ \varphi$ platí

$$(\psi \circ \varphi)_{\gamma,\alpha} = (\psi)_{\gamma,\beta}.(\varphi)_{\beta,\alpha}. \tag{3}$$

Nyní uvažujme případ, kdy $\mathcal{V} = \mathcal{U}$ a $\varphi = \mathrm{id}$. Potom matice identického zobrazení v bazích α a β je maticí přechodu, neboť platí

$$(\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}) = (\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n})(\mathrm{id})_{\beta,\alpha} \tag{4}$$

a

$$(\mathbf{u})_\beta = (\mathrm{id})_{\beta,\alpha}(\mathbf{u})_\alpha. \tag{5}$$

Nechť $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ a v $\mathcal{U}$ jsou dány dvě báze α a $\bar{\alpha}$, ve $\mathcal{V}$ jsou dány báze β a $\bar{\beta}$. Důsledkem formule (3) je

$$(\varphi)_{\bar{\beta},\bar{\alpha}} = (\mathrm{id})_{\bar{\beta},\beta}.(\varphi)_{\beta,\alpha}.(\mathrm{id})_{\alpha,\bar{\alpha}}$$

2.2 Duální prostor

Lineární forma na prostoru $\mathcal{U}$ je lineární zobrazení $\mathcal{U} \to \mathbb{K}$. Množina všech lineárních forem na $\mathcal{U}$ tvoří vektrorový prostor, který nazýváme duální vektorový prostor k prostoru $\mathcal{U}$ a značíme $\mathcal{U}^*$.

Příklady:

(1) $\mathcal{U} = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - 2x_2 + x_3 = (3, -2, 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Obecně $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je tvaru

$f(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Chápeme-li tedy $\mathbb{R}^3$ jako prostor sloupcových vektorů, je $(\mathbb{R}^3)^*$ vektorový prostor řádkových vektorů.

(2) Analogicky v $\mathbb{R}^n$ a v $\mathbb{C}^n$.

(3) $\mathcal{U} = \mathcal{C}[0, 1]$, $F(g) = g(\frac{1}{2})$ je lineární forma

(4) $\mathcal{U} = \mathcal{C}^1[0, 1]$, $F(g) = g'(\frac{1}{4})$ je lineární forma

(5) $\mathcal{U} = \mathcal{C}[0, 1]$, $F(g) = \int\limits_0^1 g(t)dt$ je lineární forma

(6) $\mathcal{U} = \mathbb{R}_2[x]$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
$f(ax^2 + bx + c) = 3b - c$ je lineární forma

(7) $\mathcal{U} = Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, stopa matice
$f(A) = \sum_{i=1}^n A_{i,i} = \text{trA}$ je lineární forma

(8) $\mathcal{U} = \mathbb{R}^3, \mathbb{K} = \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 2x_2 + 3$ a $g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2 + x_3$ nejsou lineární formy

Matice lineární formy $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ v bázi $\alpha = (\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u_n})$ prostoru $\mathcal{U}$ je

$$(f)_{(1)\alpha} = (f(\mathbf{u_1}), f(\mathbf{u_2}), \dots, f(\mathbf{u_n})).$$

Pro všechna $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ platí

$$f(\mathbf{u}) = (f(\mathbf{u_1}), f(\mathbf{u_2}), \dots, f(\mathbf{u_n})).(\mathbf{u})_\alpha.$$

Příklad:
$\mathcal{U} = \mathbb{R}_2[x]$, $f(ax^2 + bx + c) = p'(1)$. Matice f v bázi $\alpha = (1, x, x^2)$ je $(0, 1, 2)$. Platí

$$(ax^2 + bx + c)'_{x=2} = (0, 1, 2) \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = 2a + b.$$

2.3 Duální báze