1. Jordanův kanonický tvar

Obecně nelze pro zadaný lineární operátor $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ najít bázi α takovou, že $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ by byla diagonální.
Obecně však platí, že pro každý lineární operátor $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ nad komplexními čísly lze najít bázi α takovou, že $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ má tzv. *Jordanův kanonický tvar*. Co to je?

Jordanova buňka dimenze $k \times k$ tvaru

$$\mathcal{J}_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_1 & 1 \\ & & & & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Jestliže $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ má v nějaké bázi $\alpha = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ matici

$$(\varphi)_{\alpha.\alpha} = \mathcal{J}_k(\lambda),$$

pak platí:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{v}_1) &= \lambda_1 \mathbf{v}_1 \\ \varphi(\mathbf{v}_2) &= \mathbf{v}_1 + \lambda_1 \mathbf{v}_2 \\ \varphi(\mathbf{v}_3) &= \mathbf{v}_2 + \lambda_1 \mathbf{v}_3 \\ &\vdots \\ \varphi(\mathbf{v}_k) &= \mathbf{v}_{k-1} + \lambda_1 \mathbf{v}_k \end{aligned}$$

To lze přepsat také takto:

$$\begin{aligned} (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})\mathbf{v}_1 &= 0 \\ (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})\mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_1 \\ (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})\mathbf{v}_3 &= \mathbf{v}_2 \\ &\vdots \\ (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})\mathbf{v}_k &= \mathbf{v}_{k-1} \end{aligned}$$

Posloupnosti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots \mathbf{v}_n$ říkáme řetězec pro vlastní číslo λ operátoru φ, neboť

$$0 \xleftarrow{\varphi-\lambda\,\mathrm{id}} \mathbf{v}_1 \xleftarrow{\varphi-\lambda\,\mathrm{id}} \mathbf{v}_2 \xleftarrow{\varphi-\lambda\,\mathrm{id}} \mathbf{v}_3 \cdots \mathbf{v}_{k-1} \xleftarrow{\varphi-\lambda\,\mathrm{id}} \mathbf{v}_k.$$

Obráceně, najdeme-li řetězec pro vlastní číslo λ a operátor $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ délky $\dim\mathcal{U}$, pak vektory řetězce jsou lineárně nezávislé a v bázi jimi tvořené je

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \mathcal{J}_k(\lambda).$$

Důkaz lineární nezávislosti indukcí:
Nechť $0 \leftarrow \mathbf{v}_1 \leftarrow \mathbf{v}_2 \leftarrow \cdots \leftarrow \mathbf{v}_j$ jsou lineárně nezávislé. Nechť

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{j+1} a_i \mathbf{v}_i &= 0 \qquad\qquad /(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}) \\
\sum_{i=1}^{j+1} a_i (\varphi - \lambda\,\mathrm{id}) \mathbf{v}_i &= 0 \\
\sum_{i=2}^{j+1} a_i \mathbf{v}_{i-1} &= 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_2 = a_3 = \cdots = a_{j+1} = 0.
\end{aligned}$$

Z $\sum a_i \mathbf{v}_i = 0$ plyne $a_1 = 0$. Charakteristický polynom Jordanovy buňky $\mathcal{J}_k(\lambda_0)$ je $(\lambda_0 - \lambda)^k$.

Jordanův kanonický tvar
Matice je v Jordanově kanonickém tvaru, jestliže je blokově diagonální s bloky, které jsou Jordanovými buňkami

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_{k_1}(\lambda_1) & & & & \\ & \mathcal{J}_{k_2}(\lambda_2) & & & \\ & & \mathcal{J}_{k_3}(\lambda_3) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathcal{J}_{k_l}(\lambda_l) \end{pmatrix}$$

Věta o Jordanově kanonickém tvaru. *Nechť $\mathcal{U}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ dimenze n a nechť $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ je lineární operátor, jehož charakteristický polynom má n kořenů včetně násobnosti. Potom existuje báze α v $\mathcal{U}$ taková, že*

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha}$$

je matice v Jordanově kanonickém tvaru. Tento Jordanův kanonický tvar je určen jednoznačně až na pořadí buněk.

Věta o Jordanově kanonickém tvaru pro komplexní prostory. *Nechť $\mathcal{U}$ je komplexní vektorový prostor a $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ lineární operátor. Potom v $\mathcal{U}$ existuje báze α taková, že matice*

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha}$$

je v Jordanově kanonickém tvaru.

Maticová verze Jordanovy věty. *Každá komplexní matice je podobná matici v Jordanově kanonickém tvaru. Tato matice je určena jednoznačně až na pořadí Jordanových bloků.*

VÝPOČET JORDANOVA KANONICKÉHO TVARU

(1) ***Na úhlopříčce Jordanova kanonického tvaru jsou vlastní čísla lineárního operátoru - každé tolikrát, kolik činí jeho algebraické násobnost.***

Příklad 1a.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -4 & -9 & -6 \\ 6 & 15 & 10 \end{pmatrix} \qquad |\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}| = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

pro vlastní číslo $\lambda = 2$ je vlastní vektor $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3)^T$
pro vlastní číslo $\lambda = 1$ je vlastní vektor $\mathbf{v}_2 = (3, 6, -8)^T$
pro vlastní číslo $\lambda = 1$ je vlastní vektor $\mathbf{v}_3 = (1, -1, 1)^T$

$$[\varphi]_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \alpha = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$$

Příklad 1b.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad |\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}| = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

pro vlastní číslo $\lambda = 2$ je vlastní vektor $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)^T$
pro vlastní číslo $\lambda = 1$ je vlastní vektor $\mathbf{v}_2 = (1, -1, 0)^T$

(2) ***Jordanův kanonický tvar má tolik buněk, kolik existuje lineárně nezávislých vlastních vektorů.***

Jordanův kanonický tvar má dvě buňky, musí tedy být:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hledáme vektor $\mathbf{v}_3$ tak, aby v bázi $\alpha = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ bylo

$$[\varphi]_{\alpha,\alpha} = \mathcal{J}.$$

$$\mathcal{A}\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{v}_1 \qquad (\mathcal{A} - 2\mathcal{E})\mathbf{v}_1 = 0$$
$$\mathcal{A}\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 \qquad (\mathcal{A} - \mathcal{E})\mathbf{v}_2 = 0$$

Musí platit

$$\mathcal{A}\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3,$$

tedy

$$(\mathcal{A} - \mathcal{E})\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2. \qquad (\text{Řetězec } \mathbf{v}_3 \xrightarrow{\mathcal{A}-\mathcal{E}} \mathbf{v}_2 \xrightarrow{\mathcal{A}-\mathcal{E}} 0.)$$

Řešíme tuto rovnici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme $\mathbf{v}_3 = (1, p, -1)$. Matice $\mathcal{A}$ má Jordanův kanonický tvar $\mathcal{J}$ v bázi $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.

Příklad 2.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 13 & -28 & 3 \\ 4 & -8 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad |\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}| = (2-\lambda)^3$$

pro vlastní číslo $\lambda = 2$ je vlastní vektor $\mathbf{u}_1 = (2, 1, 2)^T$
Jordanův kanonický tvar má tedy jedinou buňku

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Najdeme $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ příslušné báze

$$\mathcal{A}\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 \qquad (\mathcal{A} - 2\mathcal{E})\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1$$
$$\mathcal{A}\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3 \qquad (\mathcal{A} - 2\mathcal{E})\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_2$$

Řešením těchto rovnic dostaneme

$$\mathbf{u}_2 = (5, 2, 1)^T \qquad \mathbf{u}_3 = (3, 1, 0)^T$$

„Hádáním“: Zvolíme $\mathbf{u}_3$ a spočítáme $\mathbf{u}_2 = (\mathcal{A} - 2\mathcal{E})\mathbf{u}_3$, pokud $\mathbf{u}_2 = 0$, změníme $\mathbf{u}_3$. Pokud $\mathbf{u}_2 \neq 0$, spočítáme $\mathbf{u}_1 = (\mathcal{A} - 2\mathcal{E})\mathbf{u}_2$. Pokud $\mathbf{u}_1 = 0$, změníme $\mathbf{u}_3$, pokud $\mathbf{u}_1 \neq 0$, jsme hotovi.

$$\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{A}-2\mathcal{E}} \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{A}-2\mathcal{E}} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Hledaná báze není určena jednoznačně: zde jsou dvě možné

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Příklad 3.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \qquad |\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}| = (2-\lambda)^3$$

pro vlastní číslo $\lambda = 2$ jsou vlastní vektory $\mathbf{u} = (2, -1, 0)^T$, $\mathbf{v} = (0, 0, 1)^T$.
Najdeme $\mathbf{w}$

$$(\mathcal{A} - 2\mathcal{E})\mathbf{w} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$$

$$\mathcal{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 2a \\ -1 & -2 & 0 & -a \\ -2 & -4 & 0 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 2a \\ -1 & -2 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 2a+b \end{array}\right)$$

Soustava má řešení $\Leftrightarrow 2a + b = 0$. Nechť $a = 1$, $b = -2$. Potom

$$\mathbf{w} = (-1, 1, 1)^T, \qquad \mathbf{u} - 2\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v} \text{ báze } \mathbb{R}^3.$$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longleftarrow & \mathbf{u} - 2\mathbf{v} & \longleftarrow & \mathbf{w} \\ 0 & \longleftarrow & \mathbf{v} & & \end{array} \qquad \text{řetězce pro } \lambda = 2$$

Jordanův kanonický tvar je

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{v bázi} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

„Hádáním“: Zvolme $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, spočítejme

$$\mathbf{u}_1 = (\mathcal{A} - 2\mathcal{E}) \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 4.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -13 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -30 & 12 & 9 & 5 \\ -12 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad |\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}| = (1+\lambda)^4$$

$$\mathcal{A} + \mathcal{E} = \begin{pmatrix} -12 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -30 & 12 & 10 & 5 \\ -12 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad r_4 = 6r_1 - 2r_3, \quad h = 2$$

pro vlastní číslo $\lambda = -1$ jsou vlastní vektory $\mathbf{u} = (1,0,3,0)^T$, $\mathbf{v} = (0,0,1,-2)^T$
Najdeme $\mathbf{w}$ $\quad (\mathcal{A} + \mathcal{E}) = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$. $\quad$ Soustava má řešení pro libovolná a ,b. Řešení

$$(\mathcal{A} + \mathcal{E})\mathbf{u}_1 = \mathbf{u} \qquad (\mathcal{A} + \mathcal{E})\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$$

$\mathbf{u}_1 = (0,-1,0,3)^T$, $\mathbf{v}_1 = (0,-2,0,5)^T$.

$$\mathcal{A} \approx \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ příslušná báze} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

„Hádáním:“

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ -30 \\ -12 \end{pmatrix} \longrightarrow 0$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} \longrightarrow 0$$

Příklad 5.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -3 \\ 6 & 9 & 4 & -8 \\ -3 & -4 & -1 & 4 \\ 9 & 9 & 6 & -8 \end{pmatrix} \qquad |\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}| = (1-\lambda)^4$$

pro vlastní číslo $\lambda = 1$ jsou vlastní vektory $\mathbf{u} = (0,1,0,1)^T$, $\mathbf{v} = (-2,0,3,0)^T$.
Najdeme $\mathbf{w}$ $\quad (\mathcal{A} - \mathcal{E})\mathbf{w} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$.
Soustava má řešení $\Leftrightarrow a + 6b = 0$

$$\left(\begin{array}{rrrr|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 6 & 8 & 4 & -8 & a \\ -3 & -4 & -2 & 4 & 3b \\ 9 & 9 & 6 & -9 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 0 & 2 & -2 & 10 & a+6b \\ 0 & -1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+6b \end{array}\right)$$

Zvolme $a = -6$, $b = 1$. Potom $-6\mathbf{u} + \mathbf{v} = (-2,-6,3,-6)^T$. Řešením soustavy $(\mathcal{A} - \mathcal{E})\mathbf{w} = (-2,-6,3,-6)^T$ dostaneme $\mathbf{w} = (\frac{1}{3}, -1, 0, 0)^T + a_1\mathbf{u} + b_1\mathbf{v}$.
Soustava $(\mathcal{A} - \mathcal{E})\mathbf{z} = \mathbf{w}$ má řešení $\Leftrightarrow a_1 + 6b_1 = 1$

$$\left(\begin{array}{rrrr|c} 3 & 3 & 2 & -3 & \frac{1}{3} - 2b_1 \\ 6 & 8 & 4 & -8 & -1 + a_1 \\ -3 & -4 & -2 & 4 & 3b_1 \\ 9 & 9 & 6 & -9 & a_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|c} 3 & 3 & 2 & -3 & \frac{1}{3} - 2b_1 \\ 6 & 8 & 4 & -8 & -1 + a_1 \\ -3 & -4 & -2 & 4 & 3b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 + a_1 + 6b_1 \end{array}\right)$$

Zvolme $a_1 = 1$, $b_1 = 0$. Potom $\mathbf{w} = \left(\frac{1}{3}, 0, 0, 1\right)^T$

$$\mathbf{z} = \left(0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^T \qquad [-6\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v}] = [\mathbf{u}, \mathbf{v}].$$

Tedy

$$\mathcal{A} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{v bázi} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

„Hádáním:“

$$\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ -18 \\ 9 \\ -18 \end{pmatrix} \longrightarrow 0$$

$\mathbf{u}_4$ vlastní vektor nazávislý na $\mathbf{u}_1$: $\mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

„Metodu hádání“ nelze použít, pokud má matice aspoň dvě různá vlastní čísla.

(3) ***Velikost největší buňky pro vlastní číslo*** λ ***je nejmenší*** k ***takové, že hodnost*** $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k = n$ $-$ ***algebraická násobnost*** λ.